

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei sistemi collisionali

Tesi di laurea

Presentata da:
Camilla Giusti

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Sessione II
Anno accademico 2019-2020

Sommario

La dinamica stellare è lo studio del moto di un numero molto elevato di stelle soggette all'azione della loro reciproca gravità. In particolare il tema di questo elaborato è la definizione e lo studio dei sistemi collisionali, sistemi cioè nei quali le tante interazioni gravitazionali hanno avuto il tempo di ridistribuire l'energia fra le stelle e rendere la dinamica indipendente dalle condizioni iniziali. Nel Capitolo 1 viene introdotto l'argomento, in particolare il concetto di tempo di rilassamento a due corpi, cioè il tempo caratteristico affinché un sistema raggiunga il regime collisionale. Nel Capitolo 2 si arriva alla formulazione matematica del tempo di rilassamento e, attraverso questo, alla definizione rigorosa di sistema collisionale. Nel Capitolo 3 il concetto di sistema collisionale viene usato per classificare alcuni dei sistemi astrofisici più conosciuti, quali le galassie, gli ammassi globulari e gli ammassi aperti. Poiché l'evoluzione dinamica di un ammasso globulare presenta delle fasi peculiari e di particolare interesse, l'attenzione sarà concentrata su quest'ultimo.

Indice

1	Introduzione	7
1.1	Urti geometrici	7
2	Tempo di rilassamento	9
2.1	Introduzione al problema	9
2.2	Accenni al problema dei due corpi	10
2.3	Definizione di sistema collisionale	11
2.4	Derivazione del tempo di rilassamento: approssimazione impulsiva	12
3	Applicazioni astrofisiche	15
3.1	Accenni al teorema del viriale	15
3.2	Tempo di rilassamento: esempi astrofisici	16
3.3	Dinamica degli ammassi globulari	18
3.3.1	Equipartizione dell'energia	18
3.3.2	Evaporazione gravitazionale ed ejection	19
3.3.3	Catastrofe gravotermica e core collapse	20
3.3.4	Stelle binarie e oscillazioni gravotermiche	20
3.4	Ammassi aperti e galassie	21
A	Blue Straggler Stars	23

Capitolo 1

Introduzione

Nello studio della dinamica dei sistemi astrofisici, come ad esempio sistemi di stelle che compongono un ammasso o una galassia, è lecito chiedersi se i principali risultati della termodinamica, spesso associati a sistemi più familiari come un gas di molecole in condizioni terrestri, possano risultare ugualmente validi. Una differenza sostanziale che si riscontra è che, mentre nei secondi si può talvolta avere un elevatissimo numero di urti fra le componenti (nell'atmosfera terrestre si hanno $\sim 10^{34}$ collisioni al secondo in ogni metro cubo), nei sistemi stellari generalmente le collisioni sono *estremamente rare*. Ciononostante, le orbite che percorrono le stelle non rimangono immutate nel tempo, ma possono subire modifiche a causa delle interazioni gravitazionali con le altre stelle. In questo modo seppur senza collisioni dirette, che sono quelle che permettono alle molecole in un gas di realizzare l'equipartizione dell'energia, anche nei sistemi stellari quest'ultima può essere raggiunta. Il tempo caratteristico per far sì che tale configurazione di equilibrio termodinamico sia realizzata è chiamato *tempo di rilassamento* ed è peculiare per ogni sistema. Ciò permette, come vedremo in seguito, di dare una definizione di sistema collisionale e di distinguere l'età dinamica dall'effettiva età cronologica. Vedremo inoltre come le galassie possano essere definite sistemi non collisionali, a differenza di sistemi come gli ammassi globulari o gli ammassi aperti.

1.1 Urti geometrici

Possiamo andare a stimare la probabilità che due stelle in una galassia si urtino facendo una semplice stima per ordini di grandezza.

Consideriamo una galassia perfettamente sferica di raggio R contenente N stelle di raggio R_* . Sempre lavorando per approssimazioni possiamo considerare lo spazio percorso da ogni stella come un volume cilindrico con un'area di base $\sigma = 4\pi R_*^2$ e una lunghezza λ , che va a rappresentare il libero cammino medio di ogni stella. Quest'ultimo parametro è proprio quello che si vuole ricavare, perché fornisce una stima di quanta strada dovrebbe fare una stella dentro una galassia per avere una buona probabilità di urtare contro un'altra stella. Possiamo dire che è avvenuto un urto geometrico solo quando la distanza tra i due centri di due stelle è minore di $2R_*$, per cui due stelle si incontreranno sicuramente quando i volumi cilindrici si saranno estesi abbastanza da occupare il volume dell'intera galassia. Questo si può tradurre facilmente nella condizione matematica

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \lambda(2R_*)^2\pi N \quad (1.1)$$

dove nel left-hand side è rappresentato il volume della galassia e nel right-hand side troviamo il volume di un singolo cilindro moltiplicato per N , cioè il numero totale di cilindri. Andando

a fare ovvie semplificazioni si arriva al risultato finale

$$\frac{\lambda}{R} = \frac{R^2}{3NR_*^2} \quad (1.2)$$

cioè, se per una galassia si assume $N \simeq 10^{11}$, $R \simeq 50$ kpc e $R_* \simeq 1R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ cm

$$\frac{\lambda}{R} \simeq 10^{12} \quad (1.3)$$

Questo risultato ci dice che una stella, prima di urtarne un'altra, dovrebbe percorrere mille miliardi di raggi galattici. Ovviamente bisogna considerare che le galassie non sono perfettamente sferiche, le stelle non hanno tutte le stesse dimensioni e non vanno tutte alla stessa velocità, ma il libero cammino medio finale risulta essere così grande che possiamo comunque concludere che in condizioni normali urti geometrici tra stelle non avvengono mai.

Prendiamo come esempio la nostra galassia, la Via Lattea. Essa contiene circa 10^{11} stelle visibili, la maggior parte delle quali si muove su orbite quasi circolari entro un disco sottile di raggio dell'ordine di 10 kpc e spesso 1 kpc. La velocità tipica delle stelle nel disco è di 200 km s^{-1} , mentre la loro tipica dispersione di velocità è di 40 km s^{-1} . Approssimando l'età della galassia a circa 10^{10} anni è facile arrivare alla conclusione che le stelle nel disco non hanno fatto più di una trentina di giri intorno al centro della galassia. Essendo questo percorso di diversi ordini di grandezza minore del libero cammino medio calcolato nella (1.3), possiamo concludere che la probabilità che avvengano collisioni è trascurabile e quindi considerare la galassia come un sistema di N punti materiali.

Ovviamente esistono condizioni di estrema eccezionalità, come nelle vicinanze di buchi neri supermassicci o durante una particolare fase evolutiva degli ammassi globulari, di cui parleremo in seguito, in cui urti tra stelle sono possibili.

Oltre alle stelle un'importante componente delle galassie è il gas, che nella Via Lattea arriva a pesare $10^{10} M_\odot$. Nonostante quindi sia una parte molto rilevante della struttura delle galassie, il gas ha un ruolo irrisorio nella loro dinamica.

Capitolo 2

Tempo di rilassamento

2.1 Introduzione al problema

Nonostante non siano possibili urti geometrici, le orbite delle stelle non rimangono immutate nel tempo, vengono invece perturbate dalla forza di gravità esercitata dalle altre stelle della galassia. Questo fenomeno è conosciuto con il nome di *urto gravitazionale*. È quindi ancora possibile parlare di sistemi collisionali e non collisionali attraverso il concetto di *tempo di rilassamento*, e di seguito vedremo come.

Bisogna inizialmente spiegare come agisce la forza di attrazione gravitazionale. A differenza della forza elettrostatica, che agisce a corto range e può essere attrattiva o repulsiva, la forza gravitazionale è molto diversa. Consideriamo un cono del tipo in **Figura 2.1**: anche se la forza gravitazionale tra ogni stella diminuisce con la distanza r come r^{-2} , se assumiamo che la densità delle stelle sia uniforme, il loro numero cresce come r^2 . La stella nel vertice sarà attratta quindi allo stesso modo da ogni porzione del cono per quanto lontana essa sia. Si può quindi considerare la forza gravitazionale come una forza a lungo range di natura unica. Consideriamo ora un sistema di N stelle di massa m_f (o di qualunque altro corpo di cui

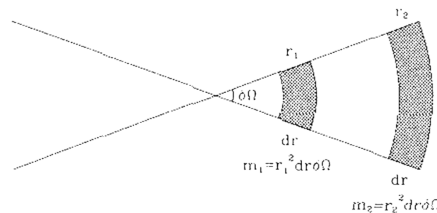


Figura 2.1: Porzione di spazio in cui la densità delle stelle è omogenea

trascuriamo le dimensioni), che chiameremo *stelle di campo*, e immaginiamo idealmente di “lanciare” contro questo sistema un’ulteriore stella di massa m_t , la *stella di test*, con una energia cinetica iniziale arbitraria. Per conoscere il suo comportamento dovremmo quindi tenere in considerazione che la sua orbita viene influenzata dalla presenza di tutte le altre stelle e andare a risolvere un problema degli N corpi, che però risulta non integrabile. Ad ogni modo si possono ottenere informazioni ugualmente interessanti semplicemente risolvendo N problemi a 2 corpi, piuttosto che un problema degli N corpi, cioè andando a considerare solo l’interazione tra la stella di test e una singola stella di campo, ignorando per ora la presenza di tutte le altre $N - 1$ stelle. È quindi opportuno presentare prima alcuni risultati del problema dei due corpi.

2.2 Accenni al problema dei due corpi

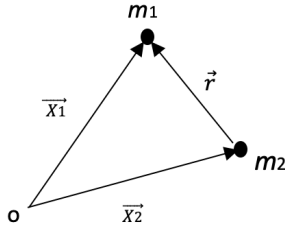


Figura 2.2: Sistema di riferimento S_0

Consideriamo due corpi di massa m_1 e m_2 e ci mettiamo in un arbitrario sistema di riferimento inerziale S_0 , in cui agisce solo la forza di attrazione gravitazionale fra i due corpi (vedi **Figura 2.2**).

Le leggi del moto che governano i due corpi sono

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\nabla_{\mathbf{x}_1} U \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\nabla_{\mathbf{x}_2} U \end{cases} \quad (2.1)$$

dove U indica l'energia potenziale gravitazionale fra i due corpi e $f(r) = \frac{dU}{dr}$ è la forza.

Si può dimostrare che $\nabla_{\mathbf{x}_1} U = -\nabla_{\mathbf{x}_2} U$ (III legge di Newton) e dunque

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\nabla_{\mathbf{x}_1} U \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = +\nabla_{\mathbf{x}_1} U \end{cases} \Rightarrow m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \{m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2\} = 0 \quad (2.2)$$

cioè si ha la *conservazione della quantità di moto*. Segue che la velocità del centro di massa è costante e dunque esso si muove di moto rettilineo uniforme.

Moltiplicando scalarmente le due equazioni del moto in (2.1) rispettivamente per $\dot{\mathbf{x}}_1$ e $\dot{\mathbf{x}}_2$ e considerando nuovamente la III legge di Newton, si perviene ad un altro importante risultato del problema dei due corpi, la *conservazione dell'energia meccanica*

$$\frac{m_1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_1\|^2 + \frac{m_2}{2} \|\dot{\mathbf{x}}_2\|^2 + U(r) = E_0 \text{ (costante)} \quad (2.3)$$

Come vedremo nella trattazione del tempo di rilassamento, sarà necessario porsi nel sistema di riferimento di uno dei due corpi e studiare quella che è chiamata *orbita relativa*. Matematicamente ciò si realizza andando a ricavare l'accelerazione relativa fra i due corpi, cioè

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\frac{f(r)}{m_1} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 = +\frac{f(r)}{m_2} \frac{\mathbf{r}}{r} \end{cases} \Rightarrow \mu(\ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2) = -f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.4)$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la massa ridotta. Seppur simile alla II legge di Newton, l'equazione del moto dell'orbita relativa non descrive la dinamica di un sistema inerziale, in quanto presuppone l'esistenza di un corpo fittizio di massa μ su cui però agisce una forza gravitazionale, $f(r)$, non proporzionale alla massa stessa. Tale sistema di riferimento mantiene però delle importanti proprietà, come ad esempio la conservazione dell'energia meccanica dell'orbita relativa

$$E_r = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + U \quad (2.5)$$

e l'*omotetia* fra le orbite del sistema di riferimento dell'orbita relativa e quelle del sistema del centro di massa, cioè la loro forma è la stessa e le dimensioni scalano proporzionalmente ai rapporti fra le masse

$$\mathbf{x}'_1 = \frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{x}'_2 = -\frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \quad (2.6)$$

dove le coordinate accentate fanno riferimento al sistema del centro di massa.

Dalla conservazione dell'energia dell'orbita relativa, si può porre l'energia iniziale (quando il corpo in moto giunge dall'infinito) uguale a quella finale (quando il corpo torna all'infinito)

dopo aver interagito con quello in quiete) e, tenuto conto che l'energia potenziale a distanza infinita è nulla ($U \propto 1/r$), si ottiene

$$\begin{cases} E_{r,\text{iniziale}} = \frac{\mu}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 + U(\infty) = \frac{\mu}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_i\|^2 \\ E_{r,\text{finale}} = \frac{\mu}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_f\|^2 + U(\infty) = \frac{\mu}{2} \|\dot{\mathbf{r}}_f\|^2 \end{cases} \Rightarrow \|\dot{\mathbf{r}}_i\| = \|\dot{\mathbf{r}}_f\| \quad (2.7)$$

2.3 Definizione di sistema collisionale

Se ci mettiamo nel sistema di riferimento della stella di campo, cioè consideriamo l'orbita relativa, la configurazione che abbiamo è quella rappresentata in **Figura 2.3**

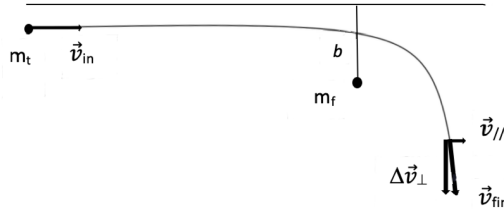


Figura 2.3: Rappresentazione dell'orbita relativa nel problema dei due corpi

dove

- b indica il *parametro di impatto*, cioè la distanza minima se i due corpi non interagissero, ed è collegato con il momento angolare dalla relazione

$$L_{cm} = \mu b \|\mathbf{v}_{in}\| \quad (2.8)$$

- \mathbf{v}_{in} e \mathbf{v}_{fin} sono la velocità iniziale e finale della stella di test, cioè la velocità che questa ha quando si trova a distanza infinita dalla stella di campo e quella che ha quando ritorna a distanza infinita dopo l'interazione. Si è dimostrato che sono uguali in modulo.

Come si può vedere in figura **Figura 2.3**, durante l'interazione la velocità della stella di test, che inizialmente aveva solo una componente orizzontale, acquisisce anche una componente verticale, cioè si può dire in senso lato che l'orbita viene "riscaldata" nella direzione verticale. Quando la somma dei riscaldamenti perpendicolari di ciascuno degli N problemi a due corpi diventa uguale all'energia cinetica iniziale della stella di test, allora si può dire che è trascorso un tempo di rilassamento a due corpi, che verrà indicato nella successiva trattazione come t_2b . Il tempo di rilassamento è quindi un tempo caratteristico che ci permette di dire se un sistema è collisionale o non collisionale:

- un sistema si dice *collisionale* se la sua età è molto maggiore del suo tempo di rilassamento a due corpi. Ovviamente questo non riguarda gli urti geometrici, ma l'effetto cumulativo dato da tutti gli urti gravitazionali a grande distanza.
- di contro, un sistema si dice *non collisionale* quando la sua età è molto minore del suo tempo di rilassamento a due corpi, cioè le orbite delle stelle non sono ancora state perturbate in modo rilevante.

Ovviamente la distinzione non è netta: il passaggio da sistema non collisionale a collisionale avviene in modo lento ma continuo.

2.4 Derivazione del tempo di rilassamento: approssimazione impulsiva

La relazione vettoriale di partenza, che deriva dall'analisi del problema dei due corpi, è la seguente

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{cm} + \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}_{rel} \quad (2.9)$$

dove \mathbf{v}_{cm} è la velocità del centro di massa e \mathbf{v}_{rel} è la velocità relativa

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{cm} = \frac{m_t \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{v}_f}{m_t + m_f} \\ \mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f \end{cases} \quad (2.10)$$

Andando a considerare la variazione di velocità della stella di prova $\Delta \mathbf{v}_t$, la relazione diventa la seguente

$$\Delta \mathbf{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v}_{rel} \quad (2.11)$$

dove abbiamo già tenuto in considerazione che la velocità del centro di massa, muovendosi esso di moto rettilineo uniforme, non cambia durante l'interazione, cioè $\Delta \mathbf{v}_{cm} = 0$.

Ciò che interessa per risolvere il problema è però solamente la componente perpendicolare (rispetto alla direzione di \mathbf{v}_{in}), che dall'equazione precedente risulta essere semplicemente

$$(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp = \frac{\mu}{m_t} (\Delta \mathbf{v}_{rel})_\perp \quad (2.12)$$

Andiamo ora a modificare questa relazione utilizzando una approssimazione introdotta da Born, chiamata *approssimazione impulsiva*. Sappiamo dalla seconda legge della dinamica che una forza \mathbf{F} che agisce per un certo tempo Δt provoca una variazione dell'impulso

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t \quad \rightarrow \quad (\Delta \mathbf{p})_\perp = \mathbf{F}_\perp \Delta t \quad (2.13)$$

Per quanto riguarda il nostro problema abbiamo che

$$(\Delta \mathbf{p})_\perp = \mu (\Delta \mathbf{v}_{rel})_\perp = \mathbf{F}_\perp \Delta t \quad (2.14)$$

L'approssimazione consiste nel

- considerare il modulo della forza \mathbf{F}_\perp costante e uguale alla forza attrattiva tra le due stelle alla distanza b

$$F = \frac{G m_f m_t}{b^2} \quad (2.15)$$

- considerare come tempo caratteristico il tempo che occorre ad un segnale per percorrere avanti e indietro la distanza b alla velocità \mathbf{v}_{rel} , invece di considerare un tempo di interazione infinito

$$\Delta t = \frac{2b}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} \quad (2.16)$$

In questo modo si ha un'espressione della componente perpendicolare dell'impulso

$$\mu \|(\Delta \mathbf{v}_{rel})_\perp\| \sim \frac{2G m_t m_f}{b \|\mathbf{v}_{rel}\|} \quad (2.17)$$

Questa formula realizza il primo termine esatto della serie asintotica che si avrebbe espandendo il risultato ottenuto dalla trattazione rigorosa senza approssimazione ed è tanto più

corretta quanto più il parametro di impatto (e dunque il momento angolare) è grande. Infatti i termini successivi dell'espansione sarebbero infinitesimi di ordine superiore di $\frac{1}{b}$. Sostituendo infine nella (2.12) ed elevando al quadrato si ottiene

$$\|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}_{rel}\|^2} \quad (2.18)$$

in cui vediamo subito che non è presente m_t , il cui valore quindi non ha nessuna rilevanza nel calcolo.

Facciamo ora un'ulteriore assunzione, cioè che le stelle di campo siano descritte da una funzione di distribuzione del tipo

$$f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) \quad (2.19)$$

in cui n_f , che rappresenta il numero di stelle di campo per unità di volume, va a determinare una parte spaziale costante della distribuzione (*distribuzione uniforme nello spazio*) e la parte della velocità dipende solo dalla norma di \mathbf{v}_f (*distribuzione isotropa nelle velocità*).

Andiamo ora a determinare il numero di incontri che la stella di test fa in un tempo Δt .

Per farlo è possibile usare la funzione di distribuzione sopra descritta per calcolare il numero di stelle di campo n con una certa velocità \mathbf{v}_f

$$n = n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3 \mathbf{v}_f \quad (2.20)$$

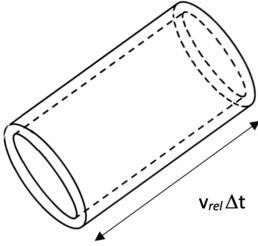


Figura 2.4: Rappresentazione del guscio cilindrico

to b è necessario moltiplicare n , che è riferito all'unità di volume, per il volume del guscio cilindrico appena descritto:

$$\mathcal{N} = 2\pi b db \Delta t \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3 \mathbf{v}_f \quad (2.21)$$

L'energia cinetica associata alla direzione perpendicolare della velocità e trasferita in un singolo urto è data da

$$(\Delta T)_{sing} = \frac{1}{2} m_t \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 \quad (2.22)$$

dove $\|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2$ è già stato determinato precedentemente tramite l'approssimazione impulsiva. Si può ora calcolare l'energia cinetica "perpendicolare" totale scambiata $(\Delta T)_\perp$ moltiplicando il risultato precedente in (2.22) per la quantità \mathcal{N} già calcolata. Andando a integrare quadridimensionalmente il risultato ottenuto si ha

$$\frac{(\Delta T)_\perp}{\Delta t} = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \frac{4\pi G^2 m_t m_f^2}{b \|\mathbf{v}_{rel}\|} n_f g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3 \mathbf{v}_f db = \int_0^\infty \frac{4\pi G^2 m_t m_f^2 n_f}{b} db \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3 \mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|} \quad (2.23)$$

L'integrando dell'integrale sullo spazio delle velocità rappresenta il potenziale di una distribuzione a simmetria sferica calcolato nel punto dello spazio delle velocità \mathbf{v}_t e per questo è una quantità che dipende solo dalla norma di \mathbf{v}_t , che denominiamo $\Psi(\|\mathbf{v}_t\|)$.

L'integrale in db invece, cioè

$$\int_0^\infty \frac{db}{b} \quad (2.24)$$

ha due divergenze:

- **divergenza infrarossa:** si ha per $b \rightarrow \infty$ ed è dovuta ai tanti urti con grande momento angolare e può essere risolta andando a sostituire all'estremo superiore dell'integrale la dimensione caratteristica R del sistema che stiamo considerando.
- **divergenza ultravioletta:** si ha per $b \rightarrow 0$ e compare solo a causa dell'approssimazione impulsiva. Infatti attraverso la trattazione rigorosa si otterrebbe il seguente integrando

$$\frac{db}{b} \rightarrow \frac{bdb}{b^2 + b_0^2} \quad (2.25)$$

dove b_0 rappresenta il parametro di impatto corrispondente ad una deviazione di $\frac{\pi}{2}$ della stella di test nel sistema di riferimento dell'orbita relativa, per cui vale che

$$\forall v \exists b_0 : \frac{v^2}{2} = \frac{G(m_t + m_f)}{b_0} \quad (2.26)$$

Se vogliamo invece rimanere nell'ambito dell'approssimazione impulsiva basta sostituire b_0 all'estremo inferiore.

L'integrale in (2.24) diventa dunque $\ln\Lambda = \ln\left(\frac{R}{b_0}\right)$, chiamato *logaritmo di Coulomb* e tipicamente compreso fra 10 e 20.

Il fatto che si abbia una reale divergenza per $b \rightarrow \infty$ e non per $b \rightarrow 0$, che abbiamo visto essere solo una conseguenza dell'approssimazione impulsiva, suggerisce che le interazioni a grande momento angolare, seppur deboli, sono dominanti rispetto a quelle a piccolo momento angolare.

Considerando il limite per tempi molto piccoli ($\Delta t \rightarrow 0$), il risultato finale che si ottiene è

$$\frac{dT_\perp}{dt} = 4\pi G^2 m_t m_f^2 n_f \Psi(\|\mathbf{v}_t\|) \ln\Lambda \quad (2.27)$$

Dalla definizione iniziale data per il tempo di rilassamento, cioè il tempo caratteristico trascorso quando la somma dei riscaldamenti perpendicolari raggiunge lo stesso valore dell'energia cinetica iniziale con cui la stella di test è stata lanciata dentro il sistema, possiamo imporre

$$\frac{dT_\perp}{dt} \times t_2 b = \frac{m_t}{2} \|\mathbf{v}_t\|^2 \quad (2.28)$$

il che, avendo già ricavato tutti i termini tranne il tempo di rilassamento, porta al risultato finale

$$t_2 b = \frac{\|\mathbf{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln\Lambda \Psi} \quad (2.29)$$

Si può notare che, essendo $m_f \cdot n_f$ la densità ρ_f del sistema

$$t_2 b \propto 1/\rho_f \quad (2.30)$$

Capitolo 3

Applicazioni astrofisiche

Andiamo ora a vedere come il tempo di rilassamento a due corpi ci permette di determinare la natura collisionale o meno dei vari sistemi astrofisici. Lo studio della dinamica dei sistemi stellari collisionali coinvolge però necessariamente un altro importante concetto, il *teorema del viriale*.

3.1 Accenni al teorema del viriale

Il teorema del viriale è un insieme infinito di identità tensoriali che derivano dall'equazione di Boltzmann non collisionale. La versione scalare del teorema del viriale, che vale per un *sistema autogravitante all'equilibrio*, è la seguente

$$2T = -U \tag{3.1}$$

dove T rappresenta l'energia cinetica del sistema e U la sua energia potenziale.

Poiché

$$0 < 2T = -U \quad \rightarrow \quad U < 0 \quad \rightarrow \quad -U = |U| \quad \rightarrow \quad 2T = |U|$$

Costruiamo un grafico che lega $|U|$ e T come rappresentato in **Figura 3.1**, detto *piano viriale*. Poiché, chiamando E l'energia totale del sistema, vale che

$$E = T + U = T - |U| \quad \rightarrow \quad T = |U| \text{ quando } E = 0$$

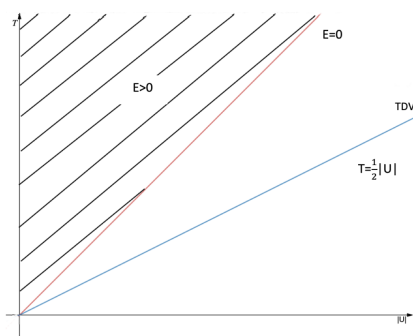


Figura 3.1: Rappresentazione del piano viriale

allora $E = 0$ rappresenta la bisettrice del grafico, dove si trovano tutti i sistemi autogravitanti con energia nulla. Per valori di energia generici invece si hanno rette parallele alla bisettrice.

La retta descritta dalla formula $T = \frac{1}{2}|U|$, cioè una retta con coefficiente angolare $\frac{1}{2}$, rappresenta proprio il teorema del viriale. I sistemi autogravitanti all'equilibrio si trovano solo su questa retta. Si nota quindi come un sistema con $E \geq 0$ non può essere virializzato (tranne nel caso limite in cui $T = |U| = 0$). Un sistema che inizialmente non si trova sulla retta del teorema del viriale, quindi non è in equilibrio, evolve verso una configurazione di equilibrio stabile; un sistema che si trova su questa retta invece può rimanere

stabile o evolvere, poiché non tutte le configurazioni di equilibrio sono stabili.

Consideriamo l'evoluzione di un sistema autogravitante in equilibrio che inizialmente si trova nella posizione 1, come mostrato in **Figura 3.2**:

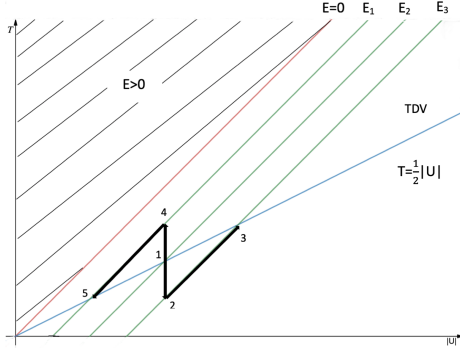


Figura 3.2: Descrizione dell'evoluzione di un sistema autogravitante all'equilibrio nel piano viriale

- il sistema, se viene raffreddato, può raggiungere per esempio la posizione 2, che si trova su una retta con energia $E_3 < E_2$. Se il sistema ritorna all'equilibrio può solo raggiungere la posizione 3 poiché, dovendo valere la conservazione dell'energia, per tornare sulla retta del teorema del viriale si può spostare solo lungo la retta di energia E_3 . Quindi alla fine del processo si trova ad avere una temperatura *maggiore* di quella iniziale (cioè un'energia cinetica maggiore), pur avendo *perso* energia.
- al contrario invece il sistema, se viene riscaldato, può raggiungere per esempio la posizione 4, che si trova su una retta con energia $E_1 > E_2$. Se il sistema ritorna all'equilibrio può solo raggiungere la posizione 5. Quindi alla fine del processo si trova ad avere una temperatura *minore* di quella iniziale (cioè un'energia cinetica minore), pur avendo *guadagnato* energia.

Questo comportamento apparentemente controintuitivo dei sistemi autogravitanti deriva dalla proprietà di questi ultimi di possedere un *calore specifico negativo*.

3.2 Tempo di rilassamento: esempi astrofisici

Vediamo ora come sia possibile esprimere il tempo di rilassamento in una forma più semplice, in modo da poterla applicare ai sistemi astrofisici più noti.

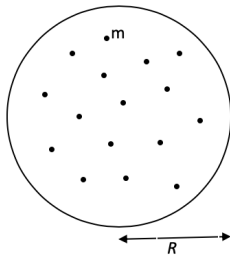


Figura 3.3: Sistema sferico contenente N stelle di massa m

Consideriamo un sistema sferico autogravitante all'equilibrio di raggio R con N stelle di massa $m = m_t = m_f$. Possiamo fare le seguenti assunzioni

$$\begin{cases} 2T = M\sigma^2 \\ U = -\frac{GM^2}{R} \end{cases} \quad (3.2)$$

con σ dispersione di velocità delle stelle. Usando il teorema del viriale per sistemi autogravitanti, possiamo ricavare un'espressione per σ

$$2T = -U \quad \rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{GM}{R} \quad (3.3)$$

Vogliamo che la nostra stella di prova non sia altro che una tra le stelle del sistema e le attribuiamo proprietà medie, cioè possiamo scrivere che $\|\mathbf{v}_t\| \sim \sigma$.

Andiamo a considerare l'integrale sullo spazio delle velocità della formula (2.23). Si può dimostrare facilmente che quando \mathbf{v}_t è grande, cioè quando è possibile fare l'approssimazione

$$\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \rightarrow \|\mathbf{v}_t\| \quad (3.4)$$

si può concludere che

$$\Psi(\|\mathbf{v}_t\|) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3\mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|} \sim \frac{1}{\|\mathbf{v}_t\|} \quad \text{per } \|\mathbf{v}_t\| \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

dove si è tenuto in considerazione che

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3\mathbf{v}_f = 1 \quad (3.6)$$

Quindi, sostituendo nella formula del tempo di rilassamento e ricordando che $\|\mathbf{v}_t\| \sim \sigma$, si ha

$$t_2b = \frac{\sigma^3 R^3}{6G^2 m^2 N \ln \Lambda} \quad (3.7)$$

Andiamo a misurare il tempo di rilassamento in unità del *tempo di attraversamento* $t_{cross} = \frac{2R}{\sigma}$, cioè il tempo caratteristico impiegato da una stella per attraversare la galassia

$$\begin{aligned} \frac{t_2b}{t_{cross}} &= \frac{\sigma^4 R^2}{12G^2 m^2 N \ln \Lambda} \frac{N}{N} = [mN = M] \\ &= \frac{N \sigma^4 R^2}{12 \ln \Lambda G^2 M^2} = [\sigma^2 = \frac{GM}{R}] = \frac{N}{12 \ln \Lambda} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ricordando la (2.26) e considerando nel nostro caso $v^2 = \|\mathbf{v}_t\|^2 \sim \sigma$ si ha

$$v^2 \sim \frac{G(m_t + m_f)}{b_0} \simeq \frac{2Gm}{b_0} \rightarrow \sigma^2 \simeq \frac{2Gm}{b_0} \frac{N}{N} = \frac{2GM}{Nb_0} \quad (3.9)$$

$$\rightarrow \sigma^2 \simeq \frac{2GM}{Nb_0} \frac{R}{R} = \frac{2\sigma^2 R}{N b_0} \rightarrow \Lambda = \frac{R}{b_0} \sim N \quad (3.10)$$

Quindi per un sistema autogravitante vale che

$$\frac{t_2b}{t_{cross}} \simeq \frac{N}{12 \ln N} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} \quad (3.11)$$

Facciamo alcuni esempi:

- **galassia:**

$$\begin{cases} N \simeq 10^{11} \text{ stelle} \\ t_{cross} \simeq 10^8 \text{ yr} \end{cases} \quad (3.12)$$

$\rightarrow t_2b \simeq 10^{16} \text{ yr} \simeq 10^6 t_{universo}$.

Le galassie quindi sono sistemi dinamicamente giovani e *non collisionali*, in quanto le orbite delle stelle non hanno avuto il tempo di essere perturbate in modo significativo dall'interazione gravitazionale con altre stelle.

- **ammasso globulare**

$$\begin{cases} N \simeq 10^6 \text{ stelle} \\ t_{cross} \simeq 10^6 \text{ yr} \end{cases} \quad (3.13)$$

$\rightarrow t_2b \simeq 10^9 \text{ yr}$.

L'età degli ammassi globulari è di solito dell'ordine dei dieci miliardi di anni, quindi in generale si possono considerare sistemi *debolmente collisionali*.

- **ammasso aperto**

$$\begin{cases} N \simeq 1000 \text{ stelle} \\ t_{cross} \simeq 10^6 \text{ yr} \end{cases} \quad (3.14)$$

→ $t_2 b \simeq 10^7 \text{ yr}$.

Il tempo di rilassamento è molto minore dell'età dell'universo, anch'essi possono quindi essere considerati *sistemi collisionali*.

Da queste conclusioni si può notare una apparente contraddizione: a parità di t_{cross} , più la quantità N è piccola più il sistema è collisionale. Ci si aspetterebbe invece che all'aumentare di N , e dunque all'aumentare della probabilità di interazione, il tempo di rilassamento del sistema diminuisca. Quest'ultimo non è però univocamente determinato dal numero di urti, ma bisogna anche considerare l'energia trasferita in ciascuno di essi. Dalla formula (2.27) possiamo vedere come $\Delta K \propto m_j^2$. Consideriamo ora due sistemi sferici con stessa massa totale M e stesso raggio R . Sapendo che $\sigma^2 = \frac{GM}{R}$, possiamo concludere che il tempo di attraversamento $t_{cross} = \frac{2R}{\sigma}$ per i due sistemi è uguale. Facendo l'ulteriore assunzione che uno dei due sistemi (sistema 1) abbia un numero maggiore di stelle dell'altro (sistema 2), queste dovranno essere necessariamente meno massive nel primo. L'energia trasferita negli urti fra le stelle del sistema 1 sarà dunque minore e il tempo necessario al sistema per entrare in un regime collisionale tenderà ad aumentare.

3.3 Dinamica degli ammassi globulari

Un ammasso globulare è un sistema di stelle gravitazionalmente legate, di forma sferoidale e orbitante intorno al centro della galassia che lo ospita. Come abbiamo già visto, si tratta di sistemi debolmente collisionali formati da circa centinaia di migliaia di stelle vecchie a bassa metallicità, confinate in qualche parsec cubico. Come vedremo in seguito il loro centro ha una densità tale da rendere possibile la collisione diretta tra stelle e dunque la formazione di oggetti peculiari, come le *blue straggler stars* (vedi **Appendice A**). Vediamo singolarmente i principali fenomeni che caratterizzano la dinamica degli ammassi globulari, tenendo però in considerazione che tali fenomeni non avvengono necessariamente nell'ordine che verrà qui riportato, ma sono pressochè simultanei.



Figura 3.4: Immagine scattata dal telescopio Hubble dell'ammasso globulare Messier 28

3.3.1 Equipartizione dell'energia

Per lo studio della dinamica di un ammasso globulare un importante fenomeno che va preso in considerazione è l'*equipartizione dell'energia*. In un regime collisionale infatti, i vari urti

gravitazionali garantiscono che l'energia cinetica sia equipartita tra le varie stelle. In un sistema gassoso sappiamo che in questa situazione vale

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (3.15)$$

dove \bar{v} è la velocità media, k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura. Analogamente anche nei sistemi stellari vale che la velocità è inversamente proporzionale alla radice della massa e dunque si ha che le stelle con massa maggiore perdono energia cinetica e “si spostano” verso il centro, mentre l'energia cinetica di quelle più leggere aumenta e le loro orbite si espandono. Questo processo conduce alla formazione di una regione centrale più massiva e densa (*core*), contrariamente a quella circostante (*halo*) formata da stelle di massa minore.

3.3.2 Evaporazione gravitazionale ed ejection

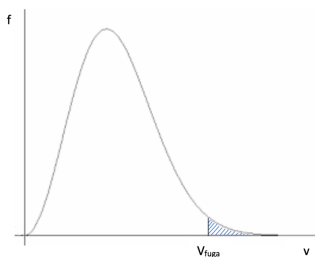


Figura 3.5: Distribuzione maxwelliana

Nel mentre, la funzione di distribuzione del sistema può essere approssimata con accuratezza sempre maggiore ad una maxwelliana: come si vede in **Figura 3.5** alcune stelle si troveranno ad avere una velocità maggiore della velocità di fuga del sistema e quest'ultimo comincerà a perdere stelle. I meccanismi attraverso cui una stella può aumentare la sua velocità fino a superare la velocità di fuga sono due: *ejection* (“espulsione”) ed *evaporazione gravitazionale*. Il primo si ha a seguito di un singolo urto gravitazionale a piccolo parametro di impatto, mentre il secondo si veri-

fica a causa di una serie di interazioni ad alto parametro d'impatto con le altre stelle, dove a ogni urto la stella guadagna un piccolo quantitativo di energia cinetica T fino a superare quella potenziale gravitazionale Φ . In questo modo le stelle che sfuggono per evaporazione hanno un'energia totale ($E = T - |\Phi|$) molto vicina allo zero ($T \sim |\Phi|$). Si è visto in (2.30) come il tempo di rilassamento sia inversamente proporzionale alla densità: nel core si ha un t_2b più piccolo rispetto all'alone ed è nel primo dunque che gli effetti delle interazioni gravitazionali sono significativi; le stelle che quindi dominano il rate di evaporazione sono quelle le cui orbite attraversano la regione del core, orbite cioè molto elongate il cui pericentro è all'interno del core, mentre l'apocentro si trova nell'alone. A ogni periodo radiale, l'apocentro tende ad allontanarsi mentre il pericentro rimane nella regione del core: in questo modo, le orbite diventano sempre più elongate e il periodo diventa sempre più lungo, fino a quando la stella non ha sufficiente energia per sfuggire dall'ammasso.

Seguendo il ragionamento presentato sopra riguardo l'equipartizione dell'energia, è facile capire che, affinché stelle di massa diversa abbiano la stessa energia cinetica, quelle di massa minore devono avere velocità maggiore. Da questo si ha che il sistema durante il processo di evaporazione perderà principalmente stelle di piccola massa. Inoltre poiché le stelle di massa minore hanno un rapporto massa-luminosità più grande di quelle di massa maggiore, la loro perdita porta ad una diminuzione del rapporto massa-luminosità nell'ammasso. Ecco perché in sistemi come le galassie ellittiche, che non subiscono questo fenomeno, il rapporto è di una decina di unità solari, mentre negli ammassi globulari si osserva un rapporto di $\frac{M}{L} = 2$ (in unità solari).

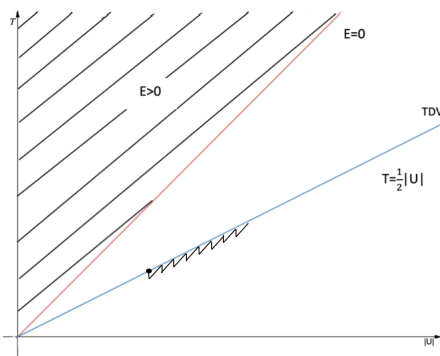


Figura 3.6: Evoluzione di un ammasso globulare nel piano viriale

3.3.3 Catastrofe gravotermica e core collapse

Come vediamo in **Figura 3.6**, la perdita di una stella ha come conseguenza che la struttura, che inizialmente si trovava in una configurazione di equilibrio, perde una quantità infinitesima di energia, destabilizzandosi ed uscendo dalla sua configurazione virializzata. I fenomeni interni la riportano di nuovo all'equilibrio fino a quando il sistema non perde un'ulteriore stella. Quello che si osserva è quindi una salita molto lenta lungo la retta del teorema del viriale attraverso movimenti microscopici, che corrisponde ad una contrazione della struttura e ad un aumento della sua temperatura. L'evaporazione non causa solo la perdita delle stelle, ma anche un *collasso dell'ammasso*: la struttura sta perdendo massa ma contemporaneamente sta diventando più densa. Questi risultati hanno come conseguenza una situazione di instabilità, chiamata *catastrofe gravotermica*: quando una stella sfugge all'attrazione gravitazionale dell'ammasso, "portando via" una parte della sua energia cinetica, il core dell'ammasso si contrae. Le stelle ancora presenti devono muoversi più velocemente per compensare l'aumento dell'energia gravitazionale del core e quindi aumenta la possibilità che alcune di loro vadano a superare la velocità di fuga dell'ammasso. Il processo quindi si ripete in modo sempre più veloce. Questo porta a una contrazione sempre maggiore del core, chiamata *core collapse*. Dall'estrapolazione di alcuni modelli teorici sembrerebbe che la densità del core raggiunga un valore infinito in un tempo finito, formando una apparente singolarità, ma ciò non avviene a seguito di ulteriori fenomeni collegati all'aumento di densità del core. Il principale fra questi è la formazione di nuove binarie nelle regioni centrali dell'ammasso.

3.3.4 Stelle binarie e oscillazioni gravotermiche

In seguito alla catastrofe gravotermica, il core di un ammasso globulare diventa uno dei pochi luoghi dell'universo in cui la possibilità di scontro tra stelle non è nulla. Si possono osservare quindi due processi, in grado di portare alla formazione di stelle binarie:

- *Three-Body Capture*: nelle regioni centrali sempre più dense c'è una probabilità sempre più rilevante che tre stelle si trovino vicine in un sistema a tre corpi con energia positiva. I tre corpi vanno a compiere orbite molto complesse finché uno dei tre (quello con massa minore) non abbandona il sistema. Rimane così un sistema binario con energia negativa.
- *Tidal Capture*: due stelle, passando abbastanza vicine, si deformano. L'energia cinetica delle due stelle diminuisce perché viene spesa nei loro gradi di libertà interni a causa della deformazione ed esse si allontanano ad una velocità minore di quella che avevano prima dell'interazione. Ciò porta alla formazione di un sistema binario, le cui orbite in un primo momento sono estremamente elongate. Dopo vari incontri e deformazioni

però, l'energia cinetica continua a diminuire e le orbite diventano sempre più circolari e strette.

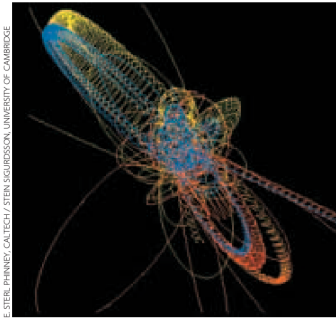


Figura 3.7: Simulazione dell'interazione di una stella con una binaria *hard*

Sono proprio le nuove binarie formate da questi processi che fermano la catastrofe gravotermica, poiché diventano una nuova sorgente di energia gravitazionale, così come le reazioni termonucleari rappresentano una fonte di energia nelle stelle. Infatti un processo simile al core collapse che avviene all'interno delle protostelle è quello che permette al core di queste ultime di raggiungere la temperatura necessaria per attivare le reazioni termonucleari, le quali compensano le perdite termiche e impediscono il collasso. Allo stesso modo sono le binarie a fornire l'energia per l'evaporazione gravitazionale: quando una stella singola interagisce con una binaria, quest'ultima può cedere o acquisire energia, diventando più o meno strettamente legata. Quando la binaria è "dura" (*hard*), cioè quando la sua energia di legame (in valore assoluto) è maggiore dell'energia media delle altre stelle dell'ammasso, essa tende a cedere energia e, dunque, la sua energia di legame aumenta ogni volta che avviene un'interazione con altre stelle singole, rendendola sempre più dura. In questo modo le binarie diventano un'importante fonte di energia e si dimostra che una singola di esse può addirittura avere un'energia di legame equiparabile a quella dell'intero ammasso. Ciò porta dunque alla stabilizzazione e all'arresto del collasso e il core tende ad espandersi. Se però la binaria diventata troppo dura, i corpi che interagiscono con essa non riescono a riconoscerne la natura di binaria, gli effetti sono quelli di una interazione con una stella singola e la catastrofe gravotermica riparte. Si instaura dunque un ciclo di espansione e collasso del core (*oscillazioni gravotermiche*).

3.4 Ammassi aperti e galassie



Figura 3.8: Ammasso aperto delle Pleiadi

Come specificato precedentemente, le galassie sono sistemi dinamicamente giovani in cui $t \ll t_2b$ e in cui quindi non si osserva il fenomeno dell'evaporazione gravitazionale.

Un discorso diverso vale per gli ammassi aperti: essendo sistemi collisionali la loro dinamica presenta molti dei risultati già visti per gli ammassi globulari, con la differenza che, avendo un tempo di rilassamento minore, la rapidità con cui l'evaporazione procede è di gran lunga maggiore. Ciò li porta a perdere stelle in maniera talmente rapida che queste non hanno il tempo di invecchiare al suo interno ed è per questo che negli ammassi aperti si osserva una prevalenza di stelle blu. Età vera ed età dinamica quindi non sono concetti che coincidono: un ammasso aperto può contenere stelle molto giovani, ma essere dinamicamente vecchio.

Appendice A

Blue Straggler Stars

Come si è già visto, nella regione centrale del core degli ammassi globulari c'è una densità stellare talmente elevata che la probabilità che due stelle collidano non è più trascurabile. Tale eventualità rappresenta oggi uno dei più probabili meccanismi di formazione di una particolare classe stellare, le *Blue Straggler Stars* (“stelle vagabonde blu”). Scoperte per la prima volta dall'astronomo Allan Sandage nel 1953 nell'ammasso globulare Messier 3 (M3), sono stelle particolarmente calde e blu che furono osservate in seguito anche in altri ammassi globulari. Destarono subito particolare interesse poiché, anche se la formazione stellare negli ammassi globulari si è interrotta 13 miliardi di anni fa, queste presentavano proprietà tali da sembrare di recente formazione. Ci si aspetterebbe infatti che tutte le stelle con una massa e una luminosità al di sopra di una certa soglia siano già evolute e si siano già spostate dunque dalla sequenza principale del diagramma H-R. Le blue stragglers invece rimangono sulla sequenza principale anche oltre il punto di turn-off (**Figura A.1**). La spiegazione di questa loro strana natura si può trovare andando a studiare i loro processi di formazione. Le ipotesi proposte sulla loro possibile origine sono tante, ma recentemente le più accettate sono le seguenti due:

- le blue stragglers possono essere il prodotto di una *collisione diretta* tra due stelle e una loro conseguente fusione. La stella risultante si troverà ad avere quindi una rinnovata quantità di combustibile nucleare proveniente da entrambe le stelle.
- le blue stragglers possono originarsi da una binaria strettamente legata, dove avviene un *trasferimento di massa* dalla stella più massiva alla meno massiva, con un conseguente trasferimento di idrogeno.

In entrambi i processi la stella risultante acquisisce una notevole quantità di idrogeno, cosa che giustifica la sua apparente “giovinezza”.

In tutti gli ammassi globulari in cui sono state osservate, le blue stragglers tendono a concentrarsi nella regione centrale: questo suggerisce che siano stelle di grande massa, coerentemente con quanto esposto nella sezione dell'equipartizione dell'energia ed è inoltre concorde con la loro posizione nel diagramma H-R.

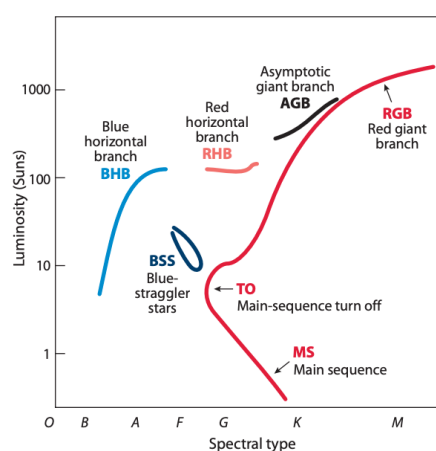


Figura A.1: Diagramma H-R di un ammasso globulare

Bibliografia

- [1] G. Bertin, *Dynamics of Galaxies*, Cambridge University Press, 2014.
- [2] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 2008.
- [3] L. Ciotti, *Astrofisica extragalattica*, appunti lezione a.a. 2019/2020.
- [4] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, Springer, 2016.