

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia

CAMPI MAGNETICI IN ASTROFISICA

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Presentata da:
De Rubeis Emanuele

Sessione II
Anno Accademico 2019/2020

Indice

1	Magnetoidrodinamica	1
1.1	Equazioni di Maxwell in MHD	1
1.2	Onde di Alfvén	2
2	Emissione di sincrotrone	3
2.1	Distribuzione spettrale	4
2.2	Autoassorbimento di sincrotrone e misura del campo magnetico . . .	5
2.3	Energetica di una radiosorgente e campo magnetico di equipartizione	6
2.3.1	Il campo magnetico di equipartizione è rappresentativo? Il caso di J1511+0518	7
2.4	Perdite radiative ed evoluzione temporale	8
2.5	Polarizzazione	8
3	Rotazione di Faraday	10
3.1	Effetti dei plasmi sulla propagazione delle onde elettromagnetiche, misura di dispersione	10
3.2	Misura di rotazione	11
4	Effetto Zeeman	13

Introduzione

I campi magnetici nel nostro Universo ricoprono un fondamentale ruolo nella nascita e nello sviluppo delle strutture cosmiche così come noi le osserviamo. Si pensi ad esempio ad oggetti "comuni" in ambito astrofisico che presentano un magnetismo "proprio", stelle, pianeti, galassie, o a fenomeni come i venti stellari, i getti nei nuclei galattici attivi, le aurore osservate da Terra: essi hanno una precisa morfologia ed evoluzione che dipende fortemente dalla struttura dei campi magnetici che sono ivi presenti. Eppure, nonostante la notevole importanza e onnipresenza, non si hanno ancora certezze sulla loro origine specialmente su larga scala, per cui rimangono aperti numerosi interrogativi e teorie a riguardo.

Data l'enorme varietà di ambiti toccati dai fenomeni magnetici, la seguente tesi non affronta con completezza ogni singolo argomento ad essi legato.

Nella prima parte di questa trattazione viene illustrato il comportamento del plasma magnetizzato introducendo i principi della magnetoidrodinamica (Capitolo 1), per poi passare alla seconda parte in cui invece vengono esposti i principali effetti astrofisici che permettono di misurare (o stimare) l'intensità del campo magnetico e di studiarne la morfologia. Si parla pertanto del principale meccanismo di emissione dovuto al magnetismo, ovvero la radiazione di sincrotrone (Capitolo 2), della propagazione di onde elettromagnetiche in un plasma con particolare riferimento alla rotazione di Faraday (Capitolo 3), valutando la misura di dispersione e di rotazione, e infine dell'effetto Zeeman (Capitolo 4) considerando anche la presenza di un campo magnetico interno alla particella.

Nel capitolo dedicato al sincrotrone vi è poi un esempio astrofisico basato su una radiosorgente, J1511+0518, che espone le possibilità di utilizzo della condizione di equipartizione per la determinazione del campo magnetico di queste particolari strutture.

1 Magnetoidrodinamica

I fluidi astrofisici hanno temperature generalmente di $10^6 - 10^9 K$: a queste temperature ioni ed elettroni non sono più legati in un unico atomo, e il fluido si trova in uno stato completamente ionizzato, denominato *plasma*. Il plasma astrofisico è quindi un fluido ionizzato ($T > 10^4 K$) con densità di carica nulla che presenta le seguenti proprietà :

- può essere trattato come un fluido ideale quando supera, in dimensione lineare, la lunghezza d'onda di Debye $\lambda_D = \left(\frac{kT}{4\pi n_e e^2}\right)^{1/2}$;
- bassa velocità del fluido ($v \ll c$);
- elevata conducibilità elettrica ($\sigma \rightarrow \infty$);
- le collisioni dominano la fisica del plasma;

1.1 Equazioni di Maxwell in MHD

In approssimazione *idrodinamica* (HD) le equazioni di Maxwell possono essere scritte nel seguente modo

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1b)$$

Dalla legge di Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, studiando il campo elettrico nel rest frame dell'osservatore e in quello del plasma, che si muove con velocità $v \ll c$, si ottiene

$$\vec{E} \approx -\frac{v}{c} H \left(1 - \frac{1}{R_m}\right), \text{ dove } R_m = \frac{4\pi\sigma v L}{c^2}$$

è detto numero di Reynolds magnetico (adimensionale); si può inoltre definire la viscosità magnetica $\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$. Poiché $R_m \gg 1$ (solitamente dell'ordine di almeno 10^6) generalmente i campi elettrici in astrofisica possono essere trascurati in quanto estremamente deboli: l'unica possibilità di avere campi elettrici è per induzione elettromagnetica. Di conseguenza si ha $\nabla \times \vec{H} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ e considerando la legge di Ohm, per cui

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right)$$

facendo il rotore di \vec{E} e uguagliandolo a quello nelle equazioni di Maxwell in approssimazione idrodinamica si ottiene l'equazione di induzione

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) + \eta_m (\nabla^2 \vec{H}) \quad (2)$$

per la quale si hanno due casi limite.

1. **diffusione del campo magnetico** (fluido statico, $v = 0$)

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} (\nabla^2 \vec{H}) \approx -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{H}{L^2}$$

integrando si ottiene $H \simeq H_0 e^{-t/\tau}$, dove $\tau = \frac{L^2 4\pi\sigma}{c^2}$ viene detto tempo caratteristico di diffusione del campo magnetico. Per $t \rightarrow +\infty$ il campo magnetico decade e si diffonde nell'ambiente circostante

2. **congelamento del campo magnetico** ($v \neq 0, \sigma \rightarrow +\infty$)

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dS \simeq \int_S \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) \right] \cdot d\vec{S} = \int_S \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{H} \right) dS \rightarrow 0$$

ciò implica la conservazione del flusso magnetico, per cui in caso di espansione del plasma il campo diminuisce e viceversa. È quindi possibile trovare campi magnetici particolarmente intensi in caso di significativa compressione del plasma, come avviene nelle *neutron stars* (NSs) e nelle *pulsar*. Le linee di campo non possono essere attraversate dal plasma in movimento, ma questo può stirare e piegare le linee di campo: in caso di espansione del plasma, l'intensità del campo magnetico decresce e così via.

Siano i vettori accentati relativi al sistema di riferimento del plasma in movimento con velocità $v \ll c$ rispetto ad un osservatore in quiete: possiamo riassumere le relazioni utilizzate in approssimazione magnetoidrodinamica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &\approx \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{E} &\approx 0 & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \approx 0 \\ \vec{H}' &\approx \vec{H} \\ \vec{j}' &\approx \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right) \end{aligned}$$

A causa del campo magnetico il plasma presenta un ulteriore termine di pressione detto pressione magnetica

$$P_{mag} = \frac{H^2}{8\pi}$$

se $P + \rho v^2 \ll \frac{H^2}{8\pi}$, le linee di campo vengono leggermente piegate ma esso continua a confinare il plasma, altrimenti per $P + \rho v^2 \gg \frac{H^2}{8\pi}$ il moto del plasma è in grado di "spazzare" le linee di campo magnetico.

1.2 Onde di Alfvén

Una perturbazione può essere propagata all'interno di un fluido ideale soltanto se questo è compressibile, ovvero prevede un $\delta\rho \neq 0$. Tuttavia grazie al campo magnetico anche quando il fluido è incompressibile (ρ costante) e non viscoso ($\eta = 0$) può

contenere onde trasversali a causa del termine oscillante $\frac{H^2}{4\pi}$ che fornisce la tensione magnetica: queste sono note come *onde di Alfvén*, da Hannes Alfvén che le teorizzò nel 1942 e per le quali vinse il Premio Nobel nel 1970, e rappresentano l'unico modo per propagare delle perturbazioni in un plasma magnetizzato con le sovracitate caratteristiche. Esse si propagano nella direzione delle linee di campo con una velocità detta *di Alfvén*

$$v_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (3)$$

Se invece il plasma è compressibile sono presenti anche onde longitudinali. Perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico la velocità di propagazione è determinata sia dalla pressione del plasma sia da quella magnetica e risulta essere pari a

$$c_{ms} = \sqrt{c_s^2 + v_A^2} \quad (4)$$

Queste onde vengono chiamate *magneto-soniche*.

Parallelamente al campo vi sono invece onde sonore che si propagano con velocità c_s legata esclusivamente alla pressione del plasma. Il rapporto fra la densità di energia cinetica della materia $\frac{\rho v^2}{2}$ e la densità di energia magnetica $\frac{H^2}{8\pi}$ fornisce un numero adimensionale caratteristico chiamato *numero di Karman*

$$K = \frac{v}{v_A}$$

Quando il campo magnetico è "congelato" nella materia, un grande valore di K implica che il moto risente molto poco del campo, mentre per piccoli valori di K il moto del fluido è interamente controllato dal campo magnetico

2 Emissione di sincrotrone

La radiazione di sincrotrone è un processo di emissione energetica non-termico causato dal moto di una particella carica all'interno di un campo magnetico con velocità ultra-relativistiche. Poiché la potenza emessa è inversamente proporzionale alla massa, secondo la formula di Larmor

$$P = \frac{2q^2}{3m^2c^3}\gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2, \quad (5)$$

i maggiori emettitori per sincrotrone sono gli elettroni (o analogamente i positroni), che vengono accelerati durante il moto circolare che compiono intorno alle linee di campo. L'elettrone si muove con una velocità ortogonale alla direzione dell'accelerazione emettendo isotropicamente nel proprio sistema di riferimento in approssimazione di dipolo (toroide in figura 1), per cui si osserva radiazione soltanto perpendicolarmente alla direzione di accelerazione della particella, radiale nel caso di moto circolare; nel rest frame dell'osservatore tuttavia, l'aberrazione relativistica modifica l'angolo sotto cui viene emessa la radiazione per cui i fotoni appaiono concentrati in un cono di semiapertura $\theta = \frac{1}{\gamma}$.

Questo effetto è soprannominato *beaming relativistico*.

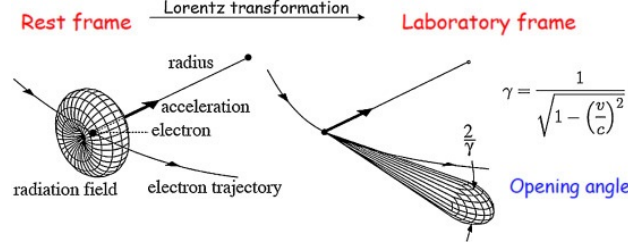


Figura 1: Beaming relativistico nel caso di accelerazione ortogonale alla velocità

A causa di ciò, la curvatura della traiettoria dell'elettrone svolge un ruolo determinante nel calcolo della potenza emessa per sincrotrone

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2q^4}{3m^2c^3} \beta^2 \gamma^2 H^2 \sin^2 \theta \quad (6)$$

per $\beta \simeq 1$ e $\varepsilon = m_0 c^2 \gamma$ si può riscrivere

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2q^4}{3m_0^4 c^7} \varepsilon^2 H^2 \sin^2 \theta = 2c\sigma_T \gamma^2 \frac{H^2}{8\pi} \sin^2 \theta \simeq 1.62 \cdot 10^{-15} \gamma^2 H^2 \sin^2 \theta \quad \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$$

dove

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \simeq 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

viene detta sezione d'urto Thomson (per l'elettrone) e θ è l'angolo di pitch, ovvero l'angolo tra la direzione della velocità della particella e la direzione del campo: quindi le maggiori perdite per sincrotrone sono dovute a particelle altamente energetiche o a campi magnetici particolarmente intensi.

2.1 Distribuzione spettrale

Un singolo elettrone che si muove con velocità ultra-relativistiche in un campo magnetico emette per sincrotrone ad una frequenza caratteristica che dipende dalla sua velocità e dall'intensità del campo

$$\nu_s \simeq 4.2 \cdot 10^{-9} \gamma^2 H [\mu G] \text{ GHz} \quad (7)$$

una tipica frequenza di sincrotrone è 408 MHz, nella banda radio. Se invece si vuole valutare come è fatta la distribuzione spettrale di un insieme di elettroni, con energie distribuite secondo una legge di potenza $N(\varepsilon)d\varepsilon = N_0 \varepsilon^{-\delta} d\varepsilon$, è necessario supporre che tutti gli elettroni emettano alla stessa frequenza, che corrisponde a quella caratteristica di sincrotrone. L'energia irradiata nell'intervallo di frequenze $\nu, \nu + d\nu$ può essere attribuita agli elettroni con energie $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$, e si può scrivere l'emissività specifica dell'intera popolazione come

$$J_s(\nu)d\nu = \frac{dW_s(\nu, \varepsilon)}{dt} N(\varepsilon)d\varepsilon$$

e sostituendo la potenza emessa scritta nella relazione 6 si ottiene

$$J_s(\nu) \approx \text{cost} N_0 H^{(\delta+1)/2} \nu^{-(\delta-1)/2}, \quad \text{con } \alpha = \frac{\delta-1}{2}$$

detto *indice spettrale*, che dipende dalla pendenza dello spettro energetico, e posso scrivere

$$J_s(\nu) \sim \text{cost} N_0 H^{(\delta+1)/2} \nu^{-\alpha} \quad (8)$$

Quindi anche lo spettro di emissione di sincrotrone, così come le energie degli elettroni, è distribuito a legge di potenza e può essere interpretato come sovrapposizione dei vari contributi dei diversi elettroni, ognuno dei quali emette con frequenza ν_s ; generalmente l'indice spettrale è $\alpha \approx 0.75$ per la maggior parte delle radiosorgenti, il che implica $\delta \approx 2.5$.

2.2 Autoassorbimento di sincrotrone e misura del campo magnetico

Si ha autoassorbimento di sincrotrone quando i fotoni emessi cedono la loro energia ad altri elettroni. Esso si applica quando $T_B \sim T_e$ (*black-body approximation*), dove T_B è la temperatura di brillantezza, ovvero quella della radiazione emessa, mentre T_e è la temperatura cinetica degli elettroni. Utilizzando i coefficienti di Einstein si trova il coefficiente di assorbimento

$$\mu_s \approx N_0 \nu^{-(\delta+4)/2} H_{\perp}^{(\delta+2)/2}$$

e l'emissività specifica vista nella 8, che vanno sostituite nella formula della brillantezza

$$B_s(\nu) = \frac{J_s(\nu)}{4\pi\mu_s(\nu)} (1 - e^{-\tau_s(\nu)})$$

- $\tau \ll 1$, **regime otticamente sottile**

$$B_s(\nu) \approx \nu^{-\alpha} H_{\perp}^{\alpha+1}$$

- $\tau \gg 1$, **regime otticamente spesso**

$$B_s(\nu) \approx \nu^{5/2} H_{\perp}^{-1/2}$$

Come si vede in figura 2, lo spettro autoassorbito presenta una frequenza di picco che può essere ricavata derivando l'espressione per l'emissività specifica $J_s(\nu)$

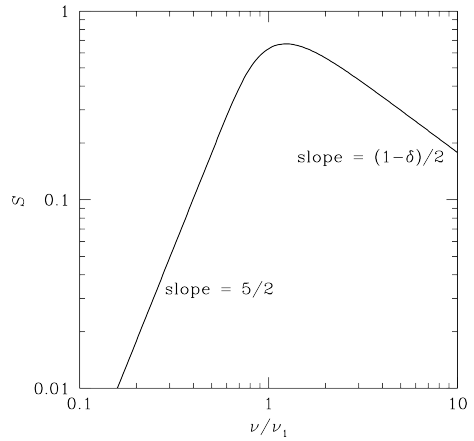


Figura 2: Spettro di sincrotrone autoassorbito

$$\frac{\nu_p}{GH_z} \simeq f(\alpha) \left(\frac{S_p}{J_y} \right)^{2/5} \left(\frac{\theta}{\text{mas}} \right)^{-4/5} \left(\frac{H_{\perp}}{mG} \right)^{1/5} (1+z)^{1/5}, \quad \text{dove } f(\alpha) \sim 2 \quad (9)$$

Di conseguenza, valutando l'autoassorbimento, è possibile *misurare* il campo magnetico H della sorgente

$$H \sim f(\alpha)^{-5} \theta_{\max}^2 \theta_{\min}^2 \nu_p^5 S_p^{-2} (1+z)^{-1} \quad (10)$$

2.3 Energetica di una radiosorgente e campo magnetico di equipartizione

Una radiosorgente è una nube di plasma relativistico che emette per sincrotrone, composta quindi da cariche libere, elettroni e protoni (o positroni) per la neutralità del plasma, che si muovono in un campo magnetico: per cui per calcolare l'energia totale di un corpo di questo tipo è necessario tener conto sia dell'energia cinetica delle particelle, sia dell'energia del campo magnetico.

$$U_{tot} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_+ + U_H = (1 + k)\varepsilon_{el} + U_H$$

dove k è legato alla natura del plasma

- $k = 0$, plasma di elettroni e positroni;
- $k = 1$, plasma "pesante", composto da elettroni e protoni;
- $k > 1$, plasma "anziano", dove gli elettroni, avendo emesso più radiazione, si sono già raffreddati e sono i protoni ad avere più energia

Per gli elettroni relativistici le energie sono distribuite a legge di potenza come $N(\varepsilon)d\varepsilon = N_0\varepsilon^{-\delta}d\varepsilon$, e considerando una distribuzione con angolo di pitch isotropo, tale che $H^2 \sin^2 \theta = \frac{2}{3}H^2$, si ha

$$\varepsilon_{el} = C_{el}H^{-3/2}L \quad (11)$$

che rappresenta l'energia associata agli elettroni relativistici che emettono per sincrotrone, dove L è la luminosità (misurabile). L'energia magnetica è invece data da

$$U_H = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = C_H H^2 V \quad (12)$$

dove V rappresenta il volume della radiosorgente.

Per cui l'energia totale della radiosorgente risulta essere pari a

$$U_{tot} = (1 + k)C_{el}H^{-3/2}L + C_H H^2 V \quad (13)$$

Si può a questo punto calcolare il minimo di U_{tot} e trovare la condizione di minima energia ponendo $\frac{\partial U_{tot}}{\partial H} = 0$, che risulta essere

$$(1 + k)\varepsilon_{el} = \frac{4}{3}U_H \quad (14)$$

e da questa si può ricavare il *campo magnetico di equipartizione*

$$U_H = C_H H^2 V = \frac{3}{4}(1 + k)\varepsilon_{el} = \frac{3}{4}(1 + k)C_{el}H^{-3/2}L$$

da cui

$$H_{eq} = H(\varepsilon)_{min} = \left[\frac{3}{4}(1 + k) \frac{C_{el}}{C_H} \right]^{2/7} \left(\frac{L}{V} \right)^{2/7} \quad (15)$$

Il campo di equipartizione fornisce l'energia totale minima contenuta nella radiosorgente, correlata al plasma relativistico

$$\begin{aligned} U_{tot,min} &= U_H + U_P = \frac{3}{4}(1 + k)\varepsilon_{el} + (1 + k)\varepsilon_{el} = \\ &= 2(1 + k)^{4/7} C_{el}^{4/7} C_H^{3/7} L^{4/7} V^{3/7} \end{aligned} \quad (16)$$

2.3.1 Il campo magnetico di equipartizione è rappresentativo? Il caso di J1511+0518

In questa sezione vogliamo vedere nel dettaglio l'effettiva applicazione della condizione di minima energia affrontando un reale esempio astrofisico, quello della radiosorgente J1511+0518 tratto dall'articolo di Orienti and Dallacasa [4]. L'evoluzione degli oggetti generati da un *nucleo galattico attivo* (AGN) dipende dalla loro dimensione lineare: per cui è stato stabilito che le radiosorgenti più compatte sono ancora in uno stato evolutivo primordiale. I modelli di evoluzione per questi corpi, che hanno età comprese tra 100 – 1000 anni, sono basati sull'assunzione che essi siano in condizione di minima energia, per cui valgono i discorsi appena fatti sull'equipartizione per comprendere come l'emissione radio si sviluppa all'interno della galassia ospitante. Poiché queste sorgenti hanno delle frequenze di turnover che si aggirano intorno a qualche GHz esse vengono chiamate *High Frequency Peakers* (HFPs), e se il picco dello spettro è dovuto al solo auto-assorbimento di sincrotrone abbiamo visto come sia possibile misurare direttamente il campo magnetico (equazione 10) trovando la frequenza di picco ν_p alla quale il mezzo cambia regime, da otticamente spesso a otticamente sottile.

Tuttavia questo metodo presenta due particolari criticità :

- le forti incertezze nel determinare le quantità osservabili necessarie per il calcolo di H, soprattutto le dimensioni angolari delle componenti dell'oggetto considerato;
- il campo magnetico non dovrebbe essere misurato per l'intera sorgente, bensì individualmente per le singole sottostrutture

La radiogalassia J1511+0518 è caratterizzata da una struttura tripla: una componente centrale a 8.4 GHz viene identificata come nucleo della sorgente, mentre a 1.7 GHz si nota una emissione estesa esterna alla galassia in direzione *est*. Alla stessa frequenza si osserva inoltre un'emissione estesa non allineata con la sorgente principale che potrebbe essere il resto di una radio-attività avvenuta non troppo tempo fa (< 104 anni), indicante la non contemporanea partenza della attività radio dell'oggetto.

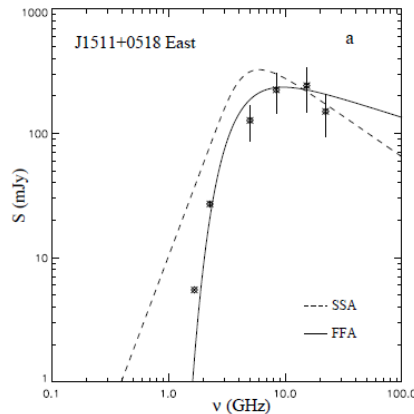


Figura 3: Spettro della componente est di J1511+0518 con i due contributi di assorbimento: SSA per il sincrotrone, FFA per l'emissione free-free

Per la regione centrale i campi misurati attraverso l'autoassorbimento di sincrotrone sono di circa 104 mG , in accordo con quanto previsto dall'equipartizione (per cui $H_{eq} \sim 95 \text{ mG}$), per cui protoni ed elettroni si assume abbiano la stessa energia. Il lobo est della radiosorgente desta invece qualche preoccupazione, in quanto il campo magnetico ottenuto dalla stima della frequenza di picco risulta essere $\gg 1000 \text{ mG}$, valore in totale disaccordo con quanto previsto dall'equipartizione e privo di significato fisico se confrontato con quanto visto per la regione centrale; ciò è dovuto al fatto che la frequenza di picco ν_p è inconsistente col solo assorbimento di sincrotrone (figura 3), in quanto l'indice spettrale $\alpha > -2.5$ (considerando $B_s(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$), implicando così la presenza di plasma termico davanti alla sottostruttura che assorbe per *bremsstrahlung*. Di conseguenza le frequenze più basse vengono meglio assorbite dal plasma termico che presenta, nel regime otticamente spesso, un $\alpha = 2$, e il fatto che il nucleo della sorgente sia invece consistente col solo *synchrotron-self absorption* (SSA) implica che il mezzo non sia distribuito omogeneamente lungo le diverse linee di vista.

2.4 Perdite radiative ed evoluzione temporale

Le particelle irradiano a spese della loro energia cinetica, per cui la distribuzione di energia di una regione che emette per sincrotrone, riempita totalmente di plasma relativistico magnetizzato, varia nel tempo. Integrando la 6 si ottiene la variazione di energia in funzione del tempo

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0 C_{sync} H^2 \sin^2 \theta t}, \text{ dove } C_{sync} = \frac{2e^4}{3m_e^4 c^7} \quad (17)$$

ε_0 rappresenta l'energia iniziale delle particelle. Si definisce così il tempo di raffreddamento t^* di sincrotrone come il rapporto tra l'energia iniziale delle particelle e il rate di perdita di ε

$$t^* = \frac{\varepsilon_0}{d\varepsilon/dt} = \frac{1}{C_{sync} \varepsilon_0 H^2 \sin^2 \theta} \quad (18)$$

Volendo effettuare una trattazione generale consideriamo un tempo di confinamento infinito con una continua iniezione di elettroni relativistici rappresentata dal termine $Q(\varepsilon, t) = Ae^{-\delta t}$: si raggiunge così un equilibrio tra le particelle che, perdendo energia, si spostano ad energie più basse e quelle "nuove" che vengono iniettate. Per via dei nuovi elettroni alle energie superiori non si ha un taglio netto nello spettro ma si forma una distribuzione a legge di potenza più ripida con indice spettrale $-(\alpha + 0.5)$ in corrispondenza della frequenza di break ν^*

- $J_s(\nu) \sim \nu^{-(\delta-1)/2} \sim \nu^{-\alpha}$, per $\nu \ll \nu^*$;
- $J_s(\nu) \sim \nu^{-\delta/2} \sim \nu^{-(\alpha+0.5)}$, per $\nu > \nu^*$

Trovare la frequenza di break è uno strumento utile a stimare l'età radiativa della popolazione dominante di elettroni relativistici.

2.5 Polarizzazione

La principale peculiarità dell'emissione di sincrotrone rispetto ad altri meccanismi di radiazione è quella di mostrare una forte polarizzazione, specialmente lineare. Ciò

è dovuto alla particolare modalità di emissione di radiazione da parte di una particella carica, che giunge sottoforma di impulsi visibili esclusivamente quando il cono di beaming punta verso l'osservatore: per questo motivo lungo il piano dell'orbita è possibile rilevare esclusivamente un segnale polarizzato linearmente. Se invece la linea di vista è leggermente spostata rispetto al piano, ma comunque compresa nel cono di beaming, si osserva della radiazione polarizzata ellitticamente, ovvero con una componente lineare ed una circolare.

Le ellissi di polarizzazione saranno in parti uguali distribuite tra destrorse e sinistrorse, per cui il loro contributo tende ad annullarsi lasciando così uno stato di polarizzazione lineare, con il vettore \vec{E} perpendicolare alla direzione del campo \vec{B} ; unica peculiarità del segnale polarizzato è che sarà ovviamente meno intenso del segnale totale. Considerando un insieme di particelle con una distribuzione isotropa delle velocità, possiamo caratterizzare la radiazione con le potenze per unità di frequenza $P(\nu)$ nelle direzioni parallela e perpendicolare alla proiezione del campo magnetico sul piano del cielo, e scrivere il grado di polarizzazione lineare per le particelle con una data energia γ

$$\Pi(\nu) = \frac{P_{\perp}(\nu) - P_{\parallel}(\nu)}{P_{\perp}(\nu) + P_{\parallel}(\nu)}$$

che per particelle con energie distribuite a legge di potenza ($N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-\delta}$) diventa

$$\Pi = \frac{\delta + 1}{\delta + \frac{7}{3}} \quad (19)$$

Nella migliore delle ipotesi, considerando una pendenza dello spettro $2 \leq \delta \leq 4$ si ottengono percentuali di polarizzazione lineare del 70 – 80%.

Se invece il campo magnetico non è uniforme, come da prassi nelle osservazioni astronomiche, la percentuale di polarizzazione può essere fortemente ridotta (si veda anche successivamente con la rotazione di Faraday, capitolo 3.2) poiché in regioni diverse si hanno polarizzazioni diverse che in media tendono a cancellarsi. Dalla equazione 6 sappiamo che la potenza emessa per sincrotrone dipende dal quadrato dell'intensità del campo magnetico, per cui indicando con H_o e H_r le componenti rispettivamente ordinata e random del campo, la percentuale di polarizzazione osservata in questo caso è pari a

$$\Pi_{obs} = \Pi \frac{H_o^2}{(H_o^2 + H_r^2)}$$

Di conseguenza misurando la percentuale di polarizzazione è possibile ottenere una stima dell'ordine di grandezza del campo magnetico di una radiosorgente.

Per le componenti più compatte delle radiosorgenti c'è un ulteriore metodo per stimare direttamente l'intensità di campo magnetico che sfrutta un piccolo residuo di polarizzazione circolare, che non viene completamente annullata: H risulta essere

$$H = 4 \left(\frac{V}{I} \right)^2 \nu_{MHz} (1 + z) \quad G$$

dove V rappresenta l'intensità del segnale polarizzato circolarmente e I l'intensità del segnale totale. Questo metodo è tuttavia di difficile applicazione in quanto generalmente $\frac{V}{I} \sim 10^{-4}$, e nei casi in cui si è riuscito ad effettuare misure ad alta

sensibilità sono stati rilevati campi magnetici di qualche decimo di mG . Studiando l'emissione radio polarizzata è stato possibile ricavare il campo magnetico medio della *Via Lattea*, il quale non è omogeneo ma passa dai $\sim 6 \mu G$ nei dintorni del Sole ai $10 \mu G$ nelle regioni più centrali (Beck [1]), in quanto i filamenti radio vicino al bulge e le fredde nubi molecolari giganti incrementano l'intensità del campo anche fino a $20 - 40 \mu G$. Su grande scala, il campo magnetico è parallelo al piano del disco galattico, con una struttura che in generale segue i bracci a spirale della galassia, con una debole componente verticale di soli $B_z \simeq 0.2 \mu G$, anche se sono state scoperte delle regioni di inversione del campo verso il centro galattico ed alcune distorsioni in corrispondenza delle zone con alta formazione stellare; in particolare i campi più intensi e ordinati, i quali hanno una percentuale più alta di polarizzazione, formano dei veri e propri *bracci magnetici* tra quelli ottici, con campi che arrivano a valori di $15 \mu G$, sintomo del fatto che i campi magnetici non richiedono l'ausilio delle onde di densità per svilupparsi.

3 Rotazione di Faraday

3.1 Effetti dei plasmi sulla propagazione delle onde elettromagnetiche, misura di dispersione

Gli elettroni liberi e il campo magnetico che costituiscono il plasma astrofisico possono alterare le proprietà della radiazione che lo attraversa: tali variazioni dipendono dalla frequenza e permettono di misurare indirettamente la densità numerica di elettroni n_e e il campo magnetico H_{\parallel} lungo la linea di vista.

Si consideri un plasma astrofisico composto da gas ionizzato globalmente neutro, in assenza di campi magnetici esterni e isotropo, in cui però gli ioni siano trascurabili poiché sono molto meno mobili rispetto agli elettroni; le equazioni di Maxwell, seppure siano state definite nel vuoto, possono essere adattate ad un plasma considerando densità di carica ρ_e e di corrente \vec{j} . Sia la costante dielettrica

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e} \left(\frac{n_e}{\omega^2 - \omega_0^2} + \sum_i \frac{N_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) \quad (20)$$

I termini sotto la sommatoria in i fanno riferimento agli elettroni legati, per cui possono essere trascurati (generalmente in banda radio $\omega \ll \omega_i$, e $\omega_0 = 0$), e si può definire l'*indice di rifrazione* n_r nel seguente modo:

$$n_r \simeq \sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e \omega^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2} \quad (21)$$

dove

$$\nu_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\pi m_e}} = 9 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{n_e}{cm^{-3}}} \text{ GHz}$$

rappresenta la *frequenza di plasma*: soltanto onde con $\nu > \nu_p$ possono attraversare la regione mentre quelle con $\nu < \nu_p$ vengono riflesse, e n_r diventa immaginario. In condizioni di propagazione quindi, l'onda elettromagnetica viaggia attraverso il plasma con una velocità di gruppo, che dipende dalla frequenza,

$$v_g = c \cdot n_r = c \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2}$$

per cui se consideriamo un segnale non monocromatico esso non viaggia uniformemente attraverso una regione di plasma. Il tempo necessario ad un'onda per percorrere una regione di dimensione L da un punto A a un punto B, in funzione della frequenza, è

$$T_{A,B}(\nu) = \int_0^L \frac{dl}{v_g} = \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} \left(\frac{e^2}{\pi m_e \nu^2} \right) DM$$

dove

$$DM = \int_0^L n_e dl \quad (22)$$

viene chiamata *misura di dispersione* e permette, sfruttando il ritardo tra i tempi di propagazione di un segnale a diverse frequenze, di misurare direttamente la densità numerica di elettroni n_e del mezzo interstellare (ISM) lungo la linea di vista.

Poiché le frequenze più alte attraversano il plasma più velocemente, c'è bisogno di un segnale preciso per misurare il ritardo delle ν minori: a tal proposito vengono utilizzate le *pulsar*, stelle di neutroni caratterizzate da campi magnetici molto intensi che ruotano molto velocemente intorno al proprio asse emettendo impulsi di radiazione dai poli magnetici per sincrotrone. Se queste emissioni, generalmente molto regolari, sono dirette verso la Terra è possibile misurare il ritardo tra gli impulsi e quindi la misura di dispersione per stimare la distanza di questi oggetti.

3.2 Misura di rotazione

Consideriamo ora cosa accade alla propagazione di un'onda elettromagnetica in presenza di un campo magnetico esterno, a causa del quale il plasma diventa anisotropo. A questo punto la costante dielettrica diventa un tensore, e il mezzo discrimina non solo le singole frequenze ma anche le differenti polarizzazioni. Assumiamo che l'onda elettromagnetica sia sinusoidale e polarizzata circolarmente, come sovrapposizione tra *left circular polarization* (-) e *right circular polarization* (+)

$$\vec{E}(t) = E_0 e^{-i\omega t} (\vec{\epsilon}_1 \mp i\vec{\epsilon}_2)$$

e che l'onda si propaghi lungo la direzione di \vec{H} . Si ottiene così una velocità dello stato stazionario

$$\vec{v}(t) = -\frac{ie}{m_e(\omega \pm \omega_H)} \vec{E}(t)$$

e una costante dielettrica relativa alle due diverse polarizzazioni

$$\varepsilon_{R,L} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_H)}$$

Perciò le velocità di propagazione dei due modi ortogonali sono diverse, originando uno spostamento della loro fase relativa che implica una progressiva rotazione del piano di polarizzazione via via che l'onda si propaga nel plasma magnetizzato, senza però variarne l'intensità. Questo effetto viene chiamato *rotazione di Faraday*.

Nel caso in cui lo schermo di Faraday, che è la regione che causa la rotazione, sia spazialmente risolto l'effetto netto è solo una rotazione del vettore di polarizzazione

lineare in una data direzione. Se lungo un cammino D il numero d'onda \vec{k} non è costante l'angolo di fase tra RCP e LCP è dato da

$$\Phi_{R,L} = \int_0^D (k_R - k_L) dl = \int_0^D \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{R,L}} dl \quad (23)$$

per $\omega \gg \omega_p$ e $\omega \gg \omega_H$:

$$\Phi_{R,L} = \int_0^D \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega^2 c} dl \quad (24)$$

La variazione angolare del vettore polarizzazione durante l'attraversamento del plasma risulta essere

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \Phi_{R,L} = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^D n_e H_{\parallel} dl \approx \lambda^2 \int_0^D n_e H_{\parallel} dl \quad (25)$$

dove

$$RM = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2} \int_0^D n_e H_{\parallel} dl \quad (26)$$

viene detta *misura di rotazione*. La misura di rotazione (RM) determina il campo magnetico lungo la linea di vista pesato sulla densità elettronica, nel caso in cui ovviamente si osservino i fenomeni di rotazione e dispersione del segnale elettromagnetico appena elencati

$$\langle H_{\parallel} \rangle \propto \frac{RM}{DM} \propto \frac{\int n_e H_{\parallel} dl}{\int n_e dl} \quad (27)$$

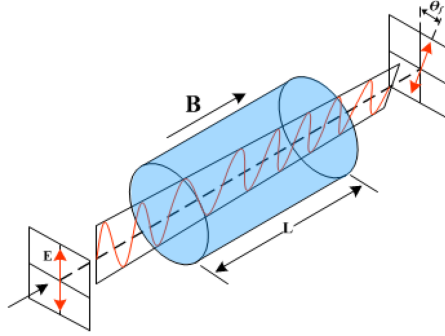


Figura 4: Esempio di rotazione del vettore polarizzazione attraverso una regione magnetizzata

Le osservazioni a varie frequenze forniscono la misura dell'angolo di polarizzazione $\chi_{obs} = \chi_0 + RM\lambda^2$.

Se lo schermo di Faraday non è omogeneo si può andare incontro alla depolarizzazione della radiazione, in quanto localmente i vettori del campo magnetico possono avere la stessa direzione, ma globalmente essa è casuale: la somma di questi contributi lungo la linea di vista riduce la percentuale di polarizzazione, per cui la RM fornisce il limite inferiore del campo magnetico. Un ulteriore effetto legato alla polarizzazione è la cosiddetta rotazione di Faraday *interna*, dovuta alla radiazione che si trova ad attraversare anche il mezzo stesso che la genera e ciò causa ulteriore rotazione del vettore polarizzazione. Se si suddivide infatti l'oggetto in strati, con n_e

e H omogenei in ogni strato, si osserva come maggiore è il numero di strati attraversati maggiore è l'effetto di rotazione, che abbassa la percentuale di polarizzazione, perché ogni strato varia progressivamente la direzione di χ ; ai bordi invece, dovendo attraversare meno strati, la radiazione proveniente risulta essere maggiormente polarizzata, e ciò si osserva particolarmente nei lobi delle radiogalassie, nella maggior parte dei quali si ottengono valori di RM di $\pm 10 - 100 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-2}$.

La RM viene utilizzata per comprendere la geometria del campo magnetico galattico servendosi di stelle molto particolari: le pulsar. Esse sono infatti candidate perfette per la stima del campo per molteplici ragioni:

- le pulsar hanno una emissione fortemente polarizzata, necessaria per avere valori di RM più precisi;
- non avendo RM interna, la rotazione di Faraday è unicamente dovuta al mezzo interstellare della galassia, che si frappone tra la pulsar e l'osservatore;
- è possibile misurare direttamente n_e lungo la linea di vista tramite la DM

Per cui, utilizzando esclusivamente le pulsar più vicine, per le quali si conosce la distanza, si può ricavare la componente di H lungo la linea di vista come visto nella relazione 27 di proporzionalità.

4 Effetto Zeeman

Un' importante conseguenza della presenza di campi magnetici è rilevabile anche osservando i livelli energetici degli atomi (o analogamente delle molecole) e le righe spettrali corrispondenti alle transizioni elettroniche tra di essi: si parla di *effetto Zeeman* come dello "splitting" di una riga spettrale in un diverso numero di righe nel caso in cui la transizione ad essa associata avvenga in presenza di un campo magnetico esterno.

L'effetto Zeeman più semplice consiste nella scomposizione di una singola riga spettrale in tre diverse componenti: una chiamata π *component* che si trova nella posizione non shiftata, mantenendo quindi la medesima lunghezza d'onda, mentre le altre due vengono soprannominate σ *components*, in quanto vengono traslate in modo simmetrico alla stessa distanza dalla prima componente. La presenza di un campo magnetico costante, che in questo caso indicheremo con B , risolve così la degenerazione in m (numero quantico magnetico), per cui gli stati, che nell'atomo imperturbato corrispondevano ad uno stesso livello, si differenziano. Dunque un livello energetico che indichiamo con n (numero quantico principale), che nello stato imperturbato conterrebbe $2n^2$ stati degeneri, viene dal campo magnetico suddiviso in $2(2n - 1)$ livelli distinti (o analogamente $2l + 1$, con l numero quantico secondario, sapendo che $l = n - 1$). L'azione del campo magnetico esterno incide direttamente sull'energia dell'atomo a causa dell'interazione del proprio momento magnetico μ con B , in quanto la coppia agente su μ a causa di B tende a farli allineare. La separazione tra i livelli energetici è costante, ed è pari a

$$\Delta = \frac{e\hbar}{2\mu c} B = \mu_B B \quad (28)$$

dove $\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ rappresenta la *costante di Planck ridotta*, e μ_B viene chiamato *magnetone di Bohr*, e rappresenta l'unità di misura dei momenti magnetici su scala atomica. Dal punto di vista dei livelli energetici invece

$$E_{n',m',m'_s} - E_{n,m,m_s} = \Delta E_{n',n} + \mu_B B \Delta m$$

dove indichiamo con m_s il numero quantico *di spin*. Per le transizioni di dipolo le regole di selezione stabiliscono che $\Delta m = 0, \pm 1$, per cui le σ *components* si posizionano ai due lati della riga imperturbata ($\Delta m = 0$) a distanza proporzionale a $\mu_B B$: per questo motivo l'effetto Zeeman rappresenta una possibilità di misura, sia dell'intensità che della direzione, dei campi magnetici in ambiente interstellare ed intergalattico attraverso la spettroscopia. Se indichiamo con ν_0 la frequenza corrispondente alla riga imperturbata e con ν quella invece delle righe shiftate, la relazione con il campo magnetico B diventa

$$\nu = \nu_0 \pm 1.4 \cdot 10^6 B \text{ GHz}$$

Questo vale solamente nel caso in cui $\Delta m_s = 0$. Se invece si considera la presenza di un campo magnetico ulteriore, interno alla particella, si parla di *effetto Zeeman anomalo*, e in questo caso esso è in gran parte responsabile della struttura *fine* in quanto generalmente in astrofisica $B_{ext} \ll B_{int}$. Il calcolo dello split energetico è complicato dal fatto che il momento magnetico prodotto dallo spin risulta essere prodotto con il doppio dell'efficacia rispetto al solo campo esterno, di conseguenza il momento magnetico totale non è più parallelo al momento angolare totale. Consideriamo un atomo con un momento angolare orbitale L e uno spin S , e n, l, j, m_j i numeri quantici ad esso associati: ogni livello energetico viene splittato in $2j + 1$ livelli, corrispondenti ai possibili valori di m_j e la variazione energetica della transizione associata dovuta allo splitting anomalo rispetto a quella in assenza di campo è pari a

$$\Delta E = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} = g_L \mu_B m_j B \quad (29)$$

g_L viene chiamato *fattore di Landé* e si calcola come

$$g_L = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

L'effetto Zeeman anomalo è contraddistinto dallo splitting della riga spettrale in un maggior numero di componenti rispetto all'effetto normale, come ad esempio il doppietto del sodio (figura 5) o il tripletto dello zinco.

Ad avere i maggiori effetti di splitting sono atomi e molecole con un consistente momento magnetico, spesso presenti in ambienti particolarmente densi: ad esempio le molecole di OH e CH e specie di questo tipo hanno tipiche componenti σ a distanze di qualche kHz per mG . Se la separazione tra le righe eccede significativamente la dimensione lineare delle singole componenti spettrali, come succede spesso negli *OH masers* in regioni di alta formazione stellare, l'intensità del campo magnetico può essere ricavata direttamente dalla misura dello splitting. La direzione invece del campo viene rilevata osservando se le componenti magnetiche nello spettro con una polarizzazione ellittica sinistrorsa si trovano a una frequenza più alta o più bassa rispetto alle loro controparti destrorse.



Figura 5: Esempio di *splitting* dovuto all'effetto Zeeman anomalo per una riga del sodio

Per la riga dell'idrogeno neutro, corrispondente ad una lunghezza d'onda di 21 cm , si ha un doppietto avente le componenti con polarizzazioni circolari opposte quando la linea di vista è parallela al campo magnetico; invece, se la linea di vista è perpendicolare al campo, abbiamo un tripletto di righe polarizzate linearmente. Tuttavia gli effetti dello *splitting* sono generalmente molto piccoli: per la riga dell'idrogeno neutro

l'effetto Zeeman prevede uno spostamento in frequenza di circa $1.4\text{ Hz}/\mu\text{G}$.

La riga a 21 cm osservata è generalmente molto larga a causa dell'effetto Doppler, per cui risulta praticamente impossibile misurare direttamente il campo magnetico sfruttando l'effetto Zeeman: si può però effettuare una misura indiretta, osservando che la riga si sposta leggermente in lunghezza d'onda se osservata distintamente in polarizzazione circolare destra o sinistra. Questa tecnica, che richiede osservazioni in cui la riga sia particolarmente intensa, ha fornito stime per il campo magnetico di almeno un ordine di grandezza in più rispetto a quelle ottenute grazie al solo *Zeeman splitting*.

Riferimenti bibliografici

- [1] R. Beck. Magnetic Field Structure from Synchrotron Polarization. In M. A. Miville-Deschênes and F. Boulanger, editors, *EAS Publications Series*, volume 23 of *EAS Publications Series*, pages 19–36, January 2007. doi: 10.1051/eas:2007003.
- [2] D. Dallacasa. Processi di radiazione e MHD. Dispense. Università di Bologna. 2019.
- [3] C. Fanti and R. Fanti. Una finestra sull’Universo “Invisibile”: lezioni di radioastronomia. 2012.
- [4] M. Orienti and D. Dallacasa. Are young radio sources in equipartition? *Aap*, 487(3):885–894, September 2008. doi: 10.1051/0004-6361:200809948.
- [5] F. Ravanini. Meccanica quantistica. Dispense. Università di Bologna. 2019.
- [6] G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. 1986.