

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Emissione di Corpo Nero e Applicazioni Astrofisiche**

Tesi di laurea

Presentata da:  
Edoardo Ceccarelli

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

---

Anno accademico 2019-2020  
Sessione II



*Alla mia famiglia.*





# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Il Corpo Nero</b>	<b>1</b>
1.1 Teorema di Kirchhoff . . . . .	1
1.2 Termodinamica del Corpo Nero . . . . .	2
1.3 Caratteristiche dello Spettro di Corpo Nero . . . . .	4
1.3.1 Approccio Classico di Rayleigh-Jeans . . . . .	4
1.3.2 Approccio Quantistico di Planck . . . . .	5
1.3.3 Legge dello Spostamento di Wien . . . . .	7
1.4 Temperatura del Corpo Nero . . . . .	8
<b>2 Applicazioni Astrofisiche</b>	<b>9</b>
2.1 Le Stelle . . . . .	9
2.1.1 Classificazione Spettrale . . . . .	10
2.1.2 Il Sole . . . . .	11
2.2 La Radiazione Cosmica di Fondo . . . . .	11
2.2.1 Anisotropia di Dipolo della CMB . . . . .	12
2.2.2 Effetto Sunyaev-Zel'dovich . . . . .	14
<b>A Determinazione delle Leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien</b>	<b>17</b>
A.1 Legge di Stefann-Boltzmann . . . . .	17
A.2 Legge dello Spostamento di Wien . . . . .	18
<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>



# Introduzione

Sul finire del XIX secolo la totale comprensione di fenomeni di natura meccanica ed elettromagnetica, per mezzo rispettivamente delle Leggi della Dinamica di Newton e delle Equazioni di Maxwell, provocò la convinzione che la Fisica fosse basata su fondamenta talmente solide da lasciare poco spazio a nuove scoperte essenziali: lo studio della Fisica era destinato a ridursi all'applicazione di queste leggi a casi particolari. Come disse Lord Kelvin:

*"Per me la Fisica costituisce un sistema perfettamente armonioso ed essenzialmente completo. All'orizzonte scorgo solamente due piccole nubi oscure: il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley e l'insufficienza della legge di Rayleigh e Jeans se applicata alle frequenze dell'ultravioletto."*

Tuttavia, furono proprio queste due incongruenze a dare il via alla rivoluzione che sconvolse l'intera conoscenza del mondo fisico nella prima metà del XX secolo: da una parte l'esperienza di Michelson e Morley fu il punto di partenza degli studi che permisero ad Albert Einstein di elaborare la teoria della Relatività, che rivoluzionò il modo di concepire lo spazio, il tempo e la gravità; dall'altra, studiando la radiazione di corpo nero, fu Max Planck il primo ad ipotizzare che la luce potesse propagarsi per quanti, spianando così il terreno alla rivoluzione quantistica della fisica atomica e subatomica.

Il presente elaborato si propone di descrivere un modello teorico di radiazione termica, ovvero il corpo nero, e di analizzare alcuni oggetti astrofisici a cui tale modello può essere applicato.

Nel primo capitolo viene illustrata l'evoluzione del concetto teorico di corpo nero, a partire dal teorema di Kirchhoff per arrivare alla determinazione dello spettro da parte di Planck e alle approssimazioni in regime di alte e basse energie. In particolare, viene mostrato come l'ipotesi quantistica dell'emissione di radiazione elettromagnetica sotto forma di pacchetti discreti di energia risolva il problema della catastrofe ultravioletta riscontrato tramite l'approccio classico di Rayleigh e Jeans.

Nel secondo capitolo viene descritta la radiazione di alcuni corpi celesti che emettono per corpo nero, quali le stelle e la radiazione cosmica di fondo.



# 1 | Il Corpo Nero

Si definisce *Corpo Nero* un oggetto ideale in grado di assorbire tutta la radiazione incidente a qualsiasi lunghezza d'onda e in equilibrio termico con la radiazione stessa. La radiazione assorbita eccita le pareti del corpo nero, le quali possono essere considerate come degli oscillatori armonici carichi, che quindi a loro volta emettono radiazione. Per la conservazione dell'energia, la radiazione assorbita viene totalmente irradiata: quindi un corpo nero può essere visto come una sorgente in grado di emettere a qualunque lunghezza d'onda.

Un corpo nero può essere pensato come un oggetto cavo delimitato da una superficie che fa rimbalzare la radiazione al suo interno senza farla uscire. Per ottenere la radiazione di corpo nero si prende la cavità a una certa temperatura  $T$ , alla quale pareti e radiazione sono all'equilibrio termico, e si effettua un piccolo foro senza perturbare sensibilmente il sistema: la radiazione uscente si presume essere un campione rappresentativo di quella presente all'interno.

A questo punto risulta necessario introdurre due grandezze fondamentali per comprendere come la radiazione elettromagnetica possa raggiungere l'equilibrio termico. La prima è il *potere emissivo* di un corpo  $P_{em}(\nu, T)$ , ovvero la potenza elettromagnetica emessa per unità di superficie a una data frequenza  $\nu$  e temperatura  $T$ . La seconda è il *potere assorbente* di un corpo, definita come il rapporto tra potenza elettromagnetica assorbita<sup>1</sup> e incidente:

$$P_{ass}(\nu, T) = \frac{\text{potenza e.m. assorbita}}{\text{potenza e.m. incidente}}$$

a una data frequenza  $\nu$  e temperatura  $T$ .

## 1.1 Teorema di Kirchhoff

Nel 1860 il fisico tedesco Gustav Kirchhoff ipotizzò che un corpo fosse in grado di assorbire una parte della radiazione che emette, avendo osservato particolari righe nere negli spettri solari. Egli dimostrò che il rapporto tra potere emissivo e assorbente è lo stesso per tutti i corpi a una data frequenza e una data temperatura. Di conseguenza, due corpi posti a contatto raggiungono l'equilibrio termico solo se questo rapporto è una funzione universale indipendente dalla natura dei corpi stessi:

$$\frac{P_{em}(\nu, T)}{P_{ass}(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

---

<sup>1</sup>Per potersi definire assorbita la radiazione elettromagnetica incidente deve entrare a fare parte dell'energia termica del corpo.

Kirchhoff definì quindi corpo nero un sistema ideale il cui  $P_{ass}(\nu, T)$  è pari a 1 per ogni frequenza e a tutte le temperature: appare immediato che la funzione universale uguaglia il  $P_{em}(\nu, T)$  del corpo nero. Tale funzione risulta essere la brillantezza, o intensità specifica di radiazione<sup>2</sup>  $I_\nu$ , descritta nel caso di un corpo nero dalla funzione di Planck  $B_\nu(T)$ .

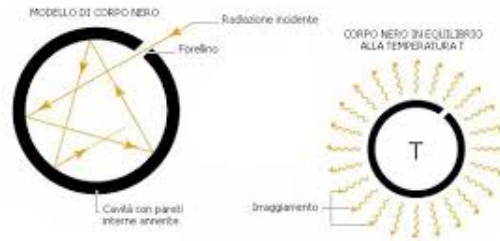


Fig. 1.1: Cavità isoterma e radiazione di corpo nero.

## 1.2 Termodinamica del Corpo Nero

La radiazione di corpo nero, come ogni sistema all'equilibrio termico, può essere trattata con metodi termodinamici. Si consideri quindi una cavità di corpo nero con un pistone, in modo che il lavoro possa essere fatto dal sistema o sul sistema, come si osserva in Fig.1.2. Dal primo principio della termodinamica si ha

$$dQ = dU + pdV$$

dove  $Q$  è il calore e  $U$  è l'energia totale. Il secondo principio della termodinamica afferma che

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

dove  $S$  è l'entropia. Ma  $U = uV$  e  $p = \frac{u}{3}$ , con la densità specifica di energia  $u$  funzione della sola temperatura

$$u = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu$$

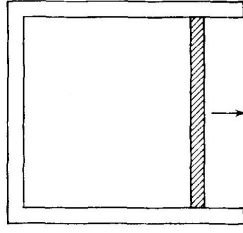
dove  $J_\nu$  è l'emissività specifica. Sostituendo si ottiene

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{u}{T} dV + \frac{1}{3} \frac{u}{T} dV = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV$$

Poichè  $dS$  è un differenziale esatto

$$\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4}{3} \frac{u}{T}$$

<sup>2</sup>Viene definita come l'energia irradiata per unità di tempo, di frequenza, di superficie e di angolo solido:  $I_\nu = \frac{dE}{dt d\nu dA d\Omega}$



**Fig. 1.2:** *Cavità di corpo nero con pistone.*

Derivando queste equazioni

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = -\frac{4}{3} \frac{u}{T^2} + \frac{4}{3T} \frac{du}{dT}$$

da cui si ricava

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{4}{T} dT$$

che integrata

$$\log u = 4 \log T + \log a$$

dove  $\log a$  è la costante di integrazione. In questo modo si è ottenuta la *legge di Stefan-Boltzmann*

$$u(T) = aT^4 \quad (1.1)$$

Dato che per radiazione isotropa  $J_\nu = I_\nu$ , questa legge è legata alla funzione di Planck

$$u = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu = \frac{4\pi}{c} B(T)$$

dove la funzione integrata di Planck è definita

$$B(T) = \int B_\nu(T) d\nu = \frac{ac}{4\pi} T^4.$$

Il flusso emergente da una superficie che emette isotropicamente è dato da  $F = \pi B(T)$ . Questo porta a una nuova formulazione della Eq.(1.1)

$$F = \sigma T^4 \quad (1.2)$$

dove le costanti  $a$  e  $\sigma$  non possono essere determinate tramite argomenti termodinamici macroscopici, quindi ci si limita a riportarne il valore

$$\sigma \equiv \frac{ac}{4} = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$a \equiv \frac{4\sigma}{c} = 7.56 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

## 1.3 Caratteristiche dello Spettro di Corpo Nero

La ricerca di una legge per l'intensità della radiazione di corpo nero  $B_\lambda$  in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$  era un problema ancora aperto agli inizi del '900. Nei successivi paragrafi vengono discusse due trattazioni effettuate in questo periodo storico con principi fisici differenti che hanno portato alla determinazione della *legge di Planck* per l'intensità dello spettro in emissione di corpo nero.

### 1.3.1 Approccio Classico di Rayleigh-Jeans

I fisici britannici John William Strutt Rayleigh e James Jeans, basandosi sui principi della fisica newtoniana e dell'elettromagnetismo, proposero una legge per l'intensità di radiazione  $I_\lambda$  del tipo

$$I_\lambda \propto \frac{T}{\lambda^4}$$

in accordo con l'esperimento a grandi  $\lambda$ , ma errata a piccole lunghezze d'onda. Si supponga ora di avere a disposizione una cavità di corpo nero cubica di lato  $L$  e di volere calcolare la densità di energia di radiazione  $u(\nu)$  contenuta all'interno di frequenza compresa tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$

$$u(\nu)d\nu = \bar{\epsilon}N(\nu)d\nu \quad (1.3)$$

dove  $\bar{\epsilon}$  è l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità in risonanza con la frequenza  $\nu$  e  $N(\nu)d\nu$  il numero di onde stazionarie all'interno della cavità. Le onde si propagano in ogni direzione con versore di propagazione  $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$ . Un'onda stazionaria ha quindi un numero di nodi<sup>3</sup> pari a

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos\theta_i \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

da cui, effettuandone il quadrato e sommando

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2} L^2$$

che risulta essere l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio  $R = 2\nu L/c$ . Il numero di onde stazionarie tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  è pari al numero di punti a coordinate intere nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra  $R$  e  $R + dR$ . Se ci si pone nel limite termodinamico<sup>4</sup>, questo numero approssima molto bene il volume dell'ottante sferico

$$V = \frac{1}{8}4\pi R^2 dR = \frac{1}{8}4\pi \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \frac{2Ld\nu}{c} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} L^3 d\nu$$

La densità di modi di vibrazione permessi è pari al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità sferica

<sup>3</sup>I nodi di un'onda sono quei punti che rimangono fissi nel tempo, ovvero quei punti dove la funzione è sempre nulla.

<sup>4</sup>Il limite termodinamico viene raggiunto quando il volume  $V$  e il numero di particelle  $N$  tendono all'infinito ( $V \rightarrow +\infty$ ,  $N \rightarrow +\infty$ ) e  $N/V = \text{costante} < \infty$ .



$$N(\nu)d\nu = \frac{2V}{L^3} = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.4)$$

dove il 2 è dovuto all'esistenza di due direzioni di polarizzazione indipendenti per le onde elettromagnetiche.

A questo punto ci si concentra sul calcolo di  $\bar{\epsilon}$  tramite la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann. In meccanica statistica la funzione che indica la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$  è

$$f(\epsilon) = Ce^{-\epsilon/kT} = Ce^{-\beta\epsilon}$$

dove  $k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg } K^{-1}$  è la costante di Boltzmann e si introduce la notazione  $\beta = 1/kT$ . Il valore medio dell'energia degli oscillatori risulta essere

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^\infty f(\epsilon) d\epsilon} = \frac{\int_0^\infty \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} d\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \left( \log \int_0^\infty e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \right) = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT \quad (1.5)$$

Sostituendo nella Eq.(1.3) i risultati delle Eq.(1.4) e Eq.(1.5) si ottiene la densità di energia

$$u(\nu)d\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

Ricordando la relazione che intercorre tra lunghezza d'onda e frequenza

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

e ponendo  $u(\nu)d\nu = -u(\lambda)d\lambda$ , si può riscrivere la densità di energia in funzione della lunghezza d'onda, giungendo così alla *legge di Rayleigh-Jeans*

$$u(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4} \quad (1.6)$$

Questo risultato, ottenuto trattando la radiazione come un'onda che, ad ogni frequenza, può essere emessa con qualunque energia, non solo entra decisamente in contrasto con i dati sperimentali ma porta alla luce un problema ancor più grave: la divergenza di  $u(\lambda)$  per piccole lunghezze d'onda. La previsione da parte della Eq.(1.6) di una emissione enorme nel range di lunghezze d'onda dell'ultravioletto e dei raggi X fu denominata *catastrofe ultravioletta*.

### 1.3.2 Approccio Quantistico di Planck

La soluzione al problema della catastrofe ultravioletta fu trovata nel 1900 dal fisico tedesco Max Planck ipotizzando che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solamente a pacchetti discreti di energia, denominati *quanti*. Per ogni frequenza, quindi, la radiazione può trasportare solo una quantità ben precisa di energia pari a  $\epsilon = h\nu$ , dove  $h$  è una costante universale. L'emissione a una data frequenza può essere solamente del tipo

$$\epsilon_n = n\epsilon = nh\nu$$

Rispetto alla trattazione riportata nel paragrafo precedente, l'introduzione da parte di Planck dell'ipotesi quantistica porta ad una modifica del solo calcolo del valore medio dell'energia degli oscillatori

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \left( \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \right) = -\frac{d}{d\beta} \left( \log \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n \right) = \frac{d}{d\beta} \left( \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right)$$

L'energia media è

$$\bar{\epsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

che se sostituita nella Eq.(1.3) porta al risultato

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (1.7)$$

Riscrivendo questa equazione in funzione di  $\lambda$  si ottiene la *legge di Planck* per l'intensità di emissione di corpo nero

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} \quad (1.8)$$

la quale si trova in perfetto accordo con i dati sperimentali se  $h$ , definita *costante di Planck*, viene fissata a un valore pari a  $h = 6.62618 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$ .

Questo fondamentale risultato ha permesso di giustificare teoricamente<sup>5</sup> le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien<sup>6</sup>, le quali erano state dedotte fino a quel momento solo in via empirica.

Vengono riportate di seguito le leggi di Planck in termini di brillantezza in funzione sia della frequenza che della lunghezza d'onda

$$\boxed{B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}} \quad \boxed{B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}}$$

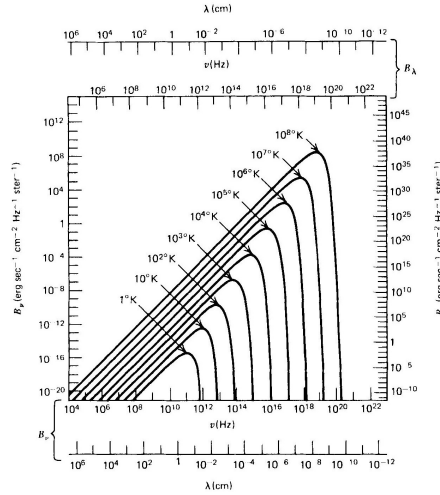
Si osserva immediatamente che le due espressioni non sono lineari l'una rispetto all'altra: infatti se si considera un intervallo in frequenza, si ottiene un intervallo in lunghezza d'onda che differisce dal primo di un fattore  $c/\lambda^2$ .

Una proprietà fondamentale delle curve di corpo nero, dette *planckiane*, è che non si intersecano mai, come si vede in Fig.1.3. Infatti, la temperatura determina in maniera univoca la curva di corpo nero: questa caratteristica suggerisce che la planckiana di un corpo più caldo si trovi sempre al di sopra della curva di uno più freddo.

Ogni curva di corpo nero può essere studiata in due regioni differenti dello spettro, a sinistra e a destra del picco di emissione che si denota in presenza di una  $\nu_{max}$  per la frequenza e di una  $\lambda_{max}$  per la lunghezza d'onda.

<sup>5</sup>Vedi Appendice A.

<sup>6</sup>Vedi Par.1.3.3.



**Fig. 1.3:** Spettri di corpo nero a varie temperature in scala logaritmica.

- Se  $h\nu \ll kT$  si ha l'approssimazione di Rayleigh-Jeans:

$$B_\nu(T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu} = 2kT \left( \frac{\nu}{c} \right)^2 \quad (1.9)$$

Per basse frequenze ( $\nu \ll \nu_{max}$ ), ovvero per fotoni poco energetici, il grafico logaritmico della planckiana è una retta di pendenza pari a 2.

- Se  $h\nu \gg kT$  si ha l'approssimazione di Wien:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

Dopo aver raggiunto il picco ( $\nu \gg \nu_{max}$ ) la brillantezza di un corpo nero diminuisce molto rapidamente con la frequenza.

### 1.3.3 Legge dello Spostamento di Wien

Per ricavare il valore di frequenza  $\nu_{max}$  corrispondente al massimo di emissione del corpo nero si pone uguale a zero la derivata della funzione di Planck fatta rispetto alla frequenza

$$\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} = 0$$

Per semplificare i conti si effettua la sostituzione  $x = \beta h\nu$  che porta a

$$\frac{\partial B_x(T)}{\partial x} = 0 \quad \iff \quad 3e^x - 3 - xe^x = 0$$

La cui soluzione approssimata risulta essere  $x = 2.82$ . In questo modo si è ottenuta la legge dello spostamento di Wien in funzione della frequenza:

$$h\nu_{max} = 2.82kT \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu_{max}}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz } K^{-1}$$

Ripetendo gli stessi calcoli per la legge di Planck in funzione della lunghezza d'onda si arriva alla formulazione della legge dello spostamento di Wien nella sua forma più nota:

$$\lambda_{max} = \frac{0.29}{T} \text{ cm K} \quad (1.10)$$

La legge di Wien mostra come lo spettro in emissione di un corpo nero a una certa temperatura presenti un picco che si sposta verso le basse frequenze al diminuire della temperatura stessa. La massima energia irradiata da un corpo, invece, cresce con la sua temperatura e con la frequenza massima delle onde da questo emesse, e quindi, si ha in corrispondenza di una lunghezza d'onda minima. Si noti infatti che i picchi di  $B_\nu(T)$  e  $B_\lambda(T)$  non avvengono nello stesso punto in lunghezza d'onda e frequenza<sup>7</sup>. Da queste osservazioni si deduce che al variare della temperatura del corpo varia il suo colore: corpi caldi sono di colore blu mentre corpi freddi tendono al rosso.

## 1.4 Temperatura del Corpo Nero

Per lo studio della radiazione di corpo nero risulta importante considerare differenti temperature specifiche, utilizzate a seconda del campo fisico a cui si fa riferimento.

- *Temperatura di Brillanza  $T_b$*  : è la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero per emettere la radiazione in esame. Si osserva che questa non è la reale temperatura del corpo se questo non è un corpo nero. La  $T_b$  viene spesso utilizzata in radioastronomia dove è applicabile l'approssimazione di Rayleigh-Jeans alla formula di Planck. Invertendo la Eq.(1.9)

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} B_\nu(T)$$

In generale la temperatura di brillanza è una funzione della frequenza  $\nu$ . Se l'oggetto in esame è un corpo nero, la  $T_b$  è la stessa a tutte le frequenze. Nella regione di Wien la temperatura di brillanza non viene utilizzata a causa della rapida decrescita di  $B_\nu(T)$  con la frequenza e del fatto che non è possibile formulare una teoria del trasporto radiativo lineare in funzione di  $T_b$ .

- *Temperatura Effettiva  $T_{eff}$*  : è la temperatura legata al flusso totale emesso dalla sorgente, integrato su tutte le frequenze. Si ottiene eguagliando il flusso della sorgente al flusso di un corpo nero a temperatura  $T_{eff}$

$$F = \int \cos\theta B_\nu(T) d\nu d\Omega \equiv \sigma T_{eff}^4$$

- *Temperatura di Colore  $T_c$*  : poichè una sorgente reale non è un corpo nero perfetto, si è introdotto il concetto di temperatura di colore di una data radiazione come la temperatura associata a un corpo nero ideale che emette una radiazione cromaticamente simile alla radiazione in esame<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Si osserva che  $\lambda_{max}\nu_{max} \neq c$ .

<sup>8</sup>La temperatura effettiva e la temperatura di brillanza dipendono dalla magnitudine della sorgente, mentre la temperatura di colore dipende univocamente dalla forma dello spettro osservato.

## 2 | Applicazioni Astrofisiche

La radiazione di corpo nero è un modello ideale che presenta molte applicazioni in astrofisica in quanto offre un'ottima approssimazione di oggetti che hanno radiazione completamente termalizzata. Alcuni esempi vengono riportati nei seguenti paragrafi.

### 2.1 Le Stelle

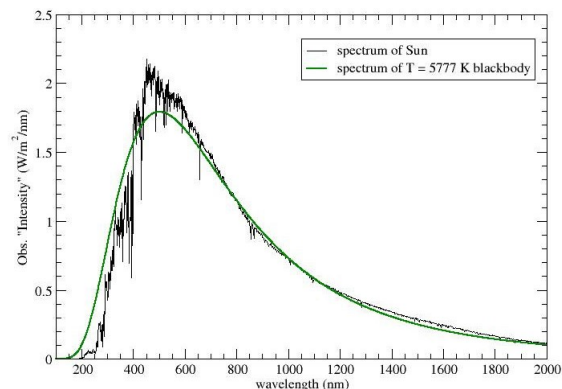
Le stelle sono corpi celesti che posso essere considerati, in prima approssimazione, dei corpi neri, in quanto le uniche onde elettromagnetiche che non possono essere assorbite dalla loro superficie sono quelle di lunghezza d'onda maggiore del diametro della stella stessa. La radiazione che determina lo spettro della stella proviene dagli strati più esterni dell'atmosfera stellare, in particolare dalla sua fotosfera, ovvero la zona in cui la stella passa dal regime otticamente spesso al regime otticamente sottile: dall'analisi di questi spettri è possibile risalire a varie informazioni sulla stella, come la temperatura, il colore e la composizione chimica.

Approssimando la stella a una sfera di raggio  $R$  e di luminosità  $L$ , la Eq.(1.2) diventa

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (2.1)$$

dove l'utilizzo della temperatura effettiva è conseguente al fatto che la stella non sia un corpo nero perfetto.

La temperatura gioca un ruolo fondamentale nella definizione dello spettro della stella: oltre a determinare lo spostamento del picco di emissione, come previsto dalla legge di Wien (Eq.(1.10)), essa provoca la comparsa di righe in assorbimento dovute a transizioni elettroniche tra diversi livelli energetici degli elementi chimici presenti nell'atmosfera stellare.

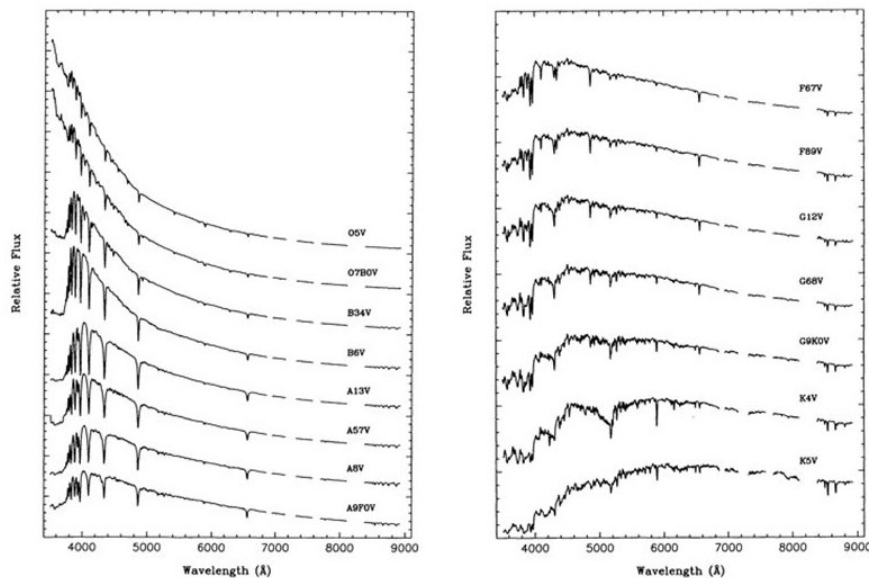


**Fig. 2.1:** Confronto tra lo spettro solare e lo spettro di un corpo nero a  $T = 5777$  K.

Quanto più le righe di assorbimento risultano marcate, tanto più lo spettro della stella devia da quello di corpo nero. In alcuni casi le righe di assorbimento dei metalli sono così fitte da generare una significativa diminuzione dello spettro continuo. Tale fenomeno è noto come *line blanketing*, visibile in Fig.2.1 per  $\lambda < 450 \text{ nm}$ .

### 2.1.1 Classificazione Spettrale

La classificazione delle stelle alla quale si fa riferimento oggi è quella di Yerkes, che si basa sulle classi spettrali di Harvard. Nei primi anni del 1900, Annie Cannon e i suoi colleghi dell'Harvard Observatory hanno ordinato una grande quantità di spettri stellari in una sequenza continua in base alla presenza o assenza di determinate righe in assorbimento. La sequenza spettrale di Harvard è risultata essere una sequenza di temperatura: le classi spettrali sono sette e denotate dalle lettere **O,B,A,F,G,K,M**, ognuna divisa in 10 sottoclassi individuate da una cifra da 0 a 9 che segue la classe. Il criterio quantitativo dell'appartenenza di una stella all'una o all'altra classe spettrale è fornito dal rapporto delle intensità di righe spettrali. La caratteristica principale di questa classificazione è che ogni classe spettrale è definita da un range di temperature<sup>1</sup>. La temperatura decresce dalla classe **O** alla classe **M** e la colorazione apparente varia gradualmente dal blu al rosso. Infine, in relazione alla luminosità, compaiono sei classi (Ia, Ib, II, III, IV e V) determinate dalle caratteristiche delle righe spettrali, le quali dipendono dalla gravità superficiale della stella, fortemente correlata alla luminosità: si parte da stelle supergiganti luminose (Ia) per arrivare a stelle di sequenza principale (V).



**Fig. 2.2:** Spettri di stelle di sequenza principale di differente classe spettrale, da O a K [Silva and Cornell, 1992].

<sup>1</sup>Come osservato nel paragrafo precedente, la temperatura è un fattore determinante per la ionizzazione e l'eccitazione degli atomi che influiscono sulla formazione degli spettri.

### 2.1.2 Il Sole

Come esempio si applicano le formule ricavate nei precedenti paragrafi al Sole. Innanzitutto, dalle osservazioni dirette sono noti la luminosità solare  $L_{\odot} = 3.839 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$  e il raggio  $R_{\odot} = 6.960 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ . Invertendo la Eq.(2.1) e sostituendo questi dati si ottiene la temperatura superficiale effettiva

$$T_{\odot} = \left( \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} \simeq 5777 \text{ K}$$

Direttamente dalla Eq.(1.2) si ottiene il flusso alla superficie

$$F_{\odot} = \sigma T_{\odot}^4 \simeq 6.316 \cdot 10^{10} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

Infine, utilizzando la legge di Wien è possibile stimare il picco di emissione dello spettro solare

$$\lambda_{max} = \frac{0.29}{T_{\odot}} \simeq 5.014 \cdot 10^{-5} \text{ cm} = 5014 \text{ \AA} = 501.4 \text{ nm}$$

Questa lunghezza d'onda appartiene allo spettro del visibile, in particolare corrisponde a luce verde<sup>2</sup>: queste caratteristiche collocano il sole nella classe spettrale G2 V.

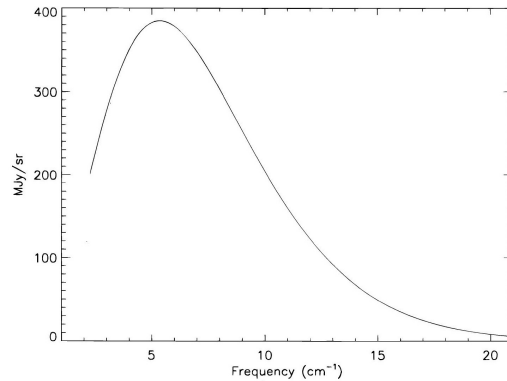
## 2.2 La Radiazione Cosmica di Fondo

Il fondo cosmico a microonde, o radiazione cosmica di fondo (Cosmic Microwave Background, CMB) è una radiazione elettromagnetica che permea l'intero universo, proveniente dall'epoca della Ricombinazione, quando i primi atomi poterono formarsi dal plasma primordiale e l'universo divenne trasparente alla luce.

Il CMB è stato al centro di svolte fondamentali nella cosmologia: la sua scoperta, avvenuta per caso da parte di due ricercatori dei Bell Laboratories nel 1964, Arno Penzias e Robert Wilson, e insignita del premio Nobel per la fisica nel 1978, fu una prova fondamentale a favore del modello cosmologico del Big Bang, confermando che l'universo si espanse raffreddandosi dal suo stato primordiale ad alta densità. Se la massa si conserva in un universo in espansione, allora nel passato l'universo era più denso di oggi. In questo universo giovane denso e molto caldo ( $T \simeq 10^4 \text{ K}$ ), i fotoni altamente energetici impedivano agli elettroni di legarsi ai protoni, di conseguenza la materia barionica era completamente ionizzata e gli elettroni liberi rendevano l'universo opaco. Un corpo denso, caldo e opaco emette radiazione di corpo nero. Quando la temperatura scese a  $T \simeq 3000 \text{ K}$ , ioni ed elettroni si combinarono per formare atomi neutri. I fotoni di corpo nero hanno così incominciato a muoversi liberamente nell'universo, senza effettuare scattering con gli elettroni liberi. La radiazione di corpo nero che pervade l'universo oggi può essere vista come i resti di un universo talmente caldo e denso da essere opaco. In seguito al disaccoppiamento di materia e radiazione, i fotoni della CMB, termalizzati da continui processi di scattering Thompson, hanno diminuito sensibilmente la loro temperatura.

---

<sup>2</sup>In realtà il Sole emette radiazione continua attorno a questa lunghezza d'onda massima e lo scattering dei fotoni dovuto all'atmosfera sposta il picco nel giallo: per questo motivo il Sole non appare verde all'occhio umano.



**Fig. 2.3:** Spettro della CMB rilevato dal satellite COBE. Gli errori nelle misurazioni sono più piccoli dello spessore della riga. [Fixsen et al., 1996]

Misure effettuate dal satellite *COsmic Background Explorer* (COBE), operante a varie lunghezze d'onda comprese tra  $1\text{ cm} \leq \lambda \leq 0.5\text{ mm}$ , hanno rilevato che lo spettro della CMB fitta molto bene quello di un corpo nero a temperatura

$$T_{CMB} = 2.725 \pm 0.001\text{ K}$$

con un picco in emissione a  $\nu_{max} = 160.2\text{ GHz}$ , corrispondente a  $\lambda = 1.9\text{ mm}$ .

I risultati ottenuti dall'analisi dei dati recepiti da COBE mostrano che le fluttuazioni dello spettro della CMB sono inferiori a  $\Delta\epsilon/\epsilon \simeq 10^{-4}$  rispetto alla curva di corpo nero, come si può notare in Fig.2.3. La mancanza di spostamenti dalla legge di Planck indica che nessun evento significativo dal punto di vista termodinamico<sup>3</sup> è avvenuto in tempi recenti, ovvero successivamente al disaccoppiamento di materia e radiazione ( $z \simeq 1000$ ). Eventuali piccole deviazioni sono dovute alla propagazione di fenomeni avvenuti in tempi remoti. Ad epoche più recenti, l'universo ha continuato a raffreddarsi e poichè materia e radiazione non sono più in equilibrio termodinamico, ciascuna ha proseguito il suo cammino in maniera indipendente.

### 2.2.1 Anisotropia di Dipolo della CMB

Una grande scoperta effettuata dal satellite COBE è la distorsione di dipolo nella temperatura del fondo cosmico a microonde: nonostante ogni punto del cielo abbia uno spettro di corpo nero pressochè perfetto, in una metà del cielo lo spettro viene leggermente shiftato verso il blu a temperature più alte, mentre nell'altra verso il rosso a temperature inferiori. La distorsione di dipolo risulta essere uno spostamento Doppler dovuto semplicemente al moto del satellite rispetto al sistema di riferimento in cui la CMB è isotropa.

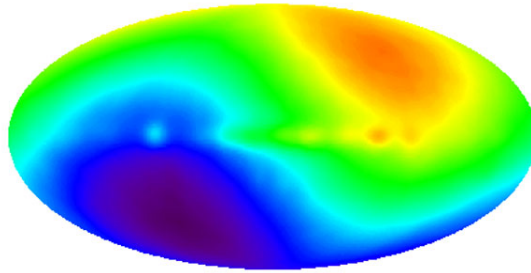
Un osservatore in moto a velocità  $v$  rispetto alla radiazione cosmica di fondo vede una variazione di temperatura, dovuta all'effetto Doppler, pari a

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} = \gamma \frac{v \cos\theta}{c}$$

<sup>3</sup>Ad esempio, interazioni tra la radiazione cosmica di fondo e la materia aggregata o in fase di aggregazione.



dove  $\gamma$  è il fattore di Lorentz e  $\theta$  è l'angolo compreso tra la linea di vista e la direzione del moto del satellite. Dopo aver effettuato correzioni per il moto orbitale di COBE rispetto alla Terra ( $v \simeq 8 \text{ km s}^{-1}$ ), della Terra rispetto al Sole ( $v \simeq 30 \text{ km s}^{-1}$ ), del Sole rispetto al centro della Via Lattea ( $v \simeq 220 \text{ km s}^{-1}$ ), della Via Lattea rispetto al centro di massa del Gruppo Locale ( $v \simeq 80 \text{ km s}^{-1}$ ), si ottiene che il Gruppo Locale si muove in direzione della costellazione Hydra con una velocità circa di  $v_{GL} \simeq 630 \pm 20 \text{ km s}^{-1} = 0.0021c$ . Questa velocità peculiare è la stessa che ci si aspetta come risultato dell'accelerazione gravitazionale da parte del più grande agglomerato di materia nelle vicinanze del Gruppo Locale.

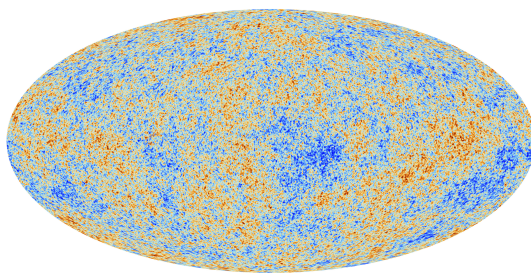


**Fig. 2.4:** *Distorsione di dipolo nella temperatura della CMB misurata da COBE: in blu sono rappresentate le zone più fredde, in verde-rosso le più calde.*

Sottraendo all'immagine della CMB la distorsione di dipolo si ottengono fluttuazioni minime. Sia  $\langle T_{CMB} \rangle = 2.725 \text{ K}$  la temperatura media della radiazione cosmica di fondo e sia  $T(\phi, \theta)$  la temperatura in un punto generico del cielo, allora la fluttuazione di temperatura in quel punto risulta essere

$$\frac{\delta T}{T}(\phi, \theta) = \frac{T(\phi, \theta) - \langle T_{CMB} \rangle}{\langle T_{CMB} \rangle} \Rightarrow \left\langle \frac{\delta T}{T}(\phi, \theta) \right\rangle \simeq 1.1 \cdot 10^{-5}$$

La temperatura varia al massimo di  $30 \mu\text{K}$  attraverso il cielo<sup>4</sup>: la radiazione cosmica di fondo è molto vicina a essere una radiazione isotropa e il suo spettro è ciò che si avvicina maggiormente allo spettro di un corpo nero perfetto.



**Fig. 2.5:** *Fluttuazioni della CMB in temperatura.*

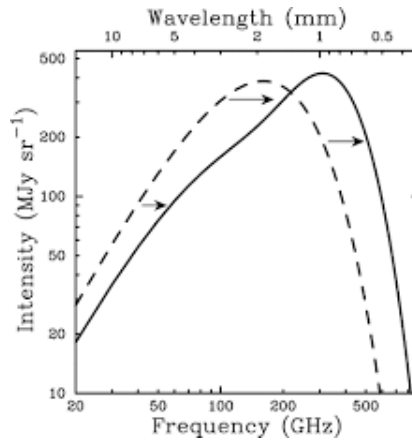
<sup>4</sup>Questa analisi esclude le zone del cielo contaminate dall'emissione in primo piano della nostra galassia.

### 2.2.2 Effetto Sunyaev-Zel'dovich

Quando i fotoni a bassa energia della CMB attraversano un gas ionizzato caldo ( $T \simeq 10^8 K$ ), ad esempio in un ammasso di galassie, generalmente una piccola frazione di essi subisce un processo di scattering chiamato *Inverse Compton* che permette loro di guadagnare energia tramite l'interazione con gli elettroni ad alta energia del gas. Questo processo causa uno shift dello spettro di corpo nero a frequenze più alte, come si nota in Fig.2.6. Per un gas contenente elettroni che seguono una distribuzione di Maxwell-Boltzmann, la frequenza dei fotoni scatterati cresce in media di una quantità pari a

$$\left\langle \frac{\Delta\nu}{\nu} \right\rangle = \frac{4kT_e}{m_e c^2} \tau$$

dove  $T_e$  è la temperatura degli elettroni e  $\tau$  l'opacità del gas<sup>5</sup>. Questo processo è definito *effetto Sunyaev-Zel'dovich termico*.



**Fig. 2.6:** Shift e distorsione dello spettro di corpo nero della CMB in seguito all'effetto Sunyaev-Zel'dovich.

Nonostante lo spettro finale risulti distorto da effetti dovuti principalmente a temperatura e dimensioni della nube di gas<sup>6</sup>, si nota che nella regione di Rayleigh-Jeans la temperatura di brillantezza della CMB risulta inferiore rispetto a quella dello spettro imperturbato. La decrescita è stimabile nel seguente modo

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} \simeq -\frac{2kT_e}{m_e c^2} \tau \simeq -10^{-4}$$

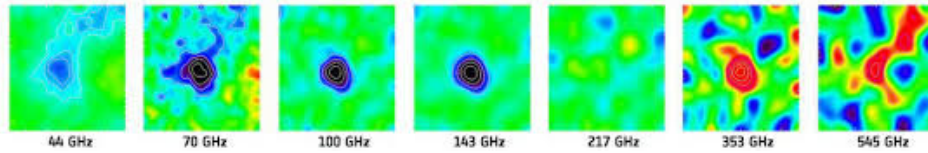
Ad una particolare frequenza, il segno della variazione cambia e il decremento di temperatura si trasforma in un aumento. Nel limite  $y \ll 1$ , la frequenza di cross-over  $\nu_c$  è pari a

$$\nu_c = 3.83 \frac{T_{CMB}}{h} \simeq 217 \text{ GHz}$$

Nel processo Sunyaev-Zel'dovich l'energia totale dei fotoni nello spettro di radiazione aumenta: la CMB risulta più calda del previsto.

<sup>5</sup>La probabilità che un fotone della CMB venga scatterato è assumibile pari all'opacità del gas  $\tau$ .

<sup>6</sup>Il grado di distorsione dipende dal *parametro Compton*  $y$  che indica l'efficienza di trasferimento di energia dal plasma termico ai fotoni, dove  $y = \frac{kT_e n_e \sigma_T^2 D^2}{m_e c^2}$  e  $D$  sono le dimensioni del plasma.



**Fig. 2.7:** Ammasso di galassie Abell 2319 osservato dal satellite Planck. Nei quattro frame a sinistra, ovvero a frequenze inferiori di  $\nu_c$ , il segnale è negativo (blu), segno che l'ammasso risulta più freddo del segnale medio della CMB. L'assenza di segnale a  $\nu = 217$  GHz è una caratteristica dell'effetto Sunyaev-Zel'dovich. Nei due frame a destra, il segnale positivo (rosso) indica che l'ammasso risulta più caldo della CMB.

Galassie e ammassi di galassie possono avere un moto relativo rispetto al sistema di riferimento della CMB nelle loro rispettive posizioni in un universo in espansione: si parla in questo caso di velocità peculiari. In media, anche gli elettroni del plasma nell'ammasso di galassie possiedono questa velocità. Di conseguenza, lo scattering dei fotoni della CMB da parte di questi elettroni riflette parzialmente questo moto: si produce così uno spostamento Doppler aggiuntivo allo scattering Inverse Compton dei fotoni. Questa ulteriore variazione dello spettro della CMB è definita *effetto Sunyaev-Zel'dovich cinetico*. Questo effetto si è scoperto essere separabile da quello termico, in particolare e con maggiore efficacia nelle regioni dove quest'ultimo è assente (vedi Fig.2.7). La determinazione di velocità peculiari di ammassi di galassie permette agli astronomi di mappare la crescita di strutture nell'universo su larga scala. Questo argomento è di fondamentale importanza nel campo astrofisico e l'effetto Sunyaev-Zel'dovich cinetico sembra essere un metodo estremamente promettente per approcciarlo.



# A | Determinazione delle Leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien

La conferma che il risultato ottenuto tramite l'approccio quantistico fosse corretto viene rimarcata dalla possibilità di dedurre teoricamente per la prima volta le leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien a partire dalla legge di Planck.

## A.1 Legge di Stefann-Boltzmann

Si calcola la densità di energia totale, integrando la Eq.(1.7)

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

e introducendo per semplicità la notazione

$$a = \frac{8\pi h}{c^3} \quad b = \frac{h}{kT}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} u &= a \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{b\nu} - 1} = a \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 e^{-b\nu}}{1 - e^{-b\nu}} d\nu = \\ &= a \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-b\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-b\nu})^n d\nu = a \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \nu^3 e^{-b\nu n} d\nu = \\ &= -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{d(bn)^3} \int_0^{\infty} e^{-b\nu n} d\nu = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{d(bn)^3} \frac{1}{bn} = \\ &= \frac{6a}{b^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

Ricordando che la serie che compare converge a un particolare valore della funzione  $\zeta$  di Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

si arriva al risultato finale

$$u = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4 \tag{A.1}$$

Si ottiene quindi l'andamento dell'intensità di radiazione in termini della quarta potenza della temperatura, come previsto dalla Eq.(1.1).

Sostituendo i valori numerici delle costanti  $h, k, c$  nella Eq.(A.1) si ottiene il valore della costante  $\sigma$  misurato sperimentalmente e riportato nel paragrafo 1.2.

## A.2 Legge dello Spostamento di Wien

Ponendo per semplicità

$$\alpha = 8\pi hc \quad \gamma = \frac{hc}{kT}$$

si può riscrivere l'Eq.(1.8) nella forma

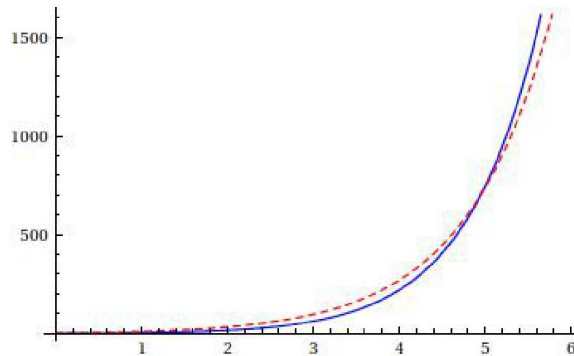
$$u(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda^5} (e^{\gamma/\lambda} - 1)^{-1}$$

Se a questo punto si calcola la derivata rispetto a  $\lambda$  e la si pone uguale a zero

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{\alpha}{\lambda^6} (e^{\gamma/\lambda} - 1)^{-1} \left( 5 - \frac{\gamma e^{\gamma/\lambda}}{e^{\gamma/\lambda} - 1} \right) = 0$$

si ottengono due valori che forniscono la posizione dei massimi e minimi della funzione  $u(\lambda)$ , ovvero  $\lambda = \infty$  e  $\lambda = \lambda_{max}$ . Effettuando il cambio di variabile  $x = \gamma/\lambda$  si arriva alla soluzione risolvendo l'equazione trascendente

$$5(e^x - 1) = xe^x \tag{A.2}$$



**Fig. A.1:** Funzioni della Eq.(A.2);  $xe^x$  in blu e  $5(e^x - 1)$  in rosso tratteggiato.

La soluzione viene ricavata per via grafica ricercando l'intersezione tra le due curve presenti in Fig.A.1: la soluzione diversa da 0 è unica e il suo valore è pari a  $x_0 = 4.96511$ . In conclusione

$$\lambda_{max} = \frac{\gamma}{x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{hc}{kT} = \frac{const}{T}$$

Anche in questo caso, sostituendo i valori numerici delle costanti  $h, k, c$  si ottiene un valore in perfetto accordo con la costante trovata empiricamente da Wien, riportata nella Eq.(1.10).

# Bibliografia

## Libri

- [1] H. Bradt. *Astrophysics Processes-The Physics of Astronomical Phenomena*. Cambridge University Press, 2008.
- [7] H. Karttunen et al. *Fundamental Astronomy*. Vol. 5. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [8] M. S. Longair. *High Energy Astrophysics*. Vol. 3. Cambridge University Press, 2011.
- [10] M. S. Rybicki e A. P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. Vol. 2. WILEY-VCH Verlag GmbH 62 Co. KGaA, 2004.
- [11] B. Ryden. *Introduction to Cosmology*. Vol. 2. Cambridge University Press, 2017.

## Articoli

- [6] D. J. Fixsen et al. «The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set». In: *Apj* 473 (dic. 1996), p. 576.
- [12] D. R. Silva e M. E. Cornell. «A New Library of Stellar Optical Spectra». In: *Apj* 81 (ago. 1992), p. 865.

## Dispense

- [2] E. Ceccotti. *Processi di Radiazione e MHD*. Università degli Studi di Bologna, 2017.
- [3] C. Fanti e R. Fanti. *Una finestra sull'Universo "Invisibile"-Lezioni di Radioastronomia*. Università degli Studi di Bologna, 2012.
- [4] L. Ferrari. *Elementi di Termodinamica Statistica*. Università degli Studi di Bologna, 2019.
- [5] F. R. Ferraro. *Astrofisica Stellare*. Università degli Studi di Bologna, 2019.
- [9] F. Ravanini. *Istituzioni di Fisica Teorica*. Università degli Studi di Bologna, 2017.