

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Teoria classica dei campi e propagazione di particelle

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Giulio Ribani

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Preambolo	3
1 Teoria classica dei campi	5
1.1 Principio d'azione	5
1.1.1 In meccanica classica	5
1.1.2 In teorie di campo	8
1.2 Trasformazioni e simmetrie	10
1.2.1 Trasformazioni di riferimento e principio di relatività	10
Trasformazioni di Lorentz	12
1.2.2 Trasformazioni di coordinate	13
1.2.3 Trasformazioni attive e teorema di Noether	15
Tensore energia-impulso	17
1.3 Campo elettromagnetico	19
2 Propagazione di particelle in presenza di sorgenti	25
2.1 Campo di Klein–Gordon	25
2.2 Funzioni di Green	29
2.3 Sorgenti per il campo di Klein–Gordon	31
2.3.1 Potenziale di Yukawa	31
2.3.2 Sorgenti dipendenti dal tempo	34
Propagatore di Feynman	41
3 Propagazione libera di particelle	46
3.1 Evoluzione temporale	47
3.2 Equazione del calore	49
3.3 Equazione di Schrödinger	50
3.3.1 Un'applicazione: l'esperimento della doppia fenditura	52
A Gruppo di Lorentz	56
B Distribuzioni	61

C Integrali gaussiani	71
Bibliografia	72

Preambolo

In questa tesi vogliamo introdurre lo studio della propagazione di particelle, secondo la teoria classica dei campi e la meccanica quantistica. In tali teorie le particelle sono identificate con le onde di opportuni campi. Questo punto di vista è alla base di tutte le nostre considerazioni. Ora, le onde si possono propagare liberamente, oppure in presenza di sorgenti. Un qualsiasi processo che perturbi l'evoluzione libera del campo, compreso un processo di misura, può essere trattato come una sorgente, che per noi sarà descritta da un termine non omogeneo nell'equazione di campo. Così, si pone il problema di risolvere tale equazione in presenza di una sorgente arbitraria. Gli strumenti matematici adatti allo scopo sono le funzioni di Green, soluzioni dell'equazione di campo in presenza di una sorgente elementare, cioè deltiforme. Evidentemente una tale equazione va intesa in senso distribuzionale, e così dedicheremo un'ampia appendice alla revisione della teoria delle distribuzioni, che ricorrono di continuo nella nostra trattazione. Quasi dappertutto cercheremo di giustificare le operazioni formali compiute, siccome la comprensione della teoria fisica deve essere fondata il più possibile sulla padronanza dei suoi metodi matematici.

La nostra discussione non può che partire dall'introduzione del formalismo lagrangiano per le teorie di campo, in cui l'azione costituisce uno strumento tanto sintetico quanto potente per studiare la dinamica. Sull'azione si possono effettuare vari tipi di trasformazioni, che avremo l'occasione di discutere mettendo in evidenza il legame tra le trasformazioni di riferimento e le simmetrie dell'azione, e tra queste e le grandezze conservate durante il moto. Dimostreremo il teorema di Noether e lo applicheremo in particolare allo studio delle simmetrie del campo elettromagnetico, deducendo l'espressione dei tensori dell'energia-impulso e del momento angolare.

Nel secondo capitolo, partiremo dalla più semplice lagrangiana per un campo relativistico, il campo di Klein–Gordon, per descrivere la propagazione di particelle scalari in presenza di sorgenti. Il potenziale di Yukawa fornirà il primo esempio di interazione tra sorgenti mediata dalle particelle virtuali associate al campo. Il nocciolo del capitolo sarà il calcolo delle funzioni di Green, o propagatori, per il campo dipendente dal tempo, che verrà condotto servendosi del metodo distribuzionale generale. Questo procedimento permette di ottenere una formula che esprime tutte le possibili funzioni di Green, da cui si ricavano per specializzazione i propagatori ritardato, avanzato e di Feynman. Ac-

cenneremo all'interpretazione "causale" di quest'ultimo, e prenderemo in considerazione l'interazione del campo con sorgenti reali e complesse. Sottolineeremo come il metodo solitamente usato per calcolare i propagatori, che consiste nell'applicare una certa prescrizione per evitare i poli sul cammino d'integrazione, equivalga ad usare una prescrizione del tutto arbitraria, e poi aggiungere una soluzione dell'equazione di campo omogenea per ottenere il propagatore che soddisfa le condizioni al contorno desiderate.

L'ultimo capitolo sarà invece dedicato alla propagazione libera delle particelle, che nel caso non relativistico (a cui corrisponde un'equazione del primo ordine nel tempo) può essere studiata ricorrendo al principio di Huygens, e cioè introducendo un nuovo tipo di propagatore, che permette di costruire la soluzione dell'equazione d'onda se è nota la condizione iniziale. Questa volta non introdurremo il principio d'azione che conduce all'equazione di Schrödinger per una particella non relativistica, ma troveremo invece utile metterne in luce il nesso con l'equazione del calore. Sebbene quest'ultima descriva un campo reale, mentre la funzione d'onda di una particella è in generale complessa, l'analogia formale può essere usata per illustrare alcune somiglianze tra i rispettivi fenomeni di propagazione. Useremo il propagatore di Schrödinger libero per calcolare l'evoluzione temporale di un pacchetto d'onda gaussiano, e nella sezione finale applicheremo queste formule al classico esperimento della doppia fenditura, effettuato con un singolo elettrone non relativistico.

Diamo, ora, alcune indicazioni notazionali. Indicheremo in grassetto i vettori tridimensionali. Non saranno invece usate particolari notazioni per le grandezze con componenti in parte spaziali e in parte temporali. Le lettere greche saranno riservate per gli indici tensoriali, le lettere latine distingueranno gli indici puramente spaziali. Per un quadrivettore, prendiamo come esempio il quadrivettore posizione x , useremo quindi le seguenti notazioni equivalenti per denotarne le componenti controvarianti:

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x}).$$

Useremo la metrica $\eta = \text{diag}(-, +, +, +)$, e adotteremo la convenzione di sommare implicitamente sugli indici ripetuti, posti uno in alto e uno in basso:

$$\sum_{\mu=0}^3 p_\mu x^\mu = p_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu x^\mu = p^\nu x_\nu = p \cdot x.$$

Non sarà invece sottintesa la somma su due indici posti entrambi in alto o in basso. La velocità della luce è indicata con c , la costante di Planck ridotta con \hbar . Solo nel secondo capitolo useremo unità naturali in cui $c = \hbar = 1$.

Capitolo 1

Teoria classica dei campi

1.1 Principio d'azione

Un principio d'azione è alla base di tutte le moderne teorie fisiche: meccanica classica, meccanica relativistica, meccanica quantistica, teorie di campo, relatività generale, teorie di stringa. Il suo uso estensivo è merito della sua semplicità e delle possibilità speculative che offre. Esso permette di costruire una teoria su un unico oggetto matematico, l'azione, in cui sono già presenti tutte le proprietà di simmetria che la teoria in questione deve soddisfare. Tra le altre cose, l'uso dell'azione è utile per introdurre in modo manifesto l'invarianza relativistica, e apre la strada alla trattazione della meccanica quantistica con gli integrali di cammino.

Per fondare una teoria su un principio d'azione, è necessario individuare un insieme di *coordinate generalizzate*, la cui evoluzione temporale dà la dinamica del sistema fisico. L'*azione* è un funzionale che assegna ad ogni traiettoria del sistema un numero reale. Più precisamente, l'azione si ottiene come integrale della funzione di Lagrange, o *lagrangiana*, che dipende dalle coordinate del sistema e dalle loro derivate e sostanzialmente identifica il sistema stesso. Il principio d'azione afferma che le traiettorie fisiche sono quelle che rendono stazionario il funzionale d'azione, cioè ne annullano la variazione prima, con opportune condizioni al contorno. Vediamo di chiarire questi punti in modo più formale, facendo gli esempi della meccanica classica e delle teorie di campo.

1.1.1 Principio d'azione in meccanica classica

Un sistema meccanico è in genere un insieme di punti materiali, in numero finito; le coordinate generalizzate allora individuano la posizione nello spazio di questi punti. Il sistema è pertanto descritto dalle posizioni $q^i(t)$ dei punti in funzione del tempo, che assume quindi il ruolo di variabile indipendente. Le informazioni essenziali sul sistema sono contenute nella lagrangiana $\mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$, che nel caso più generale dipende anche esplicitamente dal tempo, e ha le dimensioni di una energia.

L'azione $S[q^i]$, funzione della traiettoria, si ottiene integrando la lagrangiana tra due istanti temporali fissati t_1 e t_2 :

$$S[q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q^i(t), \dot{q}^i(t), t), \quad (1.1)$$

pertanto S ha le dimensioni di \hbar . Dal punto di vista matematico, per i nostri scopi è sufficiente richiedere che la lagrangiana e le traiettorie ammissibili del sistema, tra le quali si ricerca la traiettoria fisica, siano due volte differenziabili con continuità rispetto a tutti i loro argomenti. Inoltre le traiettorie devono assumere valori fissati agli estremi di integrazione:

$$q^i(t_1) = q_1^i, \quad q^i(t_2) = q_2^i. \quad (1.2)$$

Sotto queste condizioni si possono provare alcuni teoremi fondamentali del calcolo variazionale. Diciamo anzitutto cosa si intende con variazione prima del funzionale d'azione.

Definizione 1.1. La *variazione prima* $\delta S(q^i)$ del funzionale (1.1) è un funzionale lineare che a una traiettoria $h^i(t)$ associa il numero reale

$$\delta S(q^i)[h^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} h^i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \dot{h}^i(t) \right], \quad (1.3)$$

laddove le derivate della lagrangiana sono calcolate sulla traiettoria $q^i(t)$.

La definizione ha particolare significato quando h^i è una deformazione di q^i , che si annulla agli estremi:

$$h^i(t_1) = h^i(t_2) = 0. \quad (1.4)$$

Diremo allora che la traiettoria deformata $q^i + h^i$ è una *variazione ammissibile* di q^i , e pertanto d'ora in poi scriveremo δq^i invece di h^i . La (1.3) è chiaramente una definizione formale che, nel limite in cui δq^i e $\delta \dot{q}^i$ sono piccoli, si riduce alla differenza

$$\delta S(q^i)[\delta q^i] \approx S[q^i + \delta q^i] - S[q^i]. \quad (1.5)$$

Ciò mostra che la variazione prima di un funzionale ha un significato analogo al differenziale per funzioni reali di variabili reali. Per brevità, spesso indicheremo semplicemente la variazione dell'azione con δS , sottintendendone gli argomenti.

Definizione 1.2. Se la variazione prima dell'azione si annulla su una certa traiettoria $q^i(t)$ per ogni sua variazione ammissibile, diremo che tale traiettoria è stazionaria per l'azione, o che è una *estremale*.

Questa condizione è ridotta a una equazione differenziale dal seguente fondamentale

Teorema 1.3. *La traiettoria $q^i(t)$ è estrema per il funzionale d'azione (1.1), con le condizioni al contorno (1.2), se e solo se soddisfa le equazioni di Eulero–Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0. \quad (1.6)$$

Per provare questo teorema è necessario far uso del seguente lemma, che è valido nella stessa forma anche per gli integrali multipli.

Lemma 1.4. *Sia $\psi(t)$ una funzione continua. Se la relazione*

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \psi(t) h(t) = 0 \quad (1.7)$$

vale per ogni funzione $h(t)$ che è due volte differenziabile con continuità e si annulla agli estremi di integrazione, allora $\psi(t) = 0$ identicamente.

Dimostrazione del teorema 1.3. Consideriamo la variazione dell'azione in corrispondenza della traiettoria variata $q^i + \delta q^i$ e integriamo per parti (osservando che $\delta \dot{q}^i = d\delta q^i/dt$):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right] \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Questa variazione si deve annullare per ipotesi. Ora, il secondo termine sparisce in virtù delle condizioni al contorno $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$. Applicando il lemma 1.4, data l'arbitrarietà di δq^i , si vede che deve essere soddisfatta l'equazione (1.6), per ogni i . \square

Possiamo ora enunciare il *principio d'azione*, valido come detto sia in meccanica che in teorie di campo.

Principio 1.5 (d'azione). *La traiettoria del moto di un sistema fisico è estrema per il funzionale d'azione.*

Dunque, trovare le traiettorie del moto di un sistema meccanico, che rendono stazionario il funzionale d'azione, equivale a risolvere l'equazione (1.6).¹ Questa è una equazione del secondo ordine nel tempo, che necessita di due condizioni al contorno. Esse possono essere le stesse usate nel teorema 1.3, cioè i valori delle coordinate agli estremi, oppure, ad esempio, il valore delle coordinate e delle loro derivate all'istante iniziale.

¹Precisiamo che, sebbene in genere si faccia riferimento al principio variazionale col nome di principio di minima azione, l'equazione di Eulero–Lagrange è una condizione necessaria ma non sufficiente per avere un minimo, e d'altra parte si possono costruire esempi di sistemi fisici elementari la cui traiettoria del moto è un punto di sella per l'azione, cfr. [9, problema 4.6].

È importante notare che la condizione di stazionarietà dell'azione rimane verificata se si effettua la sostituzione

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{d}{dt}f(q^i, t), \quad (1.9)$$

dove f è una funzione arbitraria. Infatti la derivata totale produce un termine di bordo nell'integrale d'azione, che dipende soltanto dagli estremi di integrazione e dal valore delle coordinate in quei punti. Queste grandezze sono però fissate dalle condizioni al contorno, e non variano quando si varia l'azione. Dunque la lagrangiana è definita a meno della derivata totale di una funzione delle coordinate e del tempo.

1.1.2 Principio d'azione in teorie di campo

Tutti i concetti introdotti nel paragrafo precedente possono essere adattati allo studio un sistema fisico *continuo*. Citiamo solo il fatto che l'approssimazione del continuo è molto utile quando i gradi di libertà fisici sono discreti ma in numero elevatissimo, come accade nella teoria atomica della materia. Noi ci occuperemo prevalentemente di modelli in cui grandezze che dipendono con continuità dal punto spazio-temporale, cioè *campi*, sono usate per descrivere particelle, in accordo col dualismo onda-corpuscolo introdotto dalla meccanica quantistica.

In una teoria di campo formulata in uno spazio-tempo con tre dimensioni spaziali e una temporale, ad assumere il ruolo di coordinate generalizzate sono i campi stessi, che dipendono dalle variabili indipendenti t, x^1, x^2, x^3 . Un campo può allora essere visto come un insieme infinito di gradi di libertà, uno per ciascun punto dello spazio. La lagrangiana viene a dipendere dai campi e dalle loro derivate, e l'integrale d'azione è svolto su un dominio spazio-temporale fissato Ω , che assumeremo compatto, rispetto all'elemento di integrazione $d^4x \equiv c dt dx^1 dx^2 dx^3$ (introduciamo il fattore c perché le variabili abbiano le stesse dimensioni fisiche, e perché siamo interessati a teorie relativistiche). I campi ammissibili sono quelli che hanno due derivate continue in Ω , e assumono un valore fissato sulla sua frontiera $\partial\Omega$.² Pertanto, in una teoria che descrive un insieme di campi ϕ^i , l'azione assume la forma

$$S[\phi^i] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_{\mu}\phi^i(x), x), \quad (1.10)$$

dove $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}$. In questo caso \mathcal{L} ha le dimensioni di una densità di energia divisa per c , ed è per questo a volte chiamata densità di lagrangiana, ma noi continueremo a chiamarla semplicemente lagrangiana. Secondo il principio variazionale che è alla base della teoria, le traiettorie fisiche del sistema, che in questo caso sono l'andamento spazio-temporale

²Consideriamo, qui e nel seguito, lagrangiane in cui compaiono al più le derivate prime dei campi. Qualora comparissero derivate successive, le equazioni di Eulero-Lagrange non sarebbero più del secondo ordine, e servirebbero ulteriori condizioni ausiliarie per risolverle (in particolare, condizioni al contorno per le derivate dei campi).

dei campi, annullano la variazione prima dell'azione. Il teorema 1.3 continua a valere inalterato nella sostanza. Le equazioni di Eulero–Lagrange hanno una forma analoga a quella vista nel caso della meccanica, ma per ricavarle sarà utile usare un teorema che per le funzioni di quattro variabili è l'analogo del teorema della divergenza.

Teorema 1.6. *Sia ψ^μ un campo quadrivettoriale che ha derivate continue fin sulla frontiera, che assumiamo chiusa e regolare, di un dominio quadridimensionale Ω . Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \psi^\mu(x) = \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \psi^\mu(x), \quad (1.11)$$

laddove $d\sigma_\mu$ è il quadrivettore infinitesimo uscente dall'elemento di ipersuperficie.

Come nella dimostrazione del teorema 1.3, scriviamo la variazione dell'azione quando i campi variano di quantità piccole $\delta\phi^i$ e integriamo per parti notando che $\delta\partial_\mu\phi^i = \partial_\mu\delta\phi^i$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} \delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \delta\partial_\mu\phi^i \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \right] \delta\phi^i + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \delta\phi^i \right) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \right] \delta\phi^i + \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \delta\phi^i, \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la (1.11). Il termine di bordo ottenuto sparisce in virtù della condizione ausiliaria che devono verificare i campi, di assumere un valore prefissato sulla frontiera di Ω , che si traduce in

$$\delta\phi^i|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.13)$$

Applicando il lemma 1.4, in forma multidimensionale, al termine rimasto, le equazioni di Eulero–Lagrange risultanti sono, per ogni i :

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} = 0. \quad (1.14)$$

Notiamo che queste sono equazioni alle derivate parziali, mentre le analoghe equazioni della meccanica erano alle derivate totali: ciò è indice del passaggio al continuo.

Come accade nel caso della meccanica, anche la lagrangiana di una teoria di campo è definita a meno di un termine, che in questo caso assume la forma della quadridivergenza $\partial_\mu f^\mu(\phi^i, x)$ di una funzione arbitraria dei campi e delle variabili indipendenti. Infatti il teorema 1.6 permette di trasformare l'integrale di questa divergenza in un termine di bordo. Rimarchiamo che, affinché tale termine non contribuisca alla variazione dell'azione, con le condizioni al contorno sin qui adottate, è necessario che f^μ non dipenda dalle derivate dei campi.

1.2 Trasformazioni e simmetrie

È opportuno discutere ora l'importante concetto di simmetria di un modello o di una teoria, che spesso è la guida per la sua stessa costruzione. Per far questo, è necessario specificare in quali modi è possibile operare una trasformazione sull'integrale d'azione di un sistema fisico. Indipendentemente dal tipo di trasformazione adottata, possiamo tuttavia dare la seguente generale

Definizione 1.7. Una trasformazione definisce una *simmetria* di un modello se ne lascia invariate in forma le equazioni del moto.

Vogliamo porre in evidenza prima di tutto la differenza tra i concetti di trasformazione di riferimento e trasformazione di coordinate. Un *sistema di riferimento* è un insieme di misuratori, uno per ogni punto dello spazio in cui sono fatte le misure, e dei loro apparati di misura. Essi possono scegliere, per descrivere i risultati delle loro misure, *sistemi di coordinate* arbitrari. Una trasformazione di coordinate, operata all'interno di uno stesso sistema di riferimento, può portare a semplificazioni nella soluzione delle equazioni del moto. Ad esempio, si può passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari per descrivere il moto di una particella soggetta a una forza centrale. Questo tipo di trasformazione è di natura puramente matematica, e in genere ha poco a che fare con una trasformazione del riferimento fisico. Essa sarà presentata brevemente dopo che avremo discusso la trasformazione tra sistemi di riferimento, che ha un ruolo molto più centrale per i nostri scopi.

1.2.1 Trasformazioni di riferimento e principio di relatività

Quando parliamo di *trasformazione del riferimento*, intendiamo il passaggio dal punto di vista di un insieme di osservatori, che costituiscono un sistema di riferimento, al punto di vista di un altro gruppo di osservatori, anch'essi dotati dei loro strumenti di misura, di regoli, di orologi sincronizzati ecc., che si trovano in un certo stato di moto o di quiete rispetto ai precedenti. Con una terminologia usata, possiamo dire che per noi una trasformazione di riferimento è sempre *passiva*, cioè non riguarda il sistema sotto studio, bensì gli osservatori. Sottolineiamo che la necessità di cambiare il punto di vista sulla natura (cioè cambiare il sistema di riferimento) per accorgersi che, sotto condizioni opportune, la sua descrizione non cambia, è in fondo l'essenza di una teoria che soddisfa a un principio di relatività. Possiamo enunciare un tale principio, in una forma che è condivisa sia dalla relatività galileiana che einsteiniana, e afferma semplicemente che esiste una classe di sistemi di riferimento privilegiati rispetto agli altri ma equivalenti tra loro.

Principio 1.8 (di relatività ristretta). *Le leggi della fisica assumono la stessa forma, e quella più semplice, in una classe di sistemi di riferimento, detti inerziali.*

Quale sia questa forma è stabilito dalla teoria, attraverso la congettura di una lagrangiana. Una volta fissata questa, risultano determinate quali sono le trasformazioni tra riferimenti inerziali, che lasciano invariate le leggi del moto e quindi soddisfano il principio di relatività. Troveremo subito un criterio per stabilire ciò, partendo dal principio d'azione.

Vediamo come si può tradurre una trasformazione del riferimento in termini matematici. Nell'integrale d'azione deve comparire tutto ciò che è rilevante per la dinamica di un sistema fisico: coordinate generalizzate, variabili indipendenti da cui esse dipendono (se non esplicitamente nella lagrangiana, esse compaiono almeno nel dominio di integrazione), parametri di accoppiamento tra le varie parti del sistema e tra il sistema e l'esterno, eventuali campi esterni. Per poter effettuare un cambio del riferimento, occorre specificare le proprietà di trasformazione di tutte queste grandezze. Supporremo sempre che ciascuna di queste trasformazioni, che complessivamente determinano la trasformazione del riferimento, sia puntuale (cioè, in una teoria di campo, si deve dare la legge di trasformazione delle variabili spazio-temporali, e la relazione tra i valori dei campi in punti corrispondenti), invertibile e sufficientemente regolare. Ora, il modo più immediato di procedere è sostituire nell'integrale d'azione tutte le quantità con le loro trasformate, e affermare che quella ottenuta è l'espressione dell'azione nel nuovo sistema di riferimento. Così facendo, si sta assumendo che l'azione rimanga invariante *in forma* nel cambio di riferimento. Se nel nuovo sistema di riferimento si può ancora applicare il principio d'azione, allora evidentemente le equazioni di Eulero–Lagrange devono avere la stessa forma nei due sistemi, essendo ottenute da azioni identiche in forma, e cioè la trasformazione costituisce una simmetria. Occorre dunque verificare se il principio d'azione mantenga la sua validità, e per far questo bisogna calcolare il *valore* dell'azione trasformata. Vale infatti il seguente

Teorema 1.9. *Se, in una trasformazione di riferimento che per costruzione conserva la forma dell'azione, si trova che essa rimane invariata anche in valore a meno di termini di bordo, che non cambiano quando si varia l'azione con le date condizioni al contorno, allora tale trasformazione è una simmetria.*

Accenno alla dimostrazione. L'ipotesi del teorema è che il valore numerico dell'azione sia il medesimo nei due sistemi di riferimento, a meno di termini di bordo, per ogni traiettoria del sistema. Poiché le trasformazioni sono puntuali, regolari e invertibili, la trasformazione muta variazioni ammissibili di una traiettoria in variazioni ammissibili della traiettoria trasformata e viceversa, pertanto la stazionarietà dell'azione in un sistema di riferimento equivale alla stazionarietà nell'altro. Allora, applicando il teorema 1.3, le traiettorie corrispondenti soddisfano le rispettive equazioni di Eulero–Lagrange, che hanno la stessa forma nei due riferimenti. \square

Per via di questo teorema, chiameremo simmetrie dell'azione quelle trasformazioni che ne conservano il valore, a meno di termini che non cambiano quando si effettua la variazione.

Se invece l'azione cambia in maniera più complicata, allora la traiettoria del moto non soddisfa il principio d'azione nel nuovo riferimento, e la trasformazione non è una simmetria. Per poter ridare valore a questo principio, è necessario aggiungere termini correttivi all'azione nel nuovo riferimento, cambiandone dunque anche la forma. Rimanendo aderenti al concetto di osservatore inerziale, diremo allora che quella considerata non è una corretta trasformazione tra riferimenti inerziali, perché non preserva la forma dell'azione e dunque delle equazioni del moto che da essa derivano.

Trasformazioni di Lorentz

Come esempio di trasformazioni di riferimento, vediamo il caso particolarmente importante, perché comune a tutte le teorie di campo relativistiche, della simmetria per trasformazioni di Lorentz. Il *gruppo di Lorentz* $O(3, 1)$ è descritto nell'appendice A, ed è il gruppo delle matrici Λ che trasformano le variabili spazio-temporali

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.15)$$

lasciando invariato il prodotto scalare $x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu$. Le trasformazioni che non invertono gli assi fanno parte di un sottogruppo, il gruppo di Lorentz *proprio e ortocrono* $SO^\uparrow(3, 1)$. In genere, quando si tratta l'invarianza per trasformazioni di Lorentz, si considera solo questo sottogruppo, di cui fanno parte le rotazioni del sistema di riferimento e le trasformazioni di moto uniforme, dette *boost*.

Tutti i campi soddisfano definite leggi di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz proprio e ortocrono. I loro argomenti cambiano in ogni caso secondo la (1.15). Un campo *scalare* mantiene inalterato il suo valore in punti corrispondenti:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad \text{cioè} \quad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x). \quad (1.16)$$

I campi *vettoriali* invece si trasformano come il quadrivettore posizione:

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad \text{cioè} \quad A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (1.17)$$

Similmente si trasforma ciascuna delle componenti di un campo *tensoriale*:

$$F^{\mu\nu}(x) \rightarrow F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x) \quad \text{cioè} \quad F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(\Lambda^{-1}x). \quad (1.18)$$

Vediamo in particolare l'invarianza dell'azione del campo elettromagnetico prodotto da sorgenti esterne. In questo caso le coordinate generalizzate sono le componenti del quadripotenziale

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}), \quad (1.19)$$

dove ϕ è il potenziale scalare e \mathbf{A} il potenziale vettore, che compaiono nella lagrangiana anche attraverso il quadritensore antisimmetrico del campo elettromagnetico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.20)$$

La sorgente del campo è la quadricorrente

$$\mathbf{J}^\mu = (c\rho, \mathbf{J}), \quad (1.21)$$

dove ρ è la densità di carica elettrica e \mathbf{J} la densità di corrente elettrica. Se vogliamo descrivere solo la dinamica del campo all'interno di un dominio spazio-temporale Ω , fissate le sorgenti, J^μ non sono coordinate del sistema, ma possono essere interpretate come un campo esterno. L'azione (in unità CGS razionalizzate) assume la forma³

$$S[A^\mu] = \int_{\Omega} d^4x \left[-\frac{1}{4c} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{c^2} A_\mu(x) J^\mu(x) \right]. \quad (1.22)$$

In questa forma, l'invarianza esatta dell'azione per trasformazioni di Lorentz è manifesta. Infatti la lagrangiana è uno scalare, perché tutti gli indici tensoriali sono contratti. Sottolineiamo che per affermare ciò dobbiamo trasformare secondo la legge (1.17) anche la sorgente esterna J^μ . Gli argomenti di tutti i campi cambiano secondo la (1.15), e corrispondentemente cambia il dominio di integrazione $\Omega \rightarrow \Omega' = \Lambda(\Omega)$. Dunque, l'azione nel nuovo sistema di riferimento è

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\Omega'} d^4x' \left[-\frac{1}{4c} F'_{\mu\nu}(x') F'^{\mu\nu}(x') + \frac{1}{c^2} A'_\mu(x') J'^\mu(x') \right] \\ &= \int_{\Lambda(\Omega)} d^4x' \left[-\frac{1}{4c} F_{\mu\nu}(\Lambda^{-1}x') F^{\mu\nu}(\Lambda^{-1}x') + \frac{1}{c^2} A_\mu(\Lambda^{-1}x') J^\mu(\Lambda^{-1}x') \right] \\ &= S, \end{aligned} \quad (1.23)$$

effettuando il cambio di variabile $x = \Lambda^{-1}x'$, che non cambia l'elemento di integrazione poiché il determinante della trasformazione di Lorentz è unitario. Secondo il teorema 1.9, le equazioni del moto dei campi che si possono dedurre dall'azione (1.22), cioè le equazioni di Maxwell, hanno allora la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali collegati da trasformazioni di Lorentz, fatto che si esprime anche dicendo che sono *covarianti* sotto tali trasformazioni. Dedurremo le equazioni di Maxwell, e le conseguenze delle simmetrie dell'azione (1.22), nella sezione 1.3.

1.2.2 Trasformazioni di coordinate

Vediamo ora di trattare brevemente le trasformazioni di coordinate, per completezza e soprattutto per metterne in luce le differenze con le trasformazioni di riferimento.

³L'azione (1.22) consta di un termine che descrive l'evoluzione libera del campo elettromagnetico e di un termine che dà l'accoppiamento tra campo e sorgente. Se si volesse descrivere anche la dinamica della sorgente, bisognerebbe aggiungere il termine corrispondente all'evoluzione libera della sorgente, e annoverare questa tra le coordinate generalizzate del sistema. Qui, invece, la sorgente è considerata esterna: determina ma non è determinata dall'evoluzione del campo. Questo è necessario se si vogliono ricavare le equazioni che danno la dinamica del campo in funzione delle sorgenti.

Consideriamo il caso della meccanica classica, che potrà poi essere generalizzato alle teorie di campo. In meccanica classica si può passare a nuove coordinate nello spazio delle configurazioni esteso (in cui variano coordinate e tempo) attraverso il cambio di variabili

$$Q^i = Q^i(q^j, t), \quad \tau = \tau(q^j, t), \quad (1.24)$$

regolare, invertibile e con jacobiano non nullo. Esso induce una trasformazione nelle velocità generalizzate

$$\dot{Q}^i := \frac{dQ^i}{d\tau} = \frac{\frac{dQ^i}{dt}}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial Q^i}{\partial t}}{\frac{\partial \tau}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial \tau}{\partial t}}, \quad (1.25)$$

che si suppone ancora essere invertibile. Ora la chiave del procedimento sta nel decidere una legge di trasformazione della lagrangiana; per definizione, nelle nuove coordinate essa è data da (sopprimiamo gli indici per indicare l'insieme di tutte le coordinate)

$$\tilde{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, \tau) = \frac{\mathcal{L}(q(Q, \tau), \dot{q}(Q, \dot{Q}, \tau), t(Q, \tau))}{\frac{\partial \tau}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial \tau}{\partial t}}. \quad (1.26)$$

Notiamo che per mettere in atto il passaggio alla nuova lagrangiana si deve invertire la legge (1.24) che definisce la trasformazione, inversione che non è invece necessaria in un cambio di riferimento. L'azione diventa

$$\begin{aligned} \tilde{S} &:= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \tilde{\mathcal{L}}(Q(\tau), \dot{Q}(\tau), \tau) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dt}{d\tau} \mathcal{L}(q(Q(\tau), \tau), \dot{q}(Q(\tau), \tau), t(Q(\tau), \tau)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= S. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Secondo queste definizioni, il cambio di coordinate nello spazio delle configurazioni esteso lascia esattamente invariata l'azione e quindi, come nella dimostrazione del teorema 1.9, trasforma una traiettoria su cui S è stazionaria in una traiettoria su cui \tilde{S} è stazionaria. Le equazioni del moto nelle nuove coordinate sono allora le equazioni di Eulero–Lagrange relative a $\tilde{\mathcal{L}}$; poiché però questa non ha necessariamente la forma di \mathcal{L} , non è garantito che le equazioni del moto rimangano invarianti in forma.

Analogamente, in una teoria di campo si potrebbe mettere in atto un cambio delle coordinate generalizzate e contemporaneamente delle variabili spazio-temporali, definendo opportunamente una nuova lagrangiana che coincide, nei punti corrispondenti, con la

vecchia lagrangiana divisa per lo jacobiano della trasformazione delle variabili indipendenti, in modo da garantire l'invarianza dell'azione. In questo caso, i conti sarebbero complicati dalla presenza di più di una variabile indipendente, ma la sostanza non cambierebbe.

Riassumiamo dunque sinteticamente la differenza tra i due tipi di trasformazioni visti sin qui:

- in una trasformazione tra riferimenti inerziali, l'azione mantiene per costruzione la stessa forma, e mantiene il suo valore a meno di termini di bordo;
- in una trasformazione di coordinate, all'interno di uno stesso sistema di riferimento, l'azione mantiene per costruzione lo stesso valore, ma cambia in generale la sua forma.

1.2.3 Trasformazioni attive e teorema di Noether

Abbiamo detto che le trasformazioni di riferimento sono di tipo passivo, e abbiamo descritto come realizzarle matematicamente. Sottolineiamo ancora una volta che esse corrispondono a un modo *fisico* di cambiare le grandezze con cui si descrivono i fenomeni naturali, e mettono in relazione tra loro le descrizioni di uno stesso fenomeno da parte di osservatori distinti. Abbiamo anche brevemente descritto le trasformazioni di coordinate, che noi intendiamo come un cambio delle variabili con cui si descrive il sistema, cioè un artificio matematico. C'è però almeno un altro tipo di trasformazioni, che è tanto importante quanto le trasformazioni di riferimento, ma a differenza di quelle è *attivo*, cioè agisce direttamente sulle coordinate generalizzate del sistema, e solo su quelle. Se una tale trasformazione è una simmetria dell'azione, allora ragionando come per dimostrare il teorema 1.9 possiamo dedurre che la traiettoria trasformata è ancora soluzione del moto, ma questa volta nello stesso riferimento, corrispondente a diverse condizioni iniziali.

Noi considereremo in particolare trasformazioni attive che dipendono in modo analitico da alcuni parametri continui, cioè trasformazioni riconducibili a un gruppo di Lie. Emmy Noether ha dimostrato costruttivamente che se una tale trasformazione cambia l'azione solo per termini di bordo, allora ci sono delle quantità che si conservano durante il moto, una per ogni parametro del gruppo di simmetria. Dimostreremo questo teorema direttamente in una teoria di campo. Per farlo, è necessario considerare trasformazioni infinitesime dei campi, che si ottengono tramite sviluppi al primo ordine nei parametri del gruppo (supponiamo che i parametri siano scelti in modo tale che annullandoli si ottenga l'identità del gruppo). Sotto una trasformazione infinitesima, la lagrangiana deve cambiare per un termine che è una quadridivergenza di una funzione arbitraria delle variabili spazio-temporali.⁴

⁴Potrebbe sorprendere che tale funzione possa anche contenere in forma esplicita le derivate dei campi, che non assumono un valore fissato alla frontiera del dominio d'integrazione quando si varia l'azione. La dimostrazione del teorema di Noether è valida in ogni caso, e davvero i termini di bordo

Prima di enunciare rigorosamente e dimostrare il teorema di Noether, notiamo che in una teoria di campo la conservazione di una grandezza (o, come si usa dire, di una carica) è espressa da una equazione di continuità

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.28)$$

cioè dall'annullarsi della divergenza di un quadrivettore J^μ , che è chiamato quadricorrente (a volte si dice, equivalentemente, che è questa corrente a conservarsi). In linguaggio tridimensionale, infatti, la (1.28) prende la forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.29)$$

che esprime la conservazione locale della quantità J^0 .

Teorema 1.10 (di Noether). *Sia $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, x)$ la lagrangiana di una teoria di campo. Consideriamo una trasformazione dei campi*

$$\phi^i(x) \rightarrow \phi'^i(x) = \phi^i(x) + \xi^a F_a^i(x) + O(\xi^2) \quad (1.30)$$

che dipende da un certo numero di parametri infinitesimi ξ^a .⁵ Supponiamo che tale trasformazione cambi l'azione

$$S \rightarrow S' = \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\phi'^i(x), \partial_\mu \phi'^i(x), x) = S + \int_\Omega d^4x \xi^a \partial_\mu K_a^\mu(x) + O(\xi^2), \quad (1.31)$$

Allora le correnti

$$J_a^\mu = K_a^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} F_a^i, \quad (1.32)$$

una per ogni parametro da cui dipende la trasformazione, sono conservate sulla soluzione del moto.

Dimostrazione. Forniamo una prova che si basa sul seguente artificio. Generalizziamo la trasformazione al caso in cui i parametri $\xi^a = \xi^a(x)$ diventano funzioni arbitrarie, che sono infinitesime assieme alle loro derivate e si annullano sulla frontiera di Ω . Allora la trasformazione non è più una simmetria dell'azione; infatti, questa cambia in

$$\begin{aligned} S' &= S + \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \xi^a F_a^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu (\xi^a F_a^i) \right] + O(\xi^2) \\ &= S + \int_\Omega d^4x \xi^a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} F_a^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu F_a^i \right] + \int_\Omega d^4x \partial_\mu \xi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} F_a^i + O(\xi^2). \end{aligned} \quad (1.33)$$

relativi a trasformazioni infinitesime che danno alcuni importanti integrali primi del moto, come l'energia, contengono le derivate dei campi.

⁵Le grandezze F_a^i sono il risultato dell'applicazione dei *generatori* del gruppo sul campo ϕ^i .

Avremmo ottenuto il primo termine correttivo anche nel caso di ξ^a costanti, e quindi l'espressione tra parentesi quadrata deve essere uguale a $\partial_\mu K_a^\mu$ per ipotesi. Integrando per parti il secondo termine, e ponendo

$$N_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} F_a^i, \quad (1.34)$$

otteniamo per la variazione dell'azione, in cui omettiamo i termini $O(\xi^2)$, l'espressione

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d^4x \xi^a \partial_\mu K_a^\mu + \int_\Omega d^4x \partial_\mu (\xi^a N_a^\mu) - \int_\Omega d^4x \xi^a \partial_\mu N_a^\mu \\ &= \int_\Omega d^4x \xi^a \partial_\mu (K_a^\mu - N_a^\mu) + \oint_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \xi^a N_a^\mu, \end{aligned} \quad (1.35)$$

Il termine di bordo nella (1.35) si annulla poiché abbiamo richiesto $\xi^a|_{\partial\Omega} = 0$. Questa stessa condizione garantisce che la trasformazione locale considerata sia una variazione ammissibile dei campi. Allora, se questi soddisfano l'equazione del moto, la variazione dell'azione si deve annullare. Ricordando che ξ^a assumono valori arbitrari all'interno di Ω possiamo applicare il lemma 1.4, ottenendo le equazioni di continuità per le correnti $J_a^\mu = K_a^\mu - N_a^\mu$. \square

Sebbene nella dimostrazione abbiamo fatto uso di trasformazioni locali per dedurre l'espressione delle cariche conservate, sottolineiamo che il teorema di Noether si può applicare solo in presenza di simmetrie continue *globali*. Infatti, se la trasformazione fosse una simmetria *locale*, allora la variazione dell'azione risulterebbe automaticamente nulla per ogni variazione ammissibile di una traiettoria del sistema, anche diversa dalla traiettoria del moto fisico.

Chiameremo *correnti di Noether* le correnti conservate secondo il teorema 1.10. Notiamo che esse sono ambigue per un termine che si annulla quando contratto con ∂_μ ; un termine di questo tipo è $\partial_\nu A^{\mu\nu}$, se $A^{\mu\nu}$ è un tensore antisimmetrico.

Tensore energia-impulso

Come esempio importante di applicazione del teorema di Noether vediamo il caso della simmetria per traslazioni spazio-temporali. Tale simmetria è richiesta per i sistemi isolati in virtù dell'omogeneità dello spazio-tempo. L'azione è invariante sotto traslazioni se la lagrangiana non dipende esplicitamente da x ; le corrispondenti correnti conservate formano un tensore di rango due, detto *tensore energia-impulso*. I parametri del gruppo delle traslazioni sono ovviamente quattro, e la trasformazione è definita da

$$x^\nu \rightarrow x'^\nu = x^\nu + \xi^\nu. \quad (1.36)$$

In questo caso l'insieme ordinato dei parametri ξ^ν costituisce un quadrivettore, cioè un oggetto con definite proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz. La

trasformazione dei campi è indotta dalla (1.36), e in particolare si suppone che i campi siano scalari rispetto alla traslazione (cfr. (1.16)), cioè

$$\phi^i(x) = \phi^i(x - \xi). \quad (1.37)$$

Vogliamo calcolare le grandezze F_ν^i e K_ν^μ che compaiono nella corrente di Noether, secondo le loro definizioni (1.30), (1.31) in cui poniamo $a = \nu$. A tal fine è necessario porre la (1.37) in forma infinitesima, che ovviamente si ottiene con uno sviluppo di Mac Laurin:

$$\phi^i(x) = \phi^i(x) - \xi^\nu \partial_\nu \phi^i(x) + O(\xi^2), \quad (1.38)$$

e abbiamo subito che $F_\nu^i = -\partial_\nu \phi^i$. Per calcolare K_ν^μ sostituiamo la (1.38) nella lagrangiana e ne calcoliamo la variazione al primo ordine

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} (-\xi^\nu \partial_\nu \phi^i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} (-\xi^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi^i) \\ &= -\xi^\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \partial_\nu \phi^i \right]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ora, se la lagrangiana non dipende esplicitamente da x , vediamo che il termine tra quadre coincide con la derivata totale della lagrangiana rispetto a x^ν . Pertanto

$$\delta \mathcal{L} = -\xi^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = -\xi^\nu \partial_\mu \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (1.40)$$

da cui risulta $K_\nu^\mu = -\delta_\nu^\mu \mathcal{L}$. Secondo la (1.32), ci sono quattro correnti conservate, indicizzate da ν . Convenzionalmente, le cambiamo di segno e le indichiamo con la lettera T :

$$T_\nu^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\nu \phi^i + \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (1.41)$$

Entrambi gli indici in questa espressione sono veri e propri indici tensoriali, sebbene di origine affatto diversa. Usando gli indici controvarianti, otteniamo il tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial^\nu \phi^i + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.42)$$

La simmetria di questo tensore non è garantita in generale, ma può essere ottenuta caso per caso aggiungendo alla (1.42) un opportuno termine, che si conserva separatamente.

Possiamo verificare la conservazione delle correnti (1.42) usando le equazioni del moto (1.14):

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial^\nu \phi^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \partial^\nu \phi^i + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{L} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial^\nu \phi^i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial_\mu \partial^\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial^\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \partial^\nu \partial_\mu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

e quindi vediamo che effettivamente le correnti sono conservate se la lagrangiana non dipende esplicitamente dalle variabili spazio-temporali. Le corrispondenti cariche (per unità di volume) sono le componenti $T^{0\nu}$, e precisamente

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^i)} \partial_t \phi^i - \mathcal{L}, \quad (1.44)$$

che è interpretabile come la densità di energia del campo⁶ divisa per c , e

$$T^{0k} = -c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^i)} \partial^k \phi^i, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.45)$$

interpretabile come il vettore tridimensionale della densità d'impulso del campo. L'energia e l'impulso totali sono dati dagli integrali

$$\mathcal{E} = c \int_V d^3x T^{00}, \quad \mathcal{P}^k = \int_V d^3x T^{0k}, \quad (1.46)$$

dove V è la proiezione di Ω sullo spazio tridimensionale.

1.3 Campo elettromagnetico

Applichiamo ora i concetti introdotti nelle sezioni precedenti per discutere la teoria classica del campo elettromagnetico in notazione quadridimensionale.

Abbiamo anticipato nella sezione 1.2.1, trattando le trasformazioni di Lorentz, che il quadripotenziale (1.19) dà origine al quadritensore del campo elettromagnetico secondo la definizione (1.20). Calcolandone le componenti, si verifica facilmente che le grandezze di campo classiche \mathbf{E} , \mathbf{B} sono organizzate in questo tensore nel seguente modo:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

che si riassume in

$$F^{0i} = E^i, \quad F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (1.48)$$

La definizione del campo in funzione dei potenziali permette di implementare sin dall'inizio le equazioni di Maxwell senza sorgenti, che in notazione quadridimensionale sono raccolte nell'*identità di Bianchi*

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.49)$$

⁶Notiamo l'analogia tra l'espressione (1.44) e l'espressione dell'energia meccanica di un sistema di particelle, $E = (\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}^i) \dot{q}^i - \mathcal{L}$.

Per ricavare la forma assunta dalle equazioni con sorgenti, invece, ricorriamo al formalismo lagrangiano.

Riportiamo dall'equazione (1.22) la lagrangiana del campo elettromagnetico:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4c}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}A_\mu J^\mu. \quad (1.50)$$

Il primo termine è l'azione del campo libero, cioè in assenza di sorgenti. Esso contiene l'espressione quadratica nei campi $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$, che è l'unico scalare di Lorentz che si può formare con le componenti di $F^{\mu\nu}$, e non contiene esplicitamente i potenziali. Poiché i campi si ottengono dalle derivate prime dei potenziali, questo può essere visto come un termine *cinetico*, in cui compaiono i quadrati di tali derivate. Inserito nelle equazioni di Eulero–Lagrange (1.14), dà pertanto origine a un termine *lineare* nei campi, in accordo col principio di sovrapposizione noto per i campi elettromagnetici. Il secondo termine nella (1.50) descrive invece l'interazione del campo con le cariche elettriche, ed è lineare nei potenziali. Pertanto, i potenziali non compaiono direttamente nelle equazioni di Eulero–Lagrange.

Per trovare esplicitamente queste equazioni, calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left[-\frac{1}{4c}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \right] \\ &= -\frac{1}{2c}(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= -\frac{1}{2c}F^{\rho\sigma}(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \\ &= -\frac{1}{2c}(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{c}F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

e inoltre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{c^2}J^\nu. \quad (1.52)$$

L'equazione di Eulero–Lagrange assume pertanto la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{J^\nu}{c}, \quad (1.53)$$

che si può verificare equivalente alle quattro equazioni di Maxwell con sorgenti, ma è scritta in maniera manifestamente covariante per trasformazioni di Lorentz. Notiamo che si tratta di una equazione del primo ordine per i campi, ma del secondo per i potenziali, i quali, come previsto, non vi compaiono direttamente.

Quest'ultimo fatto è in accordo con la convinzione classica che solo il campo elettromagnetico sia la grandezza dotata di significato fisico,⁷ e soprattutto indica che una trasformazione dei potenziali, che lascia invariati i campi, lascia invariate anche le equazioni del moto. Trasformazioni di questo tipo sono le *trasformazioni di gauge* che si ottengono aggiungendo al potenziale il gradiente di una funzione arbitraria f delle variabili spazio temporali:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f. \quad (1.54)$$

Infatti, sotto questa trasformazione attiva, i campi non cambiano:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f) = F_{\mu\nu}. \quad (1.55)$$

Tale invarianza indica tra l'altro che i gradi di libertà indipendenti del campo elettromagnetico non sono più di tre: le quattro componenti del potenziale meno una condizione di gauge.⁸

Supponiamo che f si annulli con le sue derivate prime alla frontiera del dominio considerato, e assuma valori arbitrari all'interno. Allora la trasformazione di gauge definisce una variazione ammissibile dei potenziali, sotto la quale il primo termine della lagrangiana (1.50) rimane invariato, mentre il secondo cambia:

$$A_\mu J^\mu \rightarrow A'_\mu J^\mu = A_\mu J^\mu + \partial_\mu f J^\mu = A_\mu J^\mu + \partial_\mu(f J^\mu) - f \partial_\mu J^\mu. \quad (1.56)$$

Ora, il primo termine correttivo si annulla, e la stazionarietà dell'azione sulla soluzione del moto impone che anche il secondo termine non dia contributo. Dal lemma 1.4 si deduce allora che la corrente J^μ si deve conservare. D'altra parte, usando le equazioni del moto (1.53) e considerando che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, abbiamo

$$0 = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \partial_\nu J^\nu. \quad (1.57)$$

Abbiamo così dimostrato che c'è una carica conservata associata all'invarianza di gauge delle equazioni del campo elettromagnetico, la carica elettrica.

Se invece $J^\mu = 0$, cioè se il campo evolve liberamente, ci sono altre quantità conservate secondo il teorema di Noether. Infatti in assenza di cariche elettriche la lagrangiana non

⁷Questa convinzione, tuttavia, è contraddetta dal fatto che in meccanica quantistica sono i potenziali ad entrare nella hamiltoniana di una particella carica. Sotto particolari condizioni topologiche, che portano ad avere contemporaneamente un campo magnetico nullo e un potenziale vettore non nullo in una certa regione dello spazio, compare un fattore di fase nella funzione d'onda, che non si può eliminare con trasformazioni di gauge a un sol valore. Una tale condizione può causare l'interferenza delle funzioni d'onda di due particelle, un effetto misurato sperimentalmente che va sotto il nome di *effetto Aharonov-Bohm*.

⁸Si può dimostrare che nel caso di un'onda elettromagnetica piana che si propaga nel vuoto, i gradi di libertà effettivi sono due, e coincidono con le polarizzazioni indipendenti dell'onda.

dipende esplicitamente dalle variabili spazio-temporali, e il campo conserva la sua energia e l'impulso. Secondo la (1.42), il tensore energia-impulso è

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \partial^\nu A_\rho + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = \frac{1}{c} F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho - \frac{1}{4c} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (1.58)$$

Questa espressione però dipende esplicitamente dai potenziali e non rappresenta un tensore simmetrico (per questo l'abbiamo indicata con una tilde). Per risolvere queste difficoltà, aggiungiamo una quantità proporzionale a $F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu$, che soddisfa

$$\partial_\mu (F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu) = \partial_\mu F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu + F^{\mu\rho} \partial_\mu \partial_\rho A^\nu = 0, \quad (1.59)$$

poiché il primo termine si annulla per l'equazione del moto $\partial_\mu F^{\mu\rho} = 0$ e il secondo per l'antisimmetria di $F^{\mu\rho}$. Otteniamo così il tensore energia-impulso scritto in una forma canonica

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &:= \tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{c} F^{\mu\rho} \partial_\rho A^\nu \\ &= \frac{1}{c} F^{\mu\rho} [\partial^\nu A_\rho - \partial_\rho A^\nu] - \frac{1}{4c} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{c} F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4c} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

che è simmetrico, invariante di gauge e con traccia $T^\mu{}_\mu = 0$.

Possiamo scrivere esplicitamente la densità di energia W e la densità d'impulso P^k del campo corrispondenti a questo tensore:

$$W := cT^{00} = F^0{}_\rho F^{0\rho} + \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (1.61)$$

$$P^k := T^{0k} = \frac{1}{c} F^0{}_\rho F^{k\rho} = \frac{1}{c} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^k, \quad (1.62)$$

dove riconosciamo la densità di energia e il vettore di Poynting $\mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ dell'elettrodinamica. Poiché quest'ultimo rappresenta il flusso di energia, ricaviamo che la densità d'impulso è uguale al flusso di energia diviso per c^2 , che è una relazione valida per tutti i campi relativistici.

Vediamo ora le cariche generate dalla simmetria per trasformazioni di Lorentz, considerate come trasformazioni attive infinitesime. In questo caso (cfr. appendice A), indichiamo i parametri del gruppo con $\xi^{\alpha\beta}$, che formano una matrice antisimmetrica con sei componenti indipendenti. Corrispondentemente, indichiamo i generatori con $L_{\alpha\beta}$, e anch'essi soddisfano $L_{\alpha\beta} = -L_{\beta\alpha}$. Scriveremo pertanto una generica matrice di Lorentz nella forma

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\xi) = \delta^\mu{}_\nu + \xi^{\alpha\beta} [L_{\alpha\beta}]^\mu{}_\nu + O(\xi^2) \quad (1.63)$$

(cfr. (A.17) in cui abbiamo convenzionalmente inglobato il fattore 1/2 nei parametri).

La trasformazione di Lorentz infinitesima delle variabili spazio-temporali si scrive

$$x'^{\mu} = [\delta^{\mu}_{\nu} + \xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu} + O(\xi^2)]x^{\nu} = x^{\mu} + \xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + O(\xi^2). \quad (1.64)$$

Secondo la (1.17) il quadripotenziale si trasforma in

$$\begin{aligned} A'_{\mu} &= \Lambda_{\mu}^{\nu} A_{\nu}(\Lambda^{-1}x) \\ &= [\delta_{\mu}^{\nu} + \xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]_{\mu}^{\nu}] A_{\nu}(x^{\rho} - \xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma}) + O(\xi^2) \\ &= [\delta_{\mu}^{\nu} + \xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]_{\mu}^{\nu}] [A_{\nu} - \partial_{\rho}A_{\nu}\xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma}] + O(\xi^2) \\ &= A_{\mu} - \xi^{\alpha\beta}\partial_{\rho}A_{\mu}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma} + \xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]_{\mu}^{\nu}A_{\nu} + O(\xi^2), \end{aligned} \quad (1.65)$$

da cui deduciamo che la grandezza $F_{\alpha\beta}^{\nu}$ che compare nel teorema 1.10 (qui le coordinate sono indicizzate da ν , e a è la coppia $\alpha\beta$) è pari a

$$F_{\alpha\beta}^{\nu} = -\partial_{\rho}A^{\nu}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma} + [L_{\alpha\beta}]^{\nu\rho}A_{\rho}. \quad (1.66)$$

Per calcolare la variazione della lagrangiana, osserviamo che la sua natura scalare ci permette di considerare solo quella parte della trasformazione dei campi, che è indotta dalla trasformazione dei loro argomenti; infatti la trasformazione degli indici associati ai campi stessi lascia automaticamente invariata la lagrangiana. Questo fatto, assieme alla richiesta $J^{\mu} = 0$, ci consente di usare direttamente la variazione $\delta x^{\mu} = -\xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}x^{\nu}$ e di scrivere così

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\partial_{\mu}\mathcal{L}\xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}x^{\nu} \\ &= -\xi^{\alpha\beta}\partial_{\mu}(\mathcal{L}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}x^{\nu}) + \mathcal{L}\xi^{\alpha\beta}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}\delta_{\mu}^{\nu}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Il secondo termine in questa espressione si annulla in virtù del fatto che i generatori hanno traccia nulla. Dunque abbiamo

$$K_{\alpha\beta}^{\mu} = -\mathcal{L}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}x^{\nu}. \quad (1.68)$$

Mettendo assieme la (1.66) e la (1.68) otteniamo le sei correnti conservate

$$\tilde{j}_{\alpha\beta}^{\mu} = K_{\alpha\beta}^{\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A^{\nu})}F_{\alpha\beta}^{\nu} = -\mathcal{L}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}[-\partial_{\rho}A_{\nu}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma} + [L_{\alpha\beta}]_{\nu}^{\rho}A_{\rho}]. \quad (1.69)$$

Come nel caso precedente, aggiungiamo a questa espressione un termine correttivo

$$\psi_{\alpha\beta}^{\mu} = F^{\mu\nu}[\partial_{\nu}A_{\rho}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\sigma}x^{\sigma} + [L_{\alpha\beta}]^{\rho}_{\nu}A_{\rho}], \quad (1.70)$$

che si conserva sulla soluzione del moto, come si può verificare usando l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$. Otteniamo così delle correnti conservate che sono invarianti di gauge:

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\beta}^{\mu} &= \tilde{J}_{\alpha\beta}^{\mu} + \frac{1}{c}\psi_{\alpha\beta}^{\mu} \\
&= \frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}[-\partial_{\rho}A_{\nu}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma} + [L_{\alpha\beta}]_{\nu}{}^{\rho}A_{\rho} \\
&\quad + \partial_{\nu}A_{\rho}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma} + [L_{\alpha\beta}]^{\rho}{}_{\nu}A_{\rho}] \\
&= \frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}[\partial_{\nu}A_{\rho} - \partial_{\rho}A_{\nu}][L_{\alpha\beta}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma} \\
&= \frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}[L_{\alpha\beta}]^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}[L_{\alpha\beta}]^{\rho}{}_{\sigma}x^{\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Alziamo ora gli indici α, β con la metrica di Minkowski e usiamo l'espressione esplicita per i generatori (A.18), ottenendo le correnti conservate dovute alle trasformazioni di Lorentz in una forma che fa intervenire il tensore energia impulso (1.60):

$$\begin{aligned}
M^{\alpha\beta\mu} &:= -[J^{\alpha\beta}]^{\mu} \\
&= \frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}[\eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}]x^{\nu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}[\eta^{\alpha\rho}\delta^{\beta}{}_{\sigma} - \eta^{\beta\rho}\delta^{\alpha}{}_{\sigma}]x^{\sigma} \\
&= \frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}[\eta^{\alpha\mu}x^{\beta} - \eta^{\beta\mu}x^{\alpha}] + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}[F_{\nu}{}^{\alpha}x^{\beta} - F_{\nu}{}^{\beta}x^{\alpha}] \\
&= x^{\beta}\left[\frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\eta^{\alpha\mu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\alpha}\right] - x^{\alpha}\left[\frac{1}{4c}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\eta^{\beta\mu} + \frac{1}{c}F^{\mu\nu}F_{\nu}{}^{\beta}\right] \\
&= x^{\alpha}T^{\beta\mu} - x^{\beta}T^{\alpha\mu}.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Il tensore $M^{\alpha\beta\mu}$ è detto *tensore del momento angolare* poiché origina dalla simmetria per rotazioni. La relativa equazione di continuità si scrive

$$\partial_{\mu}M^{\alpha\beta\mu} = 0, \tag{1.73}$$

ed esprime la conservazione di sei grandezze, essendo $M^{\alpha\beta\mu} = -M^{\beta\alpha\mu}$. Tre di esse sono associate alle rotazioni puramente spaziali:

$$M^{ij0} = x^i P^j - x^j P^i, \tag{1.74}$$

dove riconosciamo una espressione del tutto analoga al momento angolare di una particella. Invece le trasformazioni di moto uniforme sono legate alla conservazione delle tre quantità

$$M^{0k0} = ctP^k - \frac{Wx^k}{c}. \tag{1.75}$$

Queste costituiscono un vettore tridimensionale, la cui conservazione è analoga alla conservazione della velocità del centro di massa per un sistema di particelle relativistiche.

Capitolo 2

Propagazione di particelle in presenza di sorgenti

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto la teoria dei campi classici, abbiamo dimostrato il teorema di Noether e lo abbiamo applicato per studiare le simmetrie del campo elettromagnetico, calcolando in particolare quali grandezze si conservano durante l'evoluzione libera del campo. In questo capitolo ci occupiamo di un campo più semplice, il campo scalare di Klein–Gordon, ma ne trattiamo la propagazione in presenza di sorgenti introducendo il concetto di funzione di Green. È possibile così studiare l'interazione tra due sorgenti mediata dal campo, ossia dalle particelle ad esso associate. Risulta ora molto conveniente usare le unità di misura naturali della fisica delle particelle, in cui $c = \hbar = 1$ sono adimensionali.

2.1 Campo di Klein–Gordon

Il campo di Klein–Gordon¹ è un campo ϕ , scalare di Lorentz, descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (2.1)$$

dove $m \geq 0$ è un parametro di massa. La (2.1) definisce indubbiamente la più semplice teoria di campo che rispetta l'invarianza di Lorentz; è composta da un termine cinetico e da un termine quadratico nel campo. La corrispondente equazione di campo dedotta dalla (1.14), l'*equazione di Klein–Gordon*, è quindi lineare e del secondo ordine. Abbiamo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = -\partial^\mu\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi, \quad (2.2)$$

¹Dai fisici Oskar Klein (1894–1977), svedese, e Walter Gordon (1893–1939), tedesco, che proposero l'omonima equazione come generalizzazione relativistica dell'equazione di Schrödinger.

e quindi l'equazione di campo è

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (2.3)$$

dove usiamo la notazione

$$\square := \partial_\mu \partial^\mu = -\partial_t^2 + \nabla^2 \quad (2.4)$$

per indicare l'operatore di d'Alembert.

Scrivendo la (2.1) abbiamo supposto che il campo fosse reale. Se si ha a che fare con un campo di Klein–Gordon complesso, la lagrangiana assume la forma

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \quad (2.5)$$

che è ancora reale, come deve essere. In questo caso, per dedurre le equazioni del moto, il campo ϕ va considerato indipendente dal suo complesso coniugato ϕ^* , cioè nel funzionale d'azione essi vanno variati indipendentemente. Infatti un campo complesso equivale a due campi reali, e operando nella (2.5) le sostituzioni

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (2.6)$$

si ottiene

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_2^2, \quad (2.7)$$

che è la somma di due lagrangiane (2.1). Pertanto, un campo di Klein–Gordon complesso descrive gli stessi gradi di libertà di due campi di Klein–Gordon reali, con uguale massa. Dalla (2.5) si ottengono le equazioni del moto per ϕ e ϕ^* , che sono una la coniugata dell'altra:

$$(\square - m^2)\phi = 0, \quad (\square - m^2)\phi^* = 0, \quad (2.8)$$

e come previsto sono identiche alla (2.3) e descrivono l'evoluzione libera dei campi ϕ e ϕ^* .

L'equazione (2.3) per un campo complesso ha come soluzioni elementari le onde piane

$$\phi_p(x) = \exp(ip \cdot x) \quad (2.9)$$

se il vettore d'onda p soddisfa un'opportuna relazione di dispersione:

$$0 = (\square - m^2) \exp(ip \cdot x) = (-p^2 - m^2) \exp(ip \cdot x), \quad (2.10)$$

e quindi deve essere

$$p^2 + m^2 = 0. \quad (2.11)$$

Interpretando la componente temporale p^0 come l'energia E di una particella e le componenti spaziali come l'impulso \mathbf{p} ,² riconosciamo la relazione relativistica

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (2.12)$$

²In unità naturali il quadrimpulso (E, \mathbf{p}) coincide col quadrivettore d'onda (ω, \mathbf{k}) , per questo abbiamo usato sin dall'inizio la lettera p .

Questo indica chiaramente che il campo di Klein–Gordon descrive particelle relativistiche di massa m e spin $s = 0$ (come detto, il campo ha una sola componente e si trasforma con la rappresentazione scalare (1.16) del gruppo di Lorentz). Notiamo subito che la (2.12) non fissa il segno dell’energia, e si hanno le due possibilità

$$E_{\pm} = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} = \pm E_{\mathbf{p}}. \quad (2.13)$$

Dunque, sono accettabili entrambe le soluzioni

$$\phi_{\mathbf{p}}^+(x) = \exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_{\mathbf{p}}t)), \quad (2.14a)$$

$$\phi_{-\mathbf{p}}^-(x) = \exp(i(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + E_{\mathbf{p}}t)) = \phi_{\mathbf{p}}^+(x)^*, \quad (2.14b)$$

di cui la prima ha energia positiva, la seconda ha energia negativa e l’impulso cambiato di segno per avere la relazione di coniugazione. Sebbene soddisfino la stessa equazione di Klein–Gordon, due campi legati da una relazione di coniugazione complessa differiscono tra loro per il segno con cui contribuiscono a una carica conservata.

La lagrangiana (2.5) presenta una evidente simmetria esatta per la trasformazione di fase globale

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\xi}\phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\xi}\phi^*, \quad (2.15)$$

dipendente da un parametro $\xi \in [-\pi, \pi]$. Questa simmetria è detta *interna* perché agisce direttamente sui campi, e non riguarda le variabili spazio-temporali. In forma infinitesima, la (2.15) si scrive

$$\phi' = \phi + i\xi\phi + O(\xi^2), \quad \phi'^* = \phi^* - i\xi\phi^* + O(\xi^2), \quad (2.16)$$

e la corrispondente corrente di Noether, con una scelta di normalizzazione, è

$$\begin{aligned} J^{\mu} &= \frac{1}{2m} \left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}(i\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^*)}(-i\phi^*) \right] \\ &= -\frac{i}{2m} [\phi^* \partial^{\mu}\phi - \phi \partial^{\mu}\phi^*] \\ &= \frac{1}{m} \text{Im}(\phi^* \partial^{\mu}\phi). \end{aligned} \quad (2.17)$$

La parte spaziale di questa espressione ha la stessa forma della corrente di probabilità associata all’equazione di Schrödinger. Tuttavia, l’ambiguità nel segno dell’energia, permessa dalla relazione relativistica (2.13), ma non dalla relazione energia-impulso classica, fa sì che la carica J^0 non sia sempre positiva, al contrario di ciò che avviene nell’equazione di Schrödinger dove essa rappresenta una densità di probabilità. Questo fatto si può vedere calcolando la carica associata alle onde piane (2.9):

$$J_p^0 = \frac{1}{m} \text{Im}(\phi_p^* \partial^0 \phi_p) = \frac{1}{m} \text{Im}(\phi_p^* i p^0 \phi_p) = \frac{p^0}{m} |\phi_p|^2 = \frac{p^0}{m}. \quad (2.18)$$

Quindi, le onde piane con energia $p^0 = -E_{\mathbf{p}} < 0$ portano anche una carica negativa. Questa non può essere usata per definire una densità di probabilità, ma la corrente conservata J^μ si potrebbe accoppiare con un campo elettromagnetico, come nella lagrangiana (1.50). Ciò condurrebbe a interpretare la carica J^0 come carica elettrica portata dal campo di Klein–Gordon. Notiamo che per un campo reale la corrente (2.17) si annulla, e tale campo non porta carica.

Il sistema delle onde piane con energie sia positive che negative è completo, e un generico campo di Klein–Gordon libero è una loro sovrapposizione

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [a(\mathbf{p})\phi_{\mathbf{p}}^+(x) + b(\mathbf{p})^*\phi_{\mathbf{p}}^+(x)^*], \quad (2.19)$$

che è reale se e solo se $a(\mathbf{p}) = b(\mathbf{p})$. La normalizzazione è scelta per futura convenienza, e in modo da essere un invariante di Lorentz, come si può verificare con un calcolo diretto considerando ad esempio un *boost* lungo un asse di riferimento. Se i coefficienti a e b sono sufficientemente regolari, allora si può portare l'operatore di Klein–Gordon sotto il segno d'integrazione, verificando così che la (2.19) è effettivamente una soluzione dell'equazione omogenea.

Può essere utile calcolare l'espressione per la densità di energia del campo di Klein–Gordon. Secondo la formula (1.44), abbiamo:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \partial_t \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^*)} \partial_t \phi^* + \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi \\ &= 2\partial_t \phi^* \partial_t \phi + \partial_t \phi^* \partial^t \phi + \partial_i \phi^* \partial^i \phi + m^2 \phi^* \phi \\ &= \partial_t \phi^* \partial_t \phi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Per un campo reale, questa espressione diventa

$$W = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2. \quad (2.21)$$

La lagrangiana (2.1) descrive un campo di Klein–Gordon reale che si propaga liberamente. Tuttavia, per studiare molte proprietà del campo, sia teoricamente che sperimentalmente, è necessario farlo interagire con delle sorgenti, e l'equazione di campo libera (2.3) ha senso solo in quelle regioni dello spazio-tempo dove le sorgenti non agiscono. Una sorgente può provocare un “disturbo” del campo, cioè creare o assorbire le onde di Klein–Gordon.³ Allora l'equazione libera descrive la propagazione dell'onda dopo che è stata emessa, e prima che venga assorbita. Per trattare i processi di emissione o assorbimento, dobbiamo aggiungere alla lagrangiana un termine di accoppiamento con la sorgente, che è lineare nelle coordinate generalizzate come abbiamo visto per

³In una interpretazione particellare, una sorgente che assorbe onde può consistere in un rivelatore di particelle, che “distrugge” le particelle rivelate.

l'accoppiamento tra potenziale elettromagnetico e corrente elettrica. Dunque il campo di Klein–Gordon che interagisce con una sorgente scalare $J(x)$ è descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi. \quad (2.22)$$

La corrispondente equazione di campo è l'equazione di Klein–Gordon non omogenea in cui la sorgente compare come una forzante esterna:

$$(\square - m^2)\phi = -J. \quad (2.23)$$

Per risolvere l'equazione (2.23) introduciamo un metodo generale per trattare le equazioni differenziali non omogenee, che permette in linea di principio di trovare la soluzione corrispondente a una sorgente arbitraria, purché regolare e con buone proprietà di decrescenza all'infinito, e a date condizioni al contorno. Questo metodo fa uso delle *funzioni di Green*,⁴ che sono l'argomento della prossima sezione.

2.2 Funzioni di Green

Diciamo prima di tutto che il termine “funzione” è improprio per questi oggetti matematici, che appartengono alla classe delle funzioni generalizzate o *distribuzioni*, discusse nell'appendice B, a cui rimandiamo il lettore per le definizioni. Illustreremo qui la nozione generale di funzione di Green, e nella successiva sezione la applicheremo all'equazione di Klein–Gordon.

Definizione 2.1. Sia \hat{L}_x un operatore differenziale lineare che coinvolge derivate rispetto alla variabile $x \in \mathbb{R}^n$. Sia δ_x^n il funzionale di Dirac che mappa una funzione di prova s nel suo valore nel punto x , $\delta_x^n: s \mapsto s(x)$. Una *funzione di Green* per l'operatore \hat{L}_x è una distribuzione G_x che risolve l'equazione

$$\hat{L}_x G_x = \delta_x^n. \quad (2.24)$$

Usando una rappresentazione integrale formale per l'azione delle distribuzioni, la funzione di Green è rappresentata dal nucleo integrale $G(x, x')$, e l'equazione (2.24) prende la forma

$$\hat{L}_x G(x, x') = \delta^n(x - x'). \quad (2.25)$$

Aggiungendo a G_x una soluzione H_x dell'equazione distribuzionale omogenea

$$\hat{L}_x H_x = 0, \quad (2.26)$$

⁴Da George Green (1793–1841), matematico inglese la cui storia è interessante. Figlio di un mugnaio, studiò praticamente da autodidatta. Quando il padre morì si iscrisse all'università di Cambridge e conseguì la laurea all'età di circa 40 anni, morendo non molto tempo dopo. In un saggio [2] del 1828, introdusse quelli che oggi sono noti come teorema di Green e funzione di Green in analisi, e la teoria del potenziale in fisica.

la (2.24) rimane soddisfatta. Dunque, le funzioni di Green per un dato operatore differenziale, se esistono, differiscono tra loro per distribuzioni che appartengono al nucleo di tale operatore, cioè che vengono mappate da esso nella distribuzione identicamente nulla. Se il nucleo è non banale, la funzione di Green non è unica; per determinarla univocamente occorre imporre delle condizioni al contorno. In questo caso il “contorno” è un opportuno insieme di valori di x , infatti x' compare nella (2.25) alla stregua di un parametro.

Una funzione di Green, quando non fa riferimento a condizioni al contorno specifiche, è a volte chiamata *soluzione fondamentale* dell'equazione differenziale associata all'operatore \hat{L}_x . Infatti, nota G_x , si può costruire la soluzione dell'equazione

$$\hat{L}_x \phi(x) = s(x), \quad (2.27)$$

per una qualunque “sorgente” s che appartiene allo spazio delle funzioni di prova, su cui può agire come distribuzione la funzione di Green. La soluzione è data da

$$\phi(x) = \phi_0(x) + G_x[s], \quad (2.28)$$

cioè, in notazione integrale, dalla formula

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^n x' G(x, x') s(x'), \quad (2.29)$$

dove ϕ_0 è una soluzione dell'equazione omogenea $\hat{L}_x \phi_0 = 0$, scelta in modo da soddisfare le condizioni al contorno per ϕ . È la definizione di limite in senso distribuzionale che permette di portare un operatore differenziale all'interno del simbolo d'integrazione in una espressione come la (2.29). Allora, usando la definizione (2.25), abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{L}_x \phi(x) &= \hat{L}_x \phi_0(x) + \hat{L}_x \int d^n x' G(x, x') s(x') \\ &= \int d^n x' \hat{L}_x G(x, x') s(x') \\ &= \int d^n x' \delta^n(x - x') s(x') \\ &= s(x). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dalla definizione (2.25), si vede che la quantità $G(x, x')$ è interpretabile come la risposta del sistema a una perturbazione impulsiva $\delta^n(x - x')$ localizzata nel punto x' . Si può dire che la funzione di Green propaga tale perturbazione fino al punto x . In virtù del principio di sovrapposizione valido per gli operatori differenziali lineari, la soluzione in presenza di una sorgente, che può sempre esprimersi come sovrapposizione di sorgenti impulsive

$$s(x) = \int d^n x' s(x') \delta^n(x' - x), \quad (2.31)$$

è nient'altro che la sovrapposizione delle soluzioni corrispondenti a tali sorgenti elementari, cioè le distribuzioni $G(x, x')$. Proprio questo è il significato della formula (2.29).

Se \hat{L}_x è un operatore differenziale a coefficienti costanti e $G(x, x')$ soddisfa la (2.25), allora anche $G(x + b, x' + b)$ soddisfa la stessa equazione, quando $b \in \mathbb{R}^n$ è un vettore costante. È naturale allora cercare una funzione di Green che dipenda solo dalla differenza dei suoi argomenti:

$$G(x, x') = G(x - x'). \quad (2.32)$$

Questa condizione rende particolarmente conveniente l'uso dei metodi di Fourier, come vedremo nella prossima sezione, e inoltre permette di affermare che la soluzione particolare ϕ_1 dell'equazione differenziale è data dalla *convoluzione* tra la funzione di Green e la sorgente:

$$\phi_1(x) = \int d^n x' G(x - x') s(x'). \quad (2.33)$$

2.3 Sorgenti per il campo di Klein–Gordon

Ritorniamo all'equazione di Klein–Gordon con un termine di sorgente (2.23), e vediamo come tentarne la soluzione col metodo delle funzioni di Green. In questo caso $x \in \mathbb{R}^4$ e l'operatore di interesse è

$$\hat{L}_x = \square_x - m^2. \quad (2.34)$$

Questo operatore è invariante per traslazione e quindi ne cercheremo una funzione di Green soddisfacente la condizione (2.32). Dobbiamo però considerare solo quelle sorgenti J che sono rappresentate da funzioni, su cui è ben definita l'azione delle distribuzioni che useremo. Noi richiederemo che J sia una funzione a decrescenza rapida. Questa condizione non sembra molto restrittiva se si pensa che una sorgente fisica è sempre localizzata nello spazio e nel tempo, e dal punto di vista matematico è necessaria per applicare il metodo della trasformata di Fourier.

2.3.1 Potenziale di Yukawa

Una prima questione che si pone è quella di studiare la risposta del campo di Klein–Gordon a una sorgente statica. In questo caso è possibile cercare delle soluzioni stazionarie, che soddisfano una equazione semplificata in cui non compare più la variabile temporale:

$$(\nabla^2 - m^2)\phi(\mathbf{x}) = -J(\mathbf{x}). \quad (2.35)$$

Anche la funzione di Green relativa a questo problema non dipende dal tempo, e soddisfa l'equazione

$$(\nabla_x^2 - m^2)G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.36)$$

Trovandola, la soluzione della (2.35) si può scrivere

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) + \int d^3x G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') J(\mathbf{x}'), \quad (2.37)$$

dove ϕ_0 risolve $(\nabla^2 - m^2)\phi_0 = 0$. Supponendo di lavorare con funzioni definite in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , possiamo applicare ad entrambi i membri della (2.36) la trasformata di Fourier rispetto alla variabile $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Chiamando \mathbf{k} la variabile (che giace nello spazio dei momenti) da cui dipende la trasformata \tilde{G} , otteniamo

$$\mathcal{F}(\nabla^2 - m^2)G = -\mathcal{F}\delta^3 \implies (-\mathbf{k}^2 - m^2)\tilde{G}(\mathbf{k}) = -1, \quad (2.38)$$

dove abbiamo usato le formule (B.36) e (B.39). Abbiamo così ridotto l'equazione differenziale per G ad una equazione algebrica per \tilde{G} . Se $m > 0$, cioè se il campo è massivo, il termine $\mathbf{k}^2 + m^2$ non si annulla mai e la soluzione è semplicemente

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.39)$$

Dobbiamo ora applicare l'antitrasformata per trovare la funzione di Green ordinaria. La funzione (2.39) è regolare, non è a decrescenza rapida ma si può comunque calcolare la sua antitrasformata di Fourier con la formula usuale

$$G(\Delta\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{x})}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (2.40)$$

L'integrale si semplifica nelle coordinate sferiche scegliendo l'asse polare nella direzione di $\Delta\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} G(\Delta\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + m^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_{-\pi}^\pi d\varphi \exp(ik|\Delta\mathbf{x}|\cos\vartheta) \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\Delta\mathbf{x}|} \int_0^\infty dk \frac{k \sin(k|\Delta\mathbf{x}|)}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2|\Delta\mathbf{x}|} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k e^{ik|\Delta\mathbf{x}|}}{k^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Scritto in questa forma, possiamo calcolare l'integrale rimanente facendo ricorso al teorema dei residui; l'integranda soddisfa il lemma di Jordan e dobbiamo chiudere il percorso di integrazione con un semicerchio nel semipiano superiore, dove c'è un polo semplice nel punto $k = im$:

$$\begin{aligned} G(\Delta\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi^2|\Delta\mathbf{x}|} \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res} \frac{k e^{ik|\Delta\mathbf{x}|}}{k^2 + m^2} \Big|_{k=im} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi|\Delta\mathbf{x}|} \operatorname{Im} i e^{ik|\Delta\mathbf{x}|} \Big|_{k=im} \\ &= \frac{e^{-m|\Delta\mathbf{x}|}}{4\pi|\Delta\mathbf{x}|}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Tornando alle variabili originarie, abbiamo quindi trovato la funzione di Green

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.43)$$

che tende a 0 per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ ed è simmetrica per scambio di \mathbf{x} e \mathbf{x}' . Questa proprietà matematica riflette una proprietà del campo di Klein-Gordon statico che è comune a molti sistemi fisici: applicare un disturbo nel punto \mathbf{x}' e rilevarne gli effetti nel punto \mathbf{x} è lo stesso che applicare tale disturbo nel punto \mathbf{x} e rilevarne gli effetti nel punto \mathbf{x}' .

Se $m = 0$, l'equazione (2.35) si riduce all'equazione di Poisson, e la funzione di Green (2.43) si riduce alla funzione di Green per l'operatore di Laplace, che in elettrostatica è interpretata come il potenziale coulombiano prodotto da una carica unitaria puntiforme. L'interpretazione qui è del tutto analoga, ma si vede che la massa non nulla del campo di Klein-Gordon dà un raggio d'azione finito al potenziale. Viceversa, in elettrostatica il raggio d'azione infinito è evidentemente dovuto alla massa nulla dei "fotoni".

Come nel caso dell'elettrostatica, l'energia del campo di Klein-Gordon prodotto da una sorgente puntiforme è infinita. Questo si può verificare sostituendo $\phi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nella (2.21) e integrando su tutto lo spazio. Noi useremo un altro metodo, che permette allo stesso tempo di calcolare l'energia di interazione tra due sorgenti, dovuta al campo di Klein-Gordon, la quale risulta finita ed è quindi immediatamente dotata di significato fisico. In questo caso, il campo è visto come mediatore dell'interazione tra le sorgenti. La dinamica di queste ultime sarà governata dal termine di accoppiamento col campo $J\phi$ e da termini che ne descrivono l'evoluzione libera. Se esse sono puntiformi, la relativa azione sarà data dall'integrale nel tempo di una lagrangiana, che si presenta nella forma naturale $\mathcal{L} = T - V$ dove T è l'energia cinetica e V l'energia potenziale. Il termine potenziale dovuto all'interazione col campo di Klein-Gordon si può calcolare usando la soluzione delle equazioni di campo.

Supponiamo che vi siano due sorgenti puntiformi, poste ferme nei punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 e accoppiate al campo con intensità quantificate dalle costanti di accoppiamento g_1 e g_2 , che sono quindi interpretabili come le "cariche" associate a queste sorgenti:

$$J(\mathbf{x}) = J_1(\mathbf{x}) + J_2(\mathbf{x}) = g_1\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + g_2\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2). \quad (2.44)$$

Per il principio di sovrapposizione, il campo prodotto è

$$\phi(\mathbf{x}) = g_1 \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} + g_2 \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|}. \quad (2.45)$$

Per calcolare il contributo all'azione dovuto alla presenza del campo, dobbiamo sostituire questa soluzione nell'azione che descrive il campo di Klein-Gordon in presenza della sorgente. Tenendo conto dell'equazione del moto (2.23), questa si può scrivere nel seguente modo:

$$S[\phi, J] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (\square - m^2) \phi + J\phi \right] - \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x J\phi - \frac{1}{2} \oint d\sigma_\mu \phi \partial^\mu \phi.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

L'ultimo termine dipende dalla scelta del dominio di integrazione e svanisce se si integra su tutto il 3-spazio, perché il campo (2.45) decresce rapidamente se $m > 0$. Teniamo allora solo il primo termine e sostituiamo le espressioni (2.44) e (2.45):

$$\begin{aligned}
S[\phi, J_1, J_2] = \frac{1}{2} \int dt \int d^3x \left[\frac{g_1^2}{4\pi} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} + \frac{g_1 g_2}{4\pi} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} \right. \\
\left. + \frac{g_1 g_2}{4\pi} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} + \frac{g_2^2}{4\pi} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|} \right].
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Il primo e l'ultimo termine nell'integrale danno i contributi divergenti legati all'auto-interazione di ciascuna sorgente col campo da essa prodotto. I restanti due termini danno invece l'interazione effettiva tra le due sorgenti, mediata dal campo che ognuna produce e che influenza l'altra:

$$S_{\text{eff}}[J_1, J_2] = \int dt \frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \tag{2.48}$$

Abbiamo svolto l'integrazione spaziale, ed è rimasto l'integrale nel tempo di una espressione che dipende solo dalle cariche e dalla loro posizione reciproca. L'opposto di questo termine è il *potenziale di Yukawa*, il potenziale centrale efficace che si genera tra due cariche puntiformi g_1, g_2 poste a una distanza r che interagiscono mutuamente tramite il campo di Klein–Gordon:

$$V_{\text{Yukawa}}(r) = -\frac{g_1 g_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \tag{2.49}$$

Questo è un potenziale attrattivo se le cariche hanno lo stesso segno, e ha un raggio d'azione pari all'inverso della massa del campo.⁵

Poiché la funzione di Green svolge il ruolo di propagare un disturbo del campo, capace in questo caso di mediare l'interazione tra sorgenti distinte, essa è nota sotto il nome di *propagatore*. Vedremo nel capitolo 3 un'altra accezione di questo termine, non legata alla presenza di una sorgente ma alla propagazione libera del campo. Nel presente capitolo, comunque, utilizziamo “propagatore” e “funzione di Green” come sinonimi.

2.3.2 Sorgenti dipendenti dal tempo

Il potenziale di Yukawa descrive l'interazione tra sorgenti statiche, mediata dal campo di Klein–Gordon. Il corrispondente propagatore, dato dalla formula (2.43), è stato ricavato

⁵Il fisico giapponese Hideki Yukawa (1907–1981) lo ricavò e lo usò per stimare la massa delle particelle di Klein–Gordon, oggi note sotto il nome di pioni, che mediano l'interazione a corto raggio tra i nucleoni.

nell'ipotesi che tutte le grandezze fossero stazionarie, conservando quindi solo la parte spaziale (ellittica) dell'operatore di Klein–Gordon. In presenza di sorgenti dipendenti dal tempo, occorre trovare il propagatore per l'operatore di Klein–Gordon completo. In questo caso la non-univocità della funzione di Green emerge con più evidenza, assieme al suo carattere distribuzionale, e la selezione di un preciso propagatore è dettata da importanti considerazioni fisiche.

Consideriamo l'equazione

$$(\square - m^2)G(x - x') = -\delta^4(x - x'). \quad (2.50)$$

Applicando ad entrambi i membri la trasformata di Fourier (ora indichiamo con p la variabile nello spazio dei momenti) otteniamo

$$(-p^2 - m^2)\tilde{G}(p) = -1. \quad (2.51)$$

È essenziale considerare il carattere distribuzionale di questa equazione, infatti il fattore $p^2 + m^2$ si annulla su un iperboloido nel 4-spazio, i cui punti soddisfano la condizione

$$(p^0)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 = E_{\mathbf{p}}^2. \quad (2.52)$$

La soluzione della (2.51) sarà allora la somma di una soluzione particolare e della soluzione generale dell'omogenea, in cui il membro di destra è nullo. Una equazione simile è risolta nell'appendice B, ma il problema presente è complicato dalla dimensionalità superiore, che si affronta trattando la variabile p^0 separatamente dalle altre. Useremo allora la notazione

$$\tilde{G}_1(p) = \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} := \int d^3p \mathcal{P} \int dp^0 \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (2.53)$$

per indicare la soluzione particolare della (2.51), espressa da un integrale in valor principale. Poi, l'omogenea è risolta dalla distribuzione

$$\delta(p^2 + m^2) = \delta((p^0)^2 - E_{\mathbf{p}}^2), \quad (2.54)$$

che pure s'intende agire su funzioni della variabile p^0 , per \mathbf{p} fissato. Allora, applicando la formula (B.14), si ha

$$\delta(p^2 + m^2) = \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\delta(p^0 - E_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + E_{\mathbf{p}})]. \quad (2.55)$$

Con le notazioni introdotte la soluzione della (2.51) è una generalizzazione della (B.58):

$$\tilde{G}(p) = \mathcal{P} \frac{1}{p^2 + m^2} + 2\pi h(p) \delta(p^2 + m^2), \quad (2.56)$$

dove h è una funzione arbitraria.

La formula (2.56) dà la funzione di Green nello spazio degli impulsi, e dobbiamo antitrasformare per ricavare la funzione di Green nello spazio delle coordinate. Notiamo che in questa operazione il secondo termine nella (2.56), che risolve l'equazione algebrica omogenea $(p^2 + m^2)\tilde{G}_0(p) = 0$, si trasforma nella soluzione generale dell'equazione di Klein–Gordon omogenea, a conferma del fatto che le funzioni di Green differiscono tra loro per una tale soluzione. Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned}
G_0(x - x') &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} 2\pi h(p) \delta(p^2 + m^2) \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{2E_{\mathbf{p}}} \int dp^0 e^{-ip^0(t-t')} h(p) [\delta(p^0 - E_{\mathbf{p}}) + \delta(p^0 + E_{\mathbf{p}})] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{2E_{\mathbf{p}}} \left[h(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{-iE_{\mathbf{p}}(t-t')} + h(-E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) e^{+iE_{\mathbf{p}}(t-t')} \right] \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left[h(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \phi_{\mathbf{p}}^+(x - x') + h(-E_{\mathbf{p}}, -\mathbf{p}) \phi_{\mathbf{p}}^+(x - x')^* \right].
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Questa espressione è invariante di Lorentz se tale è h , e coincide con la (2.19) ponendo

$$h(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = a(\mathbf{p}), \quad h(-E_{\mathbf{p}}, -\mathbf{p}) = b(\mathbf{p})^*. \tag{2.58}$$

Le funzioni arbitrarie a e b devono essere scelte affinché la funzione di Green soddisfi le condizioni al contorno desiderate, come vedremo.

Studiamo ora il contributo della parte principale che compare nella (2.56). Calcolando l'antitrasformata otteniamo

$$\begin{aligned}
G_1(x - x') &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathcal{P} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{ip \cdot (x - x')}}{p^2 + m^2} \\
&= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \mathcal{P} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip^0(t-t')}}{(p^0)^2 - E_{\mathbf{p}}^2} \\
&= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{2E_{\mathbf{p}}} \mathcal{P} \int \frac{dp^0}{2\pi} e^{-ip^0(t-t')} \left[\frac{1}{p^0 - E_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{p^0 + E_{\mathbf{p}}} \right].
\end{aligned} \tag{2.59}$$

La prescrizione per il calcolo dell'integrale in valor principale è univoca, e quindi non ci sono arbitrarietà nel contributo che questo termine dà alla funzione di Green. Tuttavia, possiamo calcolarlo passando artificialmente al piano complesso, e possiamo scegliere il contorno in alcuni modi diversi. Per fare questi calcoli, cambiamo momentaneamente nome alle variabili.

Consideriamo la definizione dell'integrale in valor principale

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \right) d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0}. \tag{2.60}$$

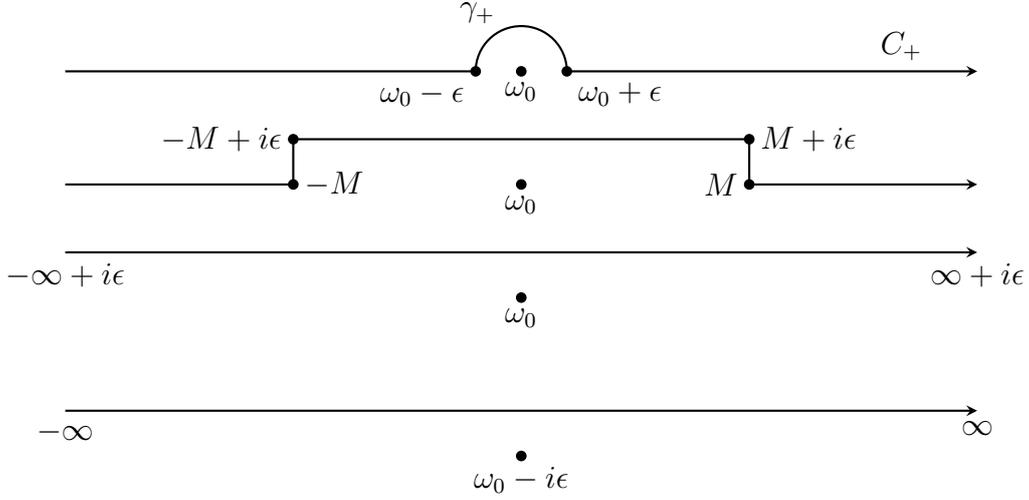


Figura 2.1: Dall'alto al basso, queste sono le deformazioni successive effettuate sul percorso C_+ ; analoghe, ma rovesciate, sono quelle del percorso C_- . In alto è mostrato il percorso C_+ secondo la sua definizione, in basso si è giunti a spostare il polo sotto l'asse reale.

Possiamo ottenere un percorso d'integrazione connesso aggiungendo un semicerchio γ_{\pm} , di raggio ϵ , che passa sopra (+) o sotto (-) il polo nel piano complesso. Chiamando C_{\pm} il percorso così ottenuto, abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_{\pm}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \right) d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\pm}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} \\
&= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} \mp i\pi \operatorname{Res} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
&= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} \mp i\pi e^{-i\omega_0\tau}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Possiamo però effettuare una deformazione sul percorso C_{\pm} , illustrata nella figura 2.1, senza cambiare il valore dell'integrale:

$$\int_{C_{\pm}} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} = \left(\int_{-\infty}^{-M} + \int_{-M}^{-M \pm i\epsilon} + \int_{-M \pm i\epsilon}^{M \pm i\epsilon} + \int_{M \pm i\epsilon}^M + \int_M^{\infty} \right) d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0}, \tag{2.62}$$

dove $M > 0$. Mandando M all'infinito, tutti gli integrali si annullano meno quello centrale, che tende a

$$\int_{-\infty \pm i\epsilon}^{\infty \pm i\epsilon} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i(\omega \pm i\epsilon)\tau}}{\omega - \omega_0 \pm i\epsilon} \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\sim} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0 \pm i\epsilon}. \tag{2.63}$$

Abbiamo così sostanzialmente spostato il polo sotto o sopra l'asse reale, a una distanza ϵ tendente a zero. Sostituendo nella (2.61), ritroviamo la formula di Sokhotski–Plemelj applicata alla funzione $e^{-i\omega\tau}$:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0 \pm i\epsilon} \pm i\pi e^{-i\omega_0\tau}. \quad (2.64)$$

Possiamo manipolare ulteriormente questa formula usando l'identità

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega \pm i\epsilon} = \pm \frac{2\pi}{i} \theta(\pm\tau), \quad (2.65)$$

dove θ è la funzione a gradino. La formula (2.65) si può verificare direttamente con una integrazione di contorno nel piano complesso, ed è vera anche in senso distribuzionale (il limite è distribuzionale, e la theta induce una distribuzione temperata). Abbiamo così

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0 \pm i\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}}{\omega \pm i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \pm \frac{2\pi}{i} e^{-i\omega_0\tau} \theta(\pm\tau), \quad (2.66)$$

che sostituita nella (2.64) dà due espressioni equivalenti per la parte principale

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_0} &= \pm \frac{2\pi}{i} e^{-i\omega_0\tau} \theta(\pm\tau) \pm i\pi e^{-i\omega_0\tau} \\ &= \mp 2\pi i e^{-i\omega_0\tau} [\theta(\pm\tau) - 1/2]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Con le sostituzioni $\omega \rightarrow p^0$, $\tau \rightarrow t - t'$, $\omega_0 \rightarrow \pm E_{\mathbf{p}}$, e introducendo due segni arbitrari σ_{\pm} che danno rispettivamente la direzione dell'archetto attorno al polo $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}}$, la formula (2.67) si riscrive

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip^0(t-t')}}{p^0 \mp E_{\mathbf{p}}} = -\sigma_{\pm} i e^{\mp i E_{\mathbf{p}}(t-t')} [\theta(\sigma_{\pm}(t-t')) - 1/2], \quad (2.68)$$

dove per convenienza abbiamo diviso entrambi i membri per 2π . Allora, l'espressione (2.59) per il propagatore diventa:

$$\begin{aligned} G_1(x - x') &= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{2E_{\mathbf{p}}} \left[-\sigma_+ i e^{-iE_{\mathbf{p}}(t-t')} [\theta(\sigma_+(t-t')) - 1/2] \right. \\ &\quad \left. + \sigma_- i e^{+iE_{\mathbf{p}}(t-t')} [\theta(\sigma_-(t-t')) - 1/2] \right] \\ &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left[\sigma_+ [\theta(\sigma_+(t-t')) - 1/2] \phi_{\mathbf{p}}^+(x - x') \right. \\ &\quad \left. - \sigma_- [\theta(\sigma_-(t-t')) - 1/2] \phi_{\mathbf{p}}^+(x - x')^* \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\sigma_+ \theta(\sigma_+(t-t')) \phi_{\mathbf{p}}^+(x-x') - \sigma_- \theta(\sigma_-(t-t')) \phi_{\mathbf{p}}^+(x-x')^*] \\
&\quad - \frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\sigma_+ \phi_{\mathbf{p}}^+(x-x') - \sigma_- \phi_{\mathbf{p}}^+(x-x')^*]. \tag{2.69}
\end{aligned}$$

Vediamo che il termine nell'ultima riga è di nuovo una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon omogenea. Così, il suo contributo può essere riassorbito nelle funzioni a e b definite nella (2.58). In particolare, queste possono essere scelte in modo che complessivamente la “parte omogenea” della funzione di Green si annulli. Ciò è sufficiente, poiché le quattro possibilità di scelta per la coppia (σ_+, σ_-) determinano altrettante funzioni di Green, che soddisfano precise condizioni al contorno a cui saremo in grado di dare dei significati fisici. Pertanto, considereremo d'ora in poi solo la parte genuinamente “non omogenea” della funzione di Green.

È opportuno rimarcare che i segni arbitrari σ_{\pm} che compaiono nell'espressione generale (2.69) sono ciò che rimane della prescrizione che definisce il valor principale nella (2.59), dopo una deformazione del contorno d'integrazione nel piano complesso. In particolare prendere $\sigma_+ = +1$ o $\sigma_+ = -1$ corrisponde a scegliere un contorno nel piano complesso, che evita il polo nel punto $p^0 = +E_{\mathbf{p}}$ passandovi rispettivamente sopra o sotto con un archetto, o, il che è equivalente, spostandolo sotto o sopra l'asse reale su cui si integra. Analogamente, prendere $\sigma_- = +1$ o $\sigma_- = -1$ corrisponde a spostare il polo che originariamente si trovava nel punto $p^0 = -E_{\mathbf{p}}$, rispettivamente sotto o sopra l'asse reale.

Se scegliamo $\sigma_+ = \sigma_- = +1$, cioè se spostiamo entrambi i poli sotto l'asse reale, otteniamo il cosiddetto *propagatore ritardato*:

$$G_{\text{ret}}(x-x') = i\theta(t-t') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\phi_{\mathbf{p}}^+(x-x') - \phi_{\mathbf{p}}^+(x-x')^*]. \tag{2.70}$$

Come si vede, esso si annulla per $t < t'$, e quindi è adatto per trattare un problema in cui un disturbo perturba il sistema a partire dall'istante t' , e i suoi effetti si propagano avanti nel tempo. Pertanto, questo propagatore descrive una sorgente che emette onde, di energia positiva o negativa, che vengono propagate avanti nel tempo rispettivamente dal primo o dal secondo termine nell'integrando della (2.70). Questa considerazione non è alterata se si passa a un riferimento diverso, infatti il segno dell'intervallo temporale tra due eventi separati da una distanza di tipo tempo o luce non è modificato da una trasformazione di Lorentz ortocrona. Si può mostrare, come ci si aspetta in virtù del fatto che la massima velocità di propagazione delle interazioni è la velocità della luce, che l'espressione (2.70) si annulla al di fuori del cono luce futuro. Dunque, il propagatore ritardato soddisfa il requisito di *causalità*, per cui un segnale può propagarsi (avanti nel tempo) da x' a x solo se sono verificate le condizioni $(x-x')^2 \leq 0$, $t > t'$.

Possiamo calcolare esplicitamente il propagatore ritardato per un campo di Klein-Gordon non massivo. Ponendo $m = 0$ nella (2.70), e $x - x' = \Delta x$, otteniamo

$$\begin{aligned}
G_{\text{ret}}(\Delta x)|_{m=0} &= -\theta(\Delta t) \text{Im} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{p}|} e^{i(\mathbf{p} \cdot \Delta \mathbf{x} - |\mathbf{p}| \Delta t)} \\
&= -\theta(\Delta t) \text{Im} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(2\pi)^3} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_{-\pi}^\pi d\varphi \frac{1}{p} e^{ip|\Delta \mathbf{x}| \cos \vartheta - ip\Delta t} \\
&= -\theta(\Delta t) \text{Im} \int_0^\infty \frac{dp p}{(2\pi)^2} e^{-ip\Delta t} \frac{e^{ip|\Delta \mathbf{x}|} - e^{-ip|\Delta \mathbf{x}|}}{ip|\Delta \mathbf{x}|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \theta(\Delta t) \frac{1}{|\Delta \mathbf{x}|} \text{Im} i \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} [e^{ip(|\Delta \mathbf{x}| - \Delta t)} - e^{-ip(|\Delta \mathbf{x}| + \Delta t)}] \quad (2.71) \\
&= \frac{1}{2\pi} \theta(\Delta t) \frac{1}{2|\Delta \mathbf{x}|} \text{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} [e^{ip(|\Delta \mathbf{x}| - \Delta t)} - e^{-ip(|\Delta \mathbf{x}| + \Delta t)}] \\
&= \frac{1}{2\pi} \theta(\Delta t) \frac{1}{2|\Delta \mathbf{x}|} [\delta(|\Delta \mathbf{x}| - \Delta t) - \delta(|\Delta \mathbf{x}| + \Delta t)].
\end{aligned}$$

Poiché in questa espressione la funzione theta seleziona gli intervalli $\Delta t > 0$, il secondo termine tra quadre non contribuisce; se ne può dunque cambiare il segno, ottenendo l'espressione manifestamente Lorentz-invariante

$$G_{\text{ret}}(\Delta x)|_{m=0} = \frac{1}{2\pi} \theta(\Delta t) \delta(\Delta x^2), \quad (2.72)$$

che ha il supporto sul cono luce futuro e quindi descrive, coerentemente con la massa nulla del campo, la propagazione di particelle avanti nel tempo alla velocità della luce.

Se invece scegliamo $\sigma_+ = \sigma_- = -1$ nella (2.69), cioè se spostiamo entrambi i poli sopra l'asse reale, otteniamo il *propagatore avanzato*:

$$\begin{aligned}
G_{\text{adv}}(x - x') &= -i\theta(t' - t) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} [\phi_{\mathbf{p}}^+(x - x') - \phi_{\mathbf{p}}^+(x - x')^*] \\
&= G_{\text{ret}}(x' - x).
\end{aligned} \quad (2.73)$$

All'opposto del precedente, questo si annulla per $t > t'$, e quindi descrive un fenomeno in cui un disturbo inizialmente presente viene soppresso e cessa di esistere dopo l'istante t' . Questa condizione può sembrare strana, in quanto descrive una perturbazione impulsiva impressa sul campo nel punto x' , che è tale da annullare esattamente un'onda incidente in quel punto; tuttavia, questa è precisamente l'azione di un dispositivo che "assorbe" onde. Il propagatore avanzato permette di calcolare il valore del campo in un punto, con la formula (2.29), in funzione dei valori che la sorgente assume dentro il cono luce futuro di quel punto. Volendo conservare una visione in cui è la sorgente a determinare il valore del campo, possiamo dire che le onde di qualsiasi frequenza hanno origine dalla sorgente, ma vengono propagate *indietro* nel tempo dalla funzione di Green avanzata (2.73).

Siccome $G_{\text{adv}}(\Delta x) = G_{\text{ret}}(-\Delta x)$, il propagatore avanzato è nullo all'esterno del cono luce passato rispetto all'origine. Se $m = 0$, dalla (2.72) si deduce l'espressione analoga

$$G_{\text{adv}}(\Delta x)|_{m=0} = \frac{1}{2\pi} \theta(-\Delta t) \delta(\Delta x^2), \quad (2.74)$$

che descrive la propagazione di particelle indietro nel tempo alla velocità della luce.

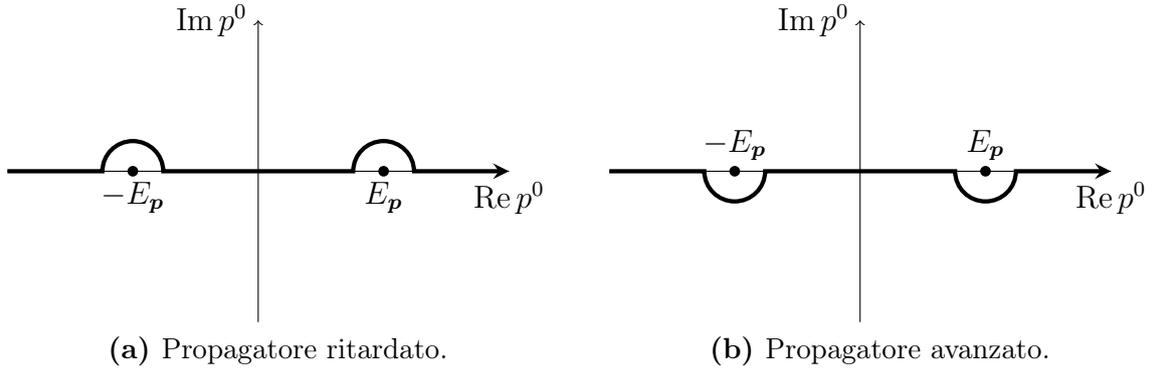


Figura 2.2: I percorsi di integrazione nel piano complesso p^0 , che definiscono i propagatori reali. Gli archetti devono intendersi infinitesimi.

Propagatore di Feynman

I propagatori ritardato e avanzato, che sono reali, propagano tutte le frequenze rispettivamente avanti o indietro nel tempo. Abbiamo però già avuto modo di osservare che le frequenze positive e negative non dovrebbero essere poste su uno stesso piano, infatti l'esistenza stessa di onde di Klein–Gordon con frequenza (ed energia) negativa pone un problema interpretativo. In meccanica relativistica l'energia di una particella libera è sempre positiva. Inoltre, uno spettro inferiormente illimitato sembra portare a una instabilità, siccome si può estrarre da una qualsiasi eccitazione del campo una quantità di energia arbitrariamente grande. Come detto, poi, un'onda di Klein–Gordon con energia negativa porta una carica negativa che non è interpretabile come densità di probabilità.

Il problema dell'esistenza di onde con energia negativa si pone per ogni teoria di campo relativistica, che pretenderebbe di descrivere particelle che soddisfano la condizione di *mass-shell* (2.12). Una tale teoria non può descrivere la dinamica di una sola particella. Al più, può descrivere un insieme di particelle, e l'assenza di una densità di probabilità sembra conciliarsi con l'energia a riposo finita delle particelle relativistiche, che permette la loro creazione o annichilazione (nel limite $c \rightarrow \infty$, invece, una particella quantistica non relativistica non può essere creata né distrutta). La quantizzazione della teoria di campo

va oltre l'ambito di questa tesi, ma possiamo intuire come una teoria quantistica risolve il problema delle energie negative, costruendo un opportuno propagatore di particelle, il *propagatore di Feynman*.

Esso si ottiene scegliendo $\sigma_+ = +1$, $\sigma_- = -1$ nell'espressione generale (2.69):

$$G_F(x - x') = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [\theta(t - t') \phi_p^+(x - x') + \theta(t' - t) \phi_p^+(x - x')^*]. \quad (2.75)$$

Questo propagatore è complesso e soddisfa $G_F(\Delta x) = G_F(-\Delta x)$. La scelta dei segni equivale a spostare i poli $\pm E_p \rightarrow \pm(E_p - i\epsilon)$ (*prescrizione di Feynman*), che conduce a

$$p^2 + m^2 = E_p^2 - (p^0)^2 \rightarrow (E_p - i\epsilon)^2 - (p^0)^2 = E_p^2 - (p^0)^2 - 2iE_p\epsilon - \epsilon^2 \underset{\epsilon \rightarrow 0^+}{\sim} p^2 + m^2 - i\epsilon. \quad (2.76)$$

Così, il propagatore di Feynman nello spazio degli impulsi è di solito scritto nella forma compatta

$$\tilde{G}_F(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad (2.77)$$

e il propagatore nello spazio delle coordinate è

$$G_F(x - x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x - x')}}{p^2 + m^2 - i\epsilon}. \quad (2.78)$$

Queste espressioni sintetiche e manifestamente Lorentz-invarianti vanno interpretate alla luce delle considerazioni fatte sul calcolo del propagatore.

Come si vede dall'espressione esplicita (2.75), la funzione di Green ottenuta con la prescrizione di Feynman propaga avanti nel tempo le onde di energia positiva, e indietro nel tempo quelle di energia negativa. La sua simmetria esprime il fatto che la sorgente influenza sia l'evoluzione futura del sistema che quella passata. Notiamo che le sostituzioni $t \rightarrow -t$, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ cambiano ϕ_p^{+*} in ϕ_p^+ , e così un'onda che si propaga indietro nel tempo con energia negativa può essere interpretata come un'onda che si propaga avanti nel tempo, con l'energia e l'impulso cambiati di segno. Ora, in una interpretazione particellare, un'onda che si propaga indietro nel tempo con energia negativa è associata a quella che si chiama una *antiparticella*, che si propaga avanti nel tempo con energia positiva. Le antiparticelle vanno considerate sullo stesso piano delle particelle usuali, ma si differenziano per il fatto di avere tutte le cariche interne cambiate di segno (abbiamo visto almeno in un caso particolare, formula (2.18), che due campi complesso coniugati portano cariche opposte). Così, la creazione di una particella equivale alla distruzione di una antiparticella e viceversa.

Il concetto di antiparticella emerge necessariamente in una teoria relativistica che descrive un campo complesso (su cui la coniugazione di carica agisce in modo non banale), e pone rimedio al problema delle energie negative. Il processo che vede una particella con energia negativa essere creata nel punto x' e propagarsi indietro nel tempo fino al

punto x , con $t < t'$, equivale al processo in cui una antiparticella si propaga dal punto x avanti nel tempo con energia positiva fino al punto x' , dove viene distrutta. Allora il propagatore di Feynman descrive la propagazione in avanti nel tempo di particelle e antiparticelle, tutte con energia positiva. È questa l'interpretazione "causale" di Feynman e Stueckelberg.⁶

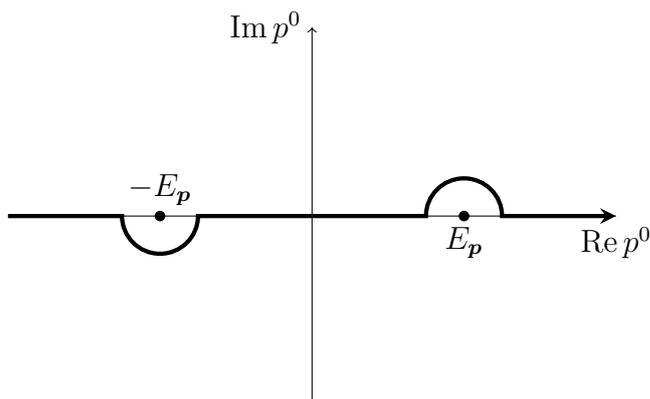


Figura 2.3: Il percorso di integrazione nel piano complesso p^0 , che definisce il propagatore di Feynman. Anche in questo caso gli archetti devono intendersi infinitesimi.

La funzione di Green che si otterrebbe scegliendo $\sigma_+ = -1$, $\sigma_- = +1$ nella (2.69), al contrario, propagherebbe avanti nel tempo le frequenze negative e indietro nel tempo quelle positive. Evidentemente, è più difficile dare un significato fisico a queste condizioni al contorno, e non è necessario nelle applicazioni considerare questo propagatore.

Tutti i propagatori descritti sin qui tengono conto degli effetti dovuti sia alle particelle *reali*, che possono esistere come stati stabili descritti (localmente) da onde piane che soddisfano la relazione di dispersione relativistica, sia alle cosiddette particelle *virtuali*, che invece possono esistere solo per intervalli spazio-temporali finiti, non possono essere direttamente rivelate, e sono interpretate come mediatrici dell'interazione tra sorgenti del campo. Infatti, tale interazione può essere vista come l'emissione e il successivo assorbimento di una particella virtuale.

Come abbiamo fatto per ricavare il potenziale di Yukawa, l'azione efficace che descrive l'interazione tra due sorgenti J_1 e J_2 , che ora pensiamo mediata dalle particelle virtuali associate al campo, è descritta dal termine

$$S[\phi, J_1, J_2] = \frac{1}{2} \int d^4x [J_1(x) + J_2(x)] \phi(x), \quad (2.79)$$

in cui deve essere sostituita la soluzione dell'equazione di campo. Nel ricavare questa formula (cfr. (2.46)) abbiamo considerato reali sia il campo che le sorgenti. In tal caso,

⁶Ernst Stueckelberg (1905–1984) fu un fisico svizzero, che per primo interpretò la propagazione di particelle indietro nel tempo come propagazione avanti nel tempo di particelle di carica opposta, giungendo ad esprimere la teoria perturbativa per mezzo di diagrammi. Sebbene egli abbia fatto importanti scoperte in fisica teorica, l'importanza del suo lavoro è stata riconosciuta solo dopo la morte, e tali diagrammi oggi sono attribuiti a Feynman, che più tardi li ricavò in maniera indipendente e sistematica.

ha senso usare il propagatore ritardato per scrivere la soluzione come

$$\phi(x) = \int d^4x' G_{\text{ret}}(x - x') [J_1(x') + J_2(x')]. \quad (2.80)$$

Sostituendo nella (2.79), otteniamo i termini che danno l'auto-interazione delle sorgenti e la loro interazione mutua. Quest'ultimo termine è

$$S_{\text{eff}}[J_1, J_2] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' [J_1(x)J_2(x') + J_2(x)J_1(x')] G_{\text{ret}}(x - x'), \quad (2.81)$$

e descrive l'emissione di una particella da parte di J_2 e il successivo assorbimento da parte di J_1 , o viceversa. In questo caso tutte le quantità sono reali e la distinzione tra particelle e antiparticelle è superficiale.

Consideriamo invece un campo complesso. L'accoppiamento con una sorgente è in tal caso realizzato dalla lagrangiana reale

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + J \phi^* + J^* \phi, \quad (2.82)$$

che produce le equazioni di campo

$$(\square - m^2)\phi = -J, \quad (\square - m^2)\phi^* = -J^*. \quad (2.83)$$

Sulla soluzione di queste equazioni l'azione può essere riscritta come

$$S[\phi, \phi^*, J] = \int d^4x J^*(x)\phi(x) - \oint d\sigma_\mu \phi^* \partial^\mu \phi, \quad (2.84)$$

e il termine di bordo è irrilevante per la nostra trattazione.

Supponiamo che la soluzione ϕ soddisfi le condizioni al contorno di Feynman, e pertanto possa essere scritta servendosi dell'omonimo propagatore (che è complesso):

$$\phi(x) = \int d^4x' G_{\text{F}}(x - x') [J_1(x') + J_2(x')], \quad (2.85)$$

in presenza di due sorgenti J_1 e J_2 . Come prima, sostituiamo nella (2.84) per ottenere il termine che dà la mutua interazione tra le sorgenti:

$$S_{\text{eff}}[J_1, J_2] = \int d^4x d^4x' [J_1(x)^* J_2(x') + J_2(x)^* J_1(x')] G_{\text{F}}(x - x'). \quad (2.86)$$

In questo caso le quantità J_1, J_2 vanno associate alla creazione di particelle, o equivalentemente alla distruzione di antiparticelle, mentre J_1^*, J_2^* creano antiparticelle, o equivalentemente distruggono particelle. Così, la (2.86) descrive sia l'emissione di una particella da parte di J_2 e il successivo assorbimento da parte di J_1^* (o equivalentemente

l'emissione di una antiparticella da parte di J_1^* e il successivo assorbimento da parte di J_2), sia l'analogo processo in cui J_1 e J_2 hanno ruoli scambiati. Naturalmente, i processi che possono verificarsi dipendono dall'ordine temporale in cui agiscono le sorgenti, se queste sono localizzate e separate da una grande distanza di tipo tempo.

Concludiamo questo capitolo con un'annotazione sul procedimento seguito per calcolare le funzioni di Green. Come più volte detto, due funzioni di Green differiscono tra loro per una soluzione dell'equazione d'onda libera. Spesso, la parte non triviale della funzione di Green (una soluzione particolare dell'equazione non omogenea) risulta essere l'antitrasformata di Fourier di una distribuzione in valor principale. Per trovare il propagatore, bisogna calcolare questa parte e poi sommare una opportuna soluzione dell'equazione omogenea per soddisfare le condizioni al contorno. Abbiamo visto che invece di calcolare il valor principale si può deformare il cammino d'integrazione nel piano complesso, e i risultati differiscono tra loro ancora per una soluzione dell'equazione omogenea. Così, la vera parte non omogenea della funzione di Green risulta da un'integrazione su un cammino deformato, e si trova che soddisfa precise condizioni al contorno, dipendenti dalla scelta di tale cammino. La corrispondenza tra cammino d'integrazione e condizioni al contorno potrebbe però essere diversa per operatori d'onda diversi, e non è facile ricordarsi tutte le combinazioni. Fortunatamente, ciò non è neanche necessario, in quanto il metodo distribuzionale ha una validità generale, che prescinde dalla scelta del contorno fatta per calcolare l'integrale in valor principale. Così, si potrebbe scegliere uno dei percorsi mostrati nella figura 2.2, chiudere il contorno con un semicerchio di raggio infinitamente grande che non dà contributo, e applicare il teorema dei residui. Calcolata la parte principale in questo modo, basta aggiungere un'opportuna soluzione dell'omogenea per ottenere, ad esempio, il propagatore di Feynman, che soddisfa la condizione al contorno di propagare avanti nel tempo le frequenze positive e indietro nel tempo quelle negative.

Capitolo 3

Propagazione libera di particelle

Nel precedente capitolo abbiamo studiato il problema della soluzione di un'equazione differenziale in presenza di una sorgente esterna. Questo problema è importante perché è direttamente legato all'emissione o all'assorbimento di onde, ovvero di particelle. Abbiamo detto, invece, che in assenza di sorgente le particelle associate al campo si propagano in genere sotto forma di onde piane o di una loro sovrapposizione. Ora, è importante notare che le onde piane non sono entità fisiche, in quanto descrivono un campo che occupa tutto lo spazio ed evolve continuamente in modo armonico in ogni istante e in ogni punto. È difficile pensare che un tale campo possa effettivamente esistere, e d'altra parte la propagazione libera di un'onda piana monocromatica non presenta alcun effetto fisicamente interessante. Meno banale può essere la propagazione di un pacchetto d'onda, cioè di una sovrapposizione di onde piane che produce un campo sensibilmente diverso da zero solo in una limitata regione dello spazio delle configurazioni e dello spazio dei momenti. In una teoria di campo classica, una particella (o un insieme di particelle) è spesso descritta da un pacchetto d'onda, mentre l'approssimazione di onda piana ha senso solo localmente. Se l'operatore d'onda è lineare, le componenti monocromatiche di un pacchetto d'onda si propagano indipendentemente l'una dall'altra, ma la loro diversa velocità di fase, definita dal rapporto tra la frequenza ω e il numero d'onda $|\mathbf{k}|$, produce in generale lo sparpagliamento del pacchetto.¹ Nell'interpretazione particellare, questo significa che la localizzazione delle particelle che compongono il pacchetto, siano una o più di una, diminuisce nel tempo.

Quando due pacchetti d'onda che viaggiano in direzioni opposte si incontrano, il campo risultante è la sovrapposizione dei due. Se l'operatore d'onda è lineare, anche questa sovrapposizione è lineare, e una volta che i due pacchetti d'onda si sono sovrapposti

¹I campi d'onda cosiddetti *non dispersivi*, in cui $\omega = c|\mathbf{k}|$ con c costante, presentano un'eccezione a questo comportamento. L'operatore d'onda per eccellenza che descrive un campo non dispersivo è l'operatore di d'Alembert, mentre l'operatore di Klein–Gordon massivo, a cui corrisponde la relazione di dispersione $\omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$, e l'hamiltoniano libero non relativistico, che dà $\omega = \mathbf{k}^2/2m$, producono pacchetti d'onda dispersivi.

completamente e infine reciprocamente superati, il loro moto continua come se l'incontro non fosse mai avvenuto, come conseguenza del principio di sovrapposizione. Tuttavia, la misura di una quantità non lineare nei campi può dare un risultato, quando i due pacchetti d'onda sono sovrapposti, che è sensibilmente diverso dalla sovrapposizione lineare dei risultati che si otterrebbero in presenza di un solo pacchetto alla volta. Considereremo un esempio di ciò alla fine del capitolo, ma prima vediamo come si può descrivere la propagazione di un pacchetto d'onda libero, o in generale di una soluzione dell'equazione di campo omogenea, a partire dalla sua condizione iniziale. Poiché in questo problema il tempo ha un ruolo privilegiato, e noi ci occuperemo di un'applicazione alla meccanica quantistica non relativistica, spesso converrà distinguere la dipendenza di un campo ϕ dalla posizione spaziale e dal tempo separatamente, e in questo capitolo useremo la notazione $x = (\mathbf{x}, t)$, in cui le variabili non hanno le stesse dimensioni fisiche.

3.1 Evoluzione temporale

La soluzione di un'equazione differenziale lineare e omogenea, del primo ordine nel tempo, che si scrive

$$\hat{L}_x \phi(x) = 0, \quad (3.1)$$

quando è nota la condizione iniziale

$$\phi(\mathbf{x}, t_0) = \phi_0(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

può essere costruita ricorrendo al *principio di Huygens*. Esso postula che il campo presente in un punto x' agisca come una sorgente di onde, che propagano avanti nel tempo. Il contributo di queste onde al campo nel punto x è proporzionale a $\phi(x')$, tramite un coefficiente $K(x, x')$ che quantifica la propagazione libera del campo da x' a x . Il principio stabilisce che il campo totale che si genera in (\mathbf{x}, t) è la sovrapposizione lineare di tutte le onde che partono dai punti (\mathbf{x}', t') , a un certo istante t' fissato:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}', t'), \quad t > t'. \quad (3.3)$$

Vediamo subito che il ruolo della funzione $K(x, x')$ è analogo a quello della funzione di Green $G(x, x')$ studiata nel precedente capitolo, ma ora è il campo stesso a fungere da sorgente "interna" di onde, e l'integrazione nella (3.3) è svolta solo sulle variabili spaziali. Poiché K propaga una condizione iniziale, anch'esso è noto sotto il nome di propagatore, e in questo capitolo useremo solo questa accezione del termine.

Studiando la definizione (3.3), possiamo ricavare le condizioni che deve soddisfare il propagatore K . Ora non possiamo richiedere che ϕ abbia la regolarità solitamente richiesta per una funzione di prova, perché in generale una soluzione dell'equazione (3.1) non sarà cercata in uno spazio di funzioni infinitamente derivabili. Bisognerà dunque

verificare caso per caso la possibilità di portare l'operatore differenziale \hat{L}_x sotto il segno d'integrazione nella (3.3); se ciò si può fare, troviamo che K deve soddisfare l'equazione

$$0 = \hat{L}_x \phi(x) = \int d^3 x' \hat{L}_{(x,t)} K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}', t'), \quad (3.4)$$

che è evidentemente verificata se

$$\hat{L}_x K(x, x') = 0, \quad (3.5)$$

cioè se K è una soluzione dell'equazione d'onda libera. La (3.3) fornisce anche una condizione iniziale per K , infatti se il campo è ovunque continuo per $t - t' \rightarrow 0^+$ abbiamo

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \lim_{t-t' \rightarrow 0^+} \int d^3 x' K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \phi(\mathbf{x}', t'). \quad (3.6)$$

Poiché questa relazione deve essere valida qualunque sia il campo all'istante t' , si può esprimere nella forma compatta, ma del tutto equivalente,

$$K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t') \xrightarrow[t-t' \rightarrow 0^+]{} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.7)$$

dove il limite è sempre eseguito dopo l'integrazione come nella (3.6).

Dunque, per risolvere l'equazione (3.1) con la condizione iniziale (3.2), cercheremo una funzione $K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t_0)$ che per $t > t_0$ soddisfa l'equazione

$$\hat{L}_{(x,t)} K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t_0) = 0, \quad (3.8)$$

con la condizione

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t_0) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.9)$$

Allora la soluzione al tempo t si esprime come

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3 x' K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t_0) \phi_0(\mathbf{x}'). \quad (3.10)$$

Da questa formula risulta che la funzione $K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}', t_0)$, il propagatore secondo il nuovo significato, agisce come il nucleo integrale dell'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}(t, t_0)$ che fa passare dal campo (funzione della posizione) all'istante t_0 al campo all'istante t . Se la condizione iniziale è descrivibile con una distribuzione delforme, $\phi_0(\mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)$, allora il propagatore $K(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)$ è l'evoluto temporale di questa condizione.

Il propagatore non è unico, poiché per trovare univocamente la soluzione dell'equazione omogenea non basta in genere dare la condizione iniziale, ma su un dominio che non si estende dappertutto all'infinito servono anche delle condizioni al contorno. Noi considereremo problemi posti in tutto lo spazio \mathbb{R}^3 , e così non avremo bisogno di fissare queste condizioni (ci limitiamo dunque a puri problemi di Cauchy). La considerazione dell'equazione del calore è funzionale al successivo studio dell'equazione di Schrödinger.

3.2 Equazione del calore

Abbiamo visto che il problema ai valori iniziali porta a considerare un propagatore che soddisfa l'equazione omogenea. La funzione di Green, definita nel paragrafo 2.2, soddisfa una equazione che non è omogenea, ma che presenta una sorgente delforme, cioè intuitivamente diversa da zero solo nell'origine spazio-temporale. Per via di questo fatto, e per via del significato di queste due funzioni, possiamo aspettarci che ci sia una relazione tra di esse, almeno lontano dall'origine. Possiamo vedere quale è questa relazione in un caso particolare, quello dell'equazione di diffusione, o *equazione del calore*, definita dall'operatore

$$\hat{L}_x = \partial_t - D\nabla_x^2, \quad (3.11)$$

dove $D > 0$ è un parametro che quantifica la diffusività del campo (di temperatura, di concentrazione ecc.) che soddisfa questa equazione. L'operatore è del primo ordine nel tempo, e quindi ci aspettiamo che il principio di Huygens sia applicabile nella forma sopra enunciata, e si possa almeno in linea di principio trovare il *nucleo del calore* K_H . A breve lo calcoleremo esplicitamente, ma per ora supponiamo solo che esista, e consideriamo la funzione

$$G(x, x') = \theta(t - t')K_H(x, x'). \quad (3.12)$$

Applicando l'operatore (3.11) e usando l'equazione (3.5), otteniamo:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x G(x, x') &= \hat{L}_x \theta(t - t')K_H(x, x') + \theta(t - t')\hat{L}_x K_H(x, x') \\ &= \partial_t \theta(t - t')K_H(x, x') \\ &= \delta(t - t')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove, nell'ultimo passaggio, la condizione (3.7) permette di sostituire $K_H(x, x')$ con $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Vediamo così che la funzione G definita dalla (3.12) è una funzione di Green per l'operatore di diffusione, e precisamente è la funzione di Green ritardata. Essa estende in maniera banale il nucleo K_H per $t < t'$, prima che agisca la sorgente impulsiva.

Per calcolare il nucleo del calore nello spazio \mathbb{R}^3 usiamo un metodo del tutto simile a quello visto per le funzioni di Green. Prima di tutto, notiamo che se il coefficiente D è costante, come abbiamo supposto, l'operatore del calore è invariante per traslazioni sia spaziali che temporali, e quindi è ragionevole cercare un nucleo che dipenda solo dalla differenza tra gli argomenti:

$$K_H(x, x') = K_H(x - x'). \quad (3.14)$$

Ora, definendo $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\tau = t - t'$, possiamo eliminare le derivate seconde dall'equazione

$$(\partial_\tau - D\nabla_\xi^2)K_H(\boldsymbol{\xi}, \tau) = 0 \quad (3.15)$$

effettuando la trasformata di Fourier sulle variabili spaziali, a τ fissato. Alla fine del calcolo, verificheremo che sulla funzione ottenuta si può effettivamente calcolare la trasformata nel senso usuale. Otteniamo

$$0 = \mathcal{F}_\xi((\partial_\tau - D\nabla_\xi^2)K_H(\boldsymbol{\xi}, \tau)) = (\partial_\tau + D\mathbf{k}^2)\tilde{K}_H(\mathbf{k}, \tau), \quad (3.16)$$

che è una equazione differenziale ordinaria nella variabile τ , una cui soluzione particolare è la funzione

$$\tilde{K}_H(\mathbf{k}, \tau) = e^{-D\mathbf{k}^2\tau}. \quad (3.17)$$

Di questa dobbiamo prendere l'antitrasformata, che si trova applicando la formula (C.4):

$$K_H(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi} - D\mathbf{k}^2\tau} = \frac{1}{(4\pi D\tau)^{3/2}} e^{-\boldsymbol{\xi}^2/4D\tau}. \quad (3.18)$$

Tornando alle variabili originarie, abbiamo trovato la funzione gaussiana

$$K_H(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{1}{[4\pi D(t - t')]^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4D(t - t')}\right), \quad (3.19)$$

che è a decrescenza spaziale rapida per cui risulta giustificato il metodo usato per ricavarla. Inoltre essa soddisfa la condizione (3.7), come si può verificare calcolando il limite distribuzionale per $t - t' \rightarrow 0^+$ su una funzione di prova continua e limitata. Per valori crescenti di t , invece, la gaussiana (3.19) si appiattisce, conservando il suo integrale unitario. Ciò corrisponde alla conservazione di una quantità unitaria della grandezza associata al campo, che diffonde a partire da una condizione iniziale in cui è concentrata in un solo punto.

3.3 Equazione di Schrödinger

Vogliamo occuparci ora dell'equazione di Schrödinger per una particella quantistica libera e non relativistica, senza mostrare come essa derivi da un principio d'azione, ma invece sottolineando la sua relazione con l'equazione del calore. Anche l'equazione di Schrödinger è del primo ordine nel tempo, e così il moto della particella può essere risolto, almeno in principio, calcolando il propagatore. Questo è in effetti possibile per la particella libera, e in pochi altri casi semplici, ma va da sé che con un potenziale qualunque il calcolo potrebbe risultare impervio. Invece di usare i metodi della meccanica quantistica per calcolare il propagatore, notiamo che l'equazione di Schrödinger per una particella libera di massa m

$$\frac{1}{i}\partial_t\phi = \frac{\hbar}{2m}\nabla^2\phi, \quad (3.20)$$

si ottiene da quella del calore

$$\partial_t\phi = D\nabla^2\phi \quad (3.21)$$

per mezzo della *rotazione di Wick* $t \rightarrow it$ e dell'identificazione

$$D = \frac{\hbar}{2m}. \quad (3.22)$$

Questa relazione matematica tra le due equazioni suggerisce che la propagazione delle onde quantomeccaniche possa essere in qualche modo simile alla propagazione delle onde di calore. In particolare, la (3.22) sembra mostrare che l'effetto quantistico che porta una funzione d'onda, inizialmente piccata attorno a un punto nello spazio, a "diffondere" nel tempo verso i punti vicini, sparisca quando $\hbar \rightarrow 0$, o $m \rightarrow \infty$. Questo è vero, come verificheremo in un caso particolare. Tuttavia, la natura complessa del campo d'onda quantistico fa sì che la quantità reale osservabile, conservata durante il moto, data dal modulo quadrato della funzione d'onda, mostri effetti peculiari, che non si presentano quando a propagarsi è una quantità reale e positiva come la temperatura.

Il propagatore K_S per l'equazione di Schrödinger libera si ottiene da quello del calore con le stesse sostituzioni $(t - t') \rightarrow i(t - t')$, $D \rightarrow \hbar/2m$:

$$K_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \left[\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t')} \right]^{3/2} \exp \left(\frac{im(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2\hbar(t - t')} \right). \quad (3.23)$$

Data l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda, il propagatore coincide con l'ampiezza di probabilità di trovare al tempo t nel punto \mathbf{x} una particella che all'istante t' era esattamente localizzata nel punto \mathbf{x}' . Possiamo usarlo ora per calcolare esplicitamente l'evoluzione temporale di un pacchetto d'onda gaussiano che si propaga liberamente nello spazio. Questo, all'istante $t_0 = 0$, è dato dalla funzione d'onda normalizzata

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\xi})^{3/2}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{4\xi^2} + \frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} \right), \quad (3.24)$$

che descrive una particella localizzata in una regione di larghezza ξ attorno al punto \mathbf{x}_0 , che si muove con impulso medio \mathbf{p} . A un istante successivo, la funzione d'onda è data dalla convoluzione tra il propagatore e la condizione iniziale:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' K_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \phi_0(\mathbf{x}') \\ &= \left[\frac{m}{(2\pi)^{3/2} i \xi \hbar t} \right]^{3/2} \int d^3x' \exp \left(\frac{im(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{2\hbar t} - \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)^2}{4\xi^2} + \frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'}{\hbar} \right) \\ &= \left[\frac{\bar{t}}{2(2\pi)^{3/2} i \xi^3 \hbar \bar{t}} \right]^{3/2} \int d^3x' \exp \left(\frac{i\bar{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4\xi^2 \bar{t}} - \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)^2}{4\xi^2} + \frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'}{\hbar} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove abbiamo definito la scala di tempo

$$\bar{t} := \frac{2m\xi^2}{\hbar}. \quad (3.26)$$

L'integrale nella (3.25) si calcola con la formula (C.4), dopo aver sviluppato i quadrati e raccolto i termini che non dipendono da \mathbf{x}' . Con qualche manipolazione si riesce a scrivere la seguente espressione per la funzione d'onda al tempo $t > 0$:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(1 + it/\bar{t})]^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - t\mathbf{p}/m)^2}{4\xi^2(1 + it/\bar{t})} + \frac{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} - \frac{it\mathbf{p}^2}{2m\hbar}\right). \quad (3.27)$$

È utile calcolare la densità di probabilità associata a questo pacchetto d'onda. Conviene definire

$$\xi(t) := \xi\sqrt{1 + t^2/\bar{t}^2}, \quad (3.28)$$

e si ottiene così l'espressione

$$|\phi(\mathbf{x}, t)|^2 = \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(t)]^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - t\mathbf{p}/m)^2}{2\xi(t)^2}\right), \quad (3.29)$$

che indica che la probabilità di trovare la particella è distribuita in modo gaussiano attorno alla traiettoria classica $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}/m$, ma la larghezza di questa distribuzione, data dalla (3.28), aumenta nel tempo. In questo caso lo sparpagliamento della funzione d'onda è direttamente interpretabile in termini del principio di indeterminazione: la localizzazione iniziale del pacchetto indica che esso non è descritto da un'autofunzione dell'energia (che sarebbe un'onda piana), cioè l'impulso è in qualche misura inizialmente incerto, e le diverse componenti monocromatiche si propagano indipendentemente, dando origine a una crescente indeterminazione nel valore della posizione. Notiamo che la densità di probabilità comincia ad appiattirsi sensibilmente quando $t \gg \bar{t} = \xi^2/D$, cosicché il fenomeno è tanto più rapido quanto più la gaussiana iniziale è piccata, e quanto più è grande il coefficiente di diffusività D definito dalla relazione (3.22), come avevamo previsto sulla base del nesso tra equazione di Schrödinger ed equazione del calore.

Per dare un'idea della scala dei tempi, se la particella è un elettrone di massa $m_e = 9.11 \times 10^{-28}$ g, inizialmente localizzato in una regione di larghezza pari al raggio classico $r_e = e^2/4\pi m_e c^2 = 2.82 \times 10^{-13}$ cm, allora $\bar{t} = 2.19 \times 10^{-26}$ s. Per un corpo macroscopico di massa $m = 1$ g e dimensione caratteristica $\xi = 1$ cm, si avrebbe invece $\bar{t} = 3 \times 10^{26}$ s, ben più grande dell'età dell'universo. Risulta così verificato che è tanto maggiore la necessità di usare la meccanica quantistica per descrivere il moto di una particella, quanto più essa è piccola e leggera.

Lo sparpagliamento della funzione d'onda è alla base di un semplice modello che descrive l'esperimento della doppia fenditura in presenza di un singolo elettrone, descritto nella sezione seguente.

3.3.1 Un'applicazione: l'esperimento della doppia fenditura

Vogliamo usare l'evoluzione temporale di un pacchetto d'onda gaussiano per interpretare un classico esperimento che mostra all'opera gli effetti quantomeccanici nella descrizione

del moto di una particella. In questo esperimento un elettrone incide su uno schermo in cui sono praticate due fenditure, al di là del quale, a una certa distanza, è posto un rivelatore. Orientiamo gli assi del sistema di coordinate in modo che lo schermo si trovi sul piano yz , l'origine si trovi in mezzo alle fenditure, la cui forma non è rilevante, e l'asse x sia orientato dallo schermo verso il rivelatore.

L'elettrone è descritto da una funzione d'onda, che si annulla in corrispondenza dello schermo, e rimane invece diversa da zero in corrispondenza delle fenditure. Supporremo pertanto che all'istante $t = 0$ la funzione d'onda sia la somma di due pacchetti d'onda gaussiani, che escono dalle due fenditure centrate nei punti $\mathbf{x}_{\pm} = (0, \pm a, 0)$ con impulso $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$ ortogonale allo schermo. Questa ipotesi ci permette di usare i risultati della sezione precedente per calcolare la figura d'interferenza che si produce sul rivelatore, dovuta alla sovrapposizione dei pacchetti d'onda, che è sempre più accentuata mentre essi si propagano liberamente nello spazio tra le fenditure e il rivelatore.

La presenza di due pacchetti d'onda è giustificata dall'ipotesi che la propagazione dell'elettrone al di là dello schermo sia equamente dovuta alla presenza di entrambe le fenditure. Così, supponiamo che inizialmente la funzione d'onda elettronica sia

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_+(\mathbf{x}, 0) + \phi_-(\mathbf{x}, 0)], \quad (3.30)$$

dove

$$\phi_{\pm}(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\xi})^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + (y \mp a)^2 + z^2}{4\xi^2} + \frac{ipx}{\hbar}\right) \quad (3.31)$$

è il pacchetto d'onda che esce dalla fenditura centrata in \mathbf{x}_{\pm} , secondo la formula (3.24). Nello scrivere la (3.30) abbiamo supposto che valga la condizione $\xi \ll a$, cosicché la sovrapposizione iniziale dei due pacchetti d'onda sia trascurabile e la funzione d'onda sia normalizzata.

I due pacchetti d'onda che escono dalle fenditure si propagano indipendentemente, ma la rilevazione finale dell'elettrone, ripetuta più e più volte in identiche condizioni, mostra che è determinante l'interferenza tra i due pacchetti, un tipo di sovrapposizione non lineare che dà origine a una serie di massimi e minimi della probabilità che l'elettrone venga rilevato in un certo punto. Matematicamente, l'operazione non lineare che dà origine a questo effetto consiste nel prendere il modulo quadrato della funzione d'onda complessiva $\phi = (\phi_+ + \phi_-)/\sqrt{2}$. L'evoluto temporale dei due pacchetti d'onda si ricava

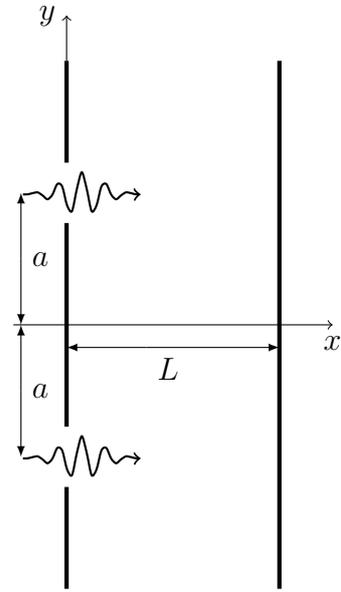


Figura 3.1: La configurazione dell'esperimento della doppia fenditura.

dall'espressione (3.27):

$$\begin{aligned}\phi_{\pm}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(1 + it/\bar{t})]^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x - tp/m)^2 + (y \mp a)^2 + z^2}{4\xi^2(1 + it/\bar{t})} + \frac{ipx}{\hbar} - \frac{itp^2}{2m\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(1 + it/\bar{t})]^{3/2}} \exp\left(-\alpha_{\pm}(\mathbf{x}, t)(1 - it/\bar{t}) + \frac{ipx}{\hbar} - \frac{itp^2}{2m\hbar}\right),\end{aligned}\quad (3.32)$$

dove abbiamo definito

$$\alpha_{\pm}(\mathbf{x}, t) := \frac{(x - tp/m)^2 + (y \mp a)^2 + z^2}{4\xi(t)^2},\quad (3.33)$$

con $\xi(t)$ dato dalla (3.28). Ora, vale la relazione

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2}|\phi_+ + \phi_-|^2 = \frac{1}{2}[|\phi_+|^2 + |\phi_-|^2 + 2\operatorname{Re}(\phi_+^* \phi_-)].\quad (3.34)$$

Sottintendendo la dipendenza spazio-temporale, abbiamo

$$|\phi_{\pm}|^2 = \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(t)]^3} e^{-2\alpha_{\pm}}.\quad (3.35)$$

Il termine d'interferenza è invece dato da

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\phi_+^* \phi_-) &= \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(t)]^3} \exp(-\alpha_+(1 - it/\bar{t}))^* \exp(-\alpha_-(1 - it/\bar{t})) \\ &= \frac{1}{[\sqrt{2\pi}\xi(t)]^3} \exp(-(\alpha_+ + \alpha_-)) \exp(-i(\alpha_+ - \alpha_-)t/\bar{t}),\end{aligned}\quad (3.36)$$

e così complessivamente

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2[\sqrt{2\pi}\xi(t)]^3} [e^{-2\alpha_+} + e^{-2\alpha_-} + 2e^{-(\alpha_+ + \alpha_-)} \cos((\alpha_+ - \alpha_-)t/\bar{t})].\quad (3.37)$$

L'espressione (3.33) per α_{\pm} si semplifica se supponiamo di osservare l'elettrone alla quota $z = 0$, e al tempo $t = Lm/p$ corrispondente al moto classico tra le fenditure e lo schermo posto alla distanza $x = L$. Allora abbiamo

$$\alpha_{\pm} = \frac{(y \mp a)^2}{4\xi(t)^2} \Big|_{t=Lm/p},\quad (3.38)$$

e di conseguenza

$$\alpha_+ + \alpha_- = \frac{y^2 + a^2}{2\xi(t)^2} \Big|_{t=Lm/p},\quad (3.39)$$

$$\alpha_+ - \alpha_- = - \frac{ya}{\xi(t)^2} \Big|_{t=Lm/p}. \quad (3.40)$$

Ora, si suppone che ripetendo l'esperimento molte volte la frazione di elettroni che si rileva in ogni punto sia proporzionale al modulo quadrato della funzione d'onda in quel punto. Il risultato può essere visualizzato attribuendo dei valori ai parametri. Per ottenere la figura 3.2, abbiamo ipotizzato che la particella sia un elettrone di energia cinetica 5 keV, con $\xi = 25$ nm, $a = 200$ nm, $L = 10$ m. La risultante figura di interferenza è distribuita su una regione larga pochi centimetri.

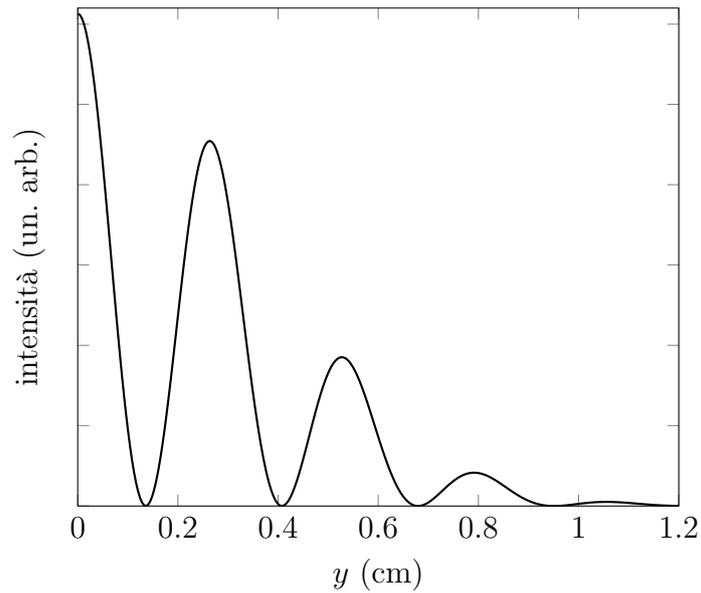


Figura 3.2: Metà della figura di interferenza teoricamente prodotta nell'esperimento della doppia fenditura effettuato con un singolo elettrone (l'altra metà si ottiene per riflessione). I valori dei parametri utilizzati per ottenere questo grafico sono dati nel testo. In corrispondenza dei minimi, l'intensità non è esattamente nulla.

Appendice A

Gruppo di Lorentz

In questa appendice diamo la definizione del gruppo di Lorentz e ne otteniamo i generatori infinitesimi, che ci servono nel testo principale per calcolare le grandezze conservate associate a questo gruppo di trasformazioni.¹

Il gruppo di Lorentz è formato da tutte quelle trasformazioni delle variabili spaziotemporali, che sono rappresentate da matrici Λ agenti sulle componenti controvarianti

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (\text{A.1})$$

che lasciano invariato il prodotto scalare di Minkowski

$$x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = x^\text{T} \eta x, \quad (\text{A.2})$$

dove

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

è la metrica di Minkowski. Questa definizione del gruppo nella sua rappresentazione matriciale è equivalente alla seguente.

Definizione A.1. Il *gruppo di Lorentz* $O(3, 1)$ è il gruppo delle matrici Λ reali 4×4 che soddisfano

$$\Lambda^\text{T} \eta \Lambda = \eta, \quad (\text{A.4})$$

dove η è la matrice (A.3). Il gruppo di Lorentz *proprio e ortocrono* è un sottogruppo di $O(3, 1)$, indicato con $SO^\uparrow(3, 1)$ e formato dalle matrici che soddisfano le condizioni ulteriori

$$\det(\Lambda) = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1. \quad (\text{A.5})$$

¹Per i nostri scopi, introdurremo generatori reali. Di solito si usano dei generatori complessi, che si ottengono dai nostri moltiplicando per i , e corrispondentemente compare un fattore $-i$ nella mappa esponenziale.

Una matrice 4×4 ha 16 elementi, e la relazione definente (A.4) fissa 10 condizioni quadratiche indipendenti, poiché η è simmetrica. Le soluzioni di queste equazioni quindi spaziano in una varietà non lineare di dimensione 6, cioè descritta da sei parametri. Le condizioni (A.5) selezionano, tra queste, le soluzioni che appartengono a una sottovarietà connessa, di cui fa parte la matrice identità. Questa sottovarietà non è però compatta, e ciò è legato al fatto che la metrica (A.3) non è definita positiva.

Ciascuno di questi sei parametri corrisponde a un sottogruppo unidimensionale del gruppo di Lorentz. Tali sottogruppi sono dati dalle rotazioni e dalle trasformazioni di moto uniforme, o *boost*, rispettivamente attorno e lungo un asse spaziale fissato. Componendo queste trasformazioni elementari, cioè moltiplicando le matrici che le rappresentano, si ottiene un qualunque elemento del gruppo di Lorentz connesso all'identità (cioè del gruppo $\text{SO}^\uparrow(3,1)$), mentre usando anche le inversioni degli assi spazio-temporali si descrive il più generico elemento di $\text{O}(3,1)$. Le inversioni degli assi sono trasformazioni discrete, che spesso vengono considerate a parte, e quando si tratta l'invarianza di Lorentz spesso si considerano solo le trasformazioni che appartengono al sottogruppo proprio e ortocrono.

Calcoliamo dunque quali sono i generatori del gruppo $\text{SO}^\uparrow(3,1)$, studiando i suoi sottogruppi unidimensionali. Abbiamo detto che tre di tali sottogruppi sono formati dalle rotazioni attorno ai tre assi spaziali. Queste non trasformano il tempo e quindi le loro rappresentazioni in termini di matrici 4×4 si ottengono estendendo in maniera banale le matrici di rotazione R nello spazio euclideo:

$$\Lambda_R := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (\text{A.6})$$

La matrice Λ_R appartiene al gruppo di Lorentz e questo si vede dalla definizione (A.4) moltiplicando separatamente i blocchi delle matrici e considerando che $R^T R = \mathbf{1}$. Dunque, lo studio di questo sottogruppo si riconduce allo studio delle matrici di rotazione tridimensionali. Le rotazioni sono individuate da un asse e da un angolo, e in particolare le matrici di rotazione R_i attorno agli assi coordinati x^i sono parametrizzate da $\vartheta^i \in [-\pi, \pi]$ e hanno la forma

$$R_1(\vartheta^1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \vartheta^1 & -\sin \vartheta^1 & \\ & \sin \vartheta^1 & \cos \vartheta^1 & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7a})$$

$$R_2(\vartheta^2) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta^2 & & \sin \vartheta^2 & \\ & 1 & & \\ -\sin \vartheta^2 & & \cos \vartheta^2 & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7b})$$

$$R_3(\vartheta^3) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta^3 & -\sin \vartheta^3 & \\ \sin \vartheta^3 & \cos \vartheta^3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7c})$$

Componendo queste matrici si ottengono tutte le possibili rotazioni attorno ai tre assi spaziali, che formano il gruppo $\text{SO}(3)$. Questo è pertanto isomorfo a un sottogruppo compatto del gruppo di Lorentz, i cui generatori infinitesimi sono

$$J_1 := \left. \frac{d\Lambda_{R_1}}{d\vartheta^1} \right|_{\vartheta^1=0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8a})$$

$$J_2 := \left. \frac{d\Lambda_{R_2}}{d\vartheta^2} \right|_{\vartheta^2=0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8b})$$

$$J_3 := \left. \frac{d\Lambda_{R_3}}{d\vartheta^3} \right|_{\vartheta^3=0} = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8c})$$

I rimanenti tre sottogruppi unidimensionali del gruppo di Lorentz sono costituiti dai *boost* lungo i tre assi spaziali. Queste trasformazioni coinvolgono il tempo e la coordinata lungo l'asse considerato. Anch'esse possono considerarsi come rotazioni, ma di tipo *iperbolico* per via della natura non euclidea del prodotto scalare che devono conservare, e cioè del segno meno che compare nella metrica (A.3) relativamente alla variabile temporale. Ciò ha un effetto immediato sul range dei parametri che descrivono queste rotazioni: essi sono tre parametri $\alpha^i \in]-\infty, +\infty[$ che sono legati alla velocità di *boost* v^i dalla relazione

$$\alpha^i = \tanh^{-1} \left(\frac{v^i}{c} \right). \quad (\text{A.9})$$

Dunque, le matrici che descrivono i *boost* lungo i tre assi sono

$$B_1(\alpha^1) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha^1 & -\sinh \alpha^1 & & \\ -\sinh \alpha^1 & \cosh \alpha^1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10a})$$

$$B_2(\alpha^2) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha^2 & & & \\ & 1 & & \\ -\sinh \alpha^2 & & \cosh \alpha^2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10b})$$

$$B_3(\alpha^3) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha^3 & & & -\sinh \alpha^3 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\sinh \alpha^3 & & & \cosh \alpha^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10c})$$

Al contrario di ciò che accade per le rotazioni spaziali, i *boost* lungo tutte le possibili direzioni non costituiscono un sottogruppo di $\text{SO}^\uparrow(3,1)$, infatti comporre due *boost* lungo direzioni diverse equivale a comporre un *boost* con una rotazione, che va sotto il nome di *rotazione di Wigner*. I generatori infinitesimi dei *boost* sono

$$K_1 := \left. \frac{dB_1}{d\alpha^1} \right|_{\alpha^1=0} = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & \\ -1 & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11a})$$

$$K_2 := \left. \frac{dB_2}{d\alpha^2} \right|_{\alpha^2=0} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ -1 & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11b})$$

$$K_3 := \left. \frac{dB_3}{d\alpha^3} \right|_{\alpha^3=0} = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11c})$$

Dunque, una generica matrice di Lorentz connessa all'identità si scrive in forma esponenziale

$$\Lambda(\vartheta, \alpha) = \exp(\vartheta^i J_i + \alpha^i K_i), \quad (\text{A.12})$$

ma si può utilizzare una notazione più conveniente, notando che le matrici J_1, J_2, J_3 generano rotazioni rispettivamente nei piani $(x^2, x^3), (x^3, x^1), (x^1, x^2)$, mentre le matrici K_1, K_2, K_3 generano rotazioni (iperboliche) rispettivamente nei piani $(x^0, x^1), (x^0, x^2), (x^0, x^3)$. Dunque possiamo usare una notazione a due indici per indicare i generatori:

$$L_{12} := J_3, \quad L_{31} := J_2, \quad L_{23} := J_1, \quad (\text{A.13a})$$

$$L_{01} := K_1, \quad L_{02} := K_2, \quad L_{03} := K_3. \quad (\text{A.13b})$$

Le (A.13) possono essere scritte in una forma compatta che definisce un insieme di 16 matrici $L_{\alpha\beta}$, di cui solo 6 sono indipendenti perché poniamo per definizione $L_{\alpha\beta} = -L_{\beta\alpha}$:

$$L_{ij} := \varepsilon_{ijk} J^k, \quad L_{0i} := K_i =: -L_{i0}. \quad (\text{A.14})$$

I corrispondenti 16 parametri $\xi^{\alpha\beta} = -\xi^{\beta\alpha}$ sono definiti da

$$\xi^{ij} := \varepsilon^{ijk} \vartheta_k, \quad \xi^{0i} := \alpha^i =: -\xi^{i0}. \quad (\text{A.15})$$

Allora una combinazione lineare dei generatori assume la forma

$$\vartheta^i J_i + \alpha^i K_i = \frac{1}{2} \xi^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.16})$$

e una generica matrice di Lorentz si scrive, secondo la (A.12):

$$\Lambda(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2} \xi^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\right). \quad (\text{A.17})$$

Alzando gli indici con la metrica di Minkowski, si può verificare direttamente dalle (A.8), (A.11), (A.13) che le componenti dei generatori sono

$$[L^{\alpha\beta}]^\mu{}_\nu = \eta^{\beta\mu} \delta^\alpha{}_\nu - \eta^{\alpha\mu} \delta^\beta{}_\nu. \quad (\text{A.18})$$

In particolare, da questa espressione segue che i generatori sono antisimmetrici quando si abbassa l'indice μ , e hanno traccia nulla:

$$[L^{\alpha\beta}]_{\mu\nu} = -[L^{\alpha\beta}]_{\nu\mu}, \quad [L^{\alpha\beta}]^\mu{}_\mu = 0, \quad (\text{A.19})$$

come è evidente dalle espressioni matriciali esplicite.

Appendice B

Distribuzioni

La nozione di *distribuzione*,¹ o *funzione generalizzata*, è utile per estendere i procedimenti del calcolo a oggetti matematici che sono dotati di scarse proprietà di regolarità, o addirittura sarebbero mal definiti secondo l'analisi classica. Le distribuzioni sono funzionali lineari e continui che agiscono su determinati spazi di *funzioni di prova* regolari. Le operazioni sulle distribuzioni sono definite in modo da “scaricare” sulle funzioni di prova tutti i requisiti di regolarità richiesti. Per questo le distribuzioni sono uno strumento molto flessibile, in grado di dare significato a uguaglianze di largo uso in fisica, che dal punto di vista dell'analisi classica sarebbero inaccettabili. Scopo di questa appendice è introdurre i concetti fondamentali, che ci servono nel testo principale per trattare le funzioni (generalizzate) di Green, un'utile applicazione della teoria delle distribuzioni.

È necessario prima di tutto specificare lo spazio delle funzioni di prova. Richiediamo che queste funzioni siano derivabili infinite volte, e che abbiano ottime proprietà di decrescenza all'infinito. Introduciamo anzitutto una notazione di comodo per indicare i monomi delle variabili indipendenti o delle derivate. Con *multiindice* indichiamo una n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di numeri naturali. Lavoreremo sempre con funzioni definite su tutto \mathbb{R}^n , e useremo le seguenti notazioni:

$$x^\alpha := (x^1)^{\alpha_1} \dots (x^n)^{\alpha_n}, \quad D^\alpha := (\partial_1)^{\alpha_1} \dots (\partial_n)^{\alpha_n}. \quad (\text{B.1})$$

Ad un multiindice associamo il suo modulo

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (\text{B.2})$$

Definizione B.1. Sia $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, e siano α, β due multiindici. La quantità

$$\|\phi\|_{\alpha, \beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)|, \quad (\text{B.3})$$

finita o infinita, definisce la *seminorma* di ϕ relativa ad α, β .

¹La teoria delle distribuzioni fu introdotta negli anni '40 del secolo scorso dal matematico francese Laurent Schwartz (1915–2002), che ricevette per questo la medaglia Fields nel 1950.

Notiamo che $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ non definisce in generale una norma perché non è definita positiva. Se tutte le seminorme sono finite, ϕ è una buona funzione di prova.

Definizione B.2. Lo spazio di Schwartz \mathcal{S}_n , detto anche spazio delle *funzioni a decrescenza rapida*, è costituito dalle funzioni complesse di n variabili reali, derivabili infinite volte, che decrescono all'infinito, con tutte le loro derivate, più rapidamente dell'inverso di qualsiasi polinomio:

$$\mathcal{S}_n := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \|\phi\|_{\alpha,\beta} < \infty \forall \alpha, \beta\}. \quad (\text{B.4})$$

Nello spazio di Schwartz è necessario introdurre una nozione di convergenza per successioni, rispetto alla quale le distribuzioni dovranno essere funzionali continui.

Definizione B.3. Una successione $\{\phi_j\} \subset \mathcal{S}_n$ converge a una funzione $\phi \in \mathcal{S}_n$ se e solo se

$$\|\phi_j - \phi\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \alpha, \beta. \quad (\text{B.5})$$

Definizione B.4. Lo spazio \mathcal{S}'_n delle *distribuzioni temperate* è costituito dai funzionali $T: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$ che mappano lo spazio di Schwartz sui numeri complessi e sono lineari e continui per successioni:

$$T[a\phi + b\psi] = aT[\phi] + bT[\psi] \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \phi, \psi \in \mathcal{S}_n, \quad (\text{B.6})$$

$$T[\phi_j] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T[\phi] \quad \text{se } \phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi. \quad (\text{B.7})$$

L'aggettivo “temperate” è usato per distinguere le distribuzioni che agiscono sullo spazio di Schwartz da possibili distribuzioni che agiscono su spazi di prova differenti. Lo spazio delle distribuzioni temperate è dotato di una struttura di spazio vettoriale con la seguente definizione di somma di distribuzioni e moltiplicazione per un numero:

$$(aT + bS)[\phi] := aT[\phi] + bS[\phi], \quad \forall T, S \in \mathcal{S}'_n, a, b \in \mathbb{C}, \phi \in \mathcal{S}_n. \quad (\text{B.8})$$

L'elemento neutro rispetto alla somma è naturalmente la distribuzione identicamente nulla, che mappa tutte le funzioni di prova nello 0.

Una distribuzione T_f può a volte essere identificata con una funzione usuale f , sotto richieste di regolarità non forti per quest'ultima. In tal caso si dice che la distribuzione è *di tipo funzione*, o che è *indotta* dalla funzione f , e agisce nel seguente modo (l'integrazione, qui e nel seguito, è su \mathbb{R}^n):

$$T_f[\phi] = \int d^n x f(x)\phi(x). \quad (\text{B.9})$$

In questo modo è evidente che T_f è funzionale lineare, il cui nucleo integrale è f . Un abuso di notazione conduce, per semplicità, a scrivere direttamente

$$f[\phi] = \int d^n x f(x)\phi(x). \quad (\text{B.10})$$

Spesso si denota con un integrale anche l'azione di distribuzioni che non sono di tipo funzione. Ad esempio, è noto che la *delta di Dirac* centrata in un punto x_0 dello spazio n -dimensionale è definita dalla formula

$$\int d^n x \delta^n(x - x_0) \phi(x) = \phi(x_0), \quad (\text{B.11})$$

sebbene non esista alcuna funzione che possa agire in tal modo. Tra l'altro, la "parità" della $\delta^n(x)$ (intuitivamente essa è pensata come una funzione nulla dappertutto meno che nell'origine, dove è infinita) conduce all'equivalenza delle due scritture $\delta^n(x - x_0) = \delta^n(x_0 - x)$. La delta di Dirac va intesa in realtà come un funzionale

$$\delta_{x_0}^n : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_{x_0}^n[\phi] := \phi(x_0), \quad (\text{B.12})$$

e l'integrazione nella (B.11) è puramente simbolica.

Sia ora $n = 1$, e sia f una funzione derivabile con continuità che ha degli zeri nei punti isolati x_1, \dots, x_m in cui la derivata f' non si annulla. Si può dare allora un significato all'integrale

$$\int dx \delta(f(x)) \phi(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\phi(x_j)}{|f'(x_j)|}, \quad (\text{B.13})$$

come risulta formalmente facendo il cambio di variabile $y = f(x)$ separatamente in ogni intervallo in cui f è invertibile e presenta un solo zero. Generalizzando, si definisce la distribuzione

$$\delta(f(x)) := \sum_{j=1}^m \frac{\delta(x - x_j)}{|f'(x_j)|}. \quad (\text{B.14})$$

Se $n = 1$, un'altra distribuzione notevole è la *parte principale* di $1/(x - x_0)$ che è definita da una prescrizione per calcolare l'integrale:

$$\mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} [\phi] := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x - x_0| > \epsilon} dx \frac{\phi(x)}{x - x_0}. \quad (\text{B.15})$$

In sostanza si elimina dal dominio di integrazione un intervallo simmetrico rispetto al polo $x = x_0$, e poi si va al limite per la larghezza di questo intervallo che tende a 0. La distribuzione risultante è ben definita grazie alla regolarità della funzione di prova, infatti:

$$\begin{aligned} \int_{|x - x_0| > \epsilon} dx \frac{\phi(x)}{x - x_0} &= \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} + \int_{x_0 + \epsilon}^{\infty} \right) dx \frac{\phi(x)}{x - x_0} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) dx \frac{\phi(x + x_0)}{x} \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{\phi(x + x_0) - \phi(x_0 - x)}{x}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

L'integrando non è più singolare in quanto

$$\frac{\phi(x_0 + x) - \phi(x_0 - x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2\phi'(x_0), \quad (\text{B.17})$$

e si può provare anche la continuità del funzionale. Per definire la distribuzione $\mathcal{P}(1/f(x))$, dove f ha degli zeri nei punti x_1, \dots, x_m , si può procedere allo stesso modo tagliando via un intervallo simmetrico intorno a ogni zero e calcolando i limiti separatamente. In tal caso l'ordine degli zeri e il comportamento di f all'infinito determinano se la procedura definisce correttamente una distribuzione oppure no.

Definiremo ora alcune operazioni che si possono compiere sulle distribuzioni, e che le rendono così utili, senza provare che tali definizioni sono ben poste. La definizione B.3 di convergenza nello spazio di Schwartz è molto forte e questo permette un corrispettivo indebolimento nella definizione di convergenza per le distribuzioni temperate.

Definizione B.5. Una successione $\{T_j\} \subset \mathcal{S}'_n$ converge a una distribuzione $T \in \mathcal{S}'_n$ se e solo se per ogni funzione di prova $\phi \in \mathcal{S}$ si ha

$$T_j[\phi] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T[\phi]. \quad (\text{B.18})$$

Come si vede, la convergenza richiesta è di tipo puntuale, e si può generalizzare in maniera ovvia al caso di una sequenza continua di distribuzioni. Nella notazione integrale, questo permette di scrivere che se f_j ha un limite in senso distribuzionale (cioè la successione di distribuzioni aventi le f_j come nuclei integrali converge in \mathcal{S}'_n), allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int d^n x f_j(x) \phi(x) = \int d^n x \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \phi(x), \quad (\text{B.19})$$

e viceversa, per ogni funzione di prova ϕ .

La definizione di limite in senso distribuzionale appena data ci permette di dimostrare una importante identità, che in dimensione $n = 1$ lega la delta di Dirac e la parte principale, ed è ricordata sotto i nomi di *Sokhotski* e *Plemelj*:²

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi \delta(x - x_0). \quad (\text{B.20})$$

Per dimostrarla, notiamo che:

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \mp \frac{i\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2}. \quad (\text{B.21})$$

²Julian Sokhotski (1842–1927), matematico russo nato in Polonia, e Josip Plemelj (1873–1967), matematico sloveno.

La parte reale di questa espressione è la distribuzione che mappa

$$\begin{aligned}
\phi &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{(x-x_0)\phi(x)}{(x-x_0)^2 + \epsilon^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x\phi(x+x_0)}{x^2 + \epsilon^2} \\
&= \int_0^{\infty} dx \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} [\phi(x+x_0) - \phi(x_0-x)].
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Ora

$$\frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{x} - \frac{\epsilon^2}{x(x^2 + \epsilon^2)}, \tag{B.23}$$

e il primo termine porta l'integrale in valor principale

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{x} [\phi(x+x_0) - \phi(x_0-x)] = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{x-x_0}, \tag{B.24}$$

mentre il secondo dà un contributo nullo quando $\epsilon \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} dx \frac{\epsilon^2}{x(x^2 + \epsilon^2)} [\phi(x+x_0) - \phi(x_0-x)] \\
&= \int_0^{\infty} dx \frac{1}{x(x^2 + 1)} [\phi(x_0 + \epsilon x) - \phi(x_0 - \epsilon x)] \\
&= 2\epsilon\phi'(x_0) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} + O(\epsilon^2) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0.
\end{aligned} \tag{B.25}$$

La parte immaginaria della (B.21) invece tende in senso distribuzionale a una delta di Dirac, infatti

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon\phi(x)}{(x-x_0)^2 + \epsilon^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\phi(x_0 + \epsilon x)}{x^2 + 1} \\
&= \phi(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} + O(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \pi\phi(x_0) = \pi\delta_{x_0}[\phi],
\end{aligned} \tag{B.26}$$

pertanto complessivamente abbiamo dimostrato la formula (B.20).

Passiamo ora alla definizione di derivata in senso distribuzionale. Una distribuzione temperata è dotata di derivate di ogni ordine, che sono definite per analogia al seguente caso. Supponiamo che f sia una funzione derivabile con continuità e crescita, con le sue derivate, in maniera al più polinomiale. Allora, sia f che la derivata $\partial_j f$ definiscono delle distribuzioni di tipo funzione, e si ha

$$\partial_j f[\phi] = \int d^n x \partial_j f(x)\phi(x) = - \int d^n x f(x)\partial_j \phi(x) = -f[\partial_j \phi], \tag{B.27}$$

dove abbiamo integrato per parti e tenuto conto che il termine di superficie si annulla per via della decrescenza rapida di ϕ . Questo ragionamento è valido solo per distribuzioni di tipo funzione regolari, ma analogamente è definita la derivata di una distribuzione qualunque.

Definizione B.6. Sia $T \in \mathcal{S}'_n$. Allora la derivata $D^\alpha T \in \mathcal{S}'_n$ agisce nel seguente modo:

$$D^\alpha T[\phi] := (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha \phi], \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n. \quad (\text{B.28})$$

In una notazione integrale, questo equivale a dire che l'azione delle derivate di una distribuzione si ottiene formalmente integrando per parti.

Un'utile relazione stabilisce, per $n = 1$, che la distribuzione di Dirac è la derivata della distribuzione indotta dalla funzione a gradino di Heaviside

$$\theta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a, \\ 1 & \text{se } x > a. \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

Infatti, indicando la derivata con l'apice:

$$\theta'_a[\phi] = -\theta_a[\phi'] = -\int_a^\infty dx \phi'(x) = -\phi(x)|_a^\infty = \phi(a) = \delta_a[\phi]. \quad (\text{B.30})$$

Si può moltiplicare una distribuzione temperata per una funzione di classe \mathcal{C}^∞ , che cresce in modo al più polinomiale con tutte le sue derivate.

Definizione B.7. Siano $T \in \mathcal{S}'_n$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ e per ogni multiindice α esistano due costanti k_α, m_α tali che

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq k_\alpha (1 + |x|^{m_\alpha}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.31})$$

Allora la distribuzione $\psi T \in \mathcal{S}'_n$ è definita da

$$\psi T[\phi] := T[\psi \phi], \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n. \quad (\text{B.32})$$

Anche questa definizione generalizza in maniera ovvia ciò che accade con le distribuzioni di tipo funzione.

Abbiamo scelto di introdurre le distribuzioni temperate perché su di esse si può compiere una ulteriore importante operazione, che può non essere definita su spazi distribuzionali diversi: la trasformata di Fourier. Questa definisce un operatore lineare invertibile sullo spazio delle funzioni a decrescenza rapida, che risulta continuo per successioni. La trasformata di Fourier \mathcal{F} e la sua inversa, l'antitrasformata di Fourier $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$, sono definite nel seguente modo:

$$\mathcal{F}\phi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(-i\xi \cdot x) \phi(x) =: \tilde{\phi}(\xi), \quad (\text{B.33})$$

$$\bar{\mathcal{F}}\tilde{\phi}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n\xi}{(2\pi)^n} \exp(ix \cdot \xi) \tilde{\phi}(\xi) = \phi(x). \quad (\text{B.34})$$

Valgono le seguenti relazioni che legano la trasformata di Fourier con le derivate:

$$\partial_\mu \mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-ix_\mu \phi)(\xi), \quad (\text{B.35})$$

$$\xi_\mu \mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-i\partial_\mu \phi)(\xi). \quad (\text{B.36})$$

Anche la trasformata di Fourier si definisce per le distribuzioni temperate calcolandola sulle funzioni di prova.

Definizione B.8. Sia $T \in \mathcal{S}'_n$. La sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'_n$ agisce nel seguente modo:

$$\mathcal{F}T[\phi] := T[\mathcal{F}\phi], \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n. \quad (\text{B.37})$$

Analogamente si definisce l'antitrasformata di Fourier $\bar{\mathcal{F}}T$.

Anche su \mathcal{S}'_n , la trasformata di Fourier risulta invertibile con inversa data dall'antitrasformata, come si verifica immediatamente. Altrettanto facilmente si dimostra che la derivata distribuzionale e la trasformata di Fourier in \mathcal{S}'_n sono operatori continui, cioè se $T_j \rightarrow T$ allora $D^\alpha T_j \rightarrow D^\alpha T$, $\mathcal{F}T_j \rightarrow \mathcal{F}T$. Inoltre le relazioni (B.35), (B.36) valgono in \mathcal{S}'_n come conseguenza della loro validità in \mathcal{S}_n .

È utile conoscere la trasformata di Fourier della distribuzione delta di Dirac centrata in un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Per ogni funzione di prova ϕ abbiamo

$$\mathcal{F}\delta_a^n[\phi] = \delta_a^n[\mathcal{F}\phi] = \mathcal{F}\phi(a) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \exp(-ia \cdot x) \phi(x). \quad (\text{B.38})$$

Possiamo vedere l'ultima espressione come l'azione su ϕ di una distribuzione di tipo funzione molto regolare, un'onda piana. L'uguaglianza dei valori assunti su ogni funzione di prova implica l'uguaglianza delle distribuzioni, e così otteniamo il risultato

$$\mathcal{F}\delta_a^n(x) = \exp(-ia \cdot x). \quad (\text{B.39})$$

Antitrasformando questa espressione, e passando alla notazione formale, otteniamo

$$\delta^n(x - a) = \bar{\mathcal{F}}(\exp(-ia \cdot \xi))(x). \quad (\text{B.40})$$

La trasformata (e l'antitrasformata) di Fourier di un'onda piana non esiste nel senso usuale, ma solo in senso distribuzionale. Tuttavia, se formalmente scriviamo l'antitrasformata con la formula (B.34), troviamo l'utile rappresentazione integrale della delta di Dirac

$$\delta^n(x - a) = \int \frac{d^n\xi}{(2\pi)^n} \exp(i(x - a) \cdot \xi), \quad (\text{B.41})$$

da intendersi in senso distribuzionale. Questo significa che entrambi i membri sono distribuzioni, e agiscono su una funzione di prova $\phi(x)$ mediante integrazione, ma nel membro di destra si dovrà scambiare l'ordine di integrazione per ottenere un risultato ben definito, effettuando prima l'integrazione in x e poi quella in ξ .

Consideriamo ora una distribuzione G_x che dipende da un parametro $x \in \mathbb{R}^n$. Allora l'applicazione di G_x a una data funzione di prova ϕ definisce una funzione

$$u(x) := G_x[\phi], \quad (\text{B.42})$$

e ci chiediamo sotto quali condizioni u è derivabile. Partiamo dalla definizione di derivata parziale $\partial_j u$ come limite del rapporto incrementale

$$\frac{1}{h} [G_{x+he_j}[\phi] - G_x[\phi]] = \left(\frac{G_{x+he_j} - G_x}{h} \right) [\phi] \quad (\text{B.43})$$

(e_j è il versore dell'asse x^j nell' n -spazio), dove abbiamo usato la (B.8). Se la distribuzione tra parentesi tonde nella (B.43) ha un limite in senso distribuzionale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{G_{x+he_j} - G_x}{h} \right) = G_x^{(j)}, \quad (\text{B.44})$$

possiamo affermare, per la definizione B.5, che

$$\partial_j u(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (G_{x+he_j}[\phi] - G_x[\phi]) = G_x^{(j)}[\phi]. \quad (\text{B.45})$$

Possiamo naturalmente dire che la distribuzione $G_x^{(j)}$ è, per definizione, la derivata parziale di G_x rispetto al parametro x^j :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} G_x := G_x^{(j)}. \quad (\text{B.46})$$

Indicando il nucleo integrale corrispondente alla distribuzione G_x con $G(x, x')$ (ancora, questa non sarà in generale una funzione di x' nel senso usuale del termine), scriviamo l'azione di G_x come

$$G_x[\phi] = \int d^n x' G(x, x') \phi(x'). \quad (\text{B.47})$$

Allora la (B.45), tenuto conto della (B.46), assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \int d^n x' G(x, x') \phi(x') = \int d^n x' \frac{\partial}{\partial x^j} G(x, x') \phi(x'). \quad (\text{B.48})$$

Quindi, con le definizioni e le ipotesi fatte, possiamo formalmente portare la derivata dentro l'integrale, indipendentemente da quale sia la funzione di prova ϕ considerata. Ovviamente, poi, una funzione $a(x)$ passa senza problemi dentro l'integrale (B.47), e alla

fine considerando un generico operatore differenziale di grado k a coefficienti non costanti (indichiamo esplicitamente che le derivate sono fatte rispetto a x)

$$\hat{L}_x = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) (-iD_x)^\alpha, \quad (\text{B.49})$$

abbiamo l'uguaglianza

$$\hat{L}_x \int d^n x' G(x, x') \phi(x') = \int d^n x' \hat{L}_x G(x, x') \phi(x'), \quad (\text{B.50})$$

che risulta utile per esprimere la soluzione di una equazione differenziale quando è noto il propagatore.

Infine, consideriamo un esempio di equazione distribuzionale algebrica in una dimensione, che è utile per lo studio del propagatore per l'operatore di Klein–Gordon. Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ una funzione che può essere moltiplicata per una distribuzione. Vogliamo trovare le distribuzioni G , identificate con i loro nuclei formali $G(x)$, che risolvono l'equazione

$$f(x)G(x) = 1. \quad (\text{B.51})$$

In questa equazione G compare linearmente, e la soluzione più generale si scrive

$$G(x) = G_1(x) + G_0(x), \quad (\text{B.52})$$

dove G_1 è una soluzione particolare, e G_0 risolve l'equazione omogenea

$$f(x)G_0(x) = 0. \quad (\text{B.53})$$

Se f non si annulla mai, allora semplicemente

$$G_0(x) = 0, \quad G_1(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad (\text{B.54})$$

(se $1/f$ può indurre una distribuzione) e il carattere distribuzionale dell'equazione (B.51) e della sua soluzione non è evidente. Se invece f si annulla in qualche punto, allora G_1 e G_0 hanno forme meno banali. Supponiamo che f abbia degli zeri semplici nei punti x_1, \dots, x_m . Allora le distribuzioni $\delta(x - x_j)$, con $j \in \{1, \dots, m\}$, risolvono la (B.53), infatti in senso distribuzionale

$$f(x)\delta(x - x_j) = f(x_j)\delta(x - x_j) = 0. \quad (\text{B.55})$$

La soluzione particolare è invece la distribuzione

$$G_1(x) = \mathcal{P} \frac{1}{f(x)}, \quad (\text{B.56})$$

che supponiamo ben definita. Infatti

$$fG_1[\phi] = G_1[f\phi] = \mathcal{P} \int \frac{dx}{f(x)} f(x)\phi(x) = \mathcal{P} \int dx \phi(x) = \int dx \phi(x) = 1[\phi]. \quad (\text{B.57})$$

La soluzione generale dell'equazione (B.51) è pertanto

$$G(x) = \mathcal{P} \frac{1}{f(x)} + \sum_{j=1}^m a_j \delta(x - x_j), \quad (\text{B.58})$$

dove a_j sono costanti arbitrarie.

Appendice C

Integrali gaussiani

Presentiamo in questa pagina il calcolo degli integrali

$$I(\alpha, \beta) := \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-\alpha x^2 + \beta x}, \quad (\text{C.1})$$

$$F(a, \mathbf{b}) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{-a|\mathbf{x}|^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{C.2})$$

che intervengono nel calcolo del nucleo del calore. Tutti i parametri si assumono reali, e poi il risultato si estende per analiticit  in un dominio del piano complesso.

L'integrale (C.1) converge quando $\alpha > 0$. Completando il quadrato, abbiamo

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= e^{\beta^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-(\sqrt{\alpha}x - \beta/2\alpha)^2} \\ &= e^{\beta^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} \left[\frac{x}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta}{2\alpha} \right] e^{-x^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\beta}{2\alpha^{3/2}} e^{\beta^2/4\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

L'integrale (C.2) converge quando $a > 0$, e si riduce al precedente passando alle coordinate polari, con l'asse parallelo a \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} F(a, \mathbf{b}) &= \int_0^{\infty} dx x^2 \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-ax^2 + |\mathbf{b}|x \cos \vartheta} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta e^{|\mathbf{b}|x \cos \vartheta} \\ &= \frac{2\pi}{|\mathbf{b}|} \int_0^{\infty} dx x e^{-ax^2} [e^{|\mathbf{b}|x} - e^{-|\mathbf{b}|x}] \\ &= \frac{\pi}{|\mathbf{b}|} [I(a, |\mathbf{b}|) - I(a, -|\mathbf{b}|)] \\ &= (\pi/a)^{3/2} e^{\mathbf{b}^2/4a}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Bibliografia

- [1] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. I e II (Interscience, 1966).
- [2] G. Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* (1828), [arXiv:0807.0088](https://arxiv.org/abs/0807.0088).
- [3] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill 1980).
- [4] L. Landau, E. Lifšitz, *Fisica Teorica*, vol. I, *Meccanica* (Editori Riuniti, 2009), e vol. II, *Teoria dei Campi* (Editori Riuniti, 2010).
- [5] M. Mukhanov, S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (Cambridge University Press, 2007).
- [6] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, vol. I (Perseus, 1998).
- [7] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, 1985).
- [8] B. de Wit, J. Smith, *Field Theory in Particle Physics*, vol. I (North-Holland, 1986).
- [9] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, 2009).
- [10] Note di lezione dei Proff. F. Bastianelli, R. Casadio, F. Ortolani, R. Zucchini (Università di Bologna).