

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Simulazioni numeriche di onde di Alfvén
in presenza di resistività**

Relatore:

Dott. Federico Marinacci

Presentata da:

Alessandro Stenghel

*"I... a universe of atoms,
an atom in the universe."*

- Richard P. Feynman -

*Alla mia famiglia,
specialmente a mio Padre...*

Indice

Abstract	3
1 Introduzione	4
1.1 Cenni storici	4
1.2 Relazioni interdisciplinari	6
1.3 Scopo e struttura della tesi	7
2 Condizioni ed equazioni fondamentali	8
2.1 Sulle equazioni fondamentali	8
2.2 Equazioni di Maxwell	8
2.2.1 Legge di induzione magnetica	10
2.3 Equazioni della fluidodinamica	11
2.3.1 Equazione di continuità	11
2.3.2 Equazione di Eulero	11
2.3.3 Conservazione dell'energia	12
2.4 Le equazioni fondamentali della magnetoidrodinamica	13
3 Onde di Alfvén: trattazione analitica	14
3.1 Le onde di Alfvén	14
3.2 Sullo sviluppo perturbativo	14
3.3 Soluzioni nel caso $\eta = 0$	16
3.3.1 Evoluzione della pressione nel caso $\eta = 0$	17
3.4 Soluzioni con resistività $\eta \neq 0$	19
3.4.1 Evoluzione della pressione nel caso $\eta \neq 0$	20

4	Onde di Alfvén: simulazioni numeriche	23
4.1	Funzione obiettivo	24
4.2	Simulazioni per $\eta = 0$	24
4.2.1	Pressione e densità	25
4.2.2	Campo magnetico e velocità	26
4.3	Simulazioni per $\eta \neq 0$	28
4.3.1	Densità	29
4.3.2	Velocità	30
4.3.3	Campo magnetico	33
4.3.4	Pressione	34
4.4	La funzione obiettivo e la sua dipendenza temporale	37
5	Conclusioni	42
A	Calcolo del flusso di energia	43
B	Derivata lagrangiana	44
C	Dimostrazione BAC-CAB e forza di Lorentz	45
	Bibliografia	47

Abstract

In questo lavoro di tesi studieremo, con l'ausilio di simulazioni numeriche, le proprietà delle così dette onde di Alfvén in un magnetofluido ideale (ossia con resistività nulla) e non ideale (ossia in presenza di resistività). Dopo aver introdotto il lettore alle principali equazioni della magnetoidrodinamica, elaborando queste equazioni vedremo come in condizioni ideali (ossia senza resistività) in un plasma nel quale il campo magnetico è uniforme si possano generare delle onde trasversali che si propagano lungo la direzione del campo, le onde di Alfvén. Analizzeremo poi la stessa configurazione in presenza di resistività, la quale avrà come effetto principale uno smorzamento esponenziale dell'ampiezza dell'onda. Infine, effettueremo delle simulazioni numeriche di entrambe queste configurazioni con il codice magnetoidrodinamico *Arepo* e confronteremo i risultati ottenuti con le previsioni analitiche mostrando il buon accordo tra le simulazioni eseguite e la teoria.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cenni storici

Le origini della magnetoidrodinamica nascono da un contributo speculativo di diversi scienziati, soprattutto nell'ambito dei corpi celesti e su studi teorici di gas ionizzati in campi magnetici per formulare una teoria sulle tempeste magnetiche. Un primissimo, seppur arcaico, pensiero riguardante questa dinamica fu ad opera di Michael Faraday. Quest'ultimo suppose che l'acqua salata, che scorreva oltre il Waterloo Bridge, interagisse con il campo magnetico della Terra. Questo effetto venne chiamato "induzione magneto-elettrica" dallo stesso Faraday, che cercò dati sperimentali nel 1832. Tuttavia la corrente era troppo piccola per essere misurata con gli strumenti di allora, inoltre il letto del fiume contribuiva a mettere in cortocircuito il segnale. Nel 1851 un processo simile finalmente fu misurato, in un esperimento riguardante la tensione indotta dalla marea nel Canale della Manica.

Nel 1899 il fisico Bigelow suggeriva che il Sole fosse una grande calamita dalla somiglianza di effetti coronali, viste durante un'eclisse totale, alle linee di forza di una sfera uniformemente magnetizzata. Anche Schuster supportava questa idea generalizzandola ad ogni corpo celeste in rotazione. Questi suggerimenti spinsero l'astronomo statunitense George Hale a compiere ricerche in tale settore e nel 1908, per mezzo dell'effetto Zeeman, scoprì che le macchie solari possedevano campi magnetici dell'ordine di migliaia di Gauss. Questa scoperta aprì un nuovo campo di studio nell'astrofisica e fu il diretto responsabile nello sviluppo della teoria della magnetoidrodinamica (MHD).

Nel 1919 Larmor, a seguito delle sue importanti scoperte nel campo delle macchie solari, propose una teoria sul sostegno del campo magnetico in quest'ultime. Supponeva, infatti, che

il moto dei gas ionizzati in un campo magnetico l'avrebbe amplificato e sostenuto. Questa proposta si basava sulla simmetria attorno all'asse della macchia solare stessa ma, Cowling, nei successivi anni, dimostrò invece la non validità di queste affermazioni che lo portarono ad enunciare un importante teorema chiamato "anti-dinamo" (1906). Tale teorema, infatti, dimostrava come un campo magnetico avente simmetria attorno ad un asse non potesse essere sostenuto da un moto con simmetria attorno allo stesso asse. Cowling aggiunse alla sua critica della teoria di Larmor l'ipotesi che i campi magnetici delle macchie solari potrebbero risultare dalla convezione di un campo magnetico profondo prodotto da correnti verticali. Con questa ipotesi si ha un concetto importante nella MHD, l'idea di un campo "congelato" ad un gas ionizzato ad alta conducibilità.

Nel 1942 abbiamo per la prima volta l'utilizzo stesso della parola magnetoidrodinamica (o magnetofluidodinamica, abbreviata in MHD), utilizzata dal fisico svedese Hannes Alfvén, nel suo omonimo Teorema. Il teorema di Alfvén afferma che in un gas ionizzato o in un liquido ad alta conducibilità elettrica, ogni moto perpendicolare al campo è proibito, cosicché la materia del gas o del liquido è "incollata" alle linee di forza. Il teorema deriva immediatamente applicando la legge di Faraday ad un fluido di infinita conducibilità e mostra come la forza elettromotrice in un circuito chiuso che si muove con il fluido debba essere nulla, altrimenti ne risulterebbero correnti infinite. Alfvén stesso dimostrò inoltre che l'interazione fra lo stato dinamico in un fluido di elevata conducibilità e le forze magnetiche davano luogo ad un nuovo tipo di onde, le cosiddette "Onde di Alfvén". In queste onde la materia è come "incollata" alle linee di forza, e poichè queste ultime si trovano sotto tensione, ognuna di esse si comporta come una corda tesa. Applicando dunque una perturbazione, all'equilibrio, le linee di forza vibrano in senso trasversale. Queste onde si propagano lungo le linee di forza con una velocità che sarà direttamente proporzionale all'intensità del campo magnetico e inversamente proporzionale alla radice della densità del fluido. Lo studio analitico e numerico di questo tipo di onde è l'obiettivo principale di questo lavoro di tesi.

Negli anni '50 George Batchelor introdusse il concetto di "campo congelato", circostanza già ben nota per la fluidodinamica sviluppata da Kolmogorov. Infatti similmente a quanto accade in un vortice di un fluido, anche le linee di forza sono congelate in un fluido conduttore in condizioni ideali di perfetta conducibilità. Più o meno nello stesso periodo cominciano i primi studi sugli effetti di un campo magnetico sui gas ionizzati (per es. della ionosfera) compiuti da Alfvén, che lo porteranno a vincere il premio Nobel nel 1970. Questi studi porteranno, Alfvén,

alla spiegazione del meccanismo delle fasce di van Allen in termini di moti di ioni ed elettroni descritti nel suo libro del 1949 “Cosmical Electrodynamics”.

1.2 Relazioni interdisciplinari

Qui daremo una breve illustrazione degli utilizzi della teoria della magnetoidrodinamica. Essa infatti è una teoria generale che permette di descrivere il comportamento di fluidi che conducono elettricità in presenza di campi magnetici, come metalli fusi e plasmi, e trova quindi applicazione in numerosi campi della fisica e dell'ingegneria.

Geofisica: Si ritiene che il nucleo fluido della Terra e di altri pianeti possa produrre, tramite meccanismi descrivibili dalla teoria della magnetoidrodinamica, il campo magnetico terrestre. I meccanismi che producono il campo magnetico nei pianeti (ma anche su più larga scala nelle stelle e nelle galassie) sono noti come dinamo, in analogia alla dinamo in elettrotecnica.

Astrofisica: Le macchie solari sono causate dai campi magnetici del Sole, come fu teorizzato da Joseph Larmor nel 1919. Il vento solare è anche esso un tipo di plasma governato dalle leggi della magnetoidrodinamica. Sono governate dalle leggi della MHD anche fenomeni di riconnessione magnetica, che è alla base della formazione dei brillamenti o flare, le più grandi esplosioni nel sistema solare. Il campo magnetico in una regione solare attiva, corrispondente a una macchia, è responsabile di fenomeni ciclici di riconnessione, accumulando e liberando energia sotto forma di raggi X, radiazione, e rilascio di particelle che formano il vento solare. Un'altro esempio molto importante è la generazione di campi magnetici su scale galattiche, anche questo processo può essere interpretato nell'ottica della teoria della MHD.

Ingegneria dei plasmi: La magnetoidrodinamica è di fondamentale importanza per la descrizione dei meccanismi che regolano il funzionamento dei dispositivi di confinamento magnetico all'interno dei processi di fusione termonucleare controllata. Tali dispositivi sono un vero e proprio laboratorio dove i modelli magnetoidrodinamici possono essere testati ed interpretati per poi essere utilizzati anche in altri ambiti. Ad esempio, fenomeni di riconnessione magnetica e quindi la presenza di resistività nel plasma, sono fondamentali nel determinare le proprietà di trasporto nei plasmi magnetizzati per la fusione e trovano applicazione anche nella fisica solare.

Biofisica: Un importante problema per la cura contro il cancro è quello di sviluppare metodi sempre più precisi per la somministrazione della cura nelle aree affette da tale patologia. Uno di questi metodi è di legare la cura a particelle magnetiche biologicamente compatibili come ferrofluidi, che sono guidate verso l'area interessata, da un accurato posizionamento di magneti permanenti posizionati all'esterno del corpo del paziente. Le equazioni della MHD sono utilizzate dunque per studiare l'interazione tra le particelle di fluido magnetico nel flusso sanguigno e il campo magnetico esterno.

1.3 Scopo e struttura della tesi

Lo scopo di questa tesi è studiare il comportamento di un'onda di Alfvén polarizzata circolarmente con l'ausilio della teoria MHD sia dal punto di vista analitico che numerico. A tal proposito abbiamo diviso in due casi lo studio e di conseguenza le simulazioni. Nel primo abbiamo utilizzato le equazioni della MHD ideale, quindi in assenza di resistività, e nel secondo abbiamo analizzato e testato le equazioni della MHD non ideale con resistività non nulla e costante. Nel fare questo abbiamo innanzitutto esplicitato le equazioni fondamentali della magnetoidrodinamica, con e senza resistività, che saranno discusse nel capitolo 2. Dopodichè, nel capitolo 3, abbiamo risolto per via analitica la versione linearizzata del sistema di equazioni differenziali della MHD, trovando le relazioni di dispersione alle quali debbono obbedire le onde di Alfvén piane sia nel caso ideale che in quello resistivo e la conseguente evoluzione della perturbazione che genera l'onda. Grazie a questi risultati, nel capitolo 4, abbiamo fissato le condizioni iniziali relative ad un'onda di Alfvén polarizzata circolarmente e l'abbiamo fatta evolvere numericamente tramite simulazioni effettuate con il codice a griglia mobile *Arepo*. Abbiamo poi confrontato le soluzioni numeriche con la teoria analitica e valutato, in funzione del tempo, quanto i risultati della simulazione si discostino dalla soluzione analitica. Nel capitolo 5 presentiamo un breve sommario del lavoro svolto in questa tesi. Infine nelle appendici si possono trovare i dettagli matematici relativi al calcolo del flusso di energia (Appendice A), la definizione di derivata lagrangiana (Appendice B), strumento matematico utilizzato nelle equazioni della MHD che abbiamo analizzato, e la dimostrazione di una identità fondamentale nel calcolo vettoriale (Appendice C).

Capitolo 2

Condizioni ed equazioni fondamentali

2.1 Sulle equazioni fondamentali

La magnetoidrodinamica, o MHD, è basata sulle leggi di Maxwell per il campo elettromagnetico e sulle equazioni dell'idrodinamica nelle quali vengono incluse le forze elettromagnetiche. Queste leggi verranno trattate nelle sezioni successive seguendo il sopracitato ordine. Vista la natura delle equazioni che la governano, i problemi della magnetofluidodinamica sono molto complessi in quanto, in generale, saranno presenti tutti fenomeni associati con la non-linearità delle equazioni dell'idrodinamica, quali turbolenze, onde d'urto, ecc. Per quanto concerne questa tesi, dopo aver presentato le equazioni della MHD nella loro generalità in questo capitolo, ci limiteremo a tenere in considerazione fenomeni lineari, quali le onde di Alfvén, quindi analizzabili tramite uno sviluppo perturbativo (si veda capitolo 3).

2.2 Equazioni di Maxwell

Iniziamo la trattazione fisica con le leggi di Maxwell che riportiamo sotto nel sistema MKS:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Gauss campo elettrico} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Gauss campo magnetico} \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Legge di induzione} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{Legge di Ampère} \quad (2.4)$$

Tali equazioni rappresentano il comportamento dei campi elettromagnetici all'interno del magnetofluido. Tuttavia, nel codice numerico `Arepo`, per semplicità di notazione, le equazioni

SI	Gauss	Heaviside-Lorentz
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}}{c}$

Tabella 2.1: Equazioni di Maxwell in vari sistemi di unità di misura: SI (colonna sinistra), Gauss (colonna centrale) e Heaviside-Lorentz (colonna destra). Ricordiamo che nelle derivazioni analitiche e nelle simulazioni numeriche sono utilizzate per semplicità di notazione le unità di Lorentz-Heaviside.

della MHD sono risolte nel sistema di unità di Lorentz-Heaviside. Per effettuare con facilità la conversione tra un sistema di unità si veda la tabella 2.1, dove abbiamo riportato le equazioni nei vari sistemi di unità più utilizzati. In aggiunta al sistema MKS e di Lorentz-Heaviside abbiamo trascritto anche quello Gaussiano in quanto è il sistema di unità più comunemente usato nei lavori teorici che trattano la MHD. Notiamo fin da ora che per passare dal sistema di unità di Heaviside-Lorentz a quello Gauss vi è un fattore moltiplicativo di 4π . In tutte le derivazioni che seguiranno adotteremo il sistema di unità di Lorentz-Heaviside.

Tornando alla derivazione delle equazioni della MHD, il plasma è definito come un fluido con le seguenti proprietà materiali: l'alta conducibilità ($\sigma \rightarrow \infty$) e densità elettrica globalmente nulla ($\rho_{tot} \rightarrow 0$). Inoltre gli effetti della corrente di spostamento sono trascurabili per i fluidi non relativistici, poiché comportano ritardi associati alla propagazione della luce, che ignoreremo in questa sede. Infatti dalla definizione di corrente di spostamento, assumendo $\partial/\partial t \simeq v/L$ dove L è la lunghezza caratteristica del sistema, abbiamo che:

$$\frac{\mathbf{J}_s}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \simeq \frac{1}{c} \frac{vE}{L} \simeq \frac{1}{c} \frac{v^2 B}{L} \simeq \frac{v^2}{c^2} \mathbf{J} \quad (2.5)$$

la quale mette in evidenza che tale termine è al secondo ordine in v/c e quindi trascurabile in regime non relativistico. Con questo risultato, la legge di Ampère (2.4) diventa:

$$\frac{\mathbf{J}}{c} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.6)$$

Cerchiamo ora un legame tra la densità di corrente ed i campi elettrico e magnetico. Questo ci viene dato dalla legge di Ohm

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (2.7)$$

L'equazione precedente rappresenta il caso più generale in cui il fluido è resistivo (in altre parole la sua conducibilità è finita, $\sigma < \infty$). Nel caso ideale $\sigma \rightarrow \infty$ e perciò

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (2.8)$$

Le equazioni (2.7) e (2.8) possono essere utilizzate per “eliminare” il campo elettrico dalle equazioni di Maxwell rispettivamente nel caso resistivo ed ideale. Inoltre troviamo che la legge di Gauss per il campo elettrico diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = 0$$

in quanto, come abbiamo definito il plasma, ρ_{tot} è nullo, cioè globalmente neutro.

Ricapitolando i risultati ottenuti per le equazioni di Maxwell nella teoria della MHD, notiamo che le due equazioni di Gauss per il campo elettrico e magnetico non saranno più utilizzate nella trattazione che segue (ovviamente i campi elettrico e magnetico dovranno obbedire al vincolo di essere solenoidali), la legge di Ampère assume la forma data dall'equazione (2.6), ed il campo elettrico viene sostituito nelle equazioni di Maxwell tramite le (2.7) e (2.8), rispettivamente nel caso resistivo ed in quello ideale. Per concludere la trattazione delle leggi di Maxwell non ci resta che esaminare la legge di Faraday la quale, in magnetoidrodinamica, fornisce l'evoluzione temporale del campo magnetico. Tratteremo questa equazione nel prossimo paragrafo.

2.2.1 Legge di induzione magnetica

Per quanto riguarda l'evoluzione del campo magnetico utilizzeremo l'equazione di induzione che possiamo scrivere come:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}$$

Nel caso ideale con resistività nulla, applicando la legge di Ohm (2.8) abbiamo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Nel caso resistivo applicando la (2.7) e la legge di Ampère (2.6) abbiamo invece:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - c \nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - c^2 \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\sigma} \right).$$

Sviluppando i prodotti vettoriali e assumendo $c^2/\sigma = \eta \equiv \text{const}$ otteniamo:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{Legge di Faraday} \quad (2.9)$$

Nell'equazione (2.9) il primo termine è lo stesso della trattazione ideale e descrive l'avvezione del campo magnetico da parte del moto del fluido mentre il secondo termine è dovuto alla resistività ohmica e descrive la diffusione del campo magnetico. In ciò che segue chiameremo la costante η resistività del fluido.

2.3 Equazioni della fluidodinamica

Come detto in precedenza, le equazioni della magnetofluidodinamica, sono composte dalle leggi riguardanti i fenomeni elettromagnetici unite a quelle della fluidodinamica, modificate aggiungendo termini di natura elettromagnetica. In questo paragrafo illustreremo, in modo dettagliato, le principali equazioni fluidodinamiche che compongono il nucleo della MHD. Esse verranno in seguito utilizzate nella trattazione analitica del capitolo 3.

2.3.1 Equazione di continuità

La prima equazione della fluidodinamica che andremo ad esaminare è quella di conservazione della massa che assume la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{Equazione di continuità} \quad (2.10)$$

Dove ρ è la densità di massa e \mathbf{v} è il campo di velocità. Il contenuto di questa equazione è semplice, ci illustra che se c'è un flusso in entrata e in uscita di massa in un fissato volumetto nello spazio, la massa nel volume cambierà in accordo con la somma dei flussi, in sostanza la massa si conserva. Ovviamente se il flusso sarà nullo l'equazione differenziale ci restituirà una funzione costante nel tempo.

2.3.2 Equazione di Eulero

La seconda equazione della fluidodinamica che esamineremo è l'equazione di Eulero. Tale equazione non è altro che l'espressione del secondo principio della dinamica per un fluido (in questo caso magnetizzato). Abbiamo che:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathcal{F}_P + \mathcal{F}_L \quad (2.11)$$

dove \mathcal{F}_P rappresenta le forze di pressione agenti sull'elemento di fluido e \mathcal{F}_L rappresenta la forza di Lorentz:

$$\mathcal{F}_P = -\nabla P$$

$$\mathcal{F}_L = \rho_e \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}.$$

Nell'equazione 2.11 l'operatore D/Dt è la derivata lagrangiana (si veda Appendice B per dettagli). La densità elettrica ρ_e , come abbiamo specificato nella sezione 2.2, è globalmente nulla per cui l'unica parte che interagisce col gas è quella magnetica. Utilizzando la (2.6) abbiamo:

$$\mathcal{F}_L = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

Sviluppando tale identità usufruendo dei risultati della Appendice C otteniamo:

$$\mathcal{F}_L = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Il primo termine magnetico si comporta come una sorta di pressione, la cosiddetta pressione magnetica. In pratica, per comprimere le linee di forza dei campi magnetici si deve vincere una pressione in analogia con quanto accade per i gas. Il secondo termine $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ è meno ovvio. Corrisponde a una sorta di tensione magnetica. Notiamo inoltre che svanisce quando il campo magnetico non cambia lungo la sua stessa direzione. Quando ci sono tali cambiamenti, la forza risultante agisce in modo da riportare le linee di campo nello stato di equilibrio. È l'analogo magnetico di onde che si propagano lungo una corda che è sotto tensione. Queste onde sono chiamate onde di Alfvén e saranno il fenomeno magnetoidrodinamico sul quale focalizzeremo la trattazione, si vedano i capitoli 3 e 4. L'equazione del moto infine sarà data da (in unità di Lorentz-Heaviside):

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad \text{Equazione di Eulero} \quad (2.12)$$

2.3.3 Conservazione dell'energia

L'ultima equazione della fluidodinamica che utilizzeremo per completare il sistema di equazioni della MHD è l'equazione di conservazione dell'energia, che in termini di flussi si può scrivere come:

$$\frac{\partial \rho \epsilon_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$$

dove $\rho \epsilon_{tot} = E_{tot}$ è la densità di energia totale e $\boldsymbol{\xi}$ è il flusso di energia totale. Esplicitando il flusso, che sarà dovuto al contributo cinetico E_{cin} , termico E_{int} e quello (elettro)magnetico, abbiamo:

$$\boldsymbol{\xi} = (E_{cin+int} + P_{gas}) \mathbf{v} + c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.13)$$

Dove $E_{cin+int} = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\epsilon$ sono la somma del termine cinetico e termico del sistema e il terzo membro della (2.13) è il contributo (elettro)magnetico (vettore di Poynting). Ricordando la legge di Ohm nel caso resistivo, (2.7) e rimandando all'appendice A per il calcolo diretto, otteniamo:

$$\boldsymbol{\xi} = (E_{tot} + P_{tot})\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

Sostituendo nella formula della conservazione dell'energia si ha :

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\mathbf{v}(E_{tot} + P_{tot}) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B})) \right] = 0 \quad \text{Conservazione Energia} \quad (2.14)$$

dove E_{tot} e P_{tot} sono la pressione e l'energia totale (che includono cioè i termini magnetici):

$$E_{tot} = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$

$$P_{tot} = (\gamma - 1)\rho\epsilon + \frac{1}{2}B^2.$$

2.4 Le equazioni fondamentali della magnetoidrodinamica

La MHD dunque, tiene conto sia del comportamento del campo elettromagnetico, sia della natura di fluido del plasma. Qui di seguito riportiamo dunque il sistema completo delle equazioni fondamentali della magnetoidrodinamica

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(\mathbf{v}(E_{tot} + P_{tot}) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B})) \right] = 0. \quad (2.18)$$

Queste equazioni descrivono totalmente i fenomeni magnetoidrodinamici ed in particolare le onde di Alfvén che tratteremo nel capitolo 3. Esse sono associate al caso più generale, cioè con resistività non nulla. Ci riferiremo a questo caso come resistivo o non-ideale e lo tratteremo per quanto riguarda le onde di Alfvén al paragrafo 4.3. Per ottenere le equazioni nel caso ideale, cioè senza resistività, che tratteremo per le onde di Alfvén nel paragrafo 4.2, basta invece imporre $\eta = 0$.

Capitolo 3

Onde di Alfvén: trattazione analitica

3.1 Le onde di Alfvén

Il plasma ha la particolarità di essere estremamente conduttivo, tale da rendere le interazioni dominanti quelle elettromagnetiche. Tuttavia, nonostante i nuclei e gli elettroni siano scissi, il gas è mediamente neutro. Gli ioni presenti nel plasma sottoposti a un campo magnetico oscillano generando delle onde che si propagano in direzione del campo magnetico, chiamate onde di Alfvén. Il moto degli ioni e la perturbazione del campo magnetico avvengono nella stessa direzione e risultano trasversali alla direzione di propagazione dell'onda (si veda Figura 3.1). L'onda si propaga con la velocità (nel sistema di unità di Lorentz-Heaviside):

$$|\mathbf{v}_A| = \frac{B}{\sqrt{\rho_0}} \quad (3.1)$$

la cui derivazione verrà fatta in questo capitolo (si veda paragrafo 3.3).

In questo capitolo dunque andremo a trattare analiticamente il caso in cui le onde di Alfvén si propagano in condizioni ideali, cioè in cui la resistività del plasma $\eta = 0$, nel paragrafo 3.3, e in condizioni non ideali ($\eta \neq 0$) nel paragrafo 3.4. Oltre all'evoluzione della perturbazione nella velocità e nel campo magnetico del plasma andremo a studiare il comportamento della pressione analizzando le differenze tra il caso ideale (paragrafo 3.3.1) e non ideale (paragrafo 3.4.1).

3.2 Sullo sviluppo perturbativo

Prima di immetterci nella trattazione analitica vale la pena soffermarci su un concetto che sarà essenziale ai fini della nostra tesi. Nello studio dell'evoluzione di un disturbo nel limite di pic-

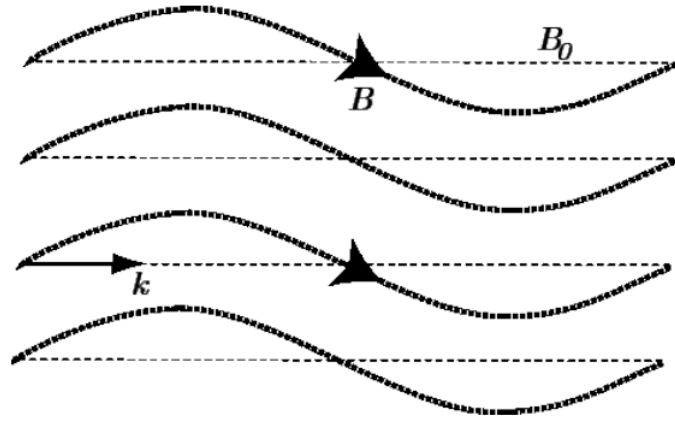


Figura 3.1: Rappresentazione schematica delle onde di Alfvén, in particolare della perturbazione in una delle componenti trasversali (rispetto alla direzione di propagazione dell'onda) del campo magnetico. Tali onde si propagano lungo la direzione del campo. Il caso che assumeremo, nei paragrafi 3.3 e 3.4, è $k \parallel \hat{e}_z$ e $B \parallel \hat{e}_z$.

Per le deviazioni dall'equilibrio, si usa il cosiddetto sviluppo perturbativo. In questo approccio si può considerare la variabile di interesse composta da due parti: una costante, che rappresenta lo stato di equilibrio, e una "piccola perturbazione", solitamente una funzione periodica con ampiezza arbitrariamente piccola. In termini di sviluppo in serie i valori all'equilibrio sono considerati quantità all'ordine zero e i valori delle perturbazioni quantità del prim'ordine. Questo significa che ogni entità perturbata K verrà sostituita da:

$$K = K_0 + \delta K + O([\delta K]^2)$$

Assumiamo questa perturbazione δK come un'onda piana che si propaga lungo la direzione z , questa assunzione verrà in tutta la trattazione quindi:

$$\delta K = (\delta k) e^{i(kz - \omega t)}$$

dove δk è l'ampiezza della perturbazione che abbiamo assunto, per convenzione, essere una vibrazione progressiva. Questa approssimazione ci verrà in aiuto nel calcolare la relazione di dispersione e quindi l'effettivo andamento dell'onda. Infatti, grazie a queste assunzioni durante i calcoli potremmo linearizzare le nostre equazioni, cioè eliminare ogni membro proporzionale a δ^2 , semplificando notevolmente la trattazione.

3.3 Soluzioni nel caso $\eta = 0$

In questa sezione ci dedicheremo a derivare l'evoluzione di onde di Alfvén nel caso ideale, in assenza dunque di resistività. Assumeremo perturbazioni in tutte le coordinate della velocità \mathbf{v} (all'equilibrio dunque $\mathbf{v} = 0$) e nelle coordinate x e y del campo magnetico costante che assumeremo inizialmente costante e diretto lungo z.

Dato che la perturbazione che abbiamo assunto è un'onda piana che si propaga in direzione z si avrà che:

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z. \quad (3.2)$$

Il campo magnetico perturbato è dato da:

$$\mathbf{B} = (\delta B_x, \delta B_y, B_z), \quad (3.3)$$

dove per semplicità di lettura si è ommesso il termine $e^{i(\mathbf{kz} - \omega t)}$ legato ad ogni δ . La perturbazione in velocità (assunta nulla all'equilibrio) è data da:

$$\mathbf{v} = (\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z). \quad (3.4)$$

Come vedremo le perturbazioni δv_z saranno nulle.

Riscrivendo le equazioni della MHD nel caso ideale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.5a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(E_{tot} + P_{tot}) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0 \quad (3.5c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.5d)$$

abbiamo che sostituendo le espressioni perturbate (3.4) dentro l'equazione di continuità (3.5a), e linearizzando, si ottiene:

$$\delta \rho (ik_z (\delta v_x + \delta v_y + \delta v_z) - i\omega) = 0 \longrightarrow \delta \rho = 0 \quad (3.6)$$

Questo risultato, valido sia per il caso ideale che per il caso resistivo, è del tutto generale. In effetti l'imporre l'equazione (3.5a) è equivalente a imporre la conservazione della massa e dunque della densità.

Sostituendo, invece, le espressioni delle perturbazioni del campo magnetico e delle velocità e linearizzando le equazioni della MHD ideale otteniamo le seguenti relazioni per ciascuna componente dell'equazione di Eulero

$$i\omega\delta v_x = -\frac{ik_z B_z}{\rho}\delta B_x \quad (3.7)$$

$$i\omega\delta v_y = -\frac{ik_z B_z}{\rho}\delta B_y \quad (3.8)$$

$$i\omega\delta v_z = 0 \longrightarrow \delta v_z = 0 \quad (3.9)$$

mentre per quella di induzione si ha

$$i\omega\delta B_x = -ik_z B_z \delta v_x \longrightarrow \delta B_x = -\frac{k_z}{\omega} B_z \delta v_x \quad (3.10)$$

$$i\omega\delta B_y = -ik_z B_z \delta v_y \longrightarrow \delta B_y = -\frac{k_z}{\omega} B_z \delta v_y. \quad (3.11)$$

Sostituendo le equazioni (3.10) e (3.11) nelle equazioni di Eulero (3.7) e (3.8) si ottiene la seguente relazione di dispersione:

$$\omega^2(\mathbf{k}) = \frac{B_z^2}{\rho} k_z^2 \longrightarrow \omega(\mathbf{k}) = \pm |v_A| k_z \quad (3.12)$$

dove $|v_A| = \frac{B_z}{\sqrt{\rho}}$ è la velocità di Alfvén (3.1).

Dall'equazione (3.12) vediamo subito che le funzioni che descrivono l'evoluzione delle perturbazioni, sono anch'esse onde piane progressive che si propagano con velocità v_a .

3.3.1 Evoluzione della pressione nel caso $\eta = 0$

Nella trattazione precedente abbiamo determinato l'evoluzione di tutte le quantità che descrivono il sistema, nel caso ideale, ad esclusione della pressione che tratteremo in modo in questa sezione. Valgono le stesse considerazioni fatte per la sezione 3.3, riassumendo:

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = (\delta B_x, \delta B_y, B_z)$$

$$\mathbf{v} = (\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z) = (\delta v_x, \delta v_y, 0)$$

$$\rho = \rho_0$$

$$P = P_0 + \delta P.$$

Si consideri l'equazione di conservazione dell'energia nel caso non resistivo:

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(E_{tot} + P_{tot}) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0 \quad (3.13)$$

Dove E_{tot} e P_{tot} sono la pressione e la densità di energia totale (si veda paragrafo 2.3.3):

$$E_{tot} = \rho\epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2$$

$$P_{tot} = P + \frac{1}{2}B^2 = (\gamma - 1)\rho\epsilon + \frac{1}{2}B^2$$

Sostituendo nella (3.13) le equazioni per E_{tot} e P_{tot} si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}B^2 \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + B^2 + \frac{\gamma P}{\gamma - 1} \right) - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \right] = 0 \quad (3.14)$$

Sostituendo tali perturbazioni e trascurando i termini non lineari, si giunge a determinare che la perturbazione della pressione è identicamente nulla, in quanto costante. Per quanto riguarda il primo termine della (3.14) abbiamo la parte di energia cinetica che è proporzionale a δ^2 quindi nulla in seguito alla linearizzazione, mentre quella riguardante l'energia magnetica è trascurabile in quanto la somma tra un termine proporzionale a δ^2 e un termine costante, quindi a derivata temporale nulla. Pertanto l'unico termine rimasto è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) = -i\omega \frac{\delta P}{\gamma - 1}.$$

All'interno della divergenza, trascurando nuovamente i termini non lineari e ricordando che le quantità perturbate dipendono solo da z , componente in cui velocità ha perturbazione nulla, si ha per il primo termine:

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + B_z^2 + \gamma\rho\epsilon \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\delta v_z \left(B^2 + \frac{\gamma(P_0 + \delta P)}{\gamma - 1} \right) \right] = 0. \quad (3.15)$$

Infine il secondo termine all'interno della divergenza (ancora una volta si considerano solo i termini lineari), grazie alla (3.9), è dato da:

$$\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) = (0, 0, \delta v_z B_z^2) = (0, 0, 0).$$

Pertanto l'equazione (3.13) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta P}{\gamma - 1} \right) = -i\omega \frac{\delta P}{\gamma - 1} = 0,$$

cioè la variazione di pressione rimane costante nel tempo. Possiamo calcolare una eventuale variazione spaziale della pressione direttamente dall'equazione dell'impulso (3.5b).

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Dall'analisi svolta per ottenere le equazioni (3.7) e (3.8) sappiamo che perturbando e linearizzando l'equazione di Eulero nella direzione z fornisce la seguente relazione

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

da cui

$$-ik_z \delta P = -i\rho\omega \delta v_z$$

Pertanto grazie alla (3.9):

$$\delta P = 0 \tag{3.16}$$

Questo dimostra che la trasformazione in atto a livello termico è a tutti gli effetti isobara.

3.4 Soluzioni con resistività $\eta \neq 0$

In questa sezione, invece, studieremo l'evoluzione di un'onda di Alfvén nel caso resistivo. Lo stato di equilibrio del sistema e le perturbazioni che applicheremo sono le stesse del caso ideale. Ricapitolando le equazioni del capitolo 2 nel caso non-ideale, cioè in presenza di una resistività non nulla e costante, abbiamo che il sistema descritto da:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{3.17a}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \tag{3.17b}$$

$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} (E_{tot} + P_{tot}) - \mathbf{B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \right] = 0 \tag{3.17c}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}. \tag{3.17d}$$

Con l'introduzione di una resistività costante, le uniche equazioni che si modificano sono quella di induzione e quella dell'energia. Partendo da una velocità nulla, un campo magnetico costante diretto nell'asse z e perturbando come nella sezione 3.3, otteniamo dalla (3.17d):

$$i\omega \delta B_x = -ik_z B_z \delta v_x + \eta k_z^2 \delta B_x \tag{3.18a}$$

$$i\omega \delta B_y = -ik_z B_z \delta v_y + \eta k_z^2 \delta B_y \tag{3.18b}$$

Le equazioni di Eulero, invece, rimangono invariate e quindi:

$$\delta v_x = -\frac{k_z B_z}{\rho} \frac{\delta B_x}{\omega} \tag{3.19a}$$

$$\delta v_y = -\frac{k_z B_z}{\rho} \frac{\delta B_y}{\omega} \tag{3.19b}$$

che inserite nelle equazioni di induzione (3.18a) e (3.18b) forniscono:

$$\omega^2 \delta B_x = \frac{k_z^2 B_z^2}{\rho} \delta B_x - i\eta k_z^2 \omega \delta B_x \quad (3.20a)$$

$$\omega^2 \delta B_y = \frac{k_z^2 B_z^2}{\rho} \delta B_y - i\eta k_z^2 \omega \delta B_y \quad (3.20b)$$

da cui

$$(\omega^2 - v_A^2 k_z^2 + i\eta k_z^2 \omega) \delta B_x = 0 \quad (3.21a)$$

$$(\omega^2 - v_A^2 k_z^2 + i\eta k_z^2 \omega) \delta B_y = 0 \quad (3.21b)$$

Dalle equazioni precedenti otteniamo quindi la seguente relazione di dispersione

$$\omega^2 + i\eta k_z^2 \omega - v_A^2 k_z^2 = 0. \quad (3.22)$$

Risolvendo per ω si ha che:

$$\omega(k_z) = -\frac{i\eta k_z^2}{2} \pm \sqrt{v_A^2 k_z^2 - \left(\frac{\eta k_z^2}{2}\right)^2} \quad (3.23)$$

Possiamo notare dunque che la soluzione ha un andamento sinusoidale smorzato da un esponenziale reale di argomento negativo. Questo effetto è dovuto alla resistività η che, per effetto Joule, trasferisce energia dalla componente cinetico-magnetica alla termica. Questo processo, essendo l'energia termica proporzionale a P , aumenterà di conseguenza la pressione del sistema. Come vedremo nel prossimo paragrafo, però, questo aumento di pressione sarà molto piccolo (proporzionale al quadrato dell'ampiezza della perturbazione del campo magnetico).

3.4.1 Evoluzione della pressione nel caso $\eta \neq 0$

Abbiamo trattato l'evoluzione di tutte le quantità che descrivono il sistema, tranne la pressione che tratteremo adesso. Cominciamo moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} l'equazione (2.12) per ottenere la variazione di energia cinetica:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{v} = -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B})}{c} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.24)$$

Manipolandola otteniamo

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B})}{c} \cdot \mathbf{v} \quad (3.25)$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{Dv^2}{Dt} = -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B})}{c} \cdot \mathbf{v} \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{2} \frac{D\rho v^2}{Dt} - \frac{v^2}{2} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (3.27)$$

e utilizzando l'equazione di continuità si arriva, con un po' di algebra all'espressione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D\rho v^2}{Dt} + \frac{\rho v^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} &= -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{c} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho v^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} &= -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{c} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) \right] &= -\nabla P \cdot \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{c} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Per quanto riguarda la variazione di energia magnetica nel sistema abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) = \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \left[\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\eta}{c} \nabla \times \mathbf{J} \right] \quad (3.29)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione di induzione (2.9). Ricordando che

$$\mathbf{E} = -\frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{c} + \frac{\eta}{c^2} \mathbf{J} \quad (3.30)$$

otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) = -c(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} \quad (3.31)$$

Adesso utilizziamo l'equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma-1} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma P}{\gamma-1} \right) + c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] = 0 \quad (3.32)$$

e sottraiamo ad essa le equazioni (3.28) e (3.31) per determinare l'equazione che ci possa descrivere il comportamento della pressione del fluido. Compiendo questa operazione si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma-1} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\gamma P}{\gamma-1} \right) + c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] = \nabla P \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{c} + c(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B} \quad (3.33)$$

Utilizzando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{J}}{c} \quad (3.34)$$

si ha che

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma-1} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\gamma P}{\gamma-1} \right) \right] = \nabla P \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (3.35)$$

Sostituendo poi il campo elettrico \mathbf{E} con l'equazione (3.30) si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma-1} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\gamma P}{\gamma-1} \right) \right] = \nabla P \cdot \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{c} - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J}}{c} + \frac{\eta}{c^2} J^2. \quad (3.36)$$

Ricordando che

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{J} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} \quad (3.37)$$

si ottiene l'equazione di evoluzione dell'energia interna

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\gamma P}{\gamma - 1} \right) \right] = \nabla P \cdot \mathbf{v} + \eta \frac{J^2}{c^2} \quad (3.38)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{\gamma P}{\gamma - 1} \right) \right] = \nabla \cdot (P\mathbf{v}) - P\nabla \cdot \mathbf{v} + \eta \frac{J^2}{c^2} \quad (3.39)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\mathbf{v} \left(\frac{P}{\gamma - 1} \right) \right] = -P\nabla \cdot \mathbf{v} + \eta \frac{J^2}{c^2} \quad (3.40)$$

(si veda anche equazione 105 di Masson et al. 2012). Sostituendo la soluzione dell'onda di Alfvén per \mathbf{v} e ricordando che $\delta\mathbf{v}$ è solenoidale si ottiene

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (\gamma - 1)\eta \frac{J^2}{c^2} \quad (3.41)$$

che è l'equazione cercata. Come possiamo vedere quindi, la variazione temporale della pressione sarà proporzionale a η e la medesima crescerà nel tempo, in quanto tutti i fattori sono positivi. Osserviamo fin da subito che la dipendenza da J^2 è proporzionale a δ^2 grazie alla legge di Ampère (2.4).

Capitolo 4

Onde di Alfvén: simulazioni numeriche

In questo capitolo discuteremo come sono state implementate le condizioni iniziali per effettuare simulazioni riguardanti l'evoluzione di onde di Alfvén (sia nel caso ideale che resistivo) che abbiamo poi confrontato con i risultati analitici del capitolo 3. Per effettuare queste simulazioni abbiamo utilizzato il codice `Arepo`. Quest'ultimo è una codice per simulazioni magnetoidrodinamiche che utilizza un approccio ai volumi finiti. Una versione pubblica del codice (che tuttavia non include i termini di resistività nelle equazioni della MHD) è scaricabile dal sito <https://arepo-code.org/>. Sviluppata nel linguaggio C, il codice `Arepo` possiede uno svariato range di algoritmi utilizzabili per simulare molti problemi, soprattutto per quanto riguarda la dinamica dei gas astrofisici. Inoltre è compatibile con una svariata gamma di sistemi operativi. Ad esempio, in questo lavoro di tesi in particolare abbiamo utilizzato una macchina alquanto datata con sistema Ubuntu 16.01 a 32bit. Le simulazioni effettuate come parte di questo lavoro di tesi, quindi, non richiedono requisiti hardware severi.

Gli algoritmi per la generazione delle condizioni iniziali delle simulazioni e la loro analisi che illustreremo in questo capitolo sono stati implementati nel linguaggio PYTHON seguendo la infrastruttura utilizzata nel codice `Arepo` per definire i casi di test, problemi che il codice deve essere in grado di risolvere con precisione predefinita. Ogni volta che sono proposte delle modifiche al codice (ad esempio per migliorarne l'efficienza o aumentare le sue funzionalità), esse devono essere poi controllate tramite la simulazione di questi problemi prima di entrare a far parte del codice sorgente di `Arepo`. Anche i casi di test sviluppato in questo lavoro potranno essere in futuro incorporati in `Arepo` e dunque servire all'eventuale programmatore, che ne modifica il codice sorgente, per testare la validità delle modifiche.

4.1 Funzione obiettivo

In seguito utilizzeremo una funzione obiettivo o *loss function*, per determinare l'accordo o meno delle simulazioni con la trattazione analitica. In altre parole questa funzione obiettivo è a tutti gli effetti un errore associabile alla simulazione che permette di verificarne l'accuratezza. La funzione è definita, per quello che concerne le nostre simulazioni, come:

$$L_p = \frac{1}{V} \left(\sum_{i=0}^N (\hat{f}_i - f_i)^p V_i \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.1)$$

Dove V è il volume totale, V_i è il volume dell' i -esima cella¹, N il numero totale di celle e $\hat{f}_i - f_i$ è la differenza tra i valori analitici e simulati nella i -esima cella. Per quanto riguarda l'analisi delle nostre simulazioni numeriche useremo la funzione L_1 ($p = 1$) la cosiddetta "Mean Bias Error" (MBE).

4.2 Simulazioni per $\eta = 0$

Iniziamo con la simulazione più semplice ossia il caso senza resistività. Le quantità numeriche rilevanti di default sono normalizzate, come caso standard, ma sono facilmente modificabili. Esse sono:

$$k_z = 2\pi \quad B_z = B_0 = 1 \quad (4.2)$$

$$\rho_0 = 1 \quad P_0 = 1 \quad (4.3)$$

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \delta = 1 \times 10^{-6} \quad (4.4)$$

Le condizioni iniziali sono le stesse trattate nel capitolo 3:

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = (\delta B_x, \delta B_y, B_z)$$

$$\mathbf{v} = (\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z),$$

quindi onde piane progressive, con velocità del plasma nulla e campo magnetico costante lungo l'asse z . L'algoritmo imposta una griglia che di default ha $N = 32$, un dominio di lunghezza

¹Le simulazioni analizzate in questo capitolo sono unidimensionali e quindi il volume totale si riferisce alla lunghezza del dominio simulato e V_i rappresenta la dimensione della singola cella di gas.

$L = 1$ celle e scatta uno “snapshot” ogni $\Delta t = 0.5$ per un tempo totale di simulazione di $\tau_{tot} = 4$. Le unità delle diverse quantità sono arbitrarie.

Guardando le soluzioni trovate nel capitolo 3, cioè (3.7), (3.8) e (3.10), (3.11), vediamo che il campo magnetico dipende dalla velocità e viceversa, dunque possiamo fissare una perturbazione sinusoidale in una delle due quantità (velocità o campo magnetico) e lasciare la rimanente dipendente da quella assunta. Nella simulazione che andremo ad analizzare la velocità è stata inizializzata come:

$$\delta v_x = \delta \cdot \cos(k_z z) \quad (4.5)$$

$$\delta v_y = \delta \cdot \sin(k_z z) \quad (4.6)$$

$$v_z = 0 \quad (4.7)$$

$$B_z = B_0 \quad (4.8)$$

dove δ , ricordiamo, è una piccola perturbazione, come vediamo dalla sua intensità. Abbiamo quindi inizializzato le componenti trasversali del vettore campo magnetico come:

$$\delta B_x = -k_z \frac{B_0}{\omega} \delta v_x \quad (4.9)$$

$$\delta B_y = -k_z \frac{B_0}{\omega} \delta v_y \quad (4.10)$$

in cui la pulsazione ω vale

$$\omega(\mathbf{k}) = k_z \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0}} = k_z |\mathbf{v}_A| \quad (4.11)$$

4.2.1 Pressione e densità

Un primo test che può essere fatto per controllare l'accuratezza della simulazione nel caso ideale è confrontarne i risultati con la soluzione analitica. Iniziamo dal caso della pressione e della densità, che da considerazioni analitiche sappiamo rimanere invariate. I risultati della simulazione ed il loro confronto con le soluzioni analitiche per questo caso sono mostrate in Figura 4.1 al tempo $t = 2$, cioè dopo due periodi di propagazione dell'onda. Dalla figura si può immediatamente apprezzare la densità e la pressione restano costanti e totalmente in accordo con le previsioni analitiche. In effetti, come mostrato in figure la discrepanza L_1 con la soluzione analitica è nulla.

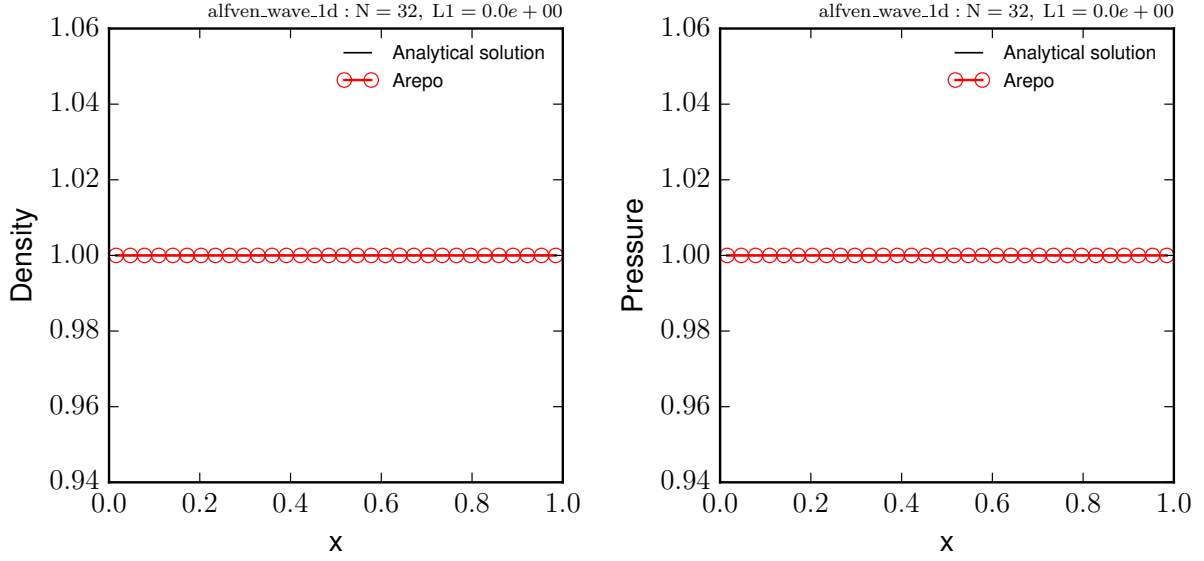


Figura 4.1: Densità (pannello sinistro) e pressione (pannello destro) in funzione della posizione rispettivamente a destra e a sinistra. Sopra ad entrambi i pannelli sono riportati il numero di celle $N = 32$ e il valore dell'errore L_1 (essenzialmente nullo), come possiamo vedere dalla totale sovrapposizione della linea simulata, rossa, e quella analitica, nera. Questi snapshot sono presi al tempo $t = 2$, quindi dopo due periodi di propagazione dell'onda.

4.2.2 Campo magnetico e velocità

Analizziamo adesso l'evoluzione di campo magnetico e velocità. Per costruzione, le loro componenti lungo l'asse z sono costanti. Nelle direzioni perpendicolari a quella di propagazione invece abbiamo una perturbazione periodica di periodo (si veda equazione 3.12):

$$T = \frac{2\pi}{|\omega(\mathbf{k})|} = \frac{2\pi}{|\mathbf{v}_A k_z|} = 1 \quad (4.12)$$

che si propaga con velocità $|\mathbf{v}_A|$.

Come visto in precedenza, inizializzando le componenti in x e y della velocità come, rispettivamente, un'onda cosinusoidale e sinusoidale di ampiezza δ avremo che il campo magnetico in x e in y è dato dalle equazioni (3.10) e (3.11). Come possiamo vedere dalle figure 4.2, l'evoluzione sia della velocità sia del campo magnetico assumono una forma sinusoidale sia in funzione della posizione, sia in funzione del tempo, in accordo con le soluzioni analitiche. Di fatto, non essendoci componenti dissipative l'ampiezza, il periodo e la lunghezza d'onda rimangono essenzialmente invariate. In realtà vi è la presenza intrinseca di una resistività all'interno del codice `Arepo` che, come possiamo vedere, fa decrescere nel tempo le ampiezze

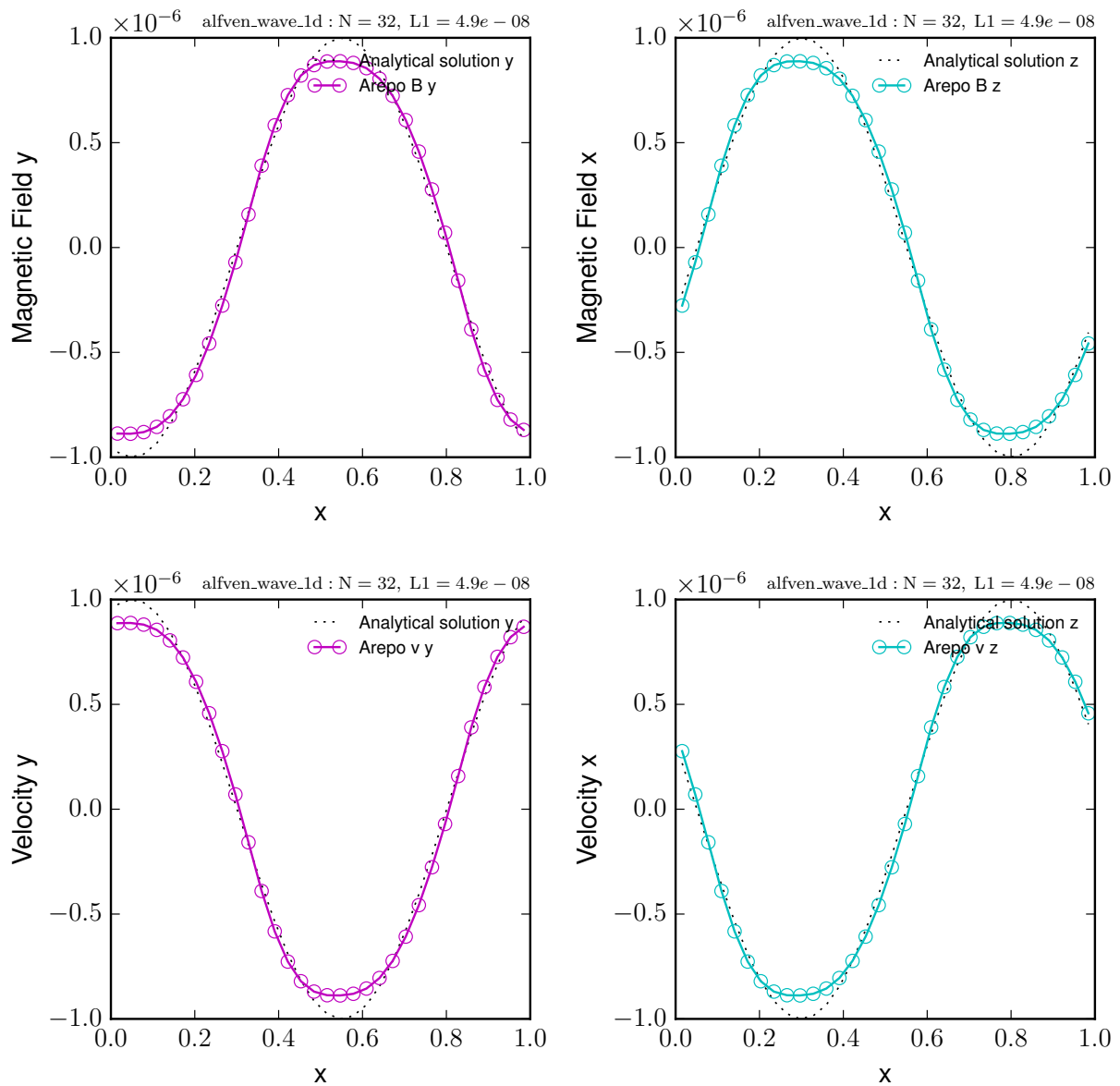


Figura 4.2: Campo magnetico (riga superiore) e velocità (riga inferiore), con le loro componenti y ed x rispettivamente in magenta e ciano. Al di sopra di ogni pannello possiamo vedere il numero di celle usate $N = 32$ e L_1 che è dell'ordine di 10^{-8} . I risultati sono presentati al tempo $t = 2$, circa due periodi di propagazione dell'onda. Come possiamo vedere i massimi e i minimi delle funzioni simulate (colorate) sono più smussate della soluzione analitica (nera). Questo è dovuto alla presenza intrinseca di una piccola resistività all'interno dell'algoritmo che modifica (smorza) nel tempo le ampiezze delle perturbazioni (si veda sezione 4.3.4). In generale il risultato della simulazione è soddisfacente, le funzioni sono sinusoidali come ci aspettavamo dalla teoria analitica.

delle perturbazioni. L'errore L_1 in questa simulazione è relativamente piccolo ma presente:

$$L_1(v) = 4.9 \times 10^{-8}$$

$$L_1(B) = 4.9 \times 10^{-8}$$

Concludiamo in generale che il risultato della simulazione è soddisfacente, la perturbazione si propaga con la velocità attesa analiticamente mantenendo una forma essenzialmente sinusoidale.

4.3 Simulazioni per $\eta \neq 0$

Il caso meno banale è quello con effetti resistivi che, come già visto, comportano un trasferimento di energia magnetica in energia termica per effetto Joule. Anche in questo caso, come nel paragrafo 4.2, ricordando la forma delle perturbazioni:

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = (\delta B_x, \delta B_y, B_z)$$

$$\mathbf{v} = (\delta v_x, \delta v_y, 0)$$

abbiamo fissato la perturbazione in \mathbf{v} per poi usarla per costruire quella riguardante il campo magnetico. Notiamo dalle soluzioni analitiche che la relazione di dispersione ha valore complesso, l'equazione (3.23), prendendo il valore positivo per avere un'onda progressiva si ha:

$$\begin{aligned} \omega &= \Re(\omega) + i\Im(\omega) \\ \omega &= \sqrt{v_A^2 k_z^2 - \left(\frac{\eta k_z^2}{2}\right)^2} - \frac{i\eta k_z^2}{2} \\ \text{con } \Re(\omega) &= \sqrt{v_A^2 k_z^2 - \left(\frac{\eta k_z^2}{2}\right)^2} \quad \text{e} \quad \Im(\omega) = -\frac{\eta k_z^2}{2} \end{aligned}$$

Inserendo ω nell'esponentiale complesso della perturbazione, avremo che il termine con $\Im(\omega)$ diventerà reale e sarà dunque il termine smorzante. Invece, il termine con $\Re(\omega)$ diventerà il termine che darà vita all'oscillazione. Qui sotto riassumiamo le condizioni che abbiamo utilizzato per inizializzare il sistema

$$\begin{aligned}
\delta v_x &= \delta \cdot \cos(k_z z) & \delta B_x &= -k_z \delta \cdot \frac{B_0}{\omega^2} [\Im(\omega) \cos(k_z z) + \Re(\omega) \sin(k_z z)] \\
\delta v_y &= \delta \cdot \sin(k_z z) & \delta B_y &= -k_z \delta \cdot \frac{B_0}{\omega^2} [\Im(\omega) \sin(k_z z) - \Re(\omega) \cos(k_z z)] \\
\delta v_z &= 0 & B_z &= B_0 \\
\rho &= \rho_0 & P(t) &= P_0.
\end{aligned}$$

Vedremo come derivare queste espressioni nei paragrafi seguenti. Abbiamo impostato il numero di celle della griglia a $N = 32$ e un dominio di lunghezza $L = 1$. La simulazione è stata eseguita per $\tau = 4$ raccogliendo dati e "snapshots" ogni $\Delta t = 0.5$. Anche in questo caso le unità di misura sono arbitrarie. Inoltre abbiamo inserito le seguenti impostazioni numeriche iniziali:

$$k_z = 2\pi \quad B_z = B_0 = 1 \quad (4.13)$$

$$\rho_0 = 1 \quad P_0 = 1 \quad (4.14)$$

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad \delta = 1 \times 10^{-6} \quad (4.15)$$

$$\eta = 2 \times 10^{-2} \quad (4.16)$$

Da cui possiamo ricaviamo lo pseudo-periodo² dell'onda:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega(\mathbf{k})|} \simeq 1.0000013 \simeq 1$$

4.3.1 Densità

Da considerazioni analitiche sappiamo che anche in questo caso la densità è costante nel tempo. Questo è confermato dai risultati della simulazione ed il loro confronto con la soluzioni analitica. Questi risultati sono mostrati in Figura 4.3 al tempo $t = 2$, cioè approssimativamente dopo due periodi di propagazione dell'onda. Dalla figura si può immediatamente apprezzare che la densità e la pressione restano costanti in accordo con le previsioni analitiche. In effetti, anche la discrepanza L_1 ha un valore trascurabile e confrontabile con la precisione macchina.

Come possiamo vedere nella figura 4.3, in accordo con le nostre previsioni analitiche, l'errore L_1 è irrisorio.

²In effetti non siamo in un regime periodico, siamo in un regime smorzato, quindi formalmente utilizzare la parola periodo sarebbe un abuso di linguaggio.

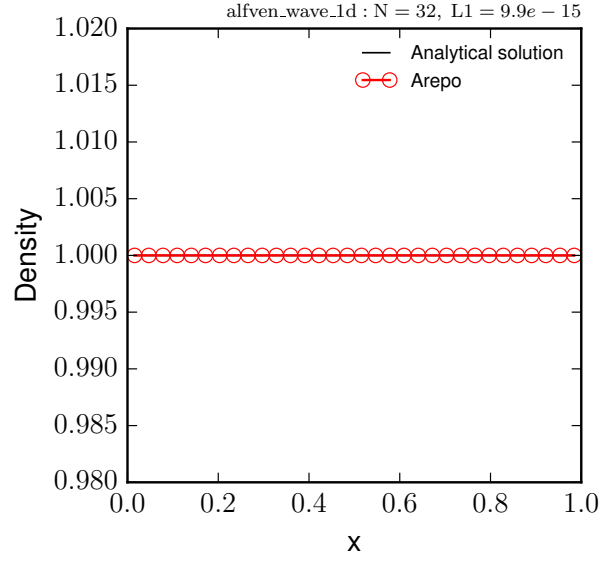


Figura 4.3: Densità ρ in funzione della posizione al tempo $t = 2$ nel caso resistivo. Si noti come il risultato numerico (linea rossa) e quello analitico (linea nera) coincidano. L'errore L_1 è assimilabile all'errore macchina ($L_1 \simeq 10^{-15}$).

4.3.2 Velocità

A partire dai risultati del capitolo 3 e dalle condizioni iniziali presentate al paragrafo 4.3, si può mostrare che le componenti x ed y del vettore velocità evolvono come:

$$\begin{aligned}\delta v_x &= \delta \cdot \cos(k_z z - \Re(\omega)t) e^{\Im(\omega)t} \\ \delta v_y &= \delta \cdot \sin(k_z z - \Re(\omega)t) e^{\Im(\omega)t}\end{aligned}$$

imponendo i valori riassunti in (4.19). Eseguendo la simulazione ci aspettiamo quindi una evoluzione simile. In effetti l'energia cinetica del gas di ioni viene soppressa dal termine resistivo e convogliata in energia termica e quindi pressione come mostrato nelle figure 4.4 e 4.5 rispettivamente per la componente x ed y.

Da queste figure notiamo come l'ampiezza dell'onda sia smorzata esponenzialmente e che l'errore

$$L_1$$

è dell'ordine di 10^{-8} . L'accordo con la soluzione analitica è quindi accettabile. Come possiamo vedere dai grafici i massimi ed i minimi rendono visibile un ulteriore smorzamento dovuto alla resistività numerica presente nell'algoritmo e vi è un leggero sfasamento tra i risultati simulati e quelli analitici.

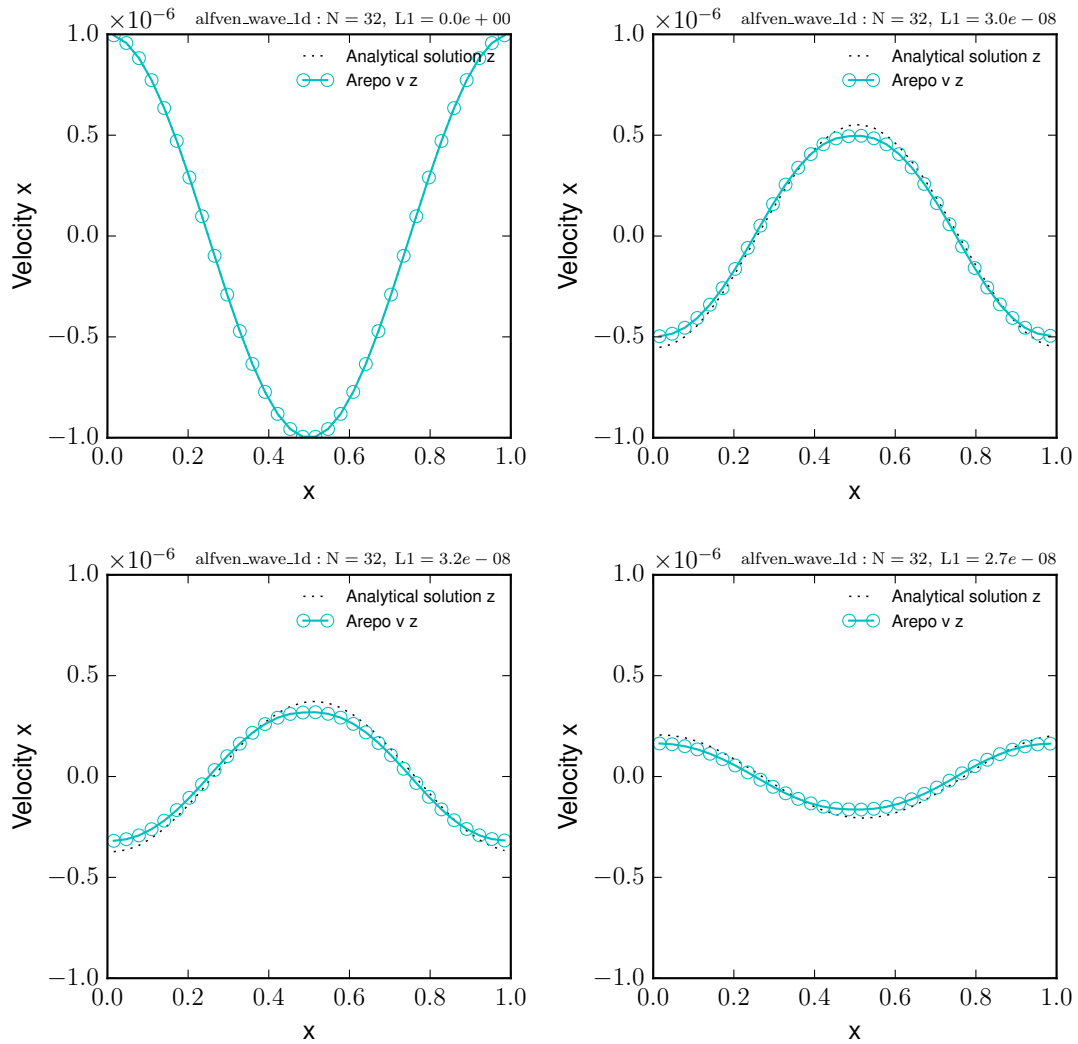


Figura 4.4: Grafici inerenti alla componente x della velocità nel caso resistivo in funzione del tempo. La simulazione è stata effettuata con $N = 32$ celle per un tempo totale $\tau = 4$. Snapshot presi, rispettivamente dall'alto verso il basso da sinistra verso destra, a $t = 0$, $t = 1.5$, $t = 2$, $t = 2.5$ e $t = 4$. Si noti lo smorzamento esponenziale dell'ampiezza dell'onda al trascorrere del tempo. I massimi e i minimi rendono visibile un ulteriore smorzamento dovuto alla resistività numerica presente nell'algoritmo (si veda sezione 4.3.4). L'errore L_1 è dell'ordine di 10^{-8} .

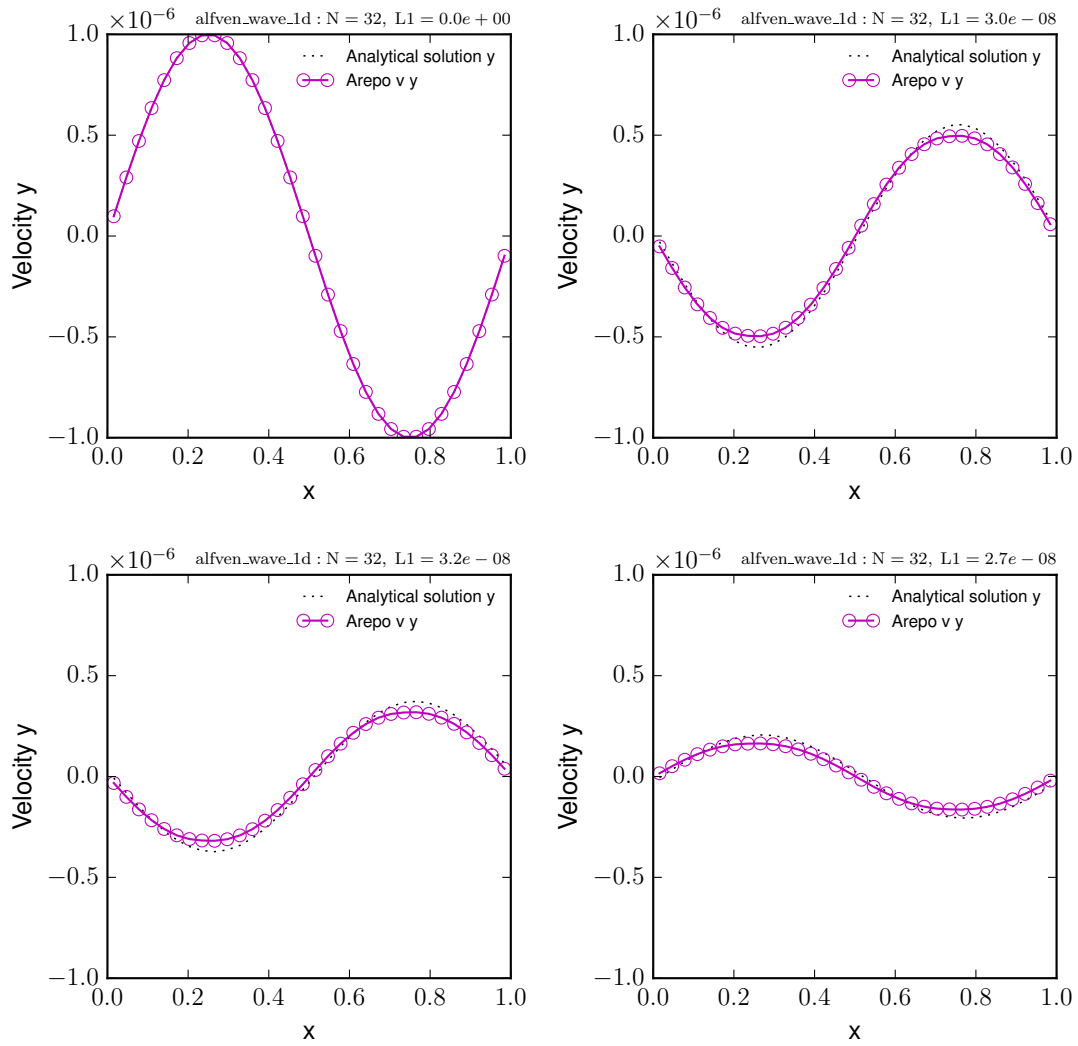


Figura 4.5: Grafici inerenti alla componente y della velocità nel caso resistivo in funzione del tempo. La simulazione è stata effettuata con $N = 32$ celle per un tempo totale $\tau = 4$. Snapshot presi, rispettivamente dall'alto verso il basso da sinistra verso destra, a $t = 0$, $t = 1.5$, $t = 2$, $t = 2.5$ e $t = 4$. Si noti lo smorzamento esponenziale dell'ampiezza dell'onda al trascorrere del tempo. I massimi e i minimi rendono visibile un ulteriore smorzamento dovuto alla resistività numerica presente nell'algoritmo (si veda sezione 4.3.4). L'errore L_1 è dell'ordine di 10^{-8} .

4.3.3 Campo magnetico

Ci aspettiamo un comportamento dissipativo anche per quel che riguarda l'evoluzione del campo magnetico. Per trovare la soluzione analitica di riferimento con la quale poter confrontare i risultati delle simulazioni occorre scrivere le componenti x e y del campo magnetico in funzione delle componenti x e y delle velocità, avendo preso quest'ultima come riferimento. Per fare questo abbiamo bisogno delle (3.18a) e (3.18b):

$$\begin{aligned}\delta B_x &= -\frac{k_z B_z}{\omega + i\eta k_z^2} \delta v_x \\ \delta B_y &= -\frac{k_z B_z}{\omega + i\eta k_z^2} \delta v_y.\end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$$

e che:

$$\begin{aligned}\Re(\omega) &= \sqrt{v_A^2 k_z^2 - \left(\frac{\eta k_z^2}{2}\right)^2} \\ \Im(\omega) &= -i\frac{\eta k_z^2}{2}\end{aligned}$$

Il denominatore della (3.18a) e (3.18b) diventa:

$$i\eta k_z^2 + \sqrt{v_A^2 k_z^2 - \left(\frac{\eta k_z^2}{2}\right)^2} - i\frac{\eta k_z^2}{2} = \sqrt{v_A^2 k_z^2 - \left(\frac{\eta k_z^2}{2}\right)^2} + i\frac{\eta k_z^2}{2} = \omega^*$$

Ricordando le condizioni imposte sulla velocità:

$$\begin{aligned}\delta v_x &= \delta \cdot \cos(k_z z - \Re(\omega)t) e^{\Im(\omega)t} \\ \delta v_y &= \delta \cdot \sin(k_z z - \Re(\omega)t) e^{\Im(\omega)t}\end{aligned}$$

razionalizzando il denominatore che è complesso e prendendo la parte reale per la componente x ed immaginaria per la componente y (l'onda è polarizzata circolarmente) otteniamo:

$$\begin{aligned}\delta B_x &= -\frac{k_z B_z}{\omega^2} \delta \cdot \Re(\omega \exp(i(k_z z - \Re(\omega)t))) e^{\Im(\omega)t} \\ \delta B_y &= -\frac{k_z B_z}{\omega^2} \delta \cdot \Im(\omega \exp(i(k_z z - \Re(\omega)t))) e^{\Im(\omega)t}.\end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti infine si ha:

$$\delta B_x = -\frac{k_z B_z}{\omega^2} \delta \cdot (\Re(\omega) \cos(k_z z - \Re(\omega)t) + \Im(\omega) \sin(k_z z - \Re(\omega)t)) e^{\Im(\omega)t} \quad (4.17)$$

$$\delta B_y = -\frac{k_z B_z}{\omega^2} \delta \cdot (\Re(\omega) \sin(k_z z - \Re(\omega)t) - \Im(\omega) \cos(k_z z - \Re(\omega)t)) e^{\Im(\omega)t} \quad (4.18)$$

Le equazioni precedenti (per $t = 0$) sono le espressioni del campo magnetico da inserire nel nostro algoritmo come condizioni iniziali con i seguenti parametri numerici (4.19):

$$k_z = 2\pi \quad B_z = 1 \quad (4.19)$$

$$\eta = 2 \times 10^{-2} \quad \delta = 1 \times 10^{-6} \quad (4.20)$$

Come detto in precedenza componente z rimarrà costante in quanto, guardando la (3.9), non vi sono perturbazioni in v_z e dunque neanche in B_z . Anche in questo caso ci aspettiamo una soppressione esponenziale dell'ampiezza della perturbazione.

Come possiamo vedere dalle figure 4.6 e 4.7, la simulazione è in accordo con la trattazione analitica. In effetti l'ampiezza dell'onda è smorzata esponenzialmente e l'errore L_1 è dell'ordine di 10^{-8} , come nel caso della velocità. L'accordo con la soluzione analitica è quindi accettabile. Inoltre i grafici mostrano come i massimi ed i minimi rendono visibile un ulteriore smorzamento dovuto alla resistività numerica presente nell'algoritmo e vi è un leggero sfasamento tra i risultati simulati e quelli analitici.

4.3.4 Pressione

Come abbiamo nella trattazione analitica, l'energia magnetica e quella cinetica vengono dissipate dalla resistività che per effetto Joule le trasforma in energia termica e quindi in un aumento della pressione. Ricordando la equazione (3.41) e che :

$$\frac{\mathbf{J}}{c} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (4.21)$$

Si ha che l'evoluzione della pressione è data da:

$$P(t) = P_0 + (\gamma - 1)\eta \int_0^t |\nabla \times \mathbf{B}|^2 d\tau \quad (4.22)$$

Prendendo il modulo quadro del rotore ed inserendo le equazioni (4.17) e (4.18) per il campo magnetico si ottiene dopo qualche passaggio algebrico

$$P(t) = P_0 + (\gamma - 1)\eta\delta^2 k_z^2 \sqrt{\rho_0} \int_0^t e^{2\Im(\omega)\tau} d\tau \quad (4.23)$$

e quindi integrando

$$P(t) = P_0 + (\gamma - 1)\eta\delta^2 k_z^2 \sqrt{\rho_0} \frac{e^{2\Im(\omega)t} - 1}{2\Im(\omega)}. \quad (4.24)$$

Come possiamo vedere la pressione, nel tempo, aumenterà di piccole in modo proporzionale a δ^2 . Nel limite $t \rightarrow \infty$ avremo che la pressione sarà:

$$P(t) = P_0 - (\gamma - 1) \frac{\eta\delta^2 k_z^2 \sqrt{\rho_0}}{2\Im(\omega)}$$

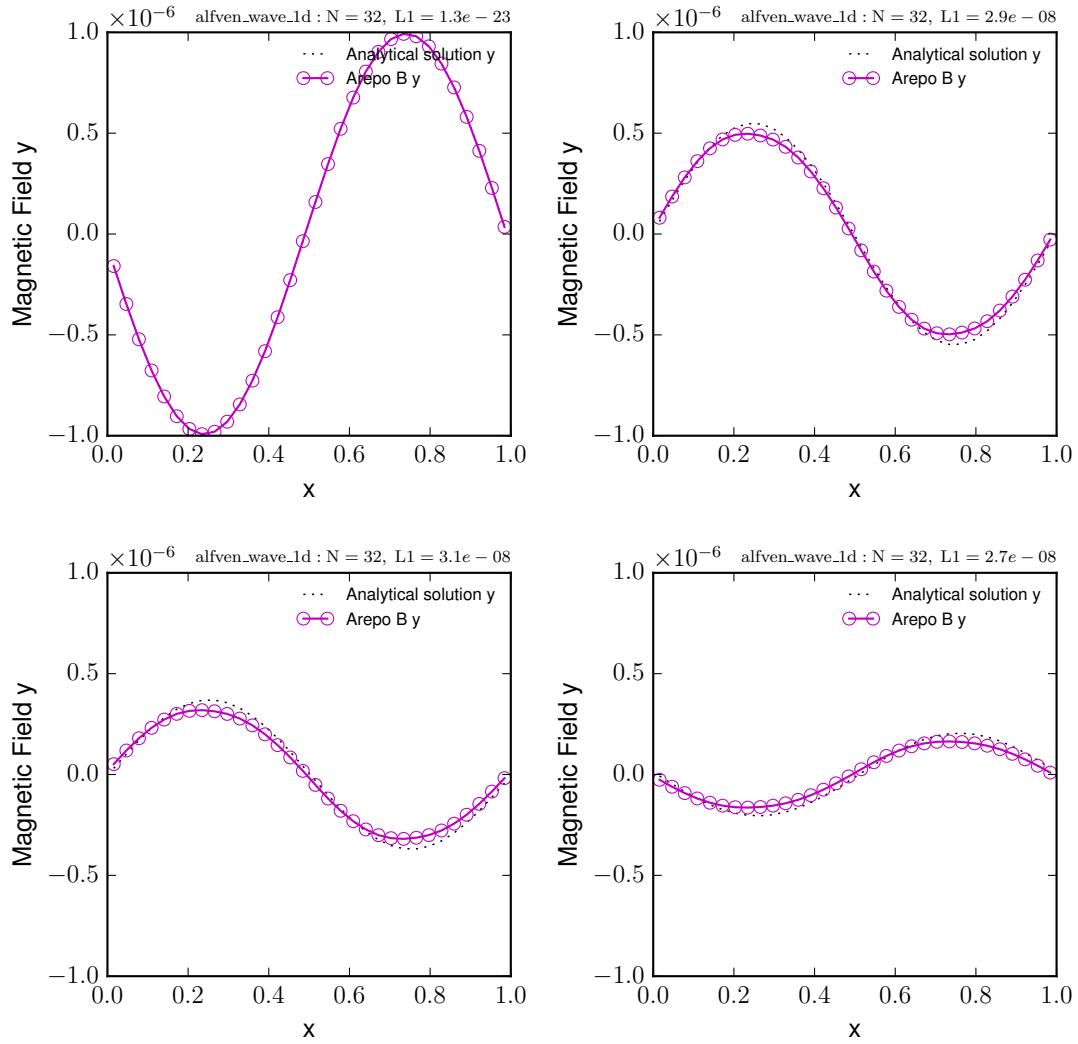


Figura 4.6: Grafici inerenti alla componente y del campo nel caso resistivo in funzione del tempo. La simulazione è stata effettuata con $N = 32$ celle per un tempo totale $\tau = 4$. Snapshot presi, rispettivamente dall'alto verso il basso da sinistra verso destra, a $t = 0$, $t = 1.5$, $t = 2$, $t = 2.5$ e $t = 4$. Si noti lo smorzamento esponenziale dell'ampiezza dell'onda al trascorrere del tempo. I massimi e i minimi rendono visibile un ulteriore smorzamento dovuto alla resistività numerica presente nell'algoritmo (si veda sezione 4.3.4). L'errore L_1 è dell'ordine di 10^{-8} .

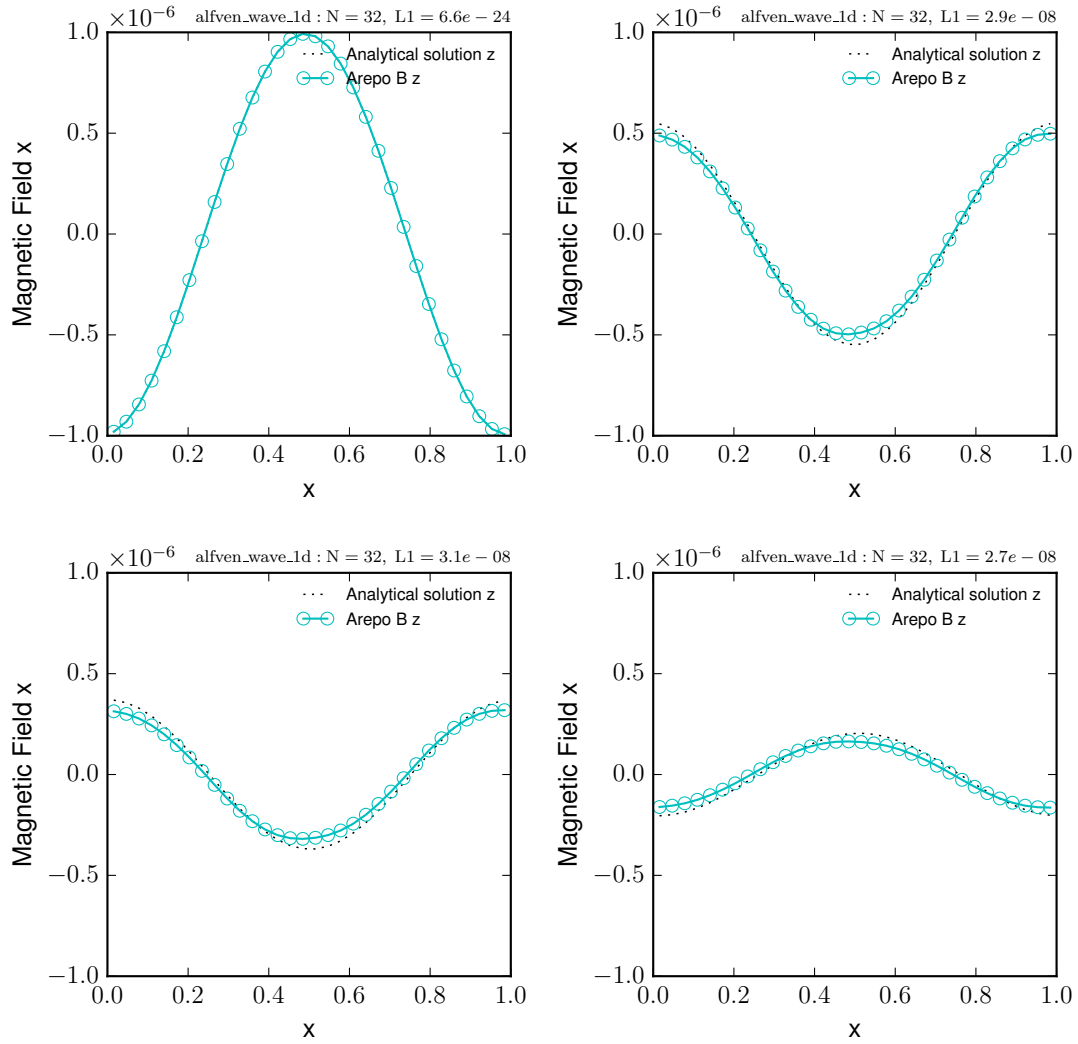


Figura 4.7: Grafici inerenti alla componente x del campo magnetico nel caso resistivo in funzione del tempo. La simulazione è stata effettuata con $N = 32$ celle per un tempo totale $\tau = 4$. Snapshot presi, rispettivamente dall'alto verso il basso da sinistra verso destra, a $t = 0, t = 1.5, t = 2, t = 2.5$ e $t = 4$. Si noti lo smorzamento esponenziale dell'ampiezza dell'onda al trascorrere del tempo. I massimi e i minimi rendono visibile un ulteriore smorzamento dovuto alla resistività numerica presente nell'algoritmo (si veda sezione 4.3.4). L'errore L_1 è dell'ordine di 10^{-8} .

nella quale il secondo termine del secondo membro, tenendo conto che $\Im(\omega)$ è un numero negativo, è una piccolissima quantità positiva dell'ordine di 10^{-12} . Quindi il termine additivo sarà crescente fino a un massimo $P(\infty)$, ma sempre piccolo. Questo ordine di grandezza è dato dalla dipendenza quadratica della pressione con le perturbazioni del campo magnetico. Grazie a questi risultati analitici abbiamo presentato in figura 4.8 solo la differenza tra la pressione al tempo t e P_0 . Il ΔP ci fa capire quindi quanto effettivamente è piccolo e lento il guadagno energetico a livello termico e quindi di pressione.

Guardando la figura 4.8 notiamo che la simulazione non è in accordo con i risultati analitici. Questo è dovuto a una sovrapposizione di fattori che, data la piccola differenza tra la pressione al tempo t e quella iniziale, hanno influenzato l'output in maniera più significativa di altri risultati presentati nella tesi. Tali fattori sono:

- come già accennato la differenza tra la pressione numerica e quella analitica ΔP è piccola ed abbastanza vicina alla precisione macchina del calcolatore $\simeq 10^{-15}$.
- tutti gli algoritmi per la MHD hanno una resistività numerica che si aggiunge a quella fisica quindi la discrepanza che si vede tra il livello medio della pressione numerica e quella analitica è dovuta alla presenza di questa resistività numerica.
- la resistività numerica dipende dalla risoluzione, più quest'ultima è alta più la resistività numerica è bassa.
- i picchi e le valli negli errori invece sono dovuti alla struttura sinusoidale delle condizioni iniziali e al modo in cui le approssimazioni numeriche agiscono su di esse.

Ripetendo lo stesso grafico del ΔP anche nel caso non resistivo dovrebbero essere presenti, discrepanze simili anche se ovviamente inferiori, dati dal fatto che la resistività fisica non è presente. Anche qui le discrepanze dovrebbero diminuire con l'aumentare della risoluzione.

4.4 La funzione obiettivo e la sua dipendenza temporale

Nelle ultime sezioni abbiamo imparato come la soluzione analitica e la simulazione si discostino in funzione del tempo. Questi scostamenti sono dovuti ai limiti: sia della rappresentazione dei numeri sul calcolatore, sia alle approssimazioni che sono introdotte in tutti i metodi numerici per trattare la MHD. L'entità di questi scostamenti può essere esplicitata graficando la *Loss Function*, o L_1 , in funzione del tempo.

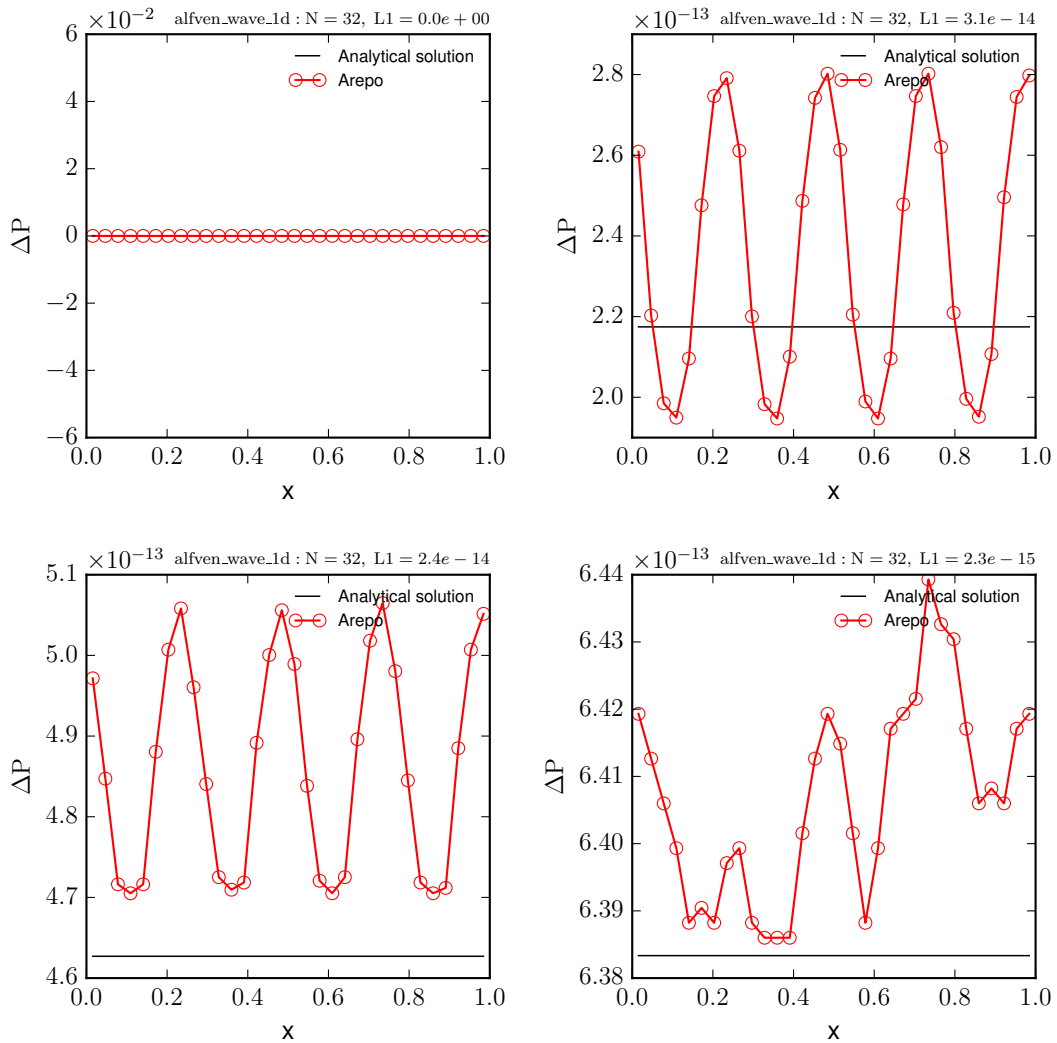


Figura 4.8: Grafici inerenti alla ΔP , differenza tra la pressione iniziale e quella nell'istante dello snapshot, in funzione della posizione. Snapshot presi, rispettivamente dall'alto verso il basso da sinistra verso destra, a $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 1.5$ e $t = 4$. L'errore L_1 è dell'ordine di $10^{-14}/10^{-15}$ un valore molto vicino al valore della precisione macchina ($\simeq 10^{-15}$). Possiamo notare come la funzione non segua l'andamento analitico previsto. Questo è dovuto in larga parte alla resistività intrinseca dell'algorithm. Tuttavia notiamo che lo scostamento è alquanto contenuto. Per maggiori informazioni consultare la sezione 4.3.4

Nella figura 4.9 abbiamo elaborato i grafici nel caso ideale, per ogni snapshot della simulazione. Come abbiamo visto la densità ρ e la pressione P sono costanti e l'algoritmo segue la soluzione analitica alla perfezione, con un valore di L_1 nullo. Per quanto riguarda le velocità e i campi magnetici abbiamo un aumento quasi lineare della discrepanza tra soluzione analitica e simulata, questo aumento della discrepanza è dovuto al fatto che l'errore compiuto nella simulazione si accumula con il passare del tempo. L'errore però aumenta lentamente, infatti guardando tutte e quattro le figure possiamo stimare il coefficiente angolare della retta che passa fra il punto a $t = 0$ e $t = 4$. Per avere una stima, seppur grossolana, dell'aumento di L_1 nel tempo. Questo valore è:

$$m \simeq 0.25 \times 10^{-7}$$

ed è molto piccolo. Questo ci rassicura sulle capacità del codice di simulare accuratamente un'onda di Alfvén nel caso ideale.

Per quanto riguarda il caso non ideale, immagini 4.10, abbiamo diversi effetti che si sovrappongono, oltre alla bassa risoluzione della simulazione si aggiungono infatti effetti fisici (il decadimento esponenziale dell'ampiezza dell'onda) che smorzano la divergenza tra risultato atteso e quello simulato. In effetti possiamo notare una continuità nell'errore riguardante il campo magnetico e la velocità. Questa è dovuta alle condizioni che si stanno simulando: il sistema è smorzato quindi tenderà all'equilibrio (in cui le perturbazioni sono nulle) e pertanto la funzione L_1 avrà un picco alle prime variazioni (quelle corrispondenti a differenze maggiori di ampiezza delle onde) mentre tenderà sempre di più ad errori sempre più piccoli con il progredire della simulazione. Va da sé che se il sistema tenderà all'equilibrio, la Loss Function seguirà questo andamento tendendo a zero mano a mano che il tempo trascorre. La pressione e la densità, invece, presentano un errore dell'ordine di 10^{-14} pressoché costante.

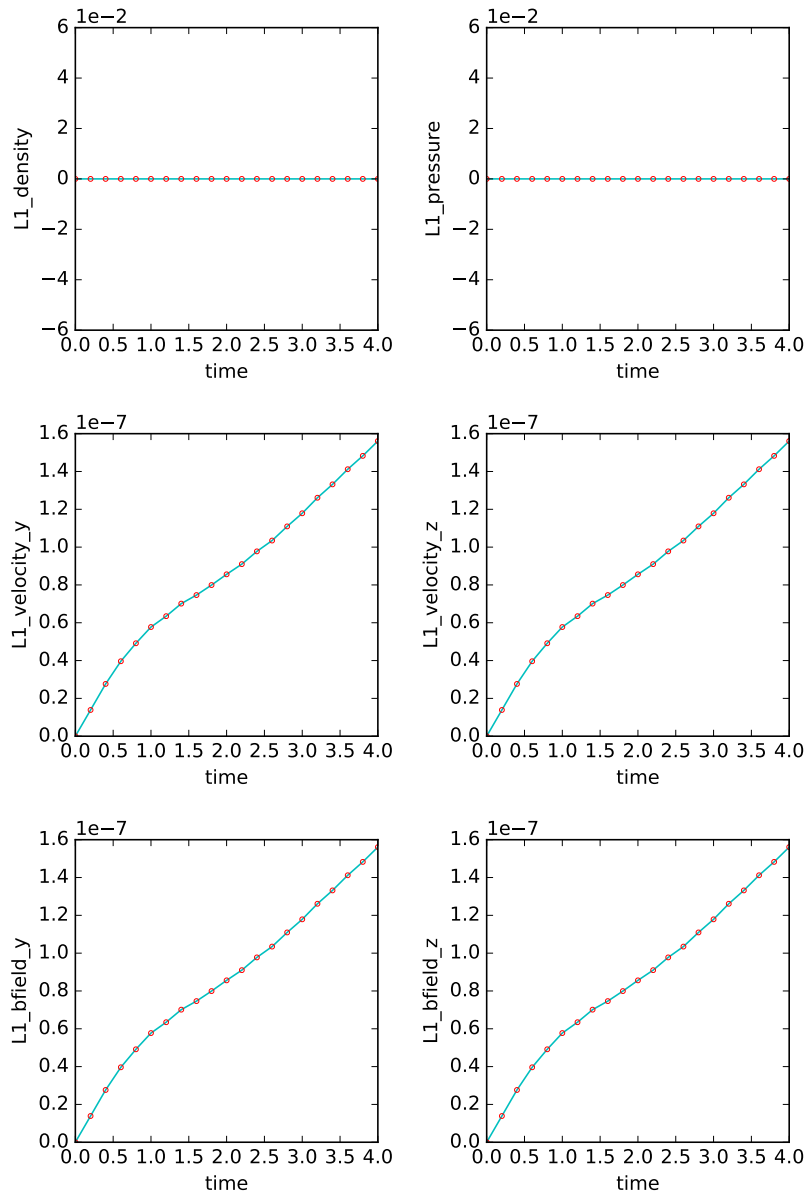


Figura 4.9: Andamento del errore L_1 nel tempo del caso ideale, in un periodo totale $\tau = 4$. Possiamo notare come la densità e la pressione non abbiano un errore rilevante, mentre le entità perturbate subiscono degli errori che si accumulano nel tempo, ma che comunque restano relativamente piccoli.

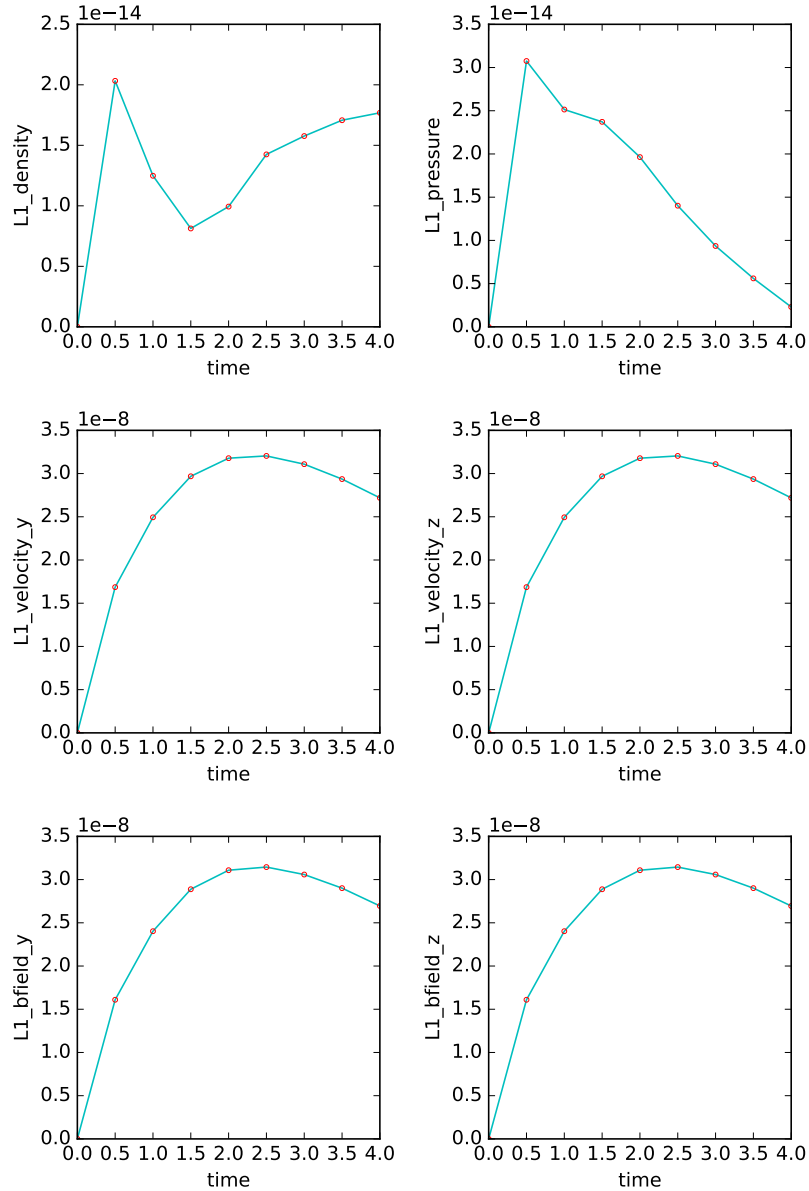


Figura 4.10: Andamento dell'errore L_1 nel tempo del caso non-ideale. Possiamo notare come la densità e la pressione abbiano un errore di $\simeq 10^{-14}$ molto vicino a quello macchina (10^{-15}). Le entità perturbate subiscono degli errori (si veda sezione 4.3.4) dovuti alla presenza intrinseca di resistività nell'algoritmo. Possiamo però notare che l'andamento di tali errori ha un massimo in $t \simeq 2$ per poi diminuire a tempi maggiori. Questo è dovuto al fatto che il sistema è smorzato quindi tendente ad una situazione di equilibrio e, conseguentemente l'errore tende ad annullarsi nel lungo periodo.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi abbiamo dato una definizione operativa di plasma e la abbiamo utilizzata per ricavare dall'elettromagnetismo le equazioni fondamentali di Maxwell per la magnetoidrodinamica. Abbiamo poi studiato le equazioni della fluidodinamica in maniera da contenere tutti i termini ad effetti (elettro)magnetici derivando così le equazioni fondamentali della magnetoidrodinamica.

Con le sopracitate equazioni abbiamo studiato e definito un particolare tipo di onda, le onde di Alfvén che si propagano con una velocità nota, proporzionale al campo magnetico stesso. Per semplicità di calcolo abbiamo trattato il caso di onde piane e polarizzate circolarmente studiandole nel caso ideale e non-ideale. Inoltre abbiamo implementato dei metodi, coerenti alla trattazione analitica fatta, per generare le condizioni iniziali per poter simulare onde di Alfvén sia nel caso resistivo che in quello ideale. Le simulazioni sono state effettuate con il codice magnetoidrodinamico `Arepo`. Abbiamo quindi analizzato i risultati di queste simulazioni e testato la validità del codice utilizzato confrontando i risultati delle simulazioni con la rispettiva soluzione analitica. Infine gli algoritmi sviluppati in questo lavoro di tesi per creare le condizioni iniziali ed analizzare le simulazioni utilizzano la struttura adottata in `Arepo` per costruire problemi di test. Potranno quindi essere in futuro incorporati in `Arepo` ed essere utilizzate per testare la validità delle modifiche apportate al codice.

Per quanto riguarda possibili sviluppi futuri di questo lavoro si potrà, sempre utilizzando la stessa infrastruttura numerica, cercare di ridurre gli errori associati alle simulazioni, analizzando il comportamento all'aumentare della risoluzione numerica. Inoltre si potranno studiare effetti non lineari quali le onde di urto ed effetti di riconnessione magnetica nei plasmi.

Appendice A

Calcolo del flusso di energia

Riprendendo dalla equazione (2.13), nel calcolo del flusso d'energia e ricordando la legge di Ohm in presenza di resistività (2.7), l'idea di fondo di questo calcolo è di separare dal secondo termine la pressione e l'energia magnetica così da sottolineare la dipendenza dall'energia totale e pressione totale:

$$\boldsymbol{\xi} = (E_{cin+int} + P_{gas})\mathbf{v} + c(\mathbf{E} \times \mathbf{B}).$$

Ricordando la definizione di campo elettrico (si veda equazione 2.7) otteniamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= (E_{cin+int} + P_{gas})\mathbf{v} + (-\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \\ &= (E_{cin+int} + P_{gas})\mathbf{v} + \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}).\end{aligned}$$

Dall'Appendice C abbiamo che:

$$\boldsymbol{\xi} = (E_{cin+int} + P_{gas})\mathbf{v} + 2\frac{1}{2}B^2\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.1})$$

$$= \left[\left(E_{cin+int} + \frac{1}{2}B^2 \right) + \left(P_{gas} + \frac{1}{2}B^2 \right) \right] \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.2})$$

$$(\text{A.3})$$

dalla quale, definendo i termini di pressione e energia magnetica, ricaviamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= [(E_{cin+int} + E_{magn}) + (P_{gas} + P_{magn})]\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \\ &= (E_{tot} + P_{tot})\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \frac{\eta}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

Appendice B

Derivata lagrangiana

Dato un campo vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, la derivata lagrangiana di un campo scalare $\phi(\mathbf{r}, t)$ è definita come:

$$\frac{D}{Dt}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\phi + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi \quad (\text{B.1})$$

dove $\partial/\partial t$ è l'usuale derivata parziale e $\mathbf{u} \cdot \nabla\phi$ è detta derivata euleriana che determina l'avvezione, cioè il trasporto dell'entità ϕ dato dal moto complessivo. La derivata lagrangiana per un campo vettoriale $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ è data da:

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{a} \quad (\text{B.2})$$

Dove $\nabla\mathbf{a}$ è la derivata covariante. E' immediato capire la connessione con la derivata totale, infatti quest'ultima è definita, per una funzione $\phi(\mathbf{r}, t)$, dalla regola della catena:

$$\frac{d}{dt}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\phi + \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{B.3})$$

dove ovviamente $\mathbf{r}(t)$ è funzione solo del tempo.

Appendice C

Dimostrazione BAC-CAB e forza di Lorentz

Il doppio prodotto vettoriale è definito, ricordando la definizione del singolo prodotto vettoriale, come:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \epsilon^{lkm} A_l (\epsilon^{ijk} B_i C_j) = \epsilon^{mlk} \epsilon^{ijk} A_l B_i C_j \quad (\text{C.1})$$

dove ϵ^{ijk} è il tensore di Levi-Civita definito da:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è permutazione pari} \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è permutazione dispari} \\ 0 & \text{se due indici coincidono} \end{cases}$$

Si ha la seguente identità:

$$\epsilon^{mlk} \epsilon^{ijk} = \delta_{mi} \delta_{lj} - \delta_{mj} \delta_{li} \quad (\text{C.2})$$

in cui δ_{ij} è la delta di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } (i \neq j). \end{cases}$$

Pertanto la (C.1) diventa:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = B_m A_j C_j - C_m A_i B_i = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (\text{C.3})$$

Un'applicazione dell'identità (C.2) ci aiuta a capire meglio l'importanza di queste identità vettoriali. Consideriamo

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \epsilon^{ijk} A_i (\epsilon^{lmj} \partial_j B_m) = \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmj} (A_i \partial_l B_m). \quad (\text{C.4})$$

Usando l'identità (C.2) l'espressione precedente diventa:

$$(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(A_i\partial_l B_m) = A_i\partial_k B_i - A_i\partial_i B_k \quad (\text{C.5})$$

in cui

$$A_i\partial_i B_k = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{C.6})$$

e

$$A_i\partial_k B_i = \mathbf{A} \cdot (\nabla\mathbf{B}) \quad (\text{C.7})$$

Dalle relazioni precedenti possiamo quindi ricavare l'espressione per la forza di Lorentz usata nel capitolo 2 nell'equazione A.1:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\frac{1}{2}\nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{C.8})$$

Bibliografia

1. F. Marinacci, M. Vogelsberger, R. Kannan, P. Mocz, R. Pakmor, V. Springel, Non-Ideal Magnetohydrodynamics on a Moving Mesh, 2018, MNRAS, 476, 2476
2. H. Alfvén, Cosmical electrodynamics, Clarendon Press, 1949
3. G. Agostinelli, Magnetofluidodinamica, Springer, 2011
4. S. Balbus, Astrophysical Fluid Dynamics Notes, 2007
5. N. Murphy, X. Bai, Plasma Astrophysics, Notes, 2016
6. M.A. Potter, P.K. Browning, M. Gorgovskyy, Forced magnetic Reconnection and Plasmoid Coalescence: I - MHD Simulations, 2019, A&A, 623, A15
7. J. Masson, R. Teyssier, C. Mulet-Marquis, P. Hennebelle, G. Chabrier, Incorporating Ambipolar and Ohmic Diffusion in the AMR MHD code RAMSES, 2012, ApJS, 201, 24
8. V. Springel, E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh, 2010, MNRAS, 401, 791
9. R. Pakmor, V. Springel, A. Bauer, P. Mocz, D. J. Munoz, S. T. Ohlmann, K. Schaal, C. Zhu, Improving the convergence properties of the moving-mesh code AREPO, 2016, MNRAS, 455, 1134
10. R. Weinberger, V. Springel, R. Pakmor, The AREPO Public Code Release, 2020, ApJS, 248, 32