

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# TEORIE DI GAUGE ABELIANE E NON ABELIANE

**Relatore:**  
**Prof. Fiorenzo Bastianelli**

**Presentata da:**  
**Eugenia Celada**

Anno Accademico 2019/2020

## Sommario

L'oggetto di questa tesi è lo studio delle teorie di gauge e di alcune delle loro fondamentali applicazioni nella fisica delle particelle. Si introducono brevemente la dinamica lagrangiana e la teoria dei gruppi, e si analizzano le principali Lagrangiane che descrivono campi liberi. Si vede poi come l'elettromagnetismo possa essere interpretato, a partire dal concetto di simmetria, come una teoria di gauge abeliana grazie all'introduzione della derivata covariante, e come generalizzare questa costruzione ai gruppi di simmetria non abeliani grazie alla teoria di Yang-Mills. Si approfondisce la natura delle trasformazioni di gauge studiandone il loro significato geometrico. Viene poi mostrato come costruire le Lagrangiane di interazione nel caso della QED, che è una teoria di gauge abeliana, e della QCD che è invece non abeliana. Infine si discute la teoria del Modello Standard, basata sulla simmetria di gauge non abeliana del gruppo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , che descrive le interazioni elettromagnetiche, deboli e forti.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Teoria dei campi e simmetrie</b>	<b>4</b>
1.1 Formalismo lagrangiano . . . . .	4
1.2 Gruppi di Lie e rappresentazioni . . . . .	6
1.3 Simmetrie e teorema di Noether . . . . .	11
1.4 Invarianza relativistica . . . . .	14
<b>2 Equazioni d'onda relativistiche</b>	<b>18</b>
2.1 Dall'equazione di Schroedinger alle teorie di campo . . . . .	18
2.2 Equazione di Klein-Gordon . . . . .	20
2.3 Equazione di Dirac . . . . .	22
2.4 Equazioni di Maxwell . . . . .	27
<b>3 Teorie di gauge</b>	<b>31</b>
3.1 Elettromagnetismo come teoria di gauge . . . . .	31
3.2 Teoria di Yang-Mills . . . . .	36
3.3 Geometria dell'invarianza di gauge . . . . .	40
<b>4 Applicazioni delle teorie di gauge</b>	<b>47</b>
4.1 Teoria di gauge abeliana e la QED . . . . .	47
4.2 Teorie di gauge non abeliane e la QCD . . . . .	50
4.3 Cenni sul Modello Standard . . . . .	54
<b>Conclusioni</b>	<b>57</b>

# Introduzione

La fisica delle particelle è descritta a partire da due concetti elementari: i campi di materia e i campi di forza. L'idea di campo quantizzato, sviluppata intorno alla metà del '900, nasce dalla necessità di conciliare la meccanica quantistica con la relatività ristretta. La natura duale della materia, che analogamente alla luce può comportarsi sia come onda che come particella, ha portato all'idea di eliminare questa ripartizione presente in fisica classica e a introdurre invece un unico ente fondamentale, il campo quantizzato appunto, caratterizzato da proprietà intrinseche come lo spin e da cariche interne. Il campo può variare il proprio stato soltanto in modo discreto, emettendo o assorbendo quanti del campo stesso, le particelle. Le interazioni elettromagnetica, debole e forte sono a loro volta interpretate come scambio di quanti dei campi di forza, detti bosoni, che vengono irradiati dalle particelle materiali portatrici della opportuna carica interna. Questa impostazione è formalizzata in una classe di teorie, dette teorie di gauge, che generalizzano l'elettromagnetismo e permettono di descrivere anche le interazioni deboli e forti.

Due sono gli strumenti fondamentali per sviluppare le teorie di gauge: il formalismo lagrangiano, che consente di esprimere tutte le informazioni dinamiche di un campo tramite un funzionale, detto azione, e la teoria dei gruppi, che descrive particolari famiglie di trasformazioni agenti sui campi. Tra queste vi sono le simmetrie, caratterizzate dal fatto di lasciare invariata la dinamica, quindi in un certo senso l'azione. Le simmetrie globali, in base al teorema di Noether, sono associate alla presenza di cariche conservate nel sistema. Al contrario, le simmetrie di gauge, o locali, non permettono di ottenere alcuna equazione di continuità, ma sono da intendersi come una ridondanza nella nostra descrizione: campi connessi da trasformazioni di gauge portano alla stessa dinamica. Un esempio è dato dai potenziali scalare e vettore nell'elettromagnetismo, che sono non univocamente definiti: questa libertà di scelta è la proprietà alla base della descrizione dell'interazione elettromagnetica.

La prima teoria di campo sviluppata fu proprio l'elettrodinamica quantistica (QED). Fu Fermi, che nel 1934 formulò una prima teoria di campo quantizzato per l'interazione debole, a rendersi conto della necessità di estendere la descrizione della QED. Venti anni dopo, Yang e Mills realizzarono questa estensione ampliando il concetto di simmetria di gauge.

L'idea delle teorie di gauge è la seguente: se un campo è dotato di una certa carica, la sua conservazione comporta, in base al teorema di Noether, che l'azione abbia un'opportuna simmetria globale. La richiesta che l'azione sia simmetrica anche per una trasformazione locale porta inevitabilmente a introdurre termini aggiuntivi che descrivono il campo bosonico e l'interazione col campo materiale.

In questa tesi si tratteranno le teorie di gauge abeliane e non abeliane, e il loro significato geometrico. Si analizzeranno in particolare la QED, basata sul gruppo abeliano  $U(1)$ , e la teoria di gauge dell'interazione forte, la cromodinamica quantistica (QCD), che è basata sul gruppo  $SU(3)$  ed è quindi non abeliana. La descrizione completa delle interazioni fondamentali, a meno dell'interazione gravitazionale che è esclusa da questo quadro, è formulata in una teoria di gauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , che va sotto il nome di Modello Standard.

# Capitolo 1

## Teoria dei campi e simmetrie

In questo capitolo si introduce il concetto di campo, alla base delle teorie di gauge che verranno sviluppate in seguito. La dinamica dei campi viene descritta tramite l'introduzione dell'azione, in analogia con la formulazione lagrangiana della meccanica classica. Si accenna poi brevemente alla teoria dei gruppi e in particolare ai gruppi di Lie, che consentono di descrivere matematicamente particolari trasformazioni dette simmetrie. Queste possono essere globali o di gauge, e il loro significato fisico è molto differente. Il fondamentale teorema di Noether, trattato di seguito, formalizza il legame tra simmetrie globali e correnti conservate: la loro presenza sarà necessaria per lo sviluppo delle teorie di gauge. Infine si approfondisce lo studio di una particolare simmetria, l'invarianza di Lorentz, indispensabile per la compatibilità di qualsiasi sistema fisico con la relatività ristretta.

### 1.1 Formalismo lagrangiano

Il formalismo lagrangiano, in particolare la derivazione della dinamica a partire da un principio variazionale, è la descrizione più adatta per lo studio delle trasformazioni di simmetria, che sono alla base delle teorie di gauge oggetto di questa trattazione.

#### Meccanica classica

Prima di considerare la formulazione lagrangiana per i campi che utilizzeremo nelle teorie di gauge, richiamiamo la formulazione classica per la dinamica di una particella puntiforme e deriviamo la legge di Newton dal principio di minima azione. Consideriamo una massa  $m$  puntiforme il cui moto è descritto dalle coordinate generalizzate  $q_a(t)$  con  $a = 1, \dots, N$  dove  $N$  è il numero di gradi di libertà del sistema. Definiamo *Lagrangiana* del sistema la seguente funzione di  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$  e  $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ :

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T - V = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 - V(\mathbf{q})$$

dove  $T$  e  $V$  sono l'energia cinetica e potenziale. Si definisce *azione* il seguente funzionale:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

Consideriamo una curva  $\mathbf{q}$  con estremi  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$  e  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$  e consideriamo una curva “vicina”  $\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}$  con gli stessi estremi, cioè tale che  $\delta\mathbf{q}(t_1) = \delta\mathbf{q}(t_2) = 0$ . La *variazione* dell'azione è l'applicazione  $\delta S(\mathbf{q}, \delta\mathbf{q})$  lineare in  $\delta\mathbf{q}$  tale che:

$$S[\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}] = S[\mathbf{q}] + \delta S(\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}) + O(\|\delta\mathbf{q}\|^2) \quad \delta\mathbf{q} \rightarrow 0$$

Una curva  $\mathbf{q}$  è estrema per l'azione se  $\delta S(\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}) = 0$  per ogni  $\delta\mathbf{q}$ . Fissati gli estremi della curva  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$  vi sono infinite traiettorie che la particella può percorrere, ma solo una è la traiettoria fisica realmente percorsa. Il principio di minima azione prevede che questa sia la curva estrema dell'azione e in particolare sia un minimo. Dimostriamo ora che questo equivale a richiedere che la traiettoria sia soluzione della seguente *equazione di Eulero Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

Possiamo scrivere la variazione a partire dalla definizione tramite la regola della catena:

$$\begin{aligned} S[\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}] &= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta\dot{\mathbf{q}} + O(\|\delta\mathbf{q}\|^2) \right] dt \\ &= S[\mathbf{q}] + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta\dot{\mathbf{q}} \right] dt + O(\|\delta\mathbf{q}\|^2) \end{aligned}$$

Ora integriamo per parti, tenendo conto che la variazione della curva è a estremi fissati:

$$\begin{aligned} \delta S(\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta\dot{\mathbf{q}} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta\mathbf{q} dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta\mathbf{q} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta\mathbf{q} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] \delta\mathbf{q} dt \end{aligned}$$

Poiché la soluzione del moto deve essere estrema, si ha che la variazione dell'azione  $\delta S(\mathbf{q}, \delta\mathbf{q})$  è nulla per qualsiasi  $\delta\mathbf{q}$  e l'integrando fornisce l'equazione di Eulero Lagrange.

## Teoria dei campi

Estendiamo questo procedimento alla teoria dei campi classica. Al posto delle coordinate generalizzate  $q_a(t)$ , siamo interessati alla dinamica di campi  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$  estesi in una regione dello spaziotempo  $R$ . In questo caso la posizione spaziale  $\mathbf{x}$  non è più una variabile dinamica come per la particella, ma è un indice al pari di  $a$ : abbiamo quindi infiniti gradi di libertà, almeno uno per ogni punto  $\mathbf{x}$  dello spazio. Nonostante la natura indiciale di  $\mathbf{x}$ , in natura non si hanno mai Lagrangiane che contengano, per esempio,  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$  e  $\phi_a(\mathbf{y}, t)$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Questa proprietà è detta *località*. La dinamica del campo è governata dalla Lagrangiana che è ora una funzione di  $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t)$  e  $\nabla\phi_a(\mathbf{x}, t)$ . Introducendo il quadrivettore posizione  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  e l'operatore di derivazione  $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$  possiamo esprimere la Lagrangiana come:

$$L(t) = \int_R \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) d^3x$$

dove  $\mathcal{L}$  è la *densità di Lagrangiana*. L'azione è allora definita come:

$$S[\phi_a] = \int_R \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu\phi_a) d^4x$$

Analogamente a quanto fatto per la singola particella, possiamo ricavare le equazioni di Eulero Lagrange cui devono soddisfare i campi  $\phi_a$ , in base al principio di minima azione. Consideriamo una variazione infinitesima del campo  $\delta\phi_a$  mantenendo gli estremi fissati, cioè  $\delta\phi_a(x^\mu) = 0$ ,  $x^\mu \in \partial R$  e calcoliamo  $\delta S$ :

$$\begin{aligned} \delta S[\phi_a, \delta\phi_a] &= \int_R \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta(\partial_\mu\phi_a) \right] d^4x \\ &= \int_R \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right) \delta\phi_a + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right) \right] d^4x \end{aligned}$$

Nell'integrazione per parti abbiamo sfruttato il fatto che  $\delta(\partial_\mu\phi_a) = \partial_\mu\delta\phi_a$  in quanto per definizione la variazione è la differenza di due funzioni. Infine, imponendo  $\delta S = 0$  per ogni  $\delta\phi_a$  otteniamo le equazioni di Eulero Lagrange per il moto dei campi, analoghe all'equazione di Newton per la particella classica:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} = 0 \quad (1.1)$$

## 1.2 Gruppi di Lie e rappresentazioni

Le teorie di gauge che vogliamo sviluppare sono basate sullo studio di particolari trasformazioni del sistema, le *simmetrie*. Le simmetrie sono trasformazioni che lasciano

invariata l'azione e di conseguenza le equazioni del moto. Descrivono sistemi diversi ma equivalenti, dove le leggi del moto ammettono le stesse soluzioni. La teoria che descrive opportunamente queste trasformazioni è la teoria dei gruppi.

## Gruppi e rappresentazioni

Chiamiamo *gruppo astratto* un insieme  $G = \{g\}$  con le seguenti proprietà:

- Esiste una legge di composizione:  $g_1 g_2 \in G \quad \forall g_1, g_2 \in G$
- La composizione è associativa:  $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$
- Esiste l'elemento identità:  $\exists e \in G : \forall g \in G \quad ge = eg = g$
- Esiste l'elemento inverso:  $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G : gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Una *rappresentazione* di un gruppo astratto  $G$  è un'applicazione:

$$R : G \rightarrow \{\text{matrici quadrate } N \times N\}$$

$$g \mapsto R(g)$$

con le proprietà:

- $R(g_1)R(g_2) = R(g_1 g_2)$
- $R(e) = I$

Da queste due seguono immediatamente le altre proprietà di gruppo, infatti:

- $R(g^{-1})R(g) = R(e) = I \quad \Rightarrow \quad R(g^{-1}) = R(g)^{-1}$
- Associatività immediata per il prodotto tra matrici

Gli spazi vettoriali finito-dimensionali su cui agiscono le matrici  $R(g)$  sono a loro volta chiamati rappresentazioni. Quando definiamo un gruppo direttamente tramite le matrici, lo spazio su cui queste agiscono è la *rappresentazione definente* del gruppo.

Due rappresentazioni  $R(g)$  e  $\tilde{R}(g)$  sono *equivalenti* se sono collegate da trasformazioni di similitudine:

$$\exists A : \forall g \in G \quad \tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1}$$

La similitudine equivale a un cambio di base nello spazio vettoriale su cui le trasformazioni operano: rappresentazioni equivalenti sono di fatto la stessa rappresentazione.

Una rappresentazione è *riducibile* se è equivalente a una rappresentazione diagonale a blocchi. Ciascun blocco trasforma solo certe componenti dei vettori su cui opera, in questo modo lo spazio vettoriale su cui opera una trasformazione riducibile viene naturalmente

decomposto come somma diretta degli spazi su cui operano i blocchi. Per esempio un vettore di 3 componenti può venire trasformato nel modo seguente:

$$v' = \begin{pmatrix} (v'_1) \\ (v'_2) \\ (v'_3) \end{pmatrix} = R(g)v = \begin{pmatrix} R_1(g) & 0 & 0 \\ 0 & R_2(g) & 0 \\ 0 & 0 & R_3(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_1) \\ (v_2) \\ (v_3) \end{pmatrix}$$

$$R(g) = R_1(g) \oplus R_2(g) \oplus R_3(g)$$

Data una rappresentazione defnente, questa agisce come matrice  $R(g)$  su uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $N$ . Le componenti dei vettori di questo spazio hanno per convenzione gli indici in alto e si trasformano secondo la relazione:

$$v^a \mapsto v'^a = [R(g)]^a_b v^b$$

Data la rappresentazione  $R(g)$  ne possiamo immediatamente costruire altre tre: la rappresentazione complessa coniugata  $R(g)^*$ , l'inversa trasposta  $R(g)^{-1T}$  e l'inversa hermitiano-coniugata  $R(g)^{-1\dagger}$ . Queste agiscono con le seguenti leggi di trasformazione:

$$v^{\dot{a}} \mapsto v'^{\dot{a}} = [R(g)^*]^{\dot{a}}_{\dot{b}} v^{\dot{b}}$$

$$v_a \mapsto v'_a = [R(g)^{-1T}]^a_b v_b$$

$$v_{\dot{a}} \mapsto v'_{\dot{a}} = [R(g)^{-1\dagger}]^{\dot{a}}_{\dot{b}} v_{\dot{b}}$$

A partire da queste rappresentazioni possiamo ricavarne altre che agiscono su generici tensori che hanno indici misti e si trasformano di conseguenza. In generale queste rappresentazioni tensoriali sono riducibili sfruttando proprietà invarianti del gruppo. Vediamo subito alcune rappresentazioni e riduzioni invarianti.

- Rappresentazioni di  $SO(N)$ .

$SO(N)$  è il gruppo delle matrici  $N \times N$  reali  $R$  tali che  $R^T R = I$  con  $\det R = 1$ . Per questo gruppo tutti gli indici sono equivalenti. La rappresentazione defnente è  $N$  (agisce su  $v^a \sim v_a \sim v^{\dot{a}} \sim v_{\dot{a}}$ ).  $N \otimes N$  agisce sul tensore  $T^{ab}$  che può essere suddiviso nella parte antisimmetrica, simmetrica senza traccia e nella traccia (scalare). Essendo invarianti la rappresentazione è conseguentemente ridotta come:

$$N \otimes N = 1 \oplus \frac{N(N-1)}{2} \oplus \left[ \frac{N(N+1)}{2} - 1 \right]$$

La  $\frac{N(N-1)}{2}$  è detta rappresentazione *aggiunta* e le sue dimensioni sono pari al numero di parametri indipendenti del gruppo.

- Rappresentazioni di  $SU(N)$ .

$SU(N)$  è il gruppo delle matrici  $N \times N$  complesse  $U$  tali che  $U^\dagger U = I$  con  $\det U = 1$ . Per questo gruppo si hanno le seguenti equivalenze:  $v^a \sim v_{\dot{a}}$  e  $v_a \sim v^{\dot{a}}$ . Abbiamo quindi la rappresentazione fondamentale  $N$  e la antifondamentale  $\bar{N}$ .  $N \otimes N$  può essere ridotta considerando la parte simmetrica e antisimmetrica dei tensori su cui agisce:

$$N \otimes N = \frac{N(N-1)}{2} \oplus \frac{N(N+1)}{2}$$

La  $N \otimes \bar{N}$  viene invece ridotta separando la traccia (che è invariante) e corrisponde quindi alla riduzione:

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus (N^2 - 1)$$

La  $(N^2 - 1)$  è l'aggiunta di  $SU(N)$ .

- Rappresentazioni di  $U(1)$ .

Questo è il gruppo delle fasi. La sua rappresentazione defnente è un numero complesso  $e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  che opera su  $\mathbb{C}$  e ruota i vettori di una fase  $\theta$ . Si può dimostrare che tutte le rappresentazioni di  $U(1)$  irriducibili unitarie sono numeri complessi  $e^{iq\theta}$  e sono identificate da un numero  $q \in \mathbb{Z}$  detto carica.

## Gruppi e algebre di Lie

In questa trattazione siamo interessati ai *gruppi di Lie*, cioè gruppi che dipendono in modo continuo da alcuni parametri reali e contenenti elementi arbitrariamente vicini all'identità.

Il gruppo è parametrizzato in modo tale che  $g(\theta = 0) = I$ , dove con  $I$  indichiamo la matrice identità.

Ogni elemento infinitesimo  $g$  può essere scritto come:

$$g(\theta) = I + i\theta_a T^a + O(\theta^2)$$

dove  $\theta_a$  sono i parametri infinitesimi e i loro coefficienti  $T^a$  sono operatori hermitiani detti *generatori* del gruppo.

Di seguito consideriamo solo gruppi compatti, cioè con un numero finito di generatori, che sono geometricamente varietà compatte finito-dimensionali. Questi sono presi convenzionalmente con la condizione di normalizzazione per  $SO(N)$  e per  $SU(N)$  rispettivamente:

$$\text{tr}(T^a T^b) = 2\delta^{ab} \quad \text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

La  $\delta^{ab}$  così definita è la *metrica di Killing*. Tale metrica è definita positiva per gruppi di Lie compatti (come sono  $SO(N)$  e  $SU(N)$ ) e questa scelta di normalizzazione produce proprio la matrice identità come metrica di Killing.

Un elemento generico del gruppo può essere ottenuto iterando la composizione di questi elementi infinitesimi. Se  $\theta/n$  è infinitesimo:

$$g(\theta) = \left[ g\left(\frac{\theta}{n}\right) \right]^n \sim \left( I + i\frac{\theta_a}{n} T^a \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i\theta_a T^a} \quad (1.2)$$

Vale la seguente formula di Baker-Campbell-Hausdorff per il prodotto di esponenziali di matrici:

$$e^{i\theta_a T^a} e^{i\theta_b T^b} = e^{i\theta_a T^a + i\theta_b T^b - \frac{1}{2}\theta_a \theta_b [T^a, T^b] + \dots}$$

dove il commutatore di due generatori  $T^a$  e  $T^b$  è definito come  $[T^a, T^b] = T^a T^b - T^b T^a$  e i termini successivi nell'esponente sono commutatori di commutatori. Poiché il prodotto di due elementi del gruppo appartiene al gruppo per definizione, deve a sua volta poter essere espresso in forma esponenziale come nella (1.2), dove l'esponente è una combinazione lineare di generatori, quindi deve valere:

$$[T^a, T^b] = i f_c^{ab} T^c \quad (1.3)$$

dove i numeri  $f_c^{ab}$  sono detti costanti di struttura. Se  $f_c^{ab} = 0$  il gruppo è detto abeliano, altrimenti è non abeliano. I generatori definiscono quindi un'algebra di Lie, cioè uno spazio vettoriale  $\mathcal{G}$  su cui è definita l'operazione binaria  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  che deve essere:

- bilineare;
- antisimmetrica;
- soddisfa l'identità di Jacobi:

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \quad (1.4)$$

Queste proprietà sono immediatamente verificabili per l'operazione di commutazione. La relazione di commutazione (1.3) e l'identità (1.4) implicano che le costanti di struttura devono soddisfare a loro volta l'identità di Jacobi:

$$f_d^{ab} f_e^{dc} + f_d^{ab} f_e^{db} + f_d^{bc} f_e^{da} = 0$$

Le relazioni di commutazione dell'algebra di Lie determinano completamente la legge di composizione del gruppo di Lie localmente, cioè sufficientemente vicino all'identità, tuttavia la struttura globale del gruppo non è univocamente determinata.

Se moltiplichiamo la (1.3) a destra per  $T^d$  e prendiamo la traccia otteniamo che, nel caso di  $SU(N)$ :

$$f^{abd} = -2i \operatorname{tr}([T^a, T^b] T^d) \quad (1.5)$$

Da questa relazione, usando la proprietà di invarianza per permutazioni cicliche della traccia, troviamo che  $f^{abd}$  è completamente antisimmetrico.

Inoltre, prendendo il coniugato della (1.5) e considerando le proprietà della traccia e l'hermitianità dei generatori otteniamo che  $f^{abd}$  sono reali.

Le costanti di struttura definiscono la rappresentazione aggiunta, la cui dimensione come abbiamo detto è pari al numero di parametri indipendenti del gruppo:

$$(T_A^a)^b{}_c = -if^{ab}{}_c$$

Con questa definizione, la condizione che  $T_A^a$  soddisfi l'algebra di Lie (1.3) è immediata dall'identità di Jacobi.

### 1.3 Simmetrie e teorema di Noether

Le *simmetrie* sono trasformazioni che lasciano le equazioni del moto invarianti in forma, o equivalentemente che lasciano l'azione invariante a meno di termini di bordo (derivate totali) che non modificano le equazioni del moto. Le simmetrie di Lie sono dette *rigide* o *globali* se i parametri da cui dipendono sono costanti, se invece sono funzioni arbitrarie del tempo e dello spazio si parla di simmetrie *locali* o *di gauge*. Il teorema di Noether stabilisce una corrispondenza tra simmetrie globali e quantità fisiche conservate localmente. Le simmetrie di gauge al contrario non permettono di ottenere alcuna equazione di continuità: la loro presenza ci dice che le variabili dinamiche che stiamo usando sono ridondanti, perché con una trasformazione di gauge possiamo modificare arbitrariamente l'evoluzione temporale di una loro opportuna combinazione, la cui evoluzione non risulta fissata dalle equazioni del moto.

#### Teorema di Noether per i sistemi meccanici classici

Consideriamo inizialmente il teorema di Noether per un sistema meccanico classico, poi procederemo alla generalizzazione nel caso dei campi.

Il teorema di Noether si basa su una relazione tra variazioni dell'azione di diversa natura: le variazioni *on-shell* e le variazioni di simmetria.

Siano  $q_a(t)$  le coordinate generalizzate del sistema. Allora data l'azione  $S[q_a(t) + \delta_s q_a(t)]$  una funzione infinitesima  $\delta_s q_a(t)$  è una simmetria se per ogni  $q_a(t)$ :

$$S[q_a(t) + \delta_s q_a(t)] = S[q_a(t)] + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{dK}{dt} \right) dt \quad (1.6)$$

Le simmetrie sono quindi le direzioni nello spazio delle configurazioni lungo cui l'azione non cambia, a meno di termini di bordo. La (1.6) deve essere intesa come un'equazione per  $\delta_s q_a(t)$  ed è la condizione affinché  $\delta_s q_a(t)$  sia una simmetria.

Descriviamo ora le variazioni on-shell. Al contrario che per le simmetrie, in cui  $\delta_s q_a(t)$  devono soddisfare un'equazione per  $q_a(t)$  arbitrari, per le variazioni on-shell sono le  $q_a(t)$  a dover soddisfare delle equazioni, le equazioni di Eulero Lagrange, mentre le variazioni

$\delta q_a(t)$  sono arbitrarie. Sia allora  $\delta q_a(t)$  una deformazione generica infinitesima di  $q_a(t)$ . Sappiamo che la variazione dell'azione può essere espressa come:

$$\delta S[q_a(t), \delta q_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right) dt$$

Posta  $\bar{q}_a(t)$  la funzione che soddisfa le equazioni di Eulero Lagrange, otteniamo la seguente equazione di  $\bar{q}_a(t)$ , valida per ogni  $\delta q_a(t)$ :

$$\delta S[\bar{q}_a(t), \delta q_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right) dt$$

Il teorema di Noether deriva da una combinazione di una simmetria con una variazione on-shell. Queste variazioni sono definite rispettivamente dalle equazioni per  $\delta_s q_a(t)$  e per  $\bar{q}_a(t)$ :

$$\begin{aligned} \delta S[q_a(t), \delta_s q_a(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dK}{dt} dt \quad \text{per ogni } q_a(t) \\ \delta S[\bar{q}_a(t), \delta q_a(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta q_a \right) dt \quad \text{per ogni } \delta q_a(t) \end{aligned}$$

Ponendo nella prima  $q_a = \bar{q}_a$  e nella seconda  $\delta q_a = \delta_s q_a$ , i termini a sinistra sono uguali. Sottraendo le equazioni abbiamo allora che:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{con} \quad Q = K - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta_s q_a$$

Abbiamo ottenuto il teorema di Noether: data una simmetria  $\delta_s q_a$ , la quantità  $Q$ , detta *carica di Noether*, risulta conservata.

### Teorema di Noether per i campi classici

Procediamo in modo analogo per la teoria dei campi. Le simmetrie per un'azione  $S[\phi_a]$  associata a un campo sono delle trasformazioni del campo infinitesime  $\delta_s \phi_a$  tali che, per  $\phi$  arbitrario:

$$\delta S[\phi_a, \delta_s \phi_a] = \int_R \partial_\mu K^\mu d^4x \quad (1.7)$$

Ricordiamo che le coordinate  $x^\mu$  non hanno significato dinamico come le  $q_a$ : l'azione è un funzionale di  $\phi_a$  e le coordinate sono solo indici al pari di  $a$ . Anche le simmetrie associate alle traslazioni spaziotemporali o alle rotazioni possono sempre essere scritte sotto forma di trasformazioni del campo stesso.

Le variazioni on-shell sono espresse dalla seguente equazione:

$$\delta S[\bar{\phi}_a, \delta \phi_a] = \int_R \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) d^4x \quad (1.8)$$

dove  $\bar{\phi}_a$  soddisfano le equazioni di Eulero Lagrange per i campi. Ora, la (1.7) è valida per ogni  $\phi_a$ , in particolare per  $\bar{\phi}_a$ . La (1.8) è valida per ogni  $\delta\phi_a$  e in particolare per  $\delta_s\phi_a$ . Quindi inserendo  $\bar{\phi}_a$  nella (1.7) e  $\delta_s\phi_a$  nella (1.8), otteniamo sottraendo le equazioni la formulazione del teorema di Noether per i campi:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{con} \quad J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta_s \phi_a - K^\mu \quad (1.9)$$

La *corrente di Noether*  $J^\mu$  soddisfa un'equazione di continuità. Possiamo ricavare la carica associata a questa corrente integrando l'equazione di continuità separatamente nel tempo e nello spazio:

$$\int_R \partial_t J^0 d^3x = - \int_R \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x = - \int_{\partial R} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

dove abbiamo usato il teorema della divergenza. Se assumiamo che  $\mathbf{J}$  vada a zero sufficientemente in fretta otteniamo la conservazione della carica  $Q$ :

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{con} \quad Q = \int_R J^0(x) d^3x$$

e  $J^0$  rappresenta quindi la densità di carica. L'esistenza di una corrente conservata è una conseguenza molto più forte rispetto alla conservazione di una carica, poiché implica la conservazione locale e non solo globale: fisicamente infatti ogni variazione di una quantità conservata è accompagnata da un flusso di corrente.

### Un esempio: il tensore energia-impulso

In teoria dei campi come in meccanica classica, l'invarianza per traslazioni spaziali comporta la conservazione dell'impulso, mentre l'invarianza per traslazioni temporali comporta la conservazione dell'energia. Consideriamo una traslazione infinitesima  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ . Questa può essere espressa in termini di trasformazione del campo  $\phi_a$ :

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x - \epsilon) \sim \phi_a(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi_a(x) \quad \Rightarrow \quad \delta_s \phi_a(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi_a(x)$$

dove abbiamo espanso  $\phi_a$  al primo ordine in  $\epsilon$ . Similmente possiamo trasformare la Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_a)} \delta(\partial_\nu \phi_a) \\ &= -\epsilon^\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \partial_\mu \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi_a)} \partial_\nu \partial_\mu \phi_a \right] = -\partial_\mu (\epsilon^\mu \mathcal{L}) \end{aligned}$$

La prima uguaglianza è la regola della catena. Nella seconda abbiamo sostituito la simmetria sfruttando il fatto che  $\delta(\partial_\nu \phi_a) = \partial_\nu(\delta\phi_a)$ . Il terzo passaggio richiede che la

Lagrangiana non dipenda da  $x^\mu$  esplicitamente e che  $\epsilon^\mu$  sia costante. Poiché la nuova Lagrangiana differisce dalla precedente solo per una derivata totale, la trasformazione operata è una simmetria e possiamo applicare il teorema di Noether e la relazione (1.9):

$$J^\mu = \epsilon^\lambda \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\lambda \phi_a - \delta_\lambda^\mu \mathcal{L} \right] = \epsilon^\lambda T^\mu{}_\lambda$$

Per ognuna delle 4 simmetrie  $\epsilon^\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, 3, 4$  si ha una corrente  $j^\mu{}_\lambda$  conservata, che chiamiamo tensore energia-impulso:

$$j^\mu{}_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\lambda \phi_a - \delta_\lambda^\mu \mathcal{L} = T^\mu{}_\lambda \quad (1.10)$$

$$\partial_\mu T^\mu{}_\lambda = 0 \quad (1.11)$$

Le quattro cariche associate sono l'energia totale del campo e le tre componenti dell'impulso totale trasportato:

$$E = \int_R T^{00}(x) d^3x \quad P^i = \int_R T^{0i}(x) d^3x$$

## 1.4 Invarianza relativistica

Le leggi della natura sono relativisticamente invarianti, e una delle principali ragioni per cui si sviluppa la teoria quantistica dei campi è di riconciliare la meccanica quantistica con la relatività ristretta. L'invarianza per trasformazioni di Lorentz è quindi un principio di invarianza fondamentale che dovrà essere rispettato da ogni Lagrangiana di qualunque sistema fisico.

### Gruppo di Lorentz proprio e ortocrono

Procediamo quindi introducendo uno spazio in cui il tempo è sullo stesso piano delle coordinate spaziali, lo *spaziotempo di Minkowski*, i cui elementi sono i già incontrati quadri-vettori  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ . Chiamiamo questi vettori controvarianti mentre definiamo i seguenti  $x_\mu = (-ct, x, y, z)$  vettori covarianti. In questo spazio le distanze sono calcolate con la metrica pseudoeuclidea di Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo allora scrivere che  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ , dove si usa la convenzione di Einstein sulla somma degli indici contratti (due indici uguali, uno in alto e uno in basso, sono detti

contratti). Introduciamo l'inversa di  $\eta$ :

$$(\eta^{-1})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora che  $x^\mu = (\eta^{-1})^{\mu\nu} x_\nu$ . Si usa indicare con  $\eta$  anche la metrica inversa, in quanto si possono distinguere tra loro dalla posizione degli indici.

Possiamo ora definire cos'è un sistema di riferimento inerziale. Se le coordinate  $x^\mu$  rappresentano un sistema inerziale, anche le coordinate  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$  descrivono un sistema inerziale, dove il vettore  $a^\mu$  è una traslazione delle coordinate e  $\Lambda^\mu_\nu$  è la matrice associata alle trasformazioni di Lorentz. Se  $x'^\mu$  si sposta con velocità  $v$  diretta lungo l'asse  $x$ ,  $\Lambda^\mu_\nu$  assume la forma:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove  $\beta = v/c$  e  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ . Sappiamo che le trasformazioni di Lorentz devono lasciare invariate le distanze  $s$  nello spaziotempo, in quanto la grandezza:

$$s^2 = x_\mu x^\mu = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

è un invariante relativistico. Se imponiamo tale invarianza:

$$s'^2 = x'_\mu x'^\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\nu x'^\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\alpha x^\beta := \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = s^2$$

otteniamo le condizioni cui deve soddisfare  $\Lambda^\mu_\nu$ :

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.12)$$

Osserviamo che con questa condizione nelle trasformazioni di Lorentz sono incluse le rotazioni spaziali ordinarie, per esempio la rotazione di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $z$ :

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo, il gruppo di Lorentz  $O(3,1) = \{\text{matrici } 4 \times 4 \text{ reali } \Lambda : \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$ . Tuttavia questo non è un gruppo di Lie, non

tutti gli elementi sono connessi all'identità. Prendendo il determinante della (1.12) otteniamo che:

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad (1.13)$$

L'identità fa parte del sottogruppo con determinante 1, che è chiamato proprio. Escludiamo in questo modo trasformazioni discrete quali la parità  $P$  e l'inversione temporale  $T$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La condizione (1.13) non esclude però tutte le trasformazioni discrete: per esempio la composizione  $PT$  è discreta ma ha determinante 1. Dobbiamo quindi introdurre un'altra restrizione. Valutiamo la componente  $\Lambda^0_0$  con la relazione (1.12):

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 &= \eta_{00} \\ \eta_{00} (\Lambda^0_0)^2 + \eta_{11} (\Lambda^1_0)^2 + \eta_{22} (\Lambda^2_0)^2 + \eta_{33} (\Lambda^3_0)^2 &= -1 \\ (\Lambda^0_0)^2 &= (\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^0_0)^2 + 1 \geq 1 \\ \Lambda^0_0 &\leq -1 \quad , \quad \Lambda^0_0 \geq 1 \end{aligned}$$

Poichè i due intervalli di valori sono disconnessi non si può passare dall'uno all'altro con continuità, quindi ci restringiamo al sottogruppo cui appartiene l'identità, cioè le trasformazioni con  $\Lambda^0_0 \geq 1$ , che sono chiamate ortocrone. Il gruppo di Lie è allora il *gruppo di Lorentz proprio e ortocrono*:

$$SO^\uparrow(3, 1) = \{ \text{matrici } 4 \times 4 \text{ reali } \Lambda : \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1 \}$$

Una trasformazione di Lorentz infinitesima è data da:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu_\nu$$

e dalla relazione (1.12) otteniamo che  $\delta\omega^{\mu\nu}$  è antisimmetrico:

$$\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$$

Quindi ci sono 6 parametri infinitesimi indipendenti e 6 generatori che possono essere suddivisi in 3 rotazioni e 3 traslazioni.

Possiamo aggiungere a  $SO^\uparrow(3, 1)$  le traslazioni nel modo seguente. Definiamo le matrici  $5 \times 5$ :

$$P_j^i = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La rappresentazione fondamentale è data dai vettori  $x^i = (x^\mu, 1)$  che si trasformano come:

$$P^i_j x^j = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

Queste trasformazioni definiscono il *gruppo di Poincaré* a cui è associata l'invarianza relativistica.

### Azione Lorentz invariante

Vediamo ora come le trasformazioni di Lorentz operano sui campi e sulla Lagrangiana. Le trasformazioni possono essere di due tipi: sono attive se vengono operate direttamente sul sistema, nel qual caso equivalgono a operare una trasformazione inversa sul sistema di coordinate; sono passive se invece viene trasformato il sistema di coordinate. Sia  $\phi$  un campo scalare, se operiamo la trasformazione  $x \rightarrow \Lambda x$  il campo si trasforma attivamente come:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

e passivamente come:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda x)$$

Di seguito consideriamo trasformazioni attive, che definiscono la rappresentazione del gruppo di Lorentz sui campi scalari.

La condizione affinché una teoria sia Lorentz invariante è che se  $\phi$  risolve le equazioni del moto, le stesse sono risolte anche da  $\phi'$ . Questo è garantito se l'azione è Lorentz invariante. Un modo per garantirne l'invarianza è fare sì che tutti gli indici siano contratti con tensori Lorentz invarianti, per esempio la metrica  $\eta_{\mu\nu}$  o il tensore completamente antisimmetrico  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ . In generale se una Lagrangiana si trasforma come:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x)$$

rimanendo quindi invariante in forma, allora l'azione è Lorentz invariante poiché il cambio di variabili  $y = \Lambda^{-1}x$  nell'azione non comporta la comparsa di un termine Jacobiano ( $\det \Lambda = 1$ ):

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^4x \rightarrow \int \mathcal{L}(y) d^4x = \int \mathcal{L}(y) d^4y$$

L'invarianza di Lorentz fornisce un principio guida per la costruzione di Lagrangiane fisiche, come vedremo in pratica nel Capitolo 2.

# Capitolo 2

## Equazioni d'onda relativistiche

In questo capitolo studiamo come costruire Lagrangiane di sistemi di particelle, ripercorrendo brevemente i passi che hanno portato dalla formulazione non relativistica di Schroedinger della meccanica quantistica al concetto di campo quantizzato. Alla luce di quanto visto nel Capitolo 1 approfondiamo in particolare le simmetrie di queste Lagrangiane e il significato fisico delle cariche di Noether che sono conseguentemente conservate.

### 2.1 Dall'equazione di Schroedinger alle teorie di campo

In meccanica quantistica la descrizione delle particelle avviene tramite funzioni d'onda la cui dinamica è determinata dalle equazioni d'onda. Schroedinger tentò inizialmente di sviluppare un'equazione che fosse relativisticamente invariante, ma poiché non era in grado di riprodurre alcuni risultati sperimentali per l'atomo di idrogeno, elaborò un'equazione valida nel limite non relativistico per funzioni d'onda scalari. Questa può essere ottenuta dall'equazione classica della dinamica tramite il formalismo operatoriale della meccanica quantistica:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (2.1)$$

Sostituendo gli operatori nella relazione tra energia e impulso di una particella libera non relativistica  $E = \mathbf{p}^2/2m$  e interpretandoli come agenti su una funzione d'onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  si ottiene l'*equazione di Schroedinger*:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Se  $\psi$  è normalizzabile allora questa può avere un'interpretazione probabilistica, poiché si può interpretare la grandezza  $\psi^* \psi$  come densità di probabilità di trovare la particella nel

punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ . L'equazione di Schroedinger può essere derivata dall'azione:

$$S = \int \int \left( i\hbar\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \nabla\psi \right) d^3x dt \quad (2.3)$$

È immediato vedere che questa azione non è Lorentz invariante: infatti è del primo ordine nel tempo e del secondo ordine nello spazio, ovvero spazio e tempo non sono sullo stesso piano. Poiché  $\psi$  è complessa,  $\psi$  e  $\psi^*$  possono essere pensate come indipendenti. Variando l'azione (2.3) rispetto a  $\psi^*$  otteniamo:

$$\delta S = \int \int \delta\psi^* \left( i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi \right) d^3x dt + B$$

dove il termine  $B$ , derivante da un'integrazione per parti, è valutato all'infinito spaziale dove  $\psi$  si annulla, essendo normalizzabile. Quindi per variazioni arbitrarie di  $\psi^*$  otteniamo l'equazione di Schroedinger in (2.2).

### Simmetrie dell'equazione di Schroedinger

L'azione (2.3) è invariante per trasformazioni globali di fase  $U(1)$ :

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi \quad \psi^* \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^*$$

Per calcolare la carica di Noether scriviamo la trasformazione infinitesima:

$$\delta\psi = i\alpha\psi \quad \delta\psi^* = -i\alpha\psi^* \quad (2.4)$$

L'azione è strettamente invariante rispetto a questa trasformazione, cioè il termine di bordo  $K$  della (1.7) è nullo. La carica di Noether è quindi data dalla sola variazione on-shell (1.8) in cui sostituiamo la trasformazione di simmetria (2.4):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \int i\hbar \frac{d}{dt}(\psi^* \delta\psi) d^3x dt = -\alpha\hbar \int \frac{d}{dt} \int (\psi^* \psi) d^3x dt \\ Q = \rho &= \int (\psi^* \psi) d^3x \end{aligned}$$

e rappresenta la probabilità totale di trovare la particella nello spazio. Infatti sfruttando la normalizzabilità di  $\psi$  si può porre  $\rho = 1$ . Questo comporta che la particella non possa essere creata né distrutta. Ripetendo la procedura nei casi in cui l'azione sia definita su un volume finito  $V$  e con  $\psi$  che non si annulla su  $\partial V$ , si può provare che  $\rho$  soddisfa un'equazione di continuità con un'opportuna corrente  $\mathbf{J}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} &= 0 \\ \rho = \psi^* \psi \quad \mathbf{J} &= -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*) \end{aligned}$$

## Teorie di campo

Successivamente sono state ottenute equazioni relativisticamente invarianti, anche se queste comportano un'interpretazione completamente diversa della funzione d'onda, che assume il significato di *campo*. A seguito della quantizzazione, il campo non descrive la natura probabilistica della singola particella, ma diventa esso stesso l'ente fondamentale di cui le particelle associate sono semplici manifestazioni. A ciascuna tipologia di particella corrisponde quindi una teoria di campo e un'informazione importante a riguardo deriva dai gradi di libertà.

In meccanica classica il numero di gradi di libertà di un sistema è pari alla dimensione dello spazio delle configurazioni, o equivalentemente a metà delle dimensioni dello spazio delle fasi. In teoria dei campi vi è un numero infinito di gradi di libertà, ma possiamo comunque contare il numero di gradi di libertà in ogni punto spaziale, che risulta finito. Per esempio, un campo scalare reale ha un solo grado di libertà: in seguito alla quantizzazione del campo questo si traduce nel fatto che il campo è associato a un solo tipo di particella. Un campo scalare complesso invece ha due gradi di libertà, che corrispondono in teoria quantistica alla particella e all'antiparticella (cioè una particella con stessa massa e spin, ma con tutte le altre possibili cariche interne, come la carica elettrica, di segno opposto). Le corrette equazioni relativistiche che descrivono la dinamica dei campi dipendono dalla massa  $m$  e dallo spin  $s$  delle particelle descritte:

- $s = 0$ : equazione di Klein-Gordon
- $s = 1/2$ : equazione di Dirac
- $s = 1, m = 0$ : equazioni (libere) di Maxwell
- $s = 1, m \neq 0$ : equazioni di Proca
- $s = 3/2$ : equazione di Rarita-Schwinger
- $s = 2$ : equazioni di Pauli-Fierz

Di seguito approfondiamo la trattazione delle equazioni di Klein-Gordon, Dirac e Maxwell.

## 2.2 Equazione di Klein-Gordon

Una particella senza spin è descritta da una funzione d'onda con una sola componente,  $\phi$ . In analogia con quanto fatto per l'equazione di Schroedinger, possiamo considerare la relazione relativistica di energia e impulso, infatti sappiamo che:

$$p_\mu p^\mu = -m^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{E^2}{c^2} + \mathbf{p}^2 = -m^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

Sostituendo le forme operatoriali di  $E$  e  $\mathbf{p}$  delle equazioni (2.1) applicate a  $\phi$  otteniamo la seguente *equazione di Klein-Gordon*:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) = 0$$

che può essere scritta in notazioni relativistiche introducendo l'operatore d'alembertiano  $\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$  e ponendo  $c = \hbar = 1$ :

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi(x) = 0 \quad (2.5)$$

### Simmetrie dell'equazione di Klein-Gordon

Il campo complesso di Klein-Gordon libero (cioè senza interazioni) possiede simmetrie rigide generate dal gruppo di Poincaré e simmetrie rigide per trasformazioni di fase generate dal gruppo  $U(1)$ . Vediamo in base al teorema di Noether quali grandezze vengono conservate.

Il principio d'azione da cui si ottiene l'equazione di Klein-Gordon è:

$$S[\phi, \phi^*] = \int (-\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) d^4x$$

Come sappiamo, le simmetrie di traslazioni spaziotemporali del gruppo di Poincaré portano alla conservazione del tensore energia-impulso, che può essere calcolato dalla relazione (1.10):

$$T^\mu_\lambda = \partial^\mu \phi^* \partial_\lambda \phi + \partial^\mu \phi \partial_\lambda \phi^* + \delta^\mu_\lambda \mathcal{L}$$

Ci attendiamo che la simmetria  $U(1)$  comporti la conservazione della probabilità, come avviene per l'equazione di Schroedinger. Le trasformazioni infinitesime di  $U(1)$  producono variazioni:

$$\delta\phi(x) = i\alpha\phi(x) \quad \delta\phi^*(x) = -i\alpha\phi^*(x)$$

L'azione è strettamente invariante rispetto a questa trasformazione, cioè il termine di bordo  $K$  della (1.7) è nullo. La corrente conservata si ottiene quindi dalla (1.9) in cui compare la sola variazione on-shell:

$$J^\mu = i\phi^* \partial^\mu \phi - i\phi \partial^\mu \phi^* \quad (2.6)$$

$$\rho = J^0 = i\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - i\phi \frac{\partial\phi^*}{\partial t} \quad (2.7)$$

### Problema dell'interpretazione di singola particella

L'interpretazione di  $\rho$  come densità di probabilità presenta subito un problema, infatti non è definita positiva. Essendo l'equazione di Klein-Gordon del secondo ordine, a  $\phi$  e  $\partial\phi/\partial t$

può essere assegnato un valore arbitrario a un certo istante, per cui  $\rho$  può assumere valori negativi e la sua interpretazione come densità di probabilità deve essere abbandonata, così come l'interpretazione dell'equazione di Klein-Gordon come equazione di singola particella con funzione d'onda  $\phi$ : deve invece essere reinterpretata come un'equazione di campo. Osserviamo però che se  $\phi$  è reale allora  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  si annullano. Si può mostrare infatti che  $\phi$  reale corrisponde a particelle elettricamente neutre e quindi  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  vengono interpretate rispettivamente come la densità di carica e di corrente elettrica.

Vi è inoltre un altro problema: le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon ammettono sia energie positive che energie negative. Infatti si possono cercare soluzioni di onda piana del tipo:

$$\phi(x) \sim e^{ip_\nu x^\nu}$$

che inserita nell'equazione di Klein-Gordon (2.5) produce:

$$-(p_\mu p^\mu + m^2) e^{ip_\nu x^\nu} = 0$$

L'onda piana è soluzione se il quadrimpulso soddisfa la condizione di mass-shell  $p_\mu p^\mu = -m^2$  che è risolta da:

$$(p^0)^2 = E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

Le soluzioni con energia negativa segnalano l'esistenza di antiparticelle. Questa interpretazione è giustificabile rigorosamente a seguito della quantizzazione dei campi.

## 2.3 Equazione di Dirac

Storicamente Dirac trovò la corretta equazione per descrivere particelle di spin 1/2 cercando un'equazione relativistica che potesse avere un'interpretazione probabilistica per essere consistente con i principi della meccanica quantistica, a differenza dell'equazione di Klein-Gordon che non ammette questa interpretazione. Tuttavia tale interpretazione non potrà essere mantenuta in presenza di interazioni, e la funzione d'onda di Dirac dovrà essere trattata come un campo classico da quantizzare.

### Rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz

Per giustificare questa equazione, introduciamo l'appropriata rappresentazione del gruppo di Lorentz. In generale, un campo può essere trasformato da una generica rappresentazione del gruppo di Lorentz  $D[\Lambda]$  come:

$$\phi^a(x) \rightarrow D[\Lambda]^a_b \phi^b(\Lambda^{-1}x)$$

Abbiamo visto che il gruppo di Lorentz dipende da 6 parametri indipendenti e l'algebra di Lie ha quindi una base di 6 generatori, che possiamo indicare con  $(\mathcal{M}^A)^{\mu\nu}$  con

$A = 1, \dots, 6$ . Questi, come abbiamo visto nel capitolo 1.4, sono antisimmetrici. È in realtà conveniente sostituire l'indice  $A$  con una coppia di indici antisimmetrici  $\rho, \sigma = 0, \dots, 3$ . L'antisimmetria degli indici comporta che le  $(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu\nu}$  siano 6 diverse matrici. Con questa notazione possiamo scrivere le matrici di base come:

$$(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu\nu} = i\eta^{\sigma\mu}\eta^{\rho\nu} - i\eta^{\rho\mu}\eta^{\sigma\nu}$$

dove  $\mu$  e  $\nu$  sono gli indici matriciali mentre  $\rho$  e  $\sigma$  denotano l'elemento della base. I generatori del gruppo di Lorentz soddisfano la relazione di commutazione:

$$[\mathcal{M}^{\rho\sigma}, \mathcal{M}^{\mu\nu}] = -i\eta^{\sigma\mu}\mathcal{M}^{\rho\nu} + i\eta^{\rho\mu}\mathcal{M}^{\sigma\nu} - i\eta^{\rho\nu}\mathcal{M}^{\sigma\mu} + i\eta^{\sigma\nu}\mathcal{M}^{\rho\mu} \quad (2.8)$$

dove, per eseguire il prodotto tra matrici, abbiamo abbassato un indice ottenendo l'espressione:

$$(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu}_{\nu} = i\eta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\nu} - i\eta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}$$

La trasformazione infinitesima di Lorentz è quindi ottenuta dai numeri infinitesimi  $\Omega_{\rho\sigma}$  che identificano la trasformazione di Lorentz:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \quad \text{con} \quad \omega^{\mu}_{\nu} = \frac{i}{2}\Omega_{\rho\sigma}(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu}_{\nu}$$

mentre una trasformazione finita può essere espressa in forma esponenziale:

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\Omega_{\rho\sigma}(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^{\mu}_{\nu}}$$

Vogliamo trovare altre matrici che soddisfano la relazione di commutazione (2.8), con le quali costruiremo la rappresentazione spinoriale. Definiamo l'*algebra di Clifford*:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}I$$

dove le matrici  $\gamma^{\mu}$  sono un insieme di quattro matrici e  $I$  è l'identità. Dobbiamo quindi trovare quattro matrici che soddisfino le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} &= -\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \quad \mu \neq \nu \\ (\gamma^0)^2 &= -I \quad , \quad (\gamma^i)^2 = I \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

La più semplice rappresentazione dell'algebra di Clifford è in termini di matrici  $4 \times 4$ . Un esempio è la rappresentazione detta di *Weyl* o *chirale*:

$$\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

dove le matrici  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si può mostrare che la seguente rappresentazione:

$$S^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu + \frac{i}{2}\eta^{\mu\nu}$$

è una rappresentazione dell'algebra di Lorentz in quanto soddisfa la relazione di commutazione analoga alla (2.8):

$$[S^{\rho\sigma}, S^{\mu\nu}] = -i\eta^{\sigma\mu}S^{\rho\nu} + i\eta^{\rho\mu}S^{\sigma\nu} - i\eta^{\rho\nu}S^{\sigma\mu} + i\eta^{\sigma\nu}S^{\rho\mu}$$

Indichiamo gli elementi delle matrici  $S^{\mu\nu}$  con indici  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$  per distinguerli dagli indici tensoriali, poiché si tratta di una diversa rappresentazione. I campi su cui agiscono queste matrici prendono il nome di *spinori di Dirac*  $\psi^\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ . Per costruzione gli spinori si trasformano sotto il gruppo di Lorentz come:

$$\psi^\alpha(x) \rightarrow S[\Lambda]^\alpha_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x)$$

### Azione di Dirac

Vogliamo ora costruire un'azione che sia Lorentz invariante. Si può mostrare che, definendo il *coniugato di Dirac*:

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)i\gamma^0$$

le grandezze  $\bar{\psi}\psi$  e  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  si trasformano rispettivamente come uno scalare e un vettore. Con queste grandezze siamo in grado di costruire la più semplice azione Lorentz invariante per gli spinori, l'azione di Dirac:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi})d^4x \quad \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = -\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi$$

È immediato vedere che è Lorentz invariante in quanto  $\bar{\psi}\psi$  è uno scalare e il vettore  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  ha l'indice contratto. Ora, variando rispetto a  $\bar{\psi}$  e a  $\psi$  rispettivamente otteniamo l'*equazione di Dirac* e la sua coniugata:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad \partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) = 0$$

dove possiamo esplicitare gli indici spinoriali:

$$[(\gamma^\mu)_\alpha^\beta \partial_\mu + m \delta_\alpha^\beta]\psi_\beta(x) = 0$$

e analogamente per la coniugata.

L'equazione di Dirac mescola diverse componenti di  $\psi$  tramite le matrici  $\gamma^\mu$ , tuttavia ogni componente di  $\psi$  risolve l'equazione di Klein-Gordon:

$$(\gamma^\nu \partial_\nu - m)(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = (\gamma^\nu \partial_\nu \gamma^\mu \partial_\mu - m^2)\psi = 0$$

Ma  $\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{2} \{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} \partial_\nu \partial_\mu = \eta^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu = \partial^\mu \partial_\mu$ , quindi otteniamo:

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\psi = 0$$

L'equazione di Klein-Gordon, non contenendo matrici, si applica indipendentemente ad ogni componente  $\psi_\alpha$ .

### Il problema delle energie negative

Vediamo se la nuova equazione di Dirac fornisce una corrente di Noether associata alle simmetrie  $U(1)$  che sia positiva e che possa quindi avere un'interpretazione probabilistica. L'azione di Dirac è strettamente invariante rispetto alle trasformazioni infinitesime:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) + i\alpha\psi(x) \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - i\alpha\bar{\psi}(x)$$

La corrente è quindi data dalla sola variazione on-shell (1.8):

$$\delta S = \int \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi \right) d^4x = \alpha \int \partial_\mu (-i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) d^4x = \alpha \int (-\partial_\mu J^\mu) d^4x$$

e otteniamo quindi:

$$J^\mu = i\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

In particolare la densità di carica conservata è definita positiva:

$$J^0 = i\bar{\psi} \gamma^0 \psi = i\psi^\dagger i\gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \geq 0$$

Dirac in effetti la interpretò inizialmente come una densità di probabilità, tuttavia la corretta interpretazione è quella di densità di carica elettrica. Infatti questa equazione non risolve il problema delle soluzioni con energia negativa. Consideriamo l'ansatz:

$$\psi(x) \sim w(p)e^{ip_\nu x^\nu}$$

dove  $w(p)$  è uno spinore a 4 componenti. Sostituendolo nell'equazione di Dirac,  $w(p)$  deve soddisfare:

$$(i\gamma^\mu p_\mu + m)w(p) = 0 \tag{2.9}$$

Moltiplicando per  $(i\gamma^\mu p_\mu + m)$  si ottiene che l'equazione è sempre soddisfatta se il quadrimpulso è on-shell:  $p_\mu p^\mu = -m^2$ . Vi sono quattro soluzioni, due a energia positiva e due ad energia negativa. Possiamo vederlo direttamente nel seguente esempio: consideriamo il caso semplice di particella a riposo  $p^\mu = (E, 0, 0, 0)$ . L'equazione (2.9) diventa:

$$0 = (i\gamma^0 p_0 + m)w(p) = (i\gamma^0 E + m)w(p)$$

Esplicitando la matrice:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix} w(p) = m w(p)$$

Esistono quindi due soluzioni ad energia positiva  $E = m$ :

$$\psi_1(x) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_2(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

e due ad energia negativa  $E = -m$ :

$$\psi_3(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt} \quad \psi_4(x) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}$$

Le energie negative indicano che non vi è uno stato di minima energia: nella teoria che prevede l'interazione coi fotoni, un elettrone a energia positiva potrebbe emettere un fotone cadendo in uno stato a energia negativa e continuare così emettendo energia infinita. Dirac riuscì a trovare una spiegazione: gli elettroni obbediscono al principio di esclusione di Pauli, quindi ciò che realmente impedisce a un elettrone di andare a energie negative potrebbe essere il fatto che quei livelli sono tutti già occupati da una distribuzione di elettroni ad energia negativa che è chiamata mare di Dirac. In questa ipotesi, ciò che siamo abituati a interpretare come vuoto è lo stato in cui tutti i livelli ad energia negativa sono pieni. Tuttavia se uno di questi elettroni ad energia negativa viene eccitato in uno stato a energia positiva, lascia una lacuna che appare come una particella con carica ed energia positiva. Dirac riuscì a predire così l'esistenza del positrone, risolvendo il problema delle energie negative. L'equazione di Dirac quindi non deve essere più interpretata come un'equazione di singola particella, di conseguenza  $\psi$  non rappresenta più una funzione d'onda ma un campo, tale che  $J^0 = \psi^\dagger \psi$  quantifica il numero di particelle associate al campo in un punto, tramite la loro carica.

### Gradi di libertà

La presenza di 4 soluzioni indipendenti potrebbe sembrare in contrasto con il numero di gradi di libertà del campo, in quanto vi sono 4 componenti complesse e quindi apparentemente 8 gradi di libertà. Infatti, per la Lagrangiana di Dirac il momento coniugato di  $\psi$  è:

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger$$

che non è proporzionale a  $\dot{\psi}$  ma a  $\psi^\dagger$ . Questo significa che lo spazio delle fasi è parametrizzato da  $\psi$  e  $\psi^\dagger$ , pertanto ha 8 dimensioni e il campo ha quindi  $8/2 = 4$  gradi di libertà, che come abbiamo detto corrispondono a particella e antiparticella, ciascuna con due gradi di libertà di spin.

### Chiralità e il problema della massa

La rappresentazione spinoriale di  $SO^\uparrow(3,1)$  è riducibile. Costruendo i proiettori:

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}$$

dove  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , possiamo dividere lo spinore di Dirac nelle sue componenti sinistrorse e destrorse (spinori di Weyl o chirali):

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad \psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi, \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi$$

Nella teoria delle rappresentazioni si indicano con  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  e lo spinore  $\psi$  è descritto dalla rappresentazione irriducibile  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Scrivendo la Lagrangiana in termini delle componenti chirali:

$$\mathcal{L}(\psi_L, \psi_R) = -\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (2.10)$$

possiamo osservare che una massa di Dirac  $m$  non può essere presente per fermioni chirali (fermioni puramente sinistrorsi per cui  $\psi_R = 0$  o puramente destrorsi per cui  $\psi_L = 0$ ). I fermioni che entrano nel modello standard sono chirali e non possono avere masse di Dirac, queste possono emergere come conseguenza del meccanismo di Higgs.

## 2.4 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell possono essere interpretate come equazioni per la propagazione dei fotoni (particelle con spin 1 senza massa). Queste equazioni sono Lorentz invarianti, anzi fu proprio a partire dalla loro covarianza che Einstein sviluppò la relatività ristretta. Vediamo quindi come esprimere questa teoria in una notazione manifestamente covariante.

### Elettromagnetismo classico

In elettrodinamica classica queste si scrivono in funzione del campo elettrico  $\mathbf{E}$ , del campo magnetico  $\mathbf{B}$  e delle densità di carica e di corrente  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  (in unità di Heaviside-Lorentz):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.11)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J} \quad (2.12)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.14)$$

Le equazioni senza sorgenti (2.13) e (2.14) possono essere risolte scrivendo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in termini di un potenziale scalare  $\Phi$  e un potenziale vettoriale  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (2.16)$$

I potenziali determinano il campo univocamente, ma i campi non determinano univocamente i potenziali. Infatti gli stessi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  che otteniamo da dei potenziali  $\Phi$  e  $\mathbf{A}$ , li otterremo anche dai potenziali:

$$\Phi' = \Phi + \partial_t \Gamma(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Gamma(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

dove  $\Gamma(\mathbf{x}, t)$  è una funzione generica dello spazio e del tempo. Una trasformazione dei potenziali che non modifica i campi è chiamata *trasformazione di gauge*,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono detti gauge invarianti.

### Equazioni di Maxwell in forma tensoriale

Possiamo riscrivere questi concetti in notazione relativistica. Definiamo il quadrivettore potenziale:

$$A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$$

e il tensore elettromagnetico:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

che è di conseguenza antisimmetrico e ha 6 componenti indipendenti. Con questa definizione, confrontandola con la (2.15) osserviamo che  $F^{0i} = E^i$ , mentre dal confronto con la (2.16) otteniamo che  $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$ :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Infine, definendo il quadrivettore:

$$J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$$

possiamo scrivere le equazioni di Maxwell in forma tensoriale:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (2.20)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.21)$$

La seconda prende il nome di identità di Bianchi.

La conservazione della corrente è necessaria per la consistenza delle equazioni di Maxwell. Infatti dall'espressione (2.19) e dalla (2.20):

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

Consideriamo le equazioni (2.17) e (2.18), possiamo combinarle in un'unica relazione:

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Gamma(x) \quad (2.22)$$

Infatti ponendo  $F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu$  otteniamo che  $F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ , quindi il tensore elettromagnetico è gauge invariante.

### Azione delle equazioni di Maxwell

Vogliamo ora scrivere un'azione che porti alle equazioni di Maxwell come equazioni del moto. Questa è data da:

$$S[A_\mu] = \int \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right) d^4x$$

L'azione è manifestamente Lorentz invariante, come risulta evidente dal fatto che tutti gli indici tensoriali sono contratti. Per quanto riguarda la gauge invarianza, il primo termine è invariante e quindi deve esserlo anche il secondo. Usando l'equazione (2.22) calcoliamo la variazione del secondo termine:

$$J^\mu A'_\mu - J^\mu A_\mu = -J^\mu \partial_\mu \Gamma = (\partial_\mu J^\mu) \Gamma - \partial_\mu (J^\mu \Gamma)$$

La corrente soddisfa l'equazione di continuità e il termine di derivata totale si annulla una volta integrato, se si assumono le opportune condizioni all'infinito. La Lagrangiana riscritta in termini del campo  $A^\mu$  diventa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + J^\mu A_\mu$$

In base al principio di minima azione (1.1) possiamo ricavare l'equazione (2.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu = -F^{\mu\nu} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= J^\nu \\ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 & \Rightarrow & \partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \end{aligned}$$

Ponendo nelle (2.20) e (2.21)  $J^\nu = 0$  otteniamo le equazioni libere di Maxwell che possono essere interpretate come equazioni per la propagazione dei fotoni.

## Gradi di libertà

Il campo vettoriale  $A^\mu$  ha 4 componenti, a cui apparentemente corrispondono 4 gradi di libertà. Tuttavia sappiamo che il fotone ha solo 2 gradi di libertà, che chiamiamo polarizzazioni. Questa discrepanza può essere risolta dalle due seguenti osservazioni:

- Nella Lagrangiana non compare la derivata temporale di  $A^0$ , ovvero  $A^0$  non ha dinamica.
- Abbiamo visto che la Lagrangiana è invariante per simmetrie di gauge: queste hanno un significato molto diverso rispetto alle simmetrie globali. Mentre queste ultime portano il sistema da uno stato a un altro equivalente, le simmetrie di gauge rappresentano una ridondanza delle variabili utilizzate e gli stati correlati dalla simmetria sono in realtà lo stesso stato. Questo appare nella non univocità della scelta di  $A^\mu$ : possiamo identificare  $A^\mu$  e  $A^\mu - \partial^\mu \Gamma$  come corrispondenti allo stesso stato fisico.

Il problema della ridondanza può essere risolto scegliendo un gauge, cioè imponendo una condizione che limiti la scelta di  $A^\mu$ . Una delle scelte possibili è quella del *gauge di Lorenz*  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Questa condizione può sempre essere imposta con un'opportuna scelta di  $\Gamma$ . Dato un campo  $A^\mu$ , possiamo scegliere un potenziale equivalente:

$$\bar{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Gamma \quad \text{con} \quad \partial_\mu \partial^\mu \Gamma = \partial_\mu A^\mu$$

Con questo vincolo i gradi di libertà sono ridotti a 3, tuttavia non abbiamo ancora identificato un'unica scelta del quadripotenziale. Possiamo scegliere infatti, dato un  $\bar{A}^\mu$  che soddisfa il gauge di Lorenz, un altro potenziale equivalente  $\tilde{A}^\mu$  che lo soddisfa a sua volta:

$$\tilde{A}^\mu = \bar{A}^\mu - \partial^\mu \Gamma \quad \text{con} \quad \partial_\mu \partial^\mu \Gamma = 0$$

I gradi di libertà sono quindi meno di 3. Per mostrare che i gradi di libertà sono proprio 2 e eliminare questa ridondanza residua si può imporre il *gauge di Coulomb*  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ : questo vincolo sulle 3 componenti spaziali riduce i gradi di libertà a 2.

Sfruttando il gauge di Lorenz possiamo provare che ciascuna componente  $A^\mu$  soddisfa un'equazione di Klein-Gordon. Infatti, sostituendo la definizione di  $F^{\mu\nu}$  nella (2.20) libera otteniamo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

Scegliendo il gauge di Lorenz  $\partial_\mu A^\mu = 0$  abbiamo infine che:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$$

Questa è proprio l'equazione di Klein-Gordon, da cui deduciamo che il campo  $A^\mu$ , una volta quantizzato, sarà associato a particelle senza massa, come atteso per i fotoni.

# Capitolo 3

## Teorie di gauge

In questo capitolo, grazie ai concetti introdotti nei Capitoli 1 e 2, possiamo finalmente sviluppare le teorie di gauge. Partendo dalla Lagrangiana di un campo materiale elettricamente carico vediamo come è possibile dedurre, a partire da un principio di simmetria di gauge associata a un gruppo di trasformazioni abeliano, la Lagrangiana che descrive l'interazione elettromagnetica. Questo procedimento è poi esteso ad altri tipi di interazioni, che risultano opportunamente descritte da teorie di gauge non abeliane (o di Yang-Mills). Infine ne analizziamo il significato geometrico.

### 3.1 Elettromagnetismo come teoria di gauge

Nel capitolo precedente abbiamo visto che l'equazione di Klein-Gordon, di Dirac e le equazioni libere di Maxwell, derivate tramite il principio d'azione, descrivono la propagazione dei campi liberi. Vogliamo ora studiare come questi campi interagiscono tra loro e per farlo dobbiamo scrivere una Lagrangiana che descriva l'interazione. La teoria dei campi prevede che questa possa essere determinata a partire da un principio di invarianza di gauge, che consiste nella richiesta che le trasformazioni di simmetria globali risultino simmetrie anche nel caso più generale in cui siano locali. Abbiamo già incontrato una simmetria di questo tipo: il potenziale del campo elettromagnetico non è univocamente definito, poiché vi si può aggiungere la derivata di una qualunque funzione dello spazio e del tempo senza che l'azione risulti modificata. Vediamo ora come la condizione di invarianza di gauge porti necessariamente all'introduzione del campo di gauge  $A^\mu$  e quindi dell'interazione elettromagnetica.

#### Lagrangiana di interazione del campo scalare complesso

Consideriamo un campo scalare complesso  $\phi$ . Sappiamo che la sua dinamica è descritta dall'equazione di Klein-Gordon e che l'invarianza per trasformazioni di fase  $U(1)$  comporta la conservazione locale di una carica di Noether data dall'integrale della (2.7), che non

può essere interpretata come probabilità, ma come carica elettrica. La trasformazione di fase considerata è rigida, cioè uguale in ogni punto  $x$  dello spazio e del tempo. Sappiamo però anche che, sempre per il teorema di Noether, la corrente si conserva solo quando il campo obbedisce alle equazioni del moto, ovvero solo quando l'azione è stazionaria. Se è presente un'interazione la dinamica è modificata: il campo non obbedisce più alle equazioni del moto libere e la corrente non si conserva. Estendiamo allora la definizione di simmetria e richiediamo che la Lagrangiana sia invariante anche per trasformazioni  $U(1)$  locali, che nella rappresentazione definita hanno la forma  $e^{i\Gamma(x)}$ . Il campo si trasforma nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{i\Gamma(x)}\phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi^{*'} = e^{-i\Gamma(x)}\phi^*\end{aligned}\tag{3.1}$$

La derivata di  $\phi$  però non si trasforma in modo covariante, cioè non si trasforma con  $U(1)$  nello stesso modo di  $\phi$ , infatti:

$$\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi' = e^{i\Gamma}\partial_\mu\phi + i(\partial_\mu\Gamma)e^{i\Gamma}\phi\tag{3.2}$$

$$\partial_\mu\phi^* \rightarrow \partial_\mu\phi^{*'} = e^{-i\Gamma}\partial_\mu\phi^* - i(\partial_\mu\Gamma)e^{-i\Gamma}\phi^*\tag{3.3}$$

A seguito di questa trasformazione quindi la Lagrangiana non è più invariante:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{KG}(\phi', \phi^{*'}) &= -\partial^\mu\phi^{*'}\partial_\mu\phi' - m^2\phi^{*'}\phi' \\ &= -(\partial_\mu\Gamma)(\partial^\mu\Gamma)\phi^*\phi + J^\mu(\partial_\mu\Gamma) - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi^*\phi \\ &= \mathcal{L}_{KG}(\phi, \phi^*) + J^\mu(\partial_\mu\Gamma) - (\partial_\mu\Gamma)(\partial^\mu\Gamma)\phi^*\phi\end{aligned}\tag{3.4}$$

Per ottenere l'invarianza rispetto alla trasformazione di gauge dobbiamo introdurre un nuovo termine nella Lagrangiana che compensi i termini prodotti in  $\mathcal{L}$  dalla trasformazione. Definiamo allora un nuovo quadrivettore  $A_\mu$  che contraiamo con la corrente di Noether:

$$\mathcal{L}_1(\phi, \phi^*, A_\mu) = -eJ^\mu A_\mu$$

La costante  $e$  introdotta è chiamata costante di accoppiamento ed è tale per cui  $(eA_\mu)$  ha le dimensioni di  $\partial_\mu$ . Richiediamo poi che abbia la seguente legge di trasformazione:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Gamma$$

in modo tale che:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_1 &= -eJ'^\mu A'_\mu \\ &= -e(J^\mu - 2\partial^\mu\Gamma\phi^*\phi)(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Gamma) \\ &= \mathcal{L}_1 + 2eA_\mu(\partial^\mu\Gamma)\phi^*\phi - J^\mu(\partial_\mu\Gamma) + 2(\partial_\mu\Gamma)(\partial^\mu\Gamma)\phi^*\phi\end{aligned}\tag{3.5}$$

In questo modo i termini contenenti la corrente di Noether nella (3.4) e nella (3.5) si elidono, ma dobbiamo introdurre un ulteriore termine per cancellare gli altri. Abbiamo infatti che:

$$\mathcal{L}'_{KG} + \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_1 + 2eA_\mu(\partial^\mu\Gamma)\phi^*\phi + (\partial_\mu\Gamma)(\partial^\mu\Gamma)\phi^*\phi$$

Osserviamo che i restanti termini possono essere eliminati se aggiungiamo alla Lagrangiana un termine quadratico in  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L}_2(\phi, \phi^*, A_\mu) = -e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_2 &= -e^2 \left( A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Gamma \right) \left( A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \Gamma \right) \phi^* \phi \\ &= \mathcal{L}_2 - 2e A_\mu (\partial^\mu \Gamma) \phi^* \phi - (\partial_\mu \Gamma) (\partial^\mu \Gamma) \phi^* \phi \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ristabilito l'invarianza:

$$\mathcal{L}'_{KG} + \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

Questo risultato è stato ottenuto introducendo un campo  $A_\mu$  che si trasforma opportunamente e interagisce con  $\phi$  tramite l'accoppiamento con la corrente di Noether  $J^\mu$ . Questo nuovo campo deve avere una Lagrangiana associata che ne descriva la dinamica libera, in modo analogo a  $\mathcal{L}_{KG}$  per il campo  $\phi$ . Questa deve essere gauge invariante a sua volta, poiché abbiamo già compensato tutti i termini in  $\mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ . Definiamo il rotore 4-dimensionale di  $A_\mu$ , che è gauge invariante poiché le derivate commutano:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Introduciamo allora il termine scalare:

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Abbiamo ottenuto la Lagrangiana complessiva  $\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$  che descrive l'interazione tra il campo scalare complesso  $\phi$  e un nuovo campo vettoriale  $A_\mu$ . Possiamo riscriverla nella forma:

$$\mathcal{L}_{tot} = -(\partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* + ieA^\mu\phi^*) - m^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.6)$$

Possiamo identificare  $A_\mu$  con il potenziale di gauge del campo elettromagnetico e  $F^{\mu\nu}$  col tensore elettromagnetico. Siamo quindi giunti a una nuova interpretazione del campo elettromagnetico: è il campo di gauge che deve essere introdotto per garantire l'invarianza per trasformazioni di gauge  $U(1)$ .

## La derivata covariante e la sostituzione minimale

Confrontando  $\mathcal{L}_{tot}$  con  $\mathcal{L}_{KG}$  possiamo notare che la derivata ordinaria viene sostituita dalla *derivata covariante*:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$$

Infatti, a differenza di  $\partial_\mu$ , ha la proprietà di trasformarsi in modo covariante rispetto alla simmetria  $U(1)$ , in pratica preserva la natura tensoriale dell'oggetto su cui agisce:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi \quad \rightarrow \quad D'_\mu \phi' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi' = (\partial_\mu - ieA_\mu - i\partial_\mu\Gamma)e^{i\Gamma}\phi \\ &= \partial_\mu(e^{i\Gamma}\phi) - ieA_\mu e^{i\Gamma}\phi - i(\partial_\mu\Gamma)e^{i\Gamma}\phi \\ &= e^{i\Gamma}\partial_\mu\phi - ieA_\mu e^{i\Gamma}\phi = e^{i\Gamma}D_\mu\phi \end{aligned}$$

La sostituzione della derivata ordinaria con quella covariante corrisponde a un risultato noto della meccanica Hamiltoniana. In questo formalismo l'accoppiamento di una particella carica a un campo elettromagnetico è ottenuto tramite la sostituzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi \quad \rightarrow \quad H &= \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2}{2m} + e\Phi \end{aligned}$$

In presenza di un campo elettromagnetico il momento canonico  $\mathbf{p}$  e il momento covariante  $\boldsymbol{\pi}$  non coincidono. Dall'Hamiltoniana classica otteniamo l'equazione di Schroedinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \right)^2 \psi + e\Phi(\mathbf{x})\psi$$

Questa equazione apparentemente non è gauge invariante poiché dipende esplicitamente da  $\mathbf{A}$  e  $\Phi$ , ma tutte le grandezze calcolate a partire da questa equazione devono esserlo in quanto la scelta del gauge non ha significato fisico e deve essere arbitraria. L'equazione di Schroedinger deve quindi essere gauge covariante. Questo può essere verificato riscrivendo l'equazione nella forma:

$$\left( i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right) \psi = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} -i\hbar\mathbf{D} &= -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D} = \nabla - i\frac{e}{c\hbar}\mathbf{A} \\ i\hbar D_t &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \quad \rightarrow \quad D_t = \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e}{\hbar}\Phi \end{aligned}$$

che corrispondono proprio alla derivata covariante già introdotta, tramite la sostituzione di  $A_\mu = (-\Phi, \mathbf{A})$ , dell'operatore differenziale  $\partial_\mu$  e ponendo  $c = \hbar = 1$ . Come abbiamo

visto, ciascuna delle componenti della derivata covariante, applicata al campo, si trasforma in modo covariante, pertanto sotto la simmetria  $U(1)$  l'equazione di Schroedinger risulta invariante in forma. La sostituzione della derivata con quella covariante per garantire l'invarianza prende il nome di sostituzione minimale.

### Conservazione della corrente covariante

La Lagrangiana (3.6), essendo invariante per trasformazioni di gauge  $U(1)$ , lo è anche per trasformazioni di fase globali, ottenute ponendo il parametro  $\Gamma(x) = \text{cost}$ . La nuova corrente conservata si ottiene dalla sola variazione on-shell, poiché per costruzione la (3.6) è strettamente invariante:

$$\begin{aligned}\Gamma \mathcal{J}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \delta\phi^* \\ &= -(\partial^\mu \phi^* + ie\phi^* A^\mu)(i\Gamma\phi) + (-\partial^\mu \phi + ie\phi A^\mu)(-i\Gamma\phi^*) \\ &= i\Gamma\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - i\Gamma\phi(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^*\end{aligned}$$

Nell'interazione quindi la corrente conservata è la *corrente covariante*:

$$\mathcal{J}^\mu = i\phi^* D^\mu \phi - i\phi D^\mu \phi^*$$

Con un fattore  $e$  che rappresenta la carica dell'elettrone questa corrente è identificata con la corrente elettromagnetica. Variando la Lagrangiana (3.6) rispetto ad  $A_\mu$  possiamo calcolare le corrispondenti equazioni di Maxwell non omogenee. Riscriviamo la (3.6):

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{KG} - eJ^\mu A_\mu - e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Dalla formula (1.1) otteniamo che:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= eJ^\nu + 2e^2 A^\nu \phi^* \phi \\ &= e(i\phi^* \partial^\nu \phi - i\phi \partial^\nu \phi^*) + 2e^2 A^\nu \phi^* \phi \\ &= ei\phi^* D^\nu \phi - ei\phi D^\nu \phi^* \\ &= e\mathcal{J}^\nu\end{aligned}$$

La corrente  $e\mathcal{J}^\nu$  risulta conservata nell'interazione tra il campo scalare  $\phi$  e il campo elettromagnetico  $A_\mu$ , grazie all'antisimmetria del tensore elettromagnetico.

La carica elettrica  $e$  assume quindi un doppio significato. È sia una quantità conservata, in base al teorema di Noether, sia una costante che quantifica l'intensità con cui una particella interagisce col campo elettromagnetico.

### Massa del campo di gauge

Abbiamo già osservato che il campo elettromagnetico è non massivo poiché soddisfa un'equazione di Klein-Gordon senza massa, ma anche questo fatto può essere dedotto dal

principio di gauge. Un termine di massa nella Lagrangiana avrebbe la forma:

$$\mathcal{L}_M = M^2 A_\mu A^\mu$$

che evidentemente non è gauge invariante. Pertanto l'invarianza di gauge richiede che il campo di gauge sia non massivo.

## 3.2 Teoria di Yang-Mills

Possiamo sintetizzare quanto fatto nel paragrafo precedente per ottenere la Lagrangiana d'interazione del campo materiale scalare con il campo elettromagnetico, che descrive particelle non massive di spin 1.

- La Lagrangiana libera del campo scalare possiede una simmetria rigida  $U(1)$ , che può essere espressa nella forma:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{i\Gamma} \phi = U\phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi^{*'} = e^{-i\Gamma} \phi^* = U^{-1}\phi^*\end{aligned}$$

dove  $U^{-1} = U^*$ .  $U$  in questo caso è la rappresentazione definita di  $U(1)$ , ma si può definire una generica rappresentazione irriducibile per i tensori che si trasformano come:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = e^{iq\Gamma} \phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi^{*'} = e^{-iq\Gamma} \phi^*\end{aligned}$$

dove  $q$  individua la carica del tensore e definisce la rappresentazione di  $U(1)$ .

- Postuliamo che la Lagrangiana di interazione abbia anche una simmetria  $U(1)$  locale, per cui imponiamo  $U = U(x)$  e il campo si trasforma secondo le (3.1). Di conseguenza, la Lagrangiana deve essere estesa introducendo dei nuovi termini.
- Sostituiamo alle derivate ordinarie la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

che ha la proprietà di preservare la natura tensoriale, agendo sul campo nel modo seguente:

$$D_\mu \phi \rightarrow D'_\mu \phi' = U D_\mu \phi \tag{3.7}$$

- Il termine  $A_\mu$  è il *potenziale di gauge* e la sua legge di trasformazione è determinata imponendo che valga la (3.7). Questo avviene se:

$$\begin{aligned}
A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Gamma = A_\mu - \frac{i}{e} e^{-i\Gamma} \partial_\mu e^{i\Gamma} \\
&= A_\mu - \frac{i}{e} U^{-1} \partial_\mu U = A_\mu + \frac{i}{e} U \partial_\mu U^{-1} \\
&= U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U \partial_\mu U^{-1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che:

$$0 = \partial_\mu (U^{-1} U) = U^{-1} \partial_\mu U + U \partial_\mu U^{-1}$$

poiché il gruppo delle fasi è abeliano.

- Le derivate covarianti non commutano. Il loro commutatore dà origine al *campo di forza*, il cui contributo deve a sua volta essere aggiunto alla Lagrangiana di interazione. Sfruttando la bilinearità del commutatore:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu, \partial_\nu] - ie[A_\mu, \partial_\nu] - ie[\partial_\mu, A_\nu] - e^2[A_\mu, A_\nu] \\
&= -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Il campo  $F_{\mu\nu}$  è gauge invariante e il suo ruolo è quello di descrivere la dinamica di  $A_\mu$ .

Quello che abbiamo ottenuto nel caso del campo scalare complesso è la Lagrangiana d'interazione:

$$\mathcal{L}_{tot} = -(D_\mu \phi)(D^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

## Costruzione di una teoria di gauge non abeliana

Vogliamo ora generalizzare questo procedimento al caso in cui la Lagrangiana non abbia una simmetria abeliana, come nel caso di  $U(1)$ , ma piuttosto non abeliana come  $SU(N)$ . La simmetria globale è necessaria perché deve esistere una corrente conservata da accoppiare al campo di gauge nell'interazione. Grazie a questa estensione, le teorie di gauge sono il principio guida per la costruzione della dinamica delle interazioni fondamentali:  $SU(3)$  porta all'introduzione dell'interazione forte e della conservazione della carica di colore (che è una quantità tensoriale, a differenza della carica elettrica), mentre la più complessa  $SU(2) \times U(1)$  è la simmetria alla base della teoria elettrodebole. In generale l'estensione è possibile per qualsiasi gruppo di simmetria compatto. L'idea è quella di procedere il più possibile in analogia con il caso dell'elettromagnetismo.

- Consideriamo un set di  $N$  campi identici, per esempio fermionici, assemblati in un vettore colonna:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi^N \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

la cui Lagrangiana libera è invariante per trasformazioni globali  $SU(N)$ . La trasformazione opera sul campo tramite matrici  $N \times N$  unitarie  $V$ :

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = V\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}V^{-1} \end{aligned}$$

dove  $V^{-1} = V^\dagger$ .

- Postuliamo che la Lagrangiana sia invariante per trasformazioni  $SU(N)$  locali. Possiamo scriverle in termini di generatori del gruppo come:

$$e^{i\Gamma^a(x)T^a}$$

Gli indici di  $\Gamma^a(x)$  sono alzati e abbassati con la metrica di Killing, che nel caso di  $SU(N)$  è l'identità.

- Introduciamo la derivata covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + gW_\mu(x) \quad (3.10)$$

dove compare la *costante di accoppiamento*  $g$ . Nell'equazione (3.10) è sottintesa una matrice identità  $N \times N$  che moltiplica  $\partial_\mu$ . Per definizione la derivata covariante deve trasformarsi come:

$$D_\mu\psi \rightarrow D'_\mu\psi' = VD_\mu\psi \quad (3.11)$$

In questo modo, se la sostituiamo alle derivate che compaiono nella Lagrangiana, questa risulta gauge invariante.

- Il termine  $W_\mu(x)$  nella derivata covariante è in questo caso una matrice  $N \times N$  hermitiana senza traccia ed è chiamata potenziale di gauge. Ha valori nell'algebra di Lie di  $SU(N)$  e può essere infatti scritto in termini dei generatori  $T^a$ :

$$W_\mu(x) = -iW_\mu^a(x)T^a$$

Questa relazione definisce i *campi di gauge*  $W_\mu^a(x)$ , che sono quindi in numero uguale al numero dei generatori del gruppo  $SU(N)$ , che sappiamo essere  $N^2 - 1$ .

Dalla richiesta di covarianza di  $D_\mu$  otteniamo la legge di trasformazione dei campi di gauge in (3.11):

$$\begin{aligned}
VD_\mu\psi &= V(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a)\psi = V(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a)(V^{-1}V\psi) \\
&= V(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a)(V^{-1}\psi') \\
&= V\partial_\mu(V^{-1}\psi') - igVW_\mu^a T^a V^{-1}\psi' \\
&= V[V^{-1}\partial_\mu\psi' + (\partial_\mu V^{-1})\psi'] - igVW_\mu^a T^a V^{-1}\psi' \\
&= \partial_\mu\psi' + V(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a)V^{-1}\psi' \\
&= [\partial_\mu + V(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a)V^{-1}]\psi' \\
&= (\partial_\mu - igW_\mu^{a'} T^a)\psi'
\end{aligned}$$

Da questa deduciamo che:

$$W_\mu^a \rightarrow W_\mu^{a'} = VW_\mu^a V^{-1} + \frac{i}{g}V\partial_\mu V^{-1}$$

- È necessario ora definire un termine che descriva la dinamica di  $W_\mu(x)$ . Definiamo il campo di forza in analogia al campo elettromagnetico, cioè a partire dal commutatore della derivata covariante:

$$[D_\mu, D_\nu] = gF_{\mu\nu}$$

che possiamo scrivere invertendo la relazione:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu] \quad (3.12)$$

In questo caso le matrici  $W_\mu$  non commutano, poichè  $SU(N)$  è non abeliano. Questo implica che il campo di forza non sia gauge invariante, come avviene nel caso del campo elettromagnetico:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow VF_{\mu\nu}V^{-1}$$

Possiamo ora procedere a completare la Lagrangiana di interazione  $\mathcal{L}_0$  con un termine che dia dinamica al campo  $W_\mu(x)$ . Questo deve essere gauge invariante, ma a differenza che per  $U(1)$  il campo di forza non lo è. Possiamo però sfruttare la ciclicità della traccia e definire il termine scalare:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\text{tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \quad (3.13)$$

La Lagrangiana complessiva  $\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$  è la Lagrangiana di Yang-Mills.

Possiamo osservare una proprietà dei campi di gauge non abeliani che non avevamo nel caso del campo elettromagnetico. Esplicitiamo i generatori del campo:

$$W_\mu(x) = -iW_\mu^a(x)T^a$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -iF_{\mu\nu}^a(x)T^a$$

e usiamo il fatto che:

$$[T^a, T^b] = if_{ab}^c T^c$$

Otteniamo infine usando la (3.12):

$$F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu W_\nu^c - \partial_\nu W_\mu^c + gf^{abc}W_\mu^a W_\nu^b$$

L'ultimo termine ci dice che  $\mathcal{L}_1$  include le interazioni tra i campi di gauge: per esempio nella QCD i campi di gauge, chiamati gluoni, possono interagire fortemente tra loro. L'autointerazione è possibile perché nelle teorie di gauge non abeliane le costanti di struttura non sono nulle, invece nella QED i campi di gauge sono i fotoni e non sono autointeragenti.

### 3.3 Geometria dell'invarianza di gauge

Abbiamo visto come la simmetria di gauge possa essere usata come principio di invarianza per determinare la forma di una Lagrangiana di interazione. Per garantire questa invarianza abbiamo introdotto dei campi *ad hoc* che si trasformano in modo opportuno, ma al di là della necessità formale di introdurli hanno in realtà un preciso significato geometrico. Vediamolo innanzitutto per la teoria di gauge abeliana  $U(1)$ , poi procederemo analogamente per  $SU(N)$ .

#### Teoria di gauge abeliana

Data la trasformazione (3.1) del campo  $\phi$ , il termine di massa della Lagrangiana di Klein-Gordon  $m^2\phi^*\phi$  è invariante. I problemi sorgono nei termini di derivazione. La derivata di  $\phi(x)$  in direzione  $n^\mu$  è definita dal limite:

$$n^\mu \partial_\mu \phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \epsilon n) - \phi(x)}{\epsilon}$$

Il problema di questa definizione per una teoria che richiede l'invarianza locale sta nel fatto che i due campi che vengono sottratti si trasformano diversamente sotto la (3.1). La derivata ordinaria non si trasforma in modo semplice e non ha un'immediata interpretazione geometrica. Affinché gli elementi sottratti si trasformino allo stesso modo, dobbiamo introdurre un termine che compensi la differenza tra le trasformazioni di fase. Definiamo una grandezza scalare  $U(y, x)$  che dipende dai due punti vicini in cui è valutato il campo e si deve trasformare come:

$$U(y, x) \rightarrow e^{i\Gamma(y)}U(y, x)e^{-i\Gamma(x)} \quad (3.14)$$

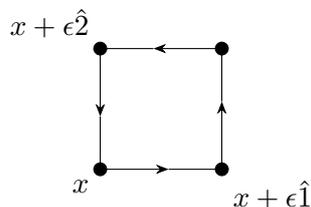


Figura 3.1: Costruzione del campo di forza tramite l'applicazione di comparatori attorno a un piccolo quadrato nel piano (1,2)

Quando  $y = x$  poniamo  $U(y, y) = 1$ . Possiamo richiedere che  $U(y, x)$  sia un termine di fase:  $U(y, x) = e^{i\Phi(y,x)}$ . In questo modo gli oggetti  $\phi(y)$  e  $U(y, x)\phi(x)$  hanno la stessa legge di trasformazione e possiamo sottrarli nonostante la simmetria locale. Possiamo quindi definire la derivata covariante come:

$$n^\mu D_\mu \phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x)\phi(x)}{\epsilon} \quad (3.15)$$

Per rendere esplicita questa definizione dobbiamo esprimere il comparatore  $U(y, x)$  per punti  $x$  e  $y$  separati da una distanza infinitesima. Se  $\Phi(y, x)$  è continua allora  $U(y, x)$  può essere espansa al primo ordine in  $\epsilon$ :

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 + i\epsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\epsilon^2) \quad (3.16)$$

Abbiamo estratto arbitrariamente la costante  $e$ . Il coefficiente dello spostamento  $\epsilon n^\mu$  è un nuovo campo vettoriale  $A_\mu(x)$ , che essendo il limite infinitesimo del comparatore tra le simmetrie locali è chiamato *connessione*. Sostituendo la (3.16) nella (3.15) la derivata covariante assume allora la forma usuale:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

Inoltre inserendo la (3.16) nella (3.14) otteniamo che:

$$\begin{aligned} U(x + \epsilon n, x) &\rightarrow e^{i\Gamma(x) + i\epsilon n^\mu \partial_\mu \Gamma(x) + O(\epsilon^2)} U(x + \epsilon n^\mu, x) e^{-i\Gamma(x)} \\ &= [1 + i\epsilon n^\mu \partial_\mu \Gamma(x) + O(\epsilon^2)] [1 + i\epsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\epsilon^2)] \\ &= 1 + i\epsilon n^\mu [A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Gamma(x)] + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

$A_\mu(x)$  si trasforma quindi come previsto secondo la (3.8).

Sostituendo a  $\partial_\mu$  la derivata covariante rendiamo localmente invariante la Lagrangiana di Klein-Gordon. Per completare la Lagrangiana di interazione dobbiamo costruire il termine cinetico per  $A_\mu(x)$ , che deve essere localmente invariante. Possiamo costruirlo a partire da  $U(y, x)$ . Estendiamo al secondo ordine in  $\epsilon$  la (3.16), imponendo la condizione

che  $U(x, y)^\dagger = U(y, x)$  (senza questa restrizione è necessario introdurre campi vettoriali addizionali che complicano la teoria). Possiamo allora scrivere  $U(y, x)$  per  $y - x \sim O(\epsilon)$  al secondo ordine nella forma:

$$U(y, x) = \exp \left[ ie(y - x)^\mu A_\mu \left( \frac{x + y}{2} \right) + O(\epsilon^3) \right] \quad (3.17)$$

Poiché geometricamente  $U(y, x)$  converte le trasformazioni di gauge dal punto  $x$  al punto  $y$ , possiamo valutare queste trasformazioni lungo un percorso quadrato di lato  $\epsilon$  nello spaziotempo, che partendo dal punto  $x$  ritorna in se stesso. Supponiamo per semplicità che questo quadrato giaccia sul piano (1,2), definito dai versori  $\hat{1}, \hat{2}$  come in Figura 3.1. Definiamo  $U(x)$  il prodotto dei comparatori tra i vertici del quadrato:

$$U(x) = U(x, x + \epsilon\hat{2})U(x + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{2} + \epsilon\hat{1})U(x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1})U(x + \epsilon\hat{1}, x)$$

La legge di trasformazione (3.14) per  $U(y, x)$  implica che, essendo  $U(y, x)$  scalare,  $U(x)$  sia invariante localmente e in particolare, nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  è una funzione localmente invariante di  $A_\mu$ . Per ottenere la forma di questa funzione usiamo lo sviluppo (3.17):

$$U(x) = \exp \left\{ ie\epsilon \left[ -A_2 \left( x + \frac{\epsilon}{2}\hat{2} \right) - A_1 \left( x + \frac{\epsilon}{2}\hat{1} + \epsilon\hat{2} \right) + A_2 \left( x + \epsilon\hat{1} + \frac{\epsilon}{2}\hat{2} \right) + A_1 \left( x + \frac{\epsilon}{2}\hat{1} \right) \right] + O(\epsilon^3) \right\}$$

Sviluppando l'esponente otteniamo che:

$$\begin{aligned} U(x) &= \exp \left[ ie\epsilon^2 [\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)] + O(\epsilon^3) \right] \\ &= 1 + ie\epsilon^2 [\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)] + O(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Pertanto la struttura:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

è localmente invariante e rappresenta il campo di forza elettromagnetico, di cui abbiamo messo in evidenza l'origine geometrica. Infatti  $U(x)$ , pur ritornando nel punto iniziale, è diverso da 1 per un termine proporzionale a  $F_{\mu\nu}$  e all'area  $\epsilon^2$  del quadrato.

## Teoria di gauge non abeliana

Consideriamo per semplicità la simmetria globale  $SU(2)$  della Lagrangiana di Dirac, che agisce tramite le matrici unitarie  $V$  sulle coppie di spinori:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \rightarrow V\psi$$

e richiediamo l'invarianza locale, per cui  $V = V(x)$ . Possiamo costruire la Lagrangiana di interazione applicando il metodo precedente: definiamo di nuovo una derivata covariante

che si trasformi in modo semplice. Introduciamo il comparatore  $U(y, x)$  che in questo caso deve essere una matrice  $2 \times 2$ . La legge di trasformazione che deve avere ora è:

$$U(y, x) \rightarrow V(y)U(y, x)V^\dagger(x) \quad (3.18)$$

Supponiamo anche in questo caso che  $U(y, y) = I$ . Inoltre restringiamoci al caso in cui  $U(y, x)$  sia unitaria. Vicino all'identità possiamo espanderla in termini dei 3 generatori di  $SU(2)$   $T^i = \frac{\sigma^i}{2}$ , dove le  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli:

$$U(x + \epsilon n, x) = I + ig\epsilon n^\mu W_\mu^i T^i + O(\epsilon^2) \quad (3.19)$$

Abbiamo estratto la costante  $g$  analoga a  $e$  nel caso abeliano. I campi  $W_\mu^i$ , uno per ogni generatore, sono le connessioni. Inserendo questa espansione nella definizione di derivata covariante:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x)\psi(x)}{\epsilon}$$

otteniamo l'espressione per la derivata covariante associata a  $SU(2)$ :

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^i(x)T^i$$

Di nuovo possiamo trovare la legge di trasformazione della connessione  $W_\mu^i$  inserendo la (3.19) nella legge di trasformazione (3.18):

$$I + ig\epsilon n^\mu W_\mu^i T^i \rightarrow V(x + \epsilon n)(I + ig\epsilon n^\mu W_\mu^i T^i)V^\dagger(x) \quad (3.20)$$

Dobbiamo espandere il termine a destra al primo ordine in  $\epsilon$ , tenendo conto del fatto che i generatori  $T^i$  non commutano. Espandiamo  $V(x + \epsilon n)$ :

$$\begin{aligned} V(x + \epsilon n)V^\dagger(x) &= [(1 + \epsilon n^\mu \partial_\mu + O(\epsilon^2))V(x)]V^\dagger(x) \\ &= I + \epsilon n^\mu (\partial_\mu V(x))V^\dagger(x) + O(\epsilon^2) \\ &= I - \epsilon n^\mu V(x)(\partial_\mu V^\dagger(x)) + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Sostituendo questo sviluppo nella (3.20) otteniamo la trasformazione di  $W_\mu^i$ :

$$W_\mu^i T^i \rightarrow V(x) \left( W_\mu^i T^i + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x)$$

Usando la derivata covariante possiamo costruire la Lagrangiana di  $\psi$  invariante. Il campo di forza può essere costruito usando il commutatore delle derivate covarianti, come fatto nella precedente sezione.

## Loop di Wilson

In entrambi i casi precedenti abbiamo usato il comparatore  $U(y, x)$  tra due punti separati da una distanza infinitesima, tuttavia si può considerare il caso in cui  $x$  e  $y$  siano a una distanza finita.

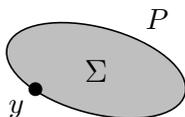


Figura 3.2: loop di Wilson.

Nel caso abeliano abbiamo visto che il prodotto di comparatori lungo un percorso chiuso infinitesimo come quello in Figura 3.1 non è 1 ma dipende da  $F_{\mu\nu}$  e da  $\epsilon^2$ . Questo è il caso particolare di una proprietà più generale: il comparatore tra due punti a distanza finita dipende dal percorso. Per mostrarlo procediamo in modo opposto a quanto fatto in precedenza. Partiamo dalla connessione  $A_\mu$ , che assumiamo si trasformi secondo la (3.8), poi costruiamo  $U(z, y)$  come funzione di  $A_\mu$  che si trasformi secondo la (3.14). Definiamo quindi la seguente fase dipendente dal percorso, chiamata *linea di Wilson*:

$$U_P(z, y) = \exp \left[ ie \int_P A_\mu(x) dx^\mu \right] \quad (3.21)$$

dove  $P$  è qualunque percorso che connette  $y$  a  $z$ . Questa espressione fornisce una forma esplicita del comparatore  $U(z, y)$  tra punti a distanza finita. La proprietà fondamentale della linea di Wilson è di dipendere da  $P$ . Se in particolare consideriamo un percorso chiuso che ritorna in  $y$  otteniamo il *loop di Wilson*:

$$U_P(y, y) = \exp \left[ ie \oint_P A_\mu(x) dx^\mu \right] \quad (3.22)$$

Questa è una funzione di  $A_\mu$  che in base alla (3.14) è gauge invariante. Infatti tutte le funzioni di  $A_\mu$  possono essere pensate come combinazioni di loop di Wilson per diverse scelte di  $P$ . Per mostrare questo fatto riscriviamo la (3.22) usando il teorema di Stokes:

$$U_P(y, y) = \exp \left[ i \frac{e}{2} \int_\Sigma F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} \right]$$

dove  $\Sigma$  è una superficie che ha come bordo  $P$ ,  $d\sigma^{\mu\nu}$  è un elemento di area della superficie,  $F_{\mu\nu}$  è il campo di forza elettromagnetico, che sappiamo essere il rotore 4-dimensionale di  $A_\mu$ . In Figura 3.2 è illustrata questa relazione tra loop di Wilson e campo di forza. Poiché il loop di Wilson è gauge invariante, questo è un altro modo di vedere che  $F_{\mu\nu}$  è gauge invariante. Viceversa, poiché tutte le funzioni gauge invarianti di  $A_\mu$  sono costruite a partire da  $F_{\mu\nu}$ , questa espressione ci mostra che  $U_P(y, y)$  è la più generale tra queste. Vogliamo generalizzare queste strutture per i campi non abeliani, tenendo conto del fatto che ora i campi  $W_\mu^a(x)T^a$  non commutano quando sono calcolati in punti diversi. Definiamo l'analogo di (3.21) come segue:

$$U_P(z, y) = \mathcal{P} \exp \left[ ig \int_0^1 W_\mu^a(x(s)) T^a \frac{dx^\mu}{ds} ds \right] \quad (3.23)$$

In questa espressione abbiamo parametrizzato il percorso  $P$  con  $s$  tra 0 e 1 in modo tale che  $x(0) = y$  e  $x(1) = z$ . Il simbolo  $\mathcal{P}$  significa che quando espandiamo l'esponenziale in serie di potenze, le matrici  $W_\mu^a(x(s))T^a$  sono disposte in modo che quelle con  $s$  maggiore sono a sinistra. Questa definizione ci consente di dire che la (3.23) è soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{ds}U_P(x(s), y) = \left[ ig \frac{dx^\mu}{ds} W_\mu^a(x(s))T^a \right] U_P(x(s), y) \quad (3.24)$$

Senza l'ordinamento dei termini in (3.23) ciò non sarebbe vero. Infatti se chiamiamo  $A(s)$  l'argomento dell'esponenziale nella (3.23) e espandiamo l'esponenziale senza  $\mathcal{P}$ :

$$\exp \left[ ig \int_0^s A(s') ds' \right] = I + ig \int_0^s A(s') ds' + \frac{(ig)^2}{2} \left[ \int_0^s A(s') ds' \right]^2 + \dots$$

e proviamo a derivare il termine quadratico rispetto a  $s$  otteniamo:

$$\frac{(ig)^2}{2} \left[ \int_0^s A(s') ds' \right] A(s) + \frac{(ig)^2}{2} A(s) \left[ \int_0^s A(s') ds' \right]$$

Il secondo termine va bene poiché fornisce parte del termine  $igA(s)U_P(x(s), y)$  nell'espressione a destra di (3.24), ma nel primo termine non possiamo scambiare  $A(s)$  e l'integrale. Si può invece dimostrare che l'espressione (3.23) è soluzione dell'equazione differenziale (3.24). La (3.24) può essere riscritta nella forma:

$$\frac{dx^\mu}{ds} D_\mu U_P(x, y) = 0 \quad (3.25)$$

Per mostrare che la (3.23) è la corretta generalizzazione della linea di Wilson, dobbiamo mostrare che soddisfa la legge di trasformazione (3.18).

Sia  $W$  l'insieme dei campi di gauge e  $W'$  il trasformato. Vogliamo mostrare che:

$$U_P(z, y, W') = V(z)U_P(z, y, W)V^\dagger(y) \quad (3.26)$$

dove abbiamo esplicitato la dipendenza di  $U_P(z, y)$  dai campi di gauge. Per costruzione  $U_P(z, y, W')$  è soluzione di (3.25) per  $W'$ , cioè:

$$\frac{dx^\mu}{ds} D'_\mu U_P(x, y, W') = 0$$

Sfruttando ora il fatto che la derivata covariante si trasforma come il suo argomento, cioè:

$$D'_\mu V(x) = V(x)D_\mu$$

abbiamo che la parte a destra della (3.26) è soluzione della (3.25) per  $W'$  se lo è  $U(x, y, W)$  per  $W$ , infatti:

$$\frac{dx^\mu}{ds} D'_\mu V(x)U_P(x, y, W)V^\dagger(y) = \frac{dx^\mu}{ds} V(x)D_\mu U_P(x, y, W)V^\dagger(y)$$

$$= V(x) \left[ \frac{dx^\mu}{ds}(x) D_\mu U_P(x, y, W) \right] V^\dagger(y)$$

Ma la soluzione di una equazione differenziale del primo ordine con una condizione iniziale fissata è unica, e sia la  $U_P(x, y, W')$  che la  $V(z)U_P(x, y, W)V^\dagger(y)$  sono l'identità per  $x = x(0) = y$  pertanto vale l'uguaglianza (3.26).

La linea di Wilson associata a un percorso chiuso che ritorna in  $y$  non è gauge invariante come per il caso abeliano, infatti:

$$U_P(y, y) \rightarrow V(y)U_P(y, y)V^\dagger(y) \quad (3.27)$$

ma in questo caso  $U_P(y, y)$  non è una semplice fase. Possiamo considerare di nuovo la trasformazione infinitesima lungo il percorso in Figura 3.1 e espandere  $U_P(x, x)$  al secondo ordine in  $\epsilon$ :

$$U_P(x, x) = 1 + ig\epsilon^2 F_{12}^a T^a + O(\epsilon^3)$$

Il campo di forza non è quindi gauge invariante, ma possiamo ricavarne la legge di trasformazione dai termini di ordine  $\epsilon^2$  nell'espansione della (3.27). Per convertire la linea di Wilson in un percorso chiuso gauge invariate prendiamo la traccia: per le teorie di gauge non abeliane, definiamo il loop di Wilson come la traccia della linea di Wilson lungo un percorso chiuso.

# Capitolo 4

## Applicazioni delle teorie di gauge

In questo capitolo descriviamo alcune delle principali applicazioni delle teorie di gauge, che sono alla base del Modello Standard, infatti imponendo l'invarianza di gauge rispetto alle opportune trasformazioni di simmetria siamo in grado di costruire la Lagrangiana di interazione. Vediamo quindi come l'Elettrodinamica Quantistica (QED) sia ottenuta applicando la teoria di gauge abeliana ai campi fermionici spinoriali e come interpretare i vari termini della Lagrangiana. Procediamo poi, dopo un'introduzione alla carica di colore, con la Cromodinamica Quantistica (QCD) che è una teoria di gauge non abeliana. Infine mostriamo brevemente la teoria del Modello Standard, in cui sono classificate le particelle fondamentali, descrivendo il significato dei numeri quantici e delle cariche di gauge.

### 4.1 Teoria di gauge abeliana e la QED

Nel capitolo precedente abbiamo visto come la teoria di gauge abeliana sia la chiave per descrivere l'interazione elettromagnetica con un campo scalare  $\phi$ , ma allo stesso modo può essere applicata nella descrizione della QED, ovvero nel caso di campi fermionici con carica elettrica, come elettroni e positroni, la cui dinamica, come sappiamo, è descritta dalla Lagrangiana di Dirac.

Consideriamo quindi un campo spinoriale  $\psi$ . La Lagrangiana di Dirac che ne descrive la propagazione libera è:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.1)$$

Come visto nel capitolo 2, questa è invariante per trasformazioni globali  $U(1)$ . Estendiamo la richiesta di invarianza alle simmetrie  $U(1)$  locali:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\Gamma(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\Gamma(x)}\bar{\psi} \end{aligned}$$

Dobbiamo sostituire alla derivata ordinaria la derivata covariante di  $U(1)$ :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

ottenendo così l'estensione gauge invariante della Lagrangiana (4.1):

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.2)$$

A questa dobbiamo aggiungere il termine dinamico di  $A_\mu$  costruito a partire dal tensore gauge invariante  $F_{\mu\nu}$ . Imponendo l'invarianza per simmetrie globali del gruppo di Poincaré si ottiene in modo univoco:

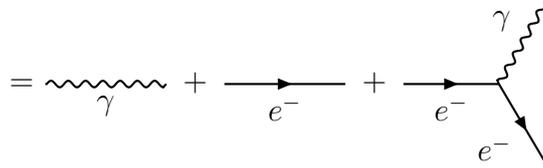
$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

Sommando le equazioni (4.2) e (4.3) si ottiene la Lagrangiana della QED che descrive l'interazione tra fotoni e fermioni:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.4)$$

Esplicitando i vari termini della derivata covariante possiamo riscrivere la (4.4) nella seguente forma:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi + ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$



Il primo termine descrive la propagazione libera del campo  $A_\mu$ , cioè dei fotoni. Il secondo termine descrive la propagazione libera di  $\psi$ , il campo associato a elettroni e positroni. Il terzo termine descrive l'interazione elementare tra fotoni e elettroni ed è il vertice elementare a partire dal quale si costruiscono tutte le interazioni elettromagnetiche coi fermioni. A questo vertice è associata la costante di accoppiamento  $e$ , identificata con la carica dell'elettrone. Spesso si parametrizza l'intensità di questa interazione con  $\sqrt{\alpha}$ , dove:

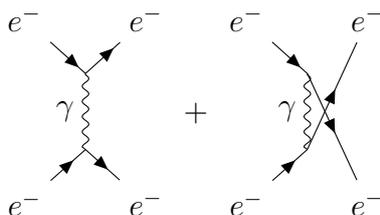
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

è la *costante di struttura fine*, che è un numero puro.

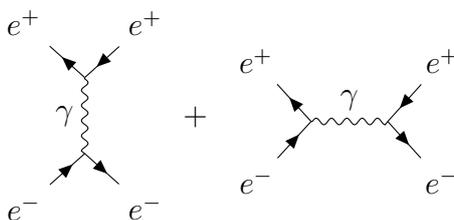
### Vertici di interazione della QED

Quando la costante di accoppiamento  $\sqrt{\alpha}$  è sufficientemente piccola, può essere trattata perturbativamente. Si possono calcolare le ampiezze dei vari processi fisici descritti dalla

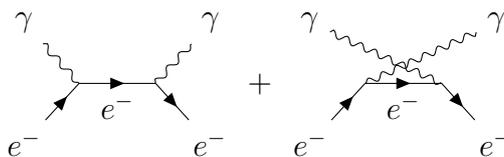
QED in termini delle ampiezze parziali corrispondenti ai vari diagrammi di Feynman costruiti utilizzando propagatori (cioè le linee orientate che descrivono la propagazione nel tempo di particelle e antiparticelle) ed il vertice elementare di  $\mathcal{L}_{QED}$ . Infine, se  $A$  è l'ampiezza associata a un processo, la sua probabilità è proporzionale a  $|A|^2$ . Per esempio, lo scattering elettrone-elettrone all'ordine più basso è dato dai seguenti diagrammi, in cui il tempo scorre in orizzontale:



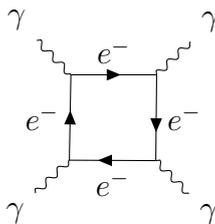
Questi sono stati ottenuti combinando due vertici elementari, a ciascuno dei quali è associata la costante di accoppiamento  $e$ . Pertanto l'ampiezza è  $|A| \sim e^2 \sim \alpha$  e la corrispondente probabilità è quindi proporzionale a  $e^4 \sim \alpha^2$ . Si noti che, essendo  $\alpha < 1$ , la probabilità del vertice decresce all'aumentare della potenza di  $\alpha$ . Lo stesso vale per lo scattering elettrone-positrone:



e per lo scattering elettrone-fotone:



È possibile anche uno scattering fotone-fotone, il cui primo termine perturbativo è dato da:



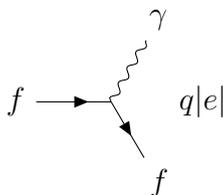
insieme agli altri grafici in cui le linee dei fotoni si attaccano ai vertici in ordine differente. Poiché ci sono 4 vertici, l'ampiezza di questo processo è proporzionale a  $e^4 \sim \alpha^2$  e la sua probabilità a  $\alpha^4$ .

In generale, il fotone si accoppia a tutte le particelle con carica elettrica. Il vertice fotone-elettrone presente in  $\mathcal{L}_{QED}$  si generalizza a tutti i fermioni del Modello Standard e assume la forma:

$$\mathcal{L}_{int} = i|e|qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

dove  $q|e|$  è la carica elementare del campo  $\psi$  del fermione. In particolare, per elettrone, muone e tau si ha  $q = -1$ , per quarks up, charm e top si ha invece  $q = 2/3$  ed infine per quarks down, strange e bottom  $q = -1/3$ . Per i neutrini si ha  $q = 0$ , cioè non interagiscono coi fotoni.

Quindi per ogni fermione  $f$  del Modello Standard l'interazione elettromagnetica è descritta dal vertice elementare:



## 4.2 Teorie di gauge non abeliane e la QCD

Le teorie di gauge non abeliane sono alla base del Modello Standard delle interazioni elettrodeboli e forti. La QCD in particolare si è sviluppata a partire dall'identificazione dei fermioni elementari che costituiscono il protone e gli altri adroni: le loro proprietà hanno condotto a un'unica teoria ottimale per la descrizione dell'interazione forte. Gell-Mann e Zweig, nel 1963, proposero un modello in termini di costituenti elementari che interagiscono fortemente, i *quarks*. In questa teoria, i mesoni erano interpretati come stati legati di quark e antiquark, mentre i barioni come stati legati di tre quark. Per spiegare la carica elettrica e altri numeri quantici erano necessarie tre specie di quarks: up, down e strange. La successiva scoperta di altri adroni ha portato poi all'introduzione nel modello di altri tre tipi di quarks: charm, bottom, top. Questi sei tipi sono chiamati *sapori*. Nonostante le corrette predizioni di questa teoria, questa presentava alcuni problemi: fra questi, vi era la funzione d'onda di alcuni barioni. Infatti la meccanica quantistica prevede che i barioni siano descritti da una funzione d'onda antisimmetrica, se si assume la natura fermionica dei quarks, ma questo rendeva impossibile l'esistenza di alcuni barioni costituiti da tre quarks identici nello stesso stato, che invece erano stati trovati sperimentalmente. Per riconciliare la teoria dei quarks con il teorema spin-statistica si giunse alla conclusione che i quarks hanno un ulteriore numero quantico, chiamato *colore*, in grado di distinguere i tre stati altrimenti identici. La funzione d'onda dei barioni doveva quindi essere necessariamente antisimmetrica nel colore. Il modello più semplice

per descrivere il colore si ha assegnando ad ogni quark la rappresentazione fondamentale di un nuovo gruppo di simmetria globale  $SU(3)$ . Il campo che descrive ciascun sapore ha quindi tre componenti (denominate rosso, verde e blu) e si trasforma secondo la rappresentazione fondamentale 3. Gli antiquark vengono naturalmente trasformati nella rappresentazione coniugata  $\bar{3}$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix} \rightarrow U\psi \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_R \quad \bar{\psi}_G \quad \bar{\psi}_B) \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger$$

L'assenza di colore indica uno scalare come la Lagrangiana, che è la 1 di  $SU(3)$ . Altri invarianti di  $SU(3)$  sono il prodotto interno e la combinazione completamente antisimmetrica di tre 3 tramite  $\epsilon_{ijk}$ . Postulando che tutti gli adroni abbiano colore neutro, cioè funzione d'onda invariante, le uniche combinazioni semplici sono:

$$\bar{\psi}^i \psi_i \quad \epsilon^{ijk} \psi_i \psi_j \psi_k \quad \epsilon_{ijk} \psi^i \psi^j \psi^k$$

dove gli indici sommati sono associati al colore. L'assunzione dell'invarianza della funzione d'onda degli adroni implica che gli unici adroni leggeri possibili siano mesoni, barioni e antibarioni. A completare la teoria di gauge furono introdotti gli 8 campi di gauge di  $SU(3)$ , chiamati *gluoni*.

Possiamo scrivere la Lagrangiana della QCD applicando la teoria di Yang-Mills vista nella sezione 3.2. Poiché i quarks sono fermioni, la Lagrangiana dei campi associati  $\psi$  è data dalla Lagrangiana di Dirac (4.1). È immediato verificare che questa è invariante per trasformazioni di simmetria globali di  $SU(3)$  associato al colore.

Il gruppo  $SU(3)$  ha  $3^2 - 1 = 8$  generatori infinitesimi che nella rappresentazione fondamentale sono definiti tramite le matrici di Gell-Mann  $\lambda^a$  che generalizzano le matrici di Pauli  $\sigma^i$  per  $SU(2)$ :

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad a = 1 \dots 8$$

dove:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La Lagrangiana di Dirac (4.1) può essere resa gauge invariante sostituendo alla derivata ordinaria la derivata covariante di  $SU(3)$  in cui compaiono i campi gluonici  $W_\mu^a$ :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s W_\mu^a(x) T^a$$

ottenendo così la Lagrangiana associata al quark di sapore  $f$ :

$$\mathcal{L}_f = -\bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f - m \bar{\psi}_f \psi_f$$

che dipende anche dal nuovo campo  $W_\mu = -iW_\mu^a(x)T^a$ . La sua dinamica è descritta dalla Lagrangiana (3.13):

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a$$

dove per scrivere la seconda uguaglianza abbiamo usato il fatto che:

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

La Lagrangiana complessiva della QCD è quindi data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}' + \sum_{f=1}^6 \mathcal{L}_f \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (\gamma^\mu D_\mu + m) \psi_f \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi_f + i \frac{g_s}{2} W_\mu^a \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f \gamma^\mu \lambda^a \psi_f \end{aligned}$$

Analizzando i vari termini osserviamo che la Lagrangiana libera dei campi gluonici produce, come abbiamo già visto, dei termini di autointerazione tra i gluoni. Ricordiamo infatti che per una teoria di gauge non abeliana le componenti del campo di forza sono esprimibili nella forma:

$$F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu W_\nu^c - \partial_\nu W_\mu^c + g_s f^{abc} W_\mu^a W_\nu^b$$

che introdotte nella Lagrangiana  $\mathcal{L}'$  generano i seguenti termini:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)^2 - g_s f^{abc} (\partial^\mu W^{\nu a}) W_\mu^b W_\nu^c \\ &\quad - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} W_\mu^b W_\nu^c W^{\mu d} W^{\nu e} \end{aligned}$$

corrispondenti ai seguenti diagrammi di Feynman:

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a = \text{diagramma a 2 gluoni} + \text{diagramma a 3 gluoni} + \text{diagramma a 4 gluoni}$$

Il vertice con tre gluoni ha ampiezza  $g_s$  mentre quello a quattro gluoni ha ampiezza  $g_s^2$ . Inoltre si ha il termine di propagazione libera del quark  $q_f$ :

$$-\bar{\psi}_f(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_f = \text{diagramma di propagazione libera del quark } q_f$$

e il vertice elementare di interazione tra un gluone e due quarks dello stesso sapore, di ampiezza  $g_s$ :

$$i\frac{g_s}{2}W_\mu^a\bar{\psi}_f\gamma^\mu\lambda^a\psi_f = \text{diagramma di vertice quark-gluone}$$

### Altre simmetrie della Lagrangiana della QCD

La Lagrangiana della QCD possiede altre simmetrie globali. La simmetria globale  $U(1)$  per esempio, che è conservata da tutte le interazioni fondamentali, implica la conservazione del *numero barionico*. Ci sono poi altre simmetrie  $U(1)$  che ruotano separatamente i vari campi fermionici e danno origine alle leggi di conservazioni dei rispettivi *numeri fermionici*, per esempio la *carica di stranezza*  $S$ , la *carica di charm*  $C$  e analogamente per gli altri sapori. Queste simmetrie sono esatte solo per la QED e la QCD, mentre l'interazione debole le viola, non conservando il sapore. I 6 numeri quantici di sapore si combinano linearmente a formare il numero barionico, che è conservato anche dall'interazione debole. La Lagrangiana della QCD possiede poi delle simmetrie globali approssimate. Nel limite in cui le masse di alcuni quarks sono considerate identiche si ha una simmetria addizionale non abeliana. Assumendo masse identiche per i quarks up e down, questi diventano dinamicamente equivalenti per l'interazione forte, che non distingue i sapori. Si possono allora mescolare i campi  $\psi_u$  e  $\psi_d$  tramite una matrice  $SU(2)$ , e la simmetria associata è chiamata *isospin*. Tramite questa simmetria si possono raggruppare in famiglie gli adroni composti da quark e antiquark di sapore up e down, per esempio:

- doppietto di isospin dei nucleoni, formato dal protone ( $uud$ ) e dal neutrone ( $udd$ ), proveniente dalla  $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$ ;

- tripletto di pioni  $\pi^+$  ( $u\bar{d}$ ),  $\pi^-$  ( $\bar{u}d$ ),  $\pi^0$  ( $\frac{\bar{u}u - \bar{d}d}{\sqrt{2}}$ ), proveniente dalla  $2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3$ .

Poiché il quark strange è solo poco più pesante di up e down, possiamo assumere che tutte e tre le masse siano identiche e questo genera il gruppo di simmetria  $SU(3)$  di sapore. Esempi di multipletti di adroni descritti da questo gruppo sono:

- ottetto mesonico  $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$ , infatti dalla teoria dei gruppi sono la 8 irriducibile di  $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ ;
- ottetto barionico  $p, n, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Xi^\pm, \Lambda$   
decupletto barionico  $\Delta^\pm, \Delta^0, \Delta^{++}, \Sigma^{*\pm}, \Sigma^{*0}, \Xi^{*\pm}, \Omega^-$   
e sono la 8 e la 10 irriducibili di  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ .

### 4.3 Cenni sul Modello Standard

Il Modello Standard racchiude in un'unica teoria tutta la fenomenologia delle tre forze fondamentali descrivibili con le teorie di gauge: la forza forte, la forza debole e la forza elettromagnetica. Considerazioni teoriche e dati sperimentali hanno portato alla formulazione di una teoria di gauge basata sul gruppo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , con rottura parziale di simmetria indotta dal meccanismo di Higgs nel settore elettrodebole  $SU(2) \times U(1)$ . Le particelle descritte dal Modello Standard sono:

- fermioni, cioè particelle di spin 1/2 che soddisfano perciò il principio di esclusione di Pauli e sono interpretati come particelle di materia, si suddividono a loro volta in leptoni e quarks;
- bosoni mediatori delle forze, caratterizzati dall'aver tutti spin 1, sono il fotone  $\gamma$  per l'interazione elettromagnetica, gli 8 gluoni  $g$  per l'interazione forte e i tre bosoni massivi  $W^+, W^-, Z^0$  per l'interazione debole;
- il bosone di Higgs, di spin 0, responsabile dell'acquisizione di massa delle varie particelle.

#### Cariche di gauge del Modello Standard

I diversi tipi di fermioni sono distinti da numeri quantici diversi, alcuni dei quali corrispondono alla carica sotto il gruppo di gauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . I bosoni di gauge sono accoppiati ai fermioni in modo chirale, per cui non sono ammessi termini espliciti di massa per i fermioni, perché questi termini romperebbero la simmetria di gauge. Abbiamo visto infatti che gli spinori possono essere scomposti nelle rappresentazioni irriducibili e inequivalenti di  $SO^\uparrow(3)$ :  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ . La Lagrangiana di Dirac si decompone di conseguenza nella (2.10), che mostra come il termine di massa non possa essere presente

per fermioni chirali, cioè fermioni le cui parti chirali hanno cariche di gauge diverse, in quanto non può essere invariante.

In Tabella 4.1 sono riportate le cariche di gauge nella forma  $(SU(3), SU(2))_{U(1)}$ , dove per i gruppi non abeliani indichiamo la rappresentazione tramite la corrispondente dimensione, mentre per la parte abeliana tramite la carica di  $U(1)$ , chiamata ipercarica.

$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\nu_{eR}$	$e_R$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$u_R$	$d_R$
$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\mu R}$	$\mu_R$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$c_R$	$s_R$
$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\tau R}$	$\tau_R$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$t_R$	$b_R$
$(1, 2)_{-\frac{1}{2}}$	$(1, 1)_0$	$(1, 1)_{-1}$	$(3, 2)_{\frac{1}{6}}$	$(3, 1)_{\frac{2}{3}}$	$(3, 1)_{-\frac{1}{3}}$

Tabella 4.1: Fermioni e relative cariche di gauge.

Abbiamo già introdotto il gruppo  $SU(3)$  del colore e abbiamo visto che agisce sui quarks, che hanno infatti carica 3, mentre gli antiquarks sono la rappresentazione  $\bar{3}$ . I leptoni non risentono dell'interazione forte: sono quindi scalari e hanno carica 1.

Il gruppo  $SU(2)$  è associato all'*isospin debole*, da non confondere col gruppo di isospin, detto anche isospin forte, che è una simmetria globale della Lagrangiana della QCD e comporta il mescolamento di sapori di quark. La teoria di gauge basata su  $SU(2)$  consente di ripartire i fermioni in doppietti di carica debole, riportati in forma di vettori colonna in Tabella 4.1, chiamati *generazioni*. I fermioni all'interno di ogni generazione possono interagire debolmente, poiché identificano due diversi stati di carica debole:  $I = 1/2, I_3 = 1/2$  per la prima componente,  $I = 1/2, I_3 = -1/2$  per la seconda. Lo stesso vale per i corrispondenti antifermioni, in quanto per  $SU(2)$  la 2 è equivalente alla  $\bar{2}$ . Si noti che solo i fermioni sinistrorsi hanno carica debole e sono conseguentemente ripartiti in generazioni, mentre quelli destrorsi sono scalari di  $SU(2)$ . Questa differenza di carica tra parte sinistrorsa e parte destrorsa è legata alla violazione della parità da parte dell'interazione debole che comporta la chiralità del Modello Standard.

Il gruppo  $U(1)$  all'interno del Modello Standard è il gruppo dell'*ipercarica*. Questa è definita come  $Y = Q - I_3$ , dove  $Q$  è la carica elettrica e  $I_3$  la terza componente dell'isospin debole. Sostituisce la carica elettrica in assenza del campo di Higgs, infatti  $Y$  ha la proprietà di essere conservata all'interno delle generazioni ed è quindi indipendente dalla carica debole, a differenza di  $Q$ .

## Lagrangiana del Modello Standard

Possiamo scrivere la derivata covariante per il gruppo di gauge del Modello Standard di ciascun fermione. La parte della Lagrangiana che descrive i fermioni in interazione con i

campi di gauge prende la forma seguente:

$$\mathcal{L}_{1/2} = - \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu D_\mu \psi_f$$

dove la somma è sui  $6 \times 3$  tipi di fermioni riportati sopra. In generale, la derivata covariante assume la forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu^A(x) T^A - ig W_\mu^a(x) I^a - iy B_\mu(x) Y$$

dove  $G_\mu^A(x)$  sono i campi di gauge per il gruppo di colore  $SU(3)$  e  $T^A$  gli 8 generatori del gruppo,  $W_\mu^a(x)$  e  $I^a$  sono rispettivamente i campi di gauge e i generatori per il gruppo di isospin debole  $SU(2)$ ,  $B_\mu(x)$  è il campo di gauge dell'ipercarica  $U(1)$  e il generatore è  $Y$  che misura l'ipercarica del fermione. Le tre costanti di accoppiamento sono state indicate con  $(g_s, g, y)$ . Termini di massa espliciti non sono ammessi nella Lagrangiana perché non sarebbero gauge invarianti a causa della chiralità.

La Lagrangiana dei bosoni del Modello Standard deve essere gauge invariante e quindi a sua volta non contiene termini di massa. Può essere espressa in termini delle componenti dei campi di forza che descrivono la dinamica dei campi di gauge:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A(G))^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a(W))^2 - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}(B))^2$$

L'assenza di massa dei bosoni prevista dalla teoria di gauge non è in accordo coi dati sperimentali, che invece prevedono che i bosoni  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$  siano massivi. La teoria di gauge sviluppata non ne risulta tuttavia compromessa: l'introduzione del meccanismo di Higgs, di cui non tratteremo, è in grado di spiegare l'acquisizione della massa, rendendo il Modello Standard una teoria completa e fino ad oggi compatibile coi dati sperimentali.

# Conclusioni

Abbiamo visto come, a partire dal concetto di campo e dallo studio delle simmetrie globali della Lagrangiana libera, sia possibile costruire una teoria per le interazioni fondamentali basata sulla richiesta di invarianza locale, che porta all'introduzione dei campi di gauge, il cui significato fisico è quello di mediatori delle forze. Partendo dal caso più semplice della teoria di gauge abeliana per l'interazione elettromagnetica, abbiamo generalizzato il procedimento al caso di gruppi non abeliani grazie alla teoria di Yang-Mills, mostrandone l'applicazione nella cromodinamica quantistica.

Anche nella semplice trattazione eseguita, vediamo come siano emerse già molte delle caratteristiche delle interazioni fondamentali: per esempio si è visto come l'autointerazione tra i gluoni sia una conseguenza della non commutatività dell'algebra di Lie di  $SU(3)$ , cosa che non avviene nel caso dei fotoni, che emergono invece da una teoria di gauge abeliana. Un problema che è stato accennato è invece quello dell'assenza di massa dei campi di gauge: introdurre un termine di massa nella Lagrangiana ne romperebbe inevitabilmente la simmetria locale. Nel caso dell'interazione debole, questo è in disaccordo con le osservazioni sperimentali e con la sua natura a corto raggio. Il problema è risolto con l'introduzione del meccanismo di Higgs, per cui il corto raggio è indotto tramite il conferimento della massa, che è quindi una proprietà acquisita del campo. Questo ha portato a unificare interazione debole e elettromagnetica nella teoria elettrodebole, preservando la simmetria  $SU(2) \times U(1)$  e la rinormalizzabilità della teoria.

Queste sono le basi per la costruzione del Modello Standard, una teoria di gauge basata sul gruppo non abeliano  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , che descrive in modo esaustivo le interazioni elettromagnetica, debole e forte. Così esaustivo in effetti che, nonostante vi siano numerosi limiti, non vi è finora alcuna evidenza sperimentale che indichi se e come rivedere questo modello. Tra gli aspetti più problematici vi sono l'inspiegabile distribuzione delle masse di quark e leptoni su 11 ordini di grandezza, la prevalenza della materia barionica su quella antibarionica, l'incapacità di descrivere materia e energia oscura. Sopra a tutti, l'impossibilità di descrivere la quarta interazione fondamentale, la gravità, con una teoria di gauge rinormalizzabile, è indicatore del fatto che potrebbe esserci una descrizione ancora più fondamentale, in grado di includere tutti i fenomenomeni fisici in un'unica teoria.

# Bibliografia

- [1] M. Bañados and I. Reyes, *A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms*, Internat. J. Modern Phys. D **25** (2016), no. 10, 1630021, 74.
- [2] F. Bastianelli, *Appunti del corso di teoria dei campi 1*, Università degli Studi di Bologna, 2010, <http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/qft1-10.html>.
- [3] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 2016.
- [4] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [5] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [6] D. Tong, *Lectures on Quantum Field Theory*, Cambridge University, 2006, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.