

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Sistemi hamiltoniani vincolati ed applicazioni alla particella relativistica

Relatore:  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:  
Christian D'Alessandro

Anno Accademico 2019/2020

## Abstract

La tesi dal titolo “Sistemi hamiltoniani vincolati ed applicazioni alla particella relativistica” ha lo scopo di approfondire il formalismo hamiltoniano per sistemi che presentano delle relazioni sulle variabili canoniche, le quali descrivono i vincoli del sistema. Si sottolinea nella trattazione come il formalismo hamiltoniano sia il più adatto per la trattazione di sistemi dinamici che presentano gradi di libertà di gauge, i quali possono essere sempre interpretati come sistemi hamiltoniani vincolati. Nei primi tre capitoli è stato affrontato lo sviluppo del formalismo hamiltoniano, quindi dopo l'introduzione del concetto dei vincoli, i quali si manifestano intrinsecamente per sistemi la cui Lagrangiana è singolare, questi sono stati classificati in vincoli di prima classe e vincoli di seconda classe. Segue una descrizione della procedura di gauge-fixing, metodo utile per fissare una corrispondenza univoca tra le variabili canoniche e lo stato fisico del sistema in analisi. Tale corrispondenza infatti non è garantita per la presenza di funzioni arbitrarie nel tempo nelle soluzioni delle equazioni del moto che si riescono ad ottenere per i sistemi con vincoli. Il formalismo è stato infine applicato al caso particolare della particella relativistica, mettendo in evidenza come la manifesta simmetria di Lorentz comporti una simmetria di gauge e quindi un sistema hamiltoniano vincolato.

# Indice

<b>1</b>	<b>Sistemi Hamiltoniani vincolati</b>	<b>7</b>
1.1	Formalismo lagrangiano per i vincoli primari . . . . .	7
1.1.1	Restrizioni sulle funzioni vincolari: condizioni di regolarità . . . . .	9
1.2	Hamiltoniana canonica ed equazioni del moto . . . . .	10
1.3	Dalla condizione di consistenza ai vincoli secondari . . . . .	12
1.3.1	Restrizioni sui moltiplicatori di Lagrange e Hamiltoniana totale . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Classificazione dei vincoli: vincoli di prima classe e vincoli di seconda classe</b>	<b>16</b>
2.1	I vincoli di prima classe generano trasformazioni di Gauge . . . . .	17
2.2	Evoluzione temporale per l'Hamiltoniana estesa . . . . .	18
2.3	Vincoli di seconda classe . . . . .	21
2.3.1	Parentesi di Dirac . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Condizioni di gauge canoniche e conteggio dei gradi di libertà</b>	<b>26</b>
3.1	Funzioni Gauge invarianti . . . . .	26
3.1.1	Funzioni sulla superficie vincolata . . . . .	26
3.1.2	Osservabili classici . . . . .	27
3.2	Gauge-fixing . . . . .	28
3.2.1	Gauge-fixing per vincoli di seconda classe . . . . .	29
3.2.2	Conteggio dei gradi di libertà . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Particella relativistica</b>	<b>31</b>
4.1	Introduzione alla meccanica relativistica . . . . .	31
4.2	Particella relativistica come sistema vincolato . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>39</b>

## Introduzione

Le teorie di gauge sono fondamentali nell'analisi di sistemi fisici e con esse si opera per definire lo stato del sistema fisico trattato introducendo un numero di variabili maggiore dei gradi di libertà fisicamente indipendenti. Appare sorprendente che introducendo ulteriori variabili si rende la descrizione più chiara, ma in questo modo in effetti si riescono a mantenere evidenti alcune proprietà di simmetria particolarmente importanti che permettono di estrarre il contenuto fisico rilevante fornito dai gradi di libertà invarianti per trasformazioni che collegano le variabili. Ad esempio in meccanica relativistica questo è il modo di procedere nella descrizione della particella relativistica, caso in cui si mantiene manifesta l'invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz proprio attraverso l'introduzione di variabili dinamiche "ridondanti".

Le teorie di gauge quindi si basano sulla scelta di variabili dinamiche rispetto a uno specifico sistema di coordinate, ma di fatto le variabili fisicamente importanti sono quelle indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate (locale) e invarianti rispetto a una trasformazione di variabili indotta da un cambiamento del sistema di riferimento, detta trasformazione di gauge. In tal caso ci si riferisce alle variabili dinamiche come gauge invarianti. Nelle teorie di gauge non ci si può aspettare di determinare dalle soluzioni generali delle equazioni del moto, soltanto fissando le condizioni iniziali, tutte le variabili dinamiche nel tempo perché in futuro si potrebbe cambiare sistema di riferimento mantenendo le condizioni iniziali fissate, quindi da esse deriverà una diversa evoluzione temporale. Allora si afferma una proprietà fondamentale della teoria di gauge secondo cui: "la soluzione generale dell'equazione del moto contiene funzioni arbitrarie del tempo" [1].

La presenza nelle equazioni del moto di funzioni arbitrarie del tempo determina un'ambiguità tra lo stato fisico del sistema in analisi e i set di variabili canoniche che lo individuano, infatti non si ha in generale una corrispondenza univoca tra questi. Tali ambiguità possono essere superate fissando un sistema di riferimento, ovvero operando il cosiddetto "gauge-fixing" con cui si introducono certe condizioni sulle variabili canoniche che non influenzano le proprietà degli osservabili, intesi come gauge invarianti, e si evita il conteggio multiplo degli stati. Si deve tenere conto che questa non è una procedura sempre percorribile poiché potrebbe rompere l'evidenza di importanti simmetrie manifeste, oppure potrebbe essere del tutto impossibile trovare condizioni di gauge valide globalmente per via delle "ostruzioni di Gribov".

Emergerà quindi che qualora si avesse una tale arbitrarietà nella scelta delle soluzioni delle equazioni del moto si andrà a determinare una dipendenza tra le variabili canoniche del sistema hamiltoniano: esse dovranno quindi soddisfare delle relazioni che le vincolano ad appartenere a un sottospazio dello spazio delle fasi, detto "superficie vincolata".

Il modo adeguato di trattare un sistema di gauge è perciò dato dalla formulazione hamiltoniana e da essa si avvia l'analisi dei sistemi di gauge, anche se il principio d'azione si fa risalire alla trattazione lagrangiana e successivamente si passerà alla forma Hamil-

toniana.

Da tale formulazione si vedrà di seguito che la presenza di arbitrarie funzioni del tempo nella soluzione generale dell'equazioni del moto implica che le variabili canoniche non sono tutte indipendenti, ma si hanno delle relazioni circa quelli che sono chiamati vincoli. Perciò si può affermare che “un sistema di gauge è sempre un sistema hamiltoniano vincolato”. In generale il contrario non è vero e non tutti i vincoli concepibili hanno origine dall'invarianza di gauge, ma la trattazione seguente tuttavia copre tutti i tipi di vincoli.

Quindi attraverso gli elementi sviluppati con questa tesi si vuole giungere a un formalismo adatto alla trattazione di sistemi hamiltoniani vincolati, per i quali si prenderà in esempio l'applicazione al caso della particella relativistica. Per quanto riguarda il formalismo si segue come linea guida quanto espresso nel manuale di Henneaux e Teitelboim [1] e si articola la tesi in cinque capitoli.

Nel primo di questi “*SISTEMI HAMILTONIANI VINCOLATI*” si fa emergere il concetto dei vincoli, mostrando come esso discenda direttamente dalla definizione di momento canonico, e si introduce la formulazione hamiltoniana come formalismo più adatto per la loro trattazione. Quindi si introduce l'Hamiltoniana canonica, in termini della quale si sviluppa il principio variazionale da cui studiare l'evoluzione temporale del sistema, ottenendo le equazioni del moto attraverso le parentesi di Poisson. Infine nel Capitolo 1, passando per le condizioni di consistenza e le limitazioni che si fanno sulle variabili ausiliarie, si giunge alla formulazione dell'Hamiltoniana totale.

Nel Capitolo 2, “*CLASSIFICAZIONE DEI VINCOLI: VINCOLI DI PRIMA CLASSE E VINCOLI DI SECONDA CLASSE*”, si va ad approfondire la distinzione intrinseca alla formulazione hamiltoniana tra quelli che sono i vincoli di prima e di seconda classe. Inoltre si mette in evidenza come i vincoli di prima classe ricoprono il ruolo fondamentale nella trattazione in quanto, attraverso le parentesi di Poisson, fungono da generatori delle trasformazioni di gauge e sono utilizzati per introdurre l'Hamiltoniana estesa. D'altra parte si mostra come trattare i vincoli di seconda classe in particolare facendo riferimento alle *parentesi di Dirac*.

“*CONDIZIONI DI GAUGE CANONICHE E CONTEGGIO DEI GRADI DI LIBERTÀ*” è il Capitolo 3, che mostra come operare una sorta di scelta del sistema di riferimento, fissando un gauge e contando i gradi di libertà fisici del sistema vincolato, passaggio che potrebbe non essere sempre possibile globalmente poiché farebbe venir meno l'evidenza di certe simmetrie. Si mostrerà inoltre che la procedura di gauge-fixing elimina i vincoli di prima classe dal sistema, lasciando solo quelli di seconda classe, perciò per sistemi di questo tipo si può procedere nel conteggio dei gradi di libertà.

Sulla base di quanto espresso nei tre capitoli precedenti si va a sviluppare l'ultimo capitolo della trattazione, “*PARTICELLA RELATIVISTICA*”, e in esso si propone un'applicazione del formalismo sviluppato in questa tesi. In effetti, dopo una rapida introduzione alle nozioni di meccanica relativistica, in questo capitolo vengono descritte quattro trattazioni equivalenti della particella relativistica, in cui si mettono in evidenza

le simmetrie di gauge del sistema, seguite dall'applicazione del formalismo hamiltoniano alla particella in quanto sistema vincolato. Si mostrerà l'effettiva equivalenza delle trattazioni.

Infine è inserita la sezione "*APPENDICE*", intesa come la sezione della tesi in cui vengono riportate le dimostrazioni dei teoremi di maggiore importanza che saranno introdotti durante la trattazione.

# Capitolo 1

## Sistemi Hamiltoniani vincolati

Dirac in [7] sottolinea quanto sia importante analizzare sistemi di gauge attraverso il formalismo hamiltoniano. Questo approccio determina che i sistemi con gradi di libertà di gauge devono essere interpretati come sistemi hamiltoniani vincolati, per i quali si osserva, come effetto dell'arbitrarietà nella scelta del sistema di coordinate, la non indipendenza di tutte le variabili canoniche del sistema. Queste sono per l'appunto legate da relazioni dette **vincoli**, che emergono intrinsecamente dalla formulazione hamiltoniana per una Lagrangiana singolare, e i quali limitano la dinamica del sistema a svilupparsi in una sottovarietà dello spazio delle fasi, la *superficie vincolare* appunto.

### 1.1 Formalismo lagrangiano per i vincoli primari

Per l'impostazione del problema circa la dinamica di un sistema di gauge si fa riferimento al principio d'azione nella forma Lagrangiana, secondo cui i moti classici del sistema sono quelli che rendono stazionaria l'azione

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (1.1)$$

sotto l'azione di una variazione infinitesima  $\delta q^n(t)$  delle variabili lagrangiane  $q^n$  ( $n = 1, \dots, N$ ), che si annullano agli estremi.

Da tale principio variazionale si ricavano le equazioni del moto lagrangiane nella forma delle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad (1.2)$$

le quali per chiarezza possono essere espresse in una forma più dettagliata

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n} \quad (1.3)$$

Da questa formulazione si evidenzia nel termine di sinistra la presenza della matrice Hessiana della Lagrangiana e per avere le accelerazioni  $\ddot{q}^{n'}$  determinate in termini delle posizioni e delle velocità si deve richiedere che tale matrice sia invertibile, ovvero

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}}\right) \neq 0. \quad (1.4)$$

In caso contrario con il determinante della matrice Hessiana che si annulla, le accelerazioni non sono determinate unicamente dalle posizioni e dalle velocità perciò si avranno per le equazioni del moto funzioni arbitrarie nel tempo: questo costituisce il caso di maggiore rilevanza per lo sviluppo del formalismo hamiltoniano per sistemi che hanno gradi di libertà di gauge. A questo punto si imposta il formalismo hamiltoniano introducendo la definizione dei momenti canonici

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \quad (1.5)$$

Quindi si può osservare dalla definizione che, per la condizione espressa precedentemente, l'annullarsi del determinante comporta la non invertibilità della velocità come funzioni di momenti e coordinate. I momenti quindi non sono tutti indipendenti e seguono delle relazioni che si ricavano dalla definizione in (1.5).

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1.6)$$

Queste relazioni mettono in evidenza quelli che sono i *VINCOLI PRIMARI* (terminologia introdotta da Bergmann) e si sottolinea che esse non sono ottenute dalle equazioni del moto e non implicano restrizioni sulle coordinate  $q^n$  o sulle velocità  $\dot{q}^n$ . Per semplicità si assume che la matrice  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}}$  ha rango costante sullo spazio delle fasi e le equazioni vincolari definiscono una sottovarietà liscia conosciuta come *superficie del vincolo primario*. Quando il rango della matrice è pari a  $(N - M')$ , si avranno  $(M')$  equazioni indipendenti dall'equazione vincolare e il sottospazio dello spazio delle fasi avrà dimensione  $(2N - M')$  vista la presenza di coordinate e momenti. Dall'equazione si deduce che la trasformazione inversa dai momenti  $p$  alle velocità  $\dot{q}$  è a molti valori e la retroimmagine di un punto  $(q^n, p_n)$ , che rispetta la soluzione del vincolo non è unica e dalla stessa (1.5) si definisce una mappa tra la varietà  $2N$  dimensionale e la sottovarietà  $(2N - M')$  dimensionale. Inoltre la retroimmagine di un punto dato dall'equazione vincolare forma una varietà di dimensione  $M'$ , perciò per rendere la trasformazione a singoli valori si devono introdurre ulteriori parametri che si manifestano come moltiplicatori di Lagrange nell'Hamiltoniana.

### 1.1.1 Restrizioni sulle funzioni vincolari: condizioni di regolarità

Le *condizioni di regolarità* sono intese come delle restrizioni a cui devono essere sottoposte le funzioni vincolari introdotte in (1.6) ed esse risultano essere necessarie già nel passaggio al formalismo hamiltoniano. Quindi si deve richiedere che la superficie del vincolo  $\phi_m = 0$  deve ammettere un ricoprimento di aperti e per ognuno di essi si possono distinguere i vincoli indipendenti  $\phi_{m'} = 0$  con  $(m' = 1, \dots, M')$ , definiti come quelli per cui la matrice Jacobiana  $\frac{\partial(\phi_{m'})}{\partial(q^n, p_n)}$  è di rango  $M'$  sulla superficie del vincolo, e i vincoli dipendenti  $\phi_{m''} = 0$  con  $(m'' = M' + 1, \dots, M)$  così espressi sulla base della precedente tipologia.

La condizione che si è imposta sulla matrice Jacobiana  $\frac{\partial(\phi_{m'})}{\partial(q^n, p_n)}$  può essere letta in alternativa nei seguenti due modi:

- i vincoli indipendenti  $\phi_{m'}$  possono essere presi come le prime  $M'$  coordinate di un nuovo sistema di coordinate vicino alla superficie del vincolo;
- zero è un valore regolare della mappa definita dai vincoli indipendenti  $\phi_1, \dots, \phi_{M'}$ , ovvero i gradienti delle funzioni dei vincoli  $d\phi_1, \dots, d\phi_{M'}$  sono linearmente indipendenti localmente sulla superficie dei vincoli.

Si possono riportare degli esempi in cui le condizioni di regolarità determinano se le descrizioni delle superfici vincolate sono ammissibili quando queste vengono espresse in un certo modo. Infatti si hanno diversi modi di rappresentare una data superficie del vincolo, ad esempio le formulazioni

$$p_1 = 0, \quad p_1^2 = 0, \quad \sqrt{p_1} = 0$$

oppure in modo ripetitivo  $p_1 = 0, p_1^2 = 0$ .

In questo esempio si può apprezzare che nella prima e nell'ultima descrizione si ha rango di  $\partial(p_1)/\partial(q^n, p_n)$  pari a uno e dalle condizioni di regolarità si afferma che le due formulazioni sono entrambe ammissibili. Diverso è invece quello che si osserva per i gradienti delle altre due descrizioni:  $\partial(p_1^2)/\partial(q^n, p_n)$  si annulla sulla superficie del vincolo mentre  $\partial(\sqrt{p_1})/\partial(q^n, p_n)$  è singolare e per le condizioni di regolarità non sono ammesse queste descrizioni.

Si deve infine sottolineare che nel caso in cui si opera solo con vincoli indipendenti si dirà che si è nel caso *irriducibile*, mentre si fa riferimento al caso *riducibile* per gli altri vincoli e sebbene localmente questa distinzione si può sempre operare, non è necessario esplicitare tale separazione per sviluppare la teoria, infatti non potendone assicurare la separazione a livello globale si cercherà di sviluppare un formalismo indipendente da tale distinzione.

Quando le funzioni dei vincoli  $\phi_m$  soddisfano quanto richiesto dalle condizioni di regolarità è semplice ricavare le proprietà espresse nei seguenti teoremi tratti direttamente da

[1]. Essi rappresentano probabilmente l'elemento fondante dello sviluppo della teoria in analisi, quindi per completezza si rimanda all' Appendice per le dimostrazioni, e verranno spesso utilizzati nel seguito.

**Teorema 1** *Se una funzione liscia dello spazio delle fasi  $G$  si annulla sulla superficie  $\phi_m = 0$ , allora  $G = g^m \phi_m$  per qualche funzione  $g^m$ .*

**Teorema 2** *Se  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  per variazioni arbitrarie  $\delta q^n$ ,  $\delta p_n$  tangente alla superficie del vincolo, allora*

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (1.7)$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (1.8)$$

per qualche  $u^m$ . Tali uguaglianze sono uguaglianze sulle superfici dei vincoli (1.6).

## 1.2 Hamiltoniana canonica ed equazioni del moto

Si è sottolineato più volte fino a questo punto che il formalismo giusto da utilizzare per la descrizione dei sistemi fisici che presentano dei vincoli è quello hamiltoniano. Lo scopo della trattazione è comunque quello di studiare l'evoluzione dinamica dei sistemi vincolati, quindi in questo paragrafo sarà analizzato il percorso attraverso il quale dal principio variazionale si giunge alla formulazione delle equazioni del moto del sistema hamiltoniano vincolato.

Si procede introducendo in questa analisi la *Hamiltoniana canonica*  $H$  attraverso la relazione data dalla trasformata di Legendre della Lagrangiana  $L$  sulla sottovarietà del vincolo.

$$H = \dot{q}^n p_n - L \quad (1.9)$$

la quale non è univocamente determinata in quanto si possono aggiungere delle combinazioni lineari dei vincoli  $\phi_m$ , moltiplicati per coefficienti  $u^m$  che possono essere funzioni delle  $q, p$  [7]. Queste appaiono quindi come moltiplicatori di Lagrange permettendo di riottenere la velocità partendo dalla relazione con i momenti canonici, nel rispetto delle condizioni vincolari. In sostanza i vincoli sono stati usati per semplificare la forma dell'Hamiltoniana ed eliminare ogni eventuale dipendenza dalle velocità che non dovrebbero apparire nelle funzioni definite nello spazio delle fasi. Il passaggio successivo della trattazione sta nel dedurre l'evoluzione temporale di un sistema hamiltoniano vincolato, quindi si opera con un principio variazionale il quale, al fine di mantenere la compatibilità tra le equazioni del moto e i vincoli primari, viene leggermente modificato come si è

precedentemente detto con l'introduzione di variabili extra  $u^m$ . Il principio variazionale assume la forma quindi:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0 \quad (1.10)$$

dalla quale:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( p_n \frac{d}{dt} \delta q^n + \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n - \phi_m \delta u^m - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \delta q^n - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \delta p_n \right) = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{d}{dt} (p_n \delta q^n) - (\dot{p}_n + \frac{\partial H}{\partial q^n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}) \delta q^n + (\dot{q}^n - \frac{\partial H}{\partial p_n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}) \delta p_n - \phi_m \delta u^m \right) = 0.$$

Quindi si deve osservare che l'integrale della derivata temporale si annulla in quanto si annullano le coordinate negli estremi  $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$  mentre gli altri termini si impongono come nulli, ed è l'unico modo per uguagliare a zero gli integrali vista l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta q^n, \delta p_n, \delta u^m$ . Si ottengono allora le equazioni del moto del sistema vincolato

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad \dot{p}^n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad \phi_m(q, p) = 0. \quad (1.11)$$

Si evidenzia quindi dalla forma del principio variazionale che la teoria è invariante per trasformazioni  $H \rightarrow H + c^m \phi_m$ , le quali cambiano semplicemente i moltiplicatori di Lagrange  $u^m \rightarrow u^m + c^m$ .

Le equazioni del moto che sono state ricavate dalle relazioni precedenti possono essere riscritte per una funzione arbitraria  $F(q, p)$  nelle variabili canoniche attraverso le parentesi di Poisson:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] + u^m [F, \phi_m] \quad (1.12)$$

## Parentesi di Poisson

Nel paragrafo precedente sono state espresse le equazioni del moto ricavate dal principio variazionale attraverso le parentesi di Poisson. Al fine di rendere più chiare e accessibili le formulazioni che nel corso dello sviluppo del formalismo hamiltoniano vedranno l'uso di tale entità si introducono in questa sezione (in modo semplice come si può vedere in [6]) le proprietà che caratterizzano le parentesi di Poisson.

Considerando due arbitrarie funzioni dinamiche  $B(q, p)$  e  $C(q, p)$  si possono definire

$$[B, C] = \sum_{n=1}^n \left( \frac{\partial B}{\partial q_n} \frac{\partial C}{\partial p_n} - \frac{\partial B}{\partial p_n} \frac{\partial C}{\partial q_n} \right)$$

da cui si può apprezzare la correttezza nell'esprimere le equazioni del moto precedenti attraverso questa notazione.

Le parentesi di Poisson possono quindi essere interpretate come una speciale operazione algebrica sulle funzioni dinamiche, la quale gode delle proprietà:

$$[B, C] = -[C, B]$$

$$[B, \alpha] = 0$$

$$[B, [C, D]] + [C, [D, B]] + [D, [B, C]] = 0$$

dove dalla prima si osserva la non commutatività delle parentesi e implica  $[B, B] = 0$ ,  $\alpha$  è uno scalare indipendente da  $(q, p)$ , mentre l'ultima proprietà nota come *identità di Jacobi* esprime la non associatività delle parentesi.

Valgono inoltre le seguenti regole per le altre operazioni algebriche:

$$[(B + C), D] = [B, D] + [C, D]$$

$$[\alpha B, C] = \alpha[B, C]$$

$$[BC, D] = B[C, D] + [B, D]C$$

Quindi l'azione dell'operatore  $[\dots, D]$  su una funzione è simile all'azione di un operatore differenziale al primo ordine, che non è sorprendente per il modo in cui le parentesi di Poisson sono state definite, ma rimane vero anche in casi più generali. Si possono allora calcolare le parentesi degli elementi fondamentali  $q_n$  e  $p_n$ , purchè si conoscano

$$[q_n, q_m] = 0$$

$$[p_n, p_m] = 0$$

$$[q_n, p_m] = \delta_{nm}$$

con le quali si definisce un set di variabili canoniche coniugate. Mentre il set di tutte le funzioni dinamiche è noto come *algebra dinamica*  $D$ , che costituisce un'*algebra di Lie* in quanto in essa risultano essere definite le operazioni di somma, moltiplicazione e le parentesi di Poisson.

### 1.3 Dalla condizione di consistenza ai vincoli secondari

Le equazioni del moto del sistema vincolato individuate precedentemente possono essere utilizzate per ottenere in modo abbastanza semplice le condizioni di consistenza. In particolare vengono sfruttate nello studio dinamico di sistemi vincolati per individuare

dai vincoli primari ulteriori vincoli del sistema.

Bisogna per prima cosa richiedere che il vincolo sia preservato nel tempo, infatti imponendo che la  $F$  corrisponda a un vincolo  $\phi_m$ , si ottiene  $\dot{\phi}_m = 0$  per consistenza che mostra come un vincolo sia costante nel tempo. Da tale assunzione allora si ricavano quindi le condizioni di consistenza nella forma:

$$[\phi_m, H] + u^{m'}[\phi_m, \phi_{m'}] = 0 \quad (1.13)$$

Si ottiene in questo modo un numero  $m$  di condizioni per le quali si può osservare che fissando un  $m$  in modo da avere  $[\phi_m, \phi_{m'}] = 0$  per un qualunque  $m'$ , non si ha dipendenza da  $u^{m'}$ .

Andando a valutare quali possono essere le conseguenze determinate dalle condizioni di consistenza si deve fare riferimento al fatto che da tali relazioni si può evidenziare un'inconsistenza della Lagrangiana originale del sistema, quando si ricava una relazione del tipo  $1 = 0$ . D'altra parte invece quando le condizioni si riducono ad un'identità  $0 = 0$  si può affermare che il sistema non contiene ulteriori vincoli. La stessa conclusione può in pratica essere ricavata quando le condizioni di consistenza applicate a un determinato vincolo determinano delle restrizioni sui moltiplicatori  $u^m$ . Infine si ha il caso di maggiore rilevanza, infatti le condizioni in (1.13) sono utili in quanto permettono di individuare ulteriori vincoli sulle variabili canoniche. In questa situazione le condizioni possono ridursi a relazioni indipendenti dai moltiplicatori  $u^m$ , che coinvolgono soltanto  $q$  e  $p$ , e indipendenti dai vincoli primari: si ottengono quindi i cosiddetti **vincoli secondari**, i quali differiscono da quelli primari in quanto quest'ultimi si manifestano come conseguenze della definizione del momento canonico mentre per i vincoli secondari si deve fare uso anche delle equazioni del moto.

Ottenendo in questo modo un vincolo secondario  $X(q, p) = 0$  si deve imporre una nuova condizione di consistenza

$$[X, H] + u^m[X, \phi_m] = 0 \quad (1.14)$$

per la quale è necessario controllare nuovamente se essa determina un nuovo vincolo secondario e imporre eventualmente ancora le condizioni di consistenza. In questo modo si ottengono dal processo iterativo un numero totale  $K$  vincoli secondari denotati da

$$\phi_k = 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K, \quad (1.15)$$

In ogni caso si deve sottolineare che la distinzione tra vincoli primari e secondari non è fondamentale dal punto di vista del formalismo che si vuole sviluppare, perciò si possono trattare indistintamente:

$$\phi_j = 0, \quad j = 1, \dots, M + K = J, \quad (1.16)$$

sui quali valgono le stesse condizioni di regolarità imposte ai vincoli primari. Inoltre si assume per il seguito che il rango della matrice delle parentesi  $[\phi_j, \phi_{j'}]$  è costante sulla superficie in cui vivono tali vincoli.

## Uguaglianza debole

A questo punto della trattazione, prima di procedere con le successive osservazioni circa le condizioni di consistenza, è utile introdurre il simbolo dell'*uguaglianza debole*  $\approx$  attraverso il quale si va ad indicare che dalle equazioni del vincolo  $\phi_j \approx 0$  questo è numericamente pari a zero, ma la relazione non è veritiera su tutto lo spazio delle fasi.

In generale quindi per due funzioni  $F$ ,  $G$  che coincidono sulla sottovarietà definita dal vincolo si può scrivere  $F \approx G$  la quale indica l'*uguaglianza debole*. Mentre qualora la relazione può essere estesa a tutto lo spazio delle fasi essa è denominata *equazione forte* e si ricorre all'usuale simbolo di uguaglianza  $=$ . Si può osservare dal Teorema 1 che per le funzioni arbitrarie individuate in precedenza vale

$$F \approx G \quad \Rightarrow \quad F - G = c^j(q, p)\phi_j \quad (1.17)$$

### 1.3.1 Restrizioni sui moltiplicatori di Lagrange e Hamiltoniana totale

Nel paragrafo precedente si è sorvolato sulla descrizione relativa al caso in cui dalle condizioni di consistenza si ottengono delle restrizioni sulle variabili arbitrarie  $u^m$  ed è in questa sezione che quindi si vogliono portare avanti delle osservazioni che chiariscano il ruolo delle variabili extra, in particolare perchè esse saranno utilizzate nella parte finale della sezione per sviluppare lo studio esplicito dell'evoluzione dinamica del sistema vincolato, introducendo l'Hamiltoniana totale.

Quindi dalle condizioni di consistenza si ottiene una relazione nella forma:

$$[\phi_j, H] + u^m[\phi_j, \phi_m] \approx 0 \quad (1.18)$$

in cui  $m$  è sommato tra 1 e  $M$  mentre  $j$  varia tra 1 e  $J$ . Tale equazione può essere considerata come un set di  $J$  equazioni lineari non omogenee nelle  $M$  incognite  $u^m$  e coefficienti che dipendono da  $q$  e  $p$ .

Assumendo che esse ammettano una soluzione la si può esprimere nella forma più generale

$$u^m = U^m + V^m \quad (1.19)$$

in cui si distinguono  $U^m$  come soluzione dell'equazione non-omogenea, che deve esistere altrimenti le equazioni del moto sarebbero inconsistenti, e  $V^m$ , che è la soluzione più generale del sistema omogeneo associato

$$V^m[\phi_j, \phi_m] \approx 0 \quad (1.20)$$

Allora la soluzione generale assume la forma:

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m \quad (1.21)$$

con  $V_a^m$ ,  $a = 1, \dots, A$  soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo, il cui numero è equivalente per tutte le  $q, p$  sulla superficie del vincolo in quanto si è assunto che il rango della matrice è costante nel tempo e  $v^a$  coefficienti totalmente arbitrari, il cui numero è in genere inferiore a quello dei coefficienti  $u^m$  che non sono arbitrari. In conclusione sono state separate in questo modo la parte di  $u^m$  che resta arbitraria per effetto della presenza delle  $v^a$  dalla parte che resta fissata, conseguentemente alle condizioni di consistenza.

Si può a questo punto procedere con la descrizione dell'evoluzione temporale del sistema dinamico. Quindi, sfruttando l'equazione debole delle variabili ausiliarie  $u^m$  in (1.21), si possono esprimere le equazioni del moto generiche (1.12) nella forma equivalente (in cui compare  $H'$  che nel seguito verrà richiamata come Hamiltoniana di prima classe):

$$\dot{F} \approx [F, H' + v^a \phi_a] \quad (1.22)$$

in cui si fa riferimento a

$$H' = H + U^m \phi_m, \quad (1.23)$$

$$\phi_a = V_a^m \phi_m \quad (1.24)$$

Inoltre si osserva che per arrivare a quella formulazione si è usata

$$[F, U^m \phi_m] = U^m [F, \phi_m] + [F, U^m] \phi_m \approx U^m [F, \phi_m] \quad (1.25)$$

e analogamente per  $[F, V_a^m \phi_m]$ .

Quindi si definisce la funzione che si ricava come **Hamiltoniana totale**

$$H_T = H' + v^a \phi_a \quad (1.26)$$

in termini della quale le equazioni del moto possono essere semplicemente lette attraverso le parentesi di Poisson come:

$$\dot{F} \approx [F, H_T] \quad (1.27)$$

in cui compaiono ancora delle funzioni arbitrarie  $v^a$  (in genere in numero inferiore alle  $u^m$ ), la cui presenza mostra quindi che con l'imposizione delle condizioni di consistenza non è stato possibile eliminare completamente l'arbitrarietà delle  $u^m$ . Si deve quindi osservare che la presenza di tali funzioni arbitrarie del tempo esplicita la descrizione di un contesto matematico che ha delle caratteristiche arbitrarie, permette ad esempio di fissare un determinato sistema di riferimento in maniera completamente arbitraria. La diretta conseguenza di tale arbitrarietà sta nel non riuscire a determinare completamente le future variabili dinamiche dall'evoluzione temporale di variabili iniziali fissate.

## Capitolo 2

# Classificazione dei vincoli: vincoli di prima classe e vincoli di seconda classe

Si è affermato precedentemente che la distinzione tra vincoli primari e vincoli secondari ricopre un ruolo di importanza limitata nella forma finale dello schema hamiltoniano, mentre è fondamentale operare una diversa classificazione dei vincoli, per i quali, intesi come delle funzioni definite sullo spazio delle fasi, si applica come caso particolare la distinzione tra le *funzioni di prima classe* e quelle di *seconda classe*.

Si dice che  $F(q, p)$  è una funzione di prima classe quando ha parentesi di Poisson che si annullano debolmente con ogni vincolo:

$$[F, \phi_j] \approx 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (2.1)$$

In tal caso allora le parentesi di Poisson  $[F, \phi_j]$  devono poter essere espresse come funzioni lineari delle  $\phi_j$  che nella teoria sono le sole quantità che sono debolmente nulle. Sarà quindi possibile esprimere l'equazione forte  $[F, \phi_j] = f_j^{j'} \phi_{j'}$ . D'altra parte qualora si ha almeno un vincolo con cui le parentesi di Poisson di  $F$  non si annullano debolmente si parla di funzioni di seconda classe.

Una caratteristica interessante per le funzioni di prima classe sta nella conservazione della natura di prima classe sotto le operazioni delle parentesi di Poisson, le quali quindi per due funzioni di prima classe sono ancora di prima classe. La dimostrazione è riportata in Appendice.

Come prima applicazione del concetto di prima classe, si può notare dalle loro definizioni che  $H'$  e  $\phi_a$  sono di prima classe:  $[\phi_a, \phi_j] = V_a^m [\phi_m, \phi_j]$  più termini che si annullano debolmente e ricordando che  $V_a^m$  deve soddisfare (1.20) si ottiene che  $\phi_a$  è di prima classe. D'altra parte da (1.18),  $[\phi_j, H] + u^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0$ , si riesce facilmente ad osservare che anche  $H'$  è di prima classe.

Inoltre le  $\phi_a$  formano un set completo di vincoli primari di prima classe poichè  $v^a V_a^m$  è la soluzione più generale del sistema omogeneo associato sulla superficie del vincolo  $\phi_j = 0$ .

Se ne deduce quindi che l'Hamiltoniana totale è proprio la somma dell'Hamiltoniana di prima classe  $H'$  e dei vincoli di prima classe moltiplicati per coefficienti arbitrari. Da cui la separazione di  $H_T$  in  $H'$  e  $v^a \phi_a$  non è unica, poichè  $U^m$  può essere soluzione di qualunque equazione non-omogenea, e semplicemente rinominando le funzioni arbitrarie  $v^a$  si può ammettere in  $H'$  ogni combinazione lineare di  $\phi_a$  senza modificare l'Hamiltoniana totale.

## 2.1 I vincoli di prima classe generano trasformazioni di Gauge

Definiti i vincoli di prima classe si vuole approfondire la loro utilità in particolare facendo riferimento alle trasformazioni che non cambiano lo stato fisico del sistema, infatti di seguito si metterà in evidenza come i vincoli di prima classe svolgono il ruolo fondamentale di generatori di trasformazioni di gauge. A causa della presenza nell'Hamiltoniano totale delle funzioni arbitrarie  $v^a$  non tutte le  $q$  e  $p$  sono osservabili, in quanto sebbene fissando  $q$  e  $p$  lo stato fisico risulta determinato univocamente, non è vero il contrario e si hanno diversi punti dello spazio delle fasi  $(q, p)$  che identificano un certo stato fisico. Per giungere a tale conclusione bisogna notare che dando un iniziale set di variabili canoniche al tempo  $t_1$ , in modo da definire completamente lo stato fisico in quel tempo, ci si aspetterebbe di avere pienamente determinata l'evoluzione temporale del sistema fisico con le equazioni del moto. Le ambiguità sulle variabili canoniche per  $t_2 \neq t_1$  dovrebbero essere irrilevanti per definizione. Questo non si verifica a causa della presenza delle funzioni arbitrarie nel tempo  $v^a$ , dalla cui scelta nell'intervallo  $t_1 \leq t \leq t_2$  dipende il valore delle variabili canoniche in  $t_2$ .

Considerando in particolare  $t_2 = t_1 + \delta t$  si vede che la variazione nell'intervallo di tempo di una variabile dinamica  $F$ , per effetto di due scelte diverse  $v^a, v^{a*}$  al tempo  $t_1$ , assume la forma

$$\delta F = \delta v^a [F, \phi_a] \quad (2.2)$$

con  $\delta v^a = (v^a - v^{a*})\delta t$ .

La trasformazione così espressa non altera lo stato fisico in  $t_2$  e si dirà quindi che **i vincoli primari di prima classe generano trasformazioni di Gauge**. Tali trasformazioni di Gauge per vincoli irriducibili sono indipendenti, mentre per vincoli riducibili si può esprimere  $\delta F \approx 0$ .

Per le trasformazioni appena introdotte si possono introdurre i seguenti risultati:

**Teorema 3** *Le parentesi di Poisson  $[\phi_a, \phi_{a'}]$  di due vincoli di prima classe primari generano una trasformazione di gauge.*

**Teorema 4** *Le parentesi di Poisson  $[\phi_a, H']$  di ogni vincolo di prima classe primario  $\phi_a$  con l'Hamiltoniana  $H'$  di prima classe genera una trasformazione di gauge.*

Questi due teoremi mostrano che in generale si deve avere almeno qualche vincolo secondario di prima classe che agisce come generatore di gauge.

Infatti sapendo che  $\phi_a$  e  $H'$  sono di prima classe, si può asserire che  $[\phi_a, \phi_{a'}]$  e  $[\phi_{a'}, H']$  potranno essere espresse come combinazioni lineari di vincoli di prima classe essendo esse stesse di prima classe, non ci si può aspettare tuttavia che tali combinazioni contengano solo vincoli primari.

Da queste considerazioni non si può però dimostrare che *ogni vincolo secondario di prima classe sia un generatore di trasformazioni di Gauge* ed è una espressione che prende il nome di “*congettura di Dirac*”, il quale non è riuscito infatti a trovare un esempio in cui si hanno vincoli secondari di prima classe che generano un cambiamento dello stato fisico di un sistema.

Allora si postula che in generale tutti i vincoli di prima classe generano trasformazioni di gauge e si hanno diversi motivi per partire da tale presupposto.

Come primo elemento la distinzione tra vincoli primari e secondari non è basata sul formalismo hamiltoniano in modo naturale, ma su quello lagrangiano. Contrariamente alla classificazione che si opera sui vincoli di prima e seconda classe che invece è fondata sulle parentesi di Poisson, struttura teorica fondamentale della teoria hamiltoniana. D'altra parte poi si può vedere come le trasformazioni generate da un vincolo di prima classe conservano tutti i vincoli e le parentesi di Poisson di due generatori di gauge restano un generatore di gauge (vale analogamente anche per vincoli di prima classe) e per questo si può pensare che la congettura sia funzionante. Infine si deve sottolineare che i metodi di quantizzazione per sistemi vincolati pongono i vincoli di prima classe tutti sullo stesso piano: vengono perciò trattati tutti come generatori di gauge.

## 2.2 Evoluzione temporale per l'Hamiltoniana estesa

Nei paragrafi precedenti si è sottolineata l'importanza di distinguere quelli che sono i vincoli di prima e seconda classe dal punto di vista hamiltoniano. Quindi si procede per la trattazione dinamica del sistema fisico nell'introduzione di una nuova notazione: si usa  $\gamma$  per indicare i vincoli di prima classe,  $G$  per i generatori di Gauge e con  $\chi$  si indicano i vincoli di seconda classe. Come in precedenza il set di tutti i vincoli è denotato con  $\phi_j$ . Si deve a questo punto costruire un'Hamiltoniana in grado di descrivere l'azione di arbitrarie trasformazioni di gauge mentre il sistema evolve nel tempo, le quali si applicano come sovrapposizioni alla dinamica descritta dall'Hamiltoniana totale. Per questo si introduce l'**Hamiltoniana estesa** la quale contiene un numero di funzioni arbitrarie del

tempo maggiore rispetto a quello visto nell'Hamiltoniana totale e la necessità di trattare i sistemi vincolati con la formulazione estesa si basa sullo sviluppo dello schema hamiltoniano in modo da poter estendere fuori dalla superficie vincolare il formalismo lagrangiano mantenendo manifesti tutti i gradi di libertà di gauge.

Quindi il moto generato dall'Hamiltoniana totale contiene solo il numero di arbitrarie funzioni di gauge relative ai vincoli primari di prima classe, perciò si devono aggiungere i vincoli secondari di prima classe moltiplicati da arbitrarie funzioni  $u^a$ . Si ottiene l'Hamiltoniana estesa in tutto lo spazio delle fasi come una funzione di prima classe la cui forma è

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad (2.3)$$

dove  $a$  varia su tutto il set  $\gamma$ .

L'utilizzo dell'Hamiltoniana estesa è di fondamentale importanza per variabili generiche, mentre si deve sottolineare una diversità di comportamento per le *variabili dinamiche gauge-invarianti*, definite come le variabili il cui calcolo delle parentesi di Poisson con il generatore di gauge  $\gamma_a$  risulta annullarsi, infatti per queste l'evoluzione predetta da  $H'$ ,  $H_T$  e  $H_E$  è certamente la stessa.

Il principio di minima azione può essere allora espresso per la formulazione hamiltoniana estesa nella forma

$$S_E = \int_{t_1}^{t_2} (p_n \dot{q}^n - H' - u^j \phi_j) dt \quad (2.4)$$

in cui la somma contiene tutti i vincoli e non soltanto quelli primari. Per studiare la dinamica del sistema si impone adesso la stazionarietà dell'azione estesa:

$$\delta S_E = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_n \dot{q}^n - H' - u^j \phi_j) dt \quad (2.5)$$

attraverso cui quindi si ricavano le equazioni del moto

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H'}{\partial p_n} + u^j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_n} \quad \dot{p}^n = -\frac{\partial H'}{\partial q^n} - u^j \frac{\partial \phi_j}{\partial q^n} \quad \phi_j(q, p) = 0$$

Si osservi che anche nel caso del formalismo esteso si ottengono delle equazioni del moto che rispettano la forma vista inizialmente in (1.11), ma in questo caso la somma è estesa a tutti i vincoli primari e secondari, e come già mostrato queste possono essere espresse con le parentesi di Poisson

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H'] + u^j [F, \phi_j] \approx \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H' + u^j \phi_j] \quad (2.6)$$

### Esempio sui vincoli di prima classe

Descritti dal punto di vista del formalismo hamiltoniano quelli che sono i vincoli di prima classe, si vogliono chiarire con il seguente esempio i passaggi espliciti che portano

ad individuare un vincolo di prima classe per un semplice sistema di gauge descritto da una Lagrangiana singolare.

Il modello preso in esempio dipende da due variabili dinamiche  $x$  e  $y$  in termini delle quali si esprime la Lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

dalla quale si può allora notare la presenza della variabile non fisica  $y$  la cui evoluzione  $y(t)$  è arbitraria ed è soggetta a trasformazioni di gauge  $\delta y(t) = \epsilon(t)$ . Mantenendo la variabile  $y$  si procede nell'applicazione del formalismo hamiltoniano:

1. Come primo passo si deve mostrare che la Lagrangiana del sistema in analisi è singolare, ovvero deve essere verificata la relazione

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}}\right) = 0.$$

Tale relazione risulta essere vera in quanto sviluppando la matrice Hessiana tre termini sono nulli e di conseguenza il determinante della matrice si annulla. Questo sancisce che quindi si sta operando con un sistema hamiltoniano i cui vincoli possono essere messi in evidenza.

2. I vincoli primari del sistema in analisi vengono fatti emergere nel seguente passaggio al formalismo hamiltoniano, ovvero dalla definizione dei momenti canonici:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$$

Da queste relazioni quindi si ricava un solo vincolo  $C \equiv p_y = 0$ .

3. A questo punto bisogna effettivamente dimostrare che per il vincolo primario individuato, dalle condizioni di consistenza (1.13) non vengano determinati ulteriori vincoli secondari. Per verificarlo da un punto di vista del calcolo esplicito quindi si deve introdurre l'Hamiltoniana canonica del sistema che può essere ricavata dalla trasformata di Legendre come

$$H_0 = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \dot{x}p_x - \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}p_x^2.$$

Si richiede ora la conservazione del vincolo rispetto al tempo

$$\frac{dC}{dt} \approx [C, H_0 + \lambda C] = 0$$

in cui quindi alla Hamiltoniana canonica è stato aggiunto anche il contributo del vincolo  $C$ , il quale risulta essere l'unico vincolo del sistema in questione.

4. L'ultimo passaggio di questo semplice esempio è mettere in evidenza che il vincolo  $C = p_y$  individuato è un vincolo di prima classe. Quindi si fa uso della definizione data in (2.1), in cui si richiede l'annullarsi delle parentesi di Poisson di una funzione arbitraria con il set dei vincoli: in questo caso si identifica la funzione arbitraria con l'Hamiltoniana introdotta al punto precedente  $H = H_0 + \lambda C$ . Esplicitando il calcolo delle parentesi di Poisson allora si evidenzia che

$$[H, C] \approx 0.$$

Si può concludere affermando che il vincolo primario  $C \equiv p_y = 0$  è un vincolo primario di prima classe e nel sistema non si hanno vincoli secondari.

Gli elementi appena discussi nell'esempio possono essere espressi nell'azione:

$$S[x, y, p_x, p_y, \lambda] = \int dt \left( p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{1}{2} p_x^2 - \lambda p_y \right).$$

## 2.3 Vincoli di seconda classe

Così come si è fatto per le funzioni di seconda classe, la definizione di vincoli di seconda classe può essere esposta sulla base del concetto di uguaglianza debole. Si definisce un vincolo di seconda classe qualora la matrice  $C_{jj'} = [\phi_j, \phi_{j'}]$  non si annulla debolmente sulla superficie del vincolo.

Assumendo di lavorare con dei vincoli irriducibili per semplicità e che il rango della matrice  $C_{jj'}$  sia costante sulla superficie del vincolo, vale il seguente teorema.

**Teorema 5** *Se  $\det C_{jj'} \approx 0$ , allora esiste almeno un vincolo di prima classe nel set degli  $\phi_j$*

**Dim.** Se il determinante della matrice  $C_{jj'}$  è debolmente uguale a zero si possono trovare soluzioni non nulle  $\lambda^j$  di  $\lambda^j C_{jj'} \approx 0$ . Quindi è semplice vedere che tale vincolo  $\lambda^j C_{jj'} \approx 0$  è di prima classe verificando il teorema.

Ridefinendo i vincoli con una matrice invertibile  $a_j{}^{j'}$ , che garantisce l'univocità della trasformazione, come  $\phi_j \rightarrow a_j{}^{j'} \phi_{j'}$ , si può utilizzare  $\lambda^j \phi_j$  come primo vincolo di una rappresentazione equivalente che descrive la superficie del vincolo. Si ha in tale rappresentazione  $C_{1j} = -C_{j1} \approx 0$ . Allora applicando ripetutamente il **Teorema 5** si giunge a una descrizione equivalente della superficie del vincolo con i vincoli  $\gamma_a \approx 0$ ,  $\chi_\alpha \approx 0$  rispettivamente di prima e seconda classe e, usando come indici di riga  $\gamma_b, \chi_\beta$  e indici di colonna  $\gamma_a, \chi_\alpha$  la matrice delle parentesi di Poisson diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

dove  $C_{\beta\alpha}$  è una matrice antisimmetrica e invertibile sulla superficie del vincolo. Si evidenzia da questa forma la separazione dei vincoli di prima e seconda classe, perciò neanche con una combinazione di vincoli di prima classe si riescono ad ottenere vincoli di seconda classe. Si noti che per soddisfare l'invertibilità della matrice di Poisson si deve avere un determinante non nullo: il numero di vincoli di seconda classe deve essere pari.

La separazione matriciale non è unica ed è preservata dalla ridefinizione

$$\gamma_a \rightarrow a_a{}^b \gamma_b, \quad \chi_\alpha \rightarrow a_\alpha{}^\beta \chi_\beta + a_\alpha{}^a \gamma_a \quad (2.8)$$

in cui i determinanti delle matrici non si annullano.

Si deve inoltre assumere per le funzioni di seconda classe un'ulteriore proprietà, infatti  $\chi_\alpha$  sono tali che  $\det C_{\alpha\beta} \neq 0$  in ogni punto della superficie  $\chi_\alpha = 0$  e non soltanto su  $\chi_\alpha = 0$  e  $\gamma_\alpha = 0$ . Questa è una proprietà necessaria per maneggiare i vincoli di seconda classe.

I vincoli di seconda classe non possono essere trattati come dei generatori di gauge o in generale come i generatori di ogni altra trasformazione fisicamente rilevante, infatti le trasformazioni associate non preservano tutti i vincoli  $\phi_j \approx 0$  e mappa uno stato permesso in uno non permesso. Per capire come possono essere trattati i vincoli di seconda classe si riporta il semplice esempio descritto dal manuale "Quantization of Gauge Systems di Marc Henneaux e Claudio Teitelboim" [1].

Si consideri quindi un sistema con vincoli di seconda classe con N coppie di coordinate canoniche, di cui la prima coppia è vincolata ad essere zero. Quindi i vincoli sono

$$\chi_1 = q^1 \approx 0 \quad (2.9)$$

$$\chi_2 = p_1 \approx 0 \quad (2.10)$$

Di cui si può vedere che sono di seconda classe dalla relazione  $[\chi_1, \chi_2] = 1 \not\approx 0$ . Inoltre si deve notare dalle precedenti che il primo grado di libertà non è importante quindi può essere scartato. Di conseguenza si definiscono delle parentesi di Poisson modificate:

$$[F, G]^* = \sum_{n=2}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial G}{\partial q^n} \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \quad (2.11)$$

Tali parentesi di Poisson modificate con ognuno dei due vincoli precedenti applicandole a una qualunque variabile dinamica assumono valore nullo per costruzione, perciò sarà possibile operando con tale struttura porre uguale a zero  $\chi_\alpha$  prima della valutazione delle parentesi stesse. Anche nell'esempio sarà allora possibile uguagliare fortemente a zero i vincoli di seconda classe in questione.

Chiaramente le parentesi di Poisson modificate garantiscono tutte le proprietà delle parentesi di Poisson classiche per le variabili con  $n$  maggiore o uguale a 2. Inoltre rispettano anche le proprietà di *antisimmetria*, *derivazione* e *l'identità di Jacobi*.

### 2.3.1 Parentesi di Dirac

Dirac si è preoccupato di generalizzare le parentesi di Poisson modificate, introdotte nell'esercizio precedente, per un arbitrario insieme di vincoli di seconda classe. Avendo assunto che la matrice  $C_{\alpha\beta}$  è invertibile, ci sarà la sua inversa  $C^{\alpha\beta}$  tali per cui

$$C^{\alpha\beta}C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \quad (2.12)$$

Le parentesi di Dirac saranno quindi definite come

$$[F, G]^* = [F, G] - [F, \chi_\alpha]C^{\alpha\beta}[\chi_\beta, G]. \quad (2.13)$$

Seguono le proprietà di cui esse godono:

1.

$$[F, G]^* = -[G, F]^*$$

2.

$$[F, GR]^* = [F, G]^*R + G[F, R]^*$$

3.

$$[[F, G]^*, R]^* + [[R, F]^*, G]^* + [[G, R]^*, F]^* = 0$$

4.

$$[\chi_a, F]^* = 0 \quad \forall F$$

5.

$$[F, G]^* \approx [F, G] \quad G \text{ di prima classe} \forall F$$

6.

$$[R, [F, G]^*]^* \approx [R, [F, G]] \quad F, G \text{ di prima classe}, \forall R$$

Dalla quarta di queste proprietà discende la possibilità di porre fortemente uguale a zero i vincoli di prima o seconda classe prima o dopo aver valutato le parentesi di Dirac. Questa è una proprietà che può essere dimostrata anche esplicitamente dalla definizione:

$$[F, \chi_\alpha]^* = [F, \chi_\alpha] - [F, \chi_\gamma]C^{\gamma\beta}[\chi_\beta, \chi_\alpha] = [F, \chi_\alpha] - [F, \chi_\alpha] = 0$$

quindi è consistente implementare fortemente i vincoli e risolverli per trovare un set di coordinate indipendenti dello spazio delle fasi ridotto [5].

Inoltre essendo l'Hamiltoniana estesa di prima classe si osserva dalla penultima che  $H_E$  genera le corrette equazioni del moto sia in termini delle parentesi di Poisson sia per quelle di Dirac:

$$\dot{F} \approx [F, H_E] \approx [F, H_E]^*, \quad \text{per ogni } F \quad (2.14)$$

e in particolare si può valutare l'effetto di una trasformazione di gauge dal significato delle parentesi di Dirac:

$$[F, \gamma_a] \approx [F, \gamma_a]^* \quad \text{per ogni } F.$$

Si è giunti alla situazione per cui, dopo aver distinto i vincoli di prima e di seconda classe, le parentesi di Poisson possono essere scartate e si prendono in considerazione le parentesi di Dirac, attraverso cui riformulare le equazioni in cui i vincoli di seconda classe diventano uguaglianze forti che esprimono variabili canoniche in termini di altre. Inoltre in alcuni semplici casi possono essere utilizzati i vincoli di seconda classe per eliminare alcune variabili canoniche dal formalismo. Un esempio di questa particolare situazione si può analizzare nell'esercizio di seguito.

### Esempio vincoli di seconda classe

Analogamente a come è stato fatto nella prima parte del capitolo per i vincoli di prima classe, ora si propone un semplice esempio esplicativo del concetto di vincoli di seconda classe. In particolare si vuole analizzare un sistema in cui si evidenziano due vincoli di seconda classe, mostrando quali sono i passaggi che si operano per individuare i vincoli. Il sistema è definito da una Lagrangiana la cui forma è

$$L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q}) = Q\dot{q} - V(q, Q).$$

per la quale si può osservare che corrisponde alla forma standard della Lagrangiana dello spazio delle fasi e descrive un sistema con equazioni del moto al primo ordine nel tempo. Questa è in genere una caratteristica importante per sistemi dotati di vincoli di seconda classe.

1. Come nel caso precedente bisogna mettere in evidenza che la Lagrangiana del sistema in esempio è singolare. Quindi dalla forma con cui è espressa si può notare che non si hanno dipendenze al secondo ordine nelle variabili  $\dot{q}, \dot{Q}$  perciò si otterrà una matrice Hessiana i cui quattro elementi sono tutti nulli. Si ricava quindi che è rispettata la relazione

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial \dot{Q}}\right) = 0$$

la quale mostra appunto che la Lagrangiana è singolare e quello in questione è un sistema hamiltoniano vincolato.

2. Il passaggio successivo è costituito dal ricavare i vincoli del sistema: nel passaggio al formalismo hamiltoniano, definendo i momenti canonici, si introducono delle relazioni sulle variabili dinamiche che costituiscono i vincoli. Si ricavano quindi i momenti  $p, P$  rispettivamente coniugati a  $q, Q$ :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = Q \quad P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = 0$$

da cui allora emergono due vincoli

$$D_1 \equiv p - Q = 0, \quad D_2 \equiv P = 0.$$

3. A questo punto è utile per richiedere la condizione di conservazione nel tempo del vincolo esprimere il calcolo dell'Hamiltoniana canonica e le equazioni del moto relative al sistema.

$$H_0 = p\dot{q} + P\dot{Q} - L = p\dot{q} - Q\dot{q} + V(q, Q) = \dot{q}(p - Q) + V(q, Q) = V(q, Q)$$

in cui sono state utilizzate le equazioni vincolari e da essa, tenendo conto dei contributi dei vincoli che entrano nell'Hamiltoniana totale moltiplicati dal moltiplicatore di Lagrange  $v$ , si ricavano le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= [q, H_0 + vD_1] = v \\ \dot{p} &= [p, H_0 + vD_1] = -\frac{\partial V}{\partial q} \\ \dot{Q} &= [Q, H_0 + vD_2] = v \\ \dot{P} &= [P, H_0 + vD_2] = 0 \end{aligned}$$

Si può a questo punto verificare dalle condizioni di consistenza (1.13), le quali derivano dalla conservazione dei vincoli nel tempo, che in questo sistema non si manifestano vincoli secondari:

$$\frac{dD_1}{dt} \approx [p - Q, H_0 + vD_1] = -\frac{\partial V}{\partial q} - v \approx 0 \quad \rightarrow \quad v = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

da cui quindi si evidenzia una condizione sul moltiplicatore di Lagrange  $v$ . Mentre per l'altro vincolo:

$$\frac{dD_2}{dt} \approx [P, H_0 + vD_2] = 0.$$

Quindi il sistema è caratterizzato solo da vincoli primari.

4. L'unica cosa che resta da dimostrare è che  $D_1$  e  $D_2$  sono di seconda classe. Per farlo si sfrutta la definizione data nel paragrafo (2.3): le parentesi di Poisson calcolate per i vincoli del sistema non si annullano debolmente sulla superficie del vincolo.

$$[D_1, D_2] = -1 \neq 0.$$

Infine si può vedere come i vincoli possono essere trattati tramite le parentesi di Dirac ponendo  $Q = p$  e  $P = 0$ , relazioni che eliminano alcune variabili canoniche dal sistema e lasciano  $(q, p)$  come coordinate indipendenti dello spazio delle fasi ridotto. La cosa interessante che bisogna sottolineare è che in questo caso le parentesi di Dirac corrispondono esattamente alle parentesi di Poisson dello spazio delle fasi  $(q, p)$ . Infatti dalla (2.13) si osserva che usando  $C^{\alpha\beta} = [D_1, D_2] = -1$  si ottiene  $[F_1, F_2]^* = [F_1, F_2] - [F_1, D_1](-1)[D_2, F_2] = [F_1, F_2]$ .

# Capitolo 3

## Condizioni di gauge canoniche e conteggio dei gradi di libertà

In questo capitolo ci si occuperà principalmente di descrivere la procedura attraverso la quale si vanno ad imporre delle *condizioni di gauge canoniche* sulle variabili canoniche del sistema di gauge in analisi. Tale procedura, intesa come una sorta di scelta del sistema di riferimento, è nota come gauge-fixing ed è un'operazione necessaria se si vogliono eliminare le ambiguità sulla scelta di diversi punti dello spazio delle fasi che identificano lo stesso stato fisico, ambiguità che si hanno a causa della presenza di vincoli di prima classe. Quindi attraverso un gauge-fixing si riesce ad ottenere una corrispondenza univoca tra lo stato fisico e le variabili canoniche rimaste indipendenti dopo aver fissato il gauge, evitando il “conteggio multiplo degli stati” e lasciando invariate le proprietà degli osservabili fisici.

### 3.1 Funzioni Gauge invarianti

Prima di procedere con la descrizione del gauge-fixing è bene introdurre il concetto di osservabili fisici dal punto di vista hamiltoniano, i quali devono essere algebricamente caratterizzati con le parentesi di Dirac e in questo senso per ottenere delle parentesi di Dirac che siano ben definite si mette in evidenza che gli osservabili devono essere delle funzioni gauge-invarianti sulla superficie del vincolo.

#### 3.1.1 Funzioni sulla superficie vincolata

Si denoti a questo punto lo spazio delle fasi con  $P$  e lo spazio delle funzioni lisce sullo spazio delle fasi con  $C^\infty(P)$ . Si caratterizza quindi lo spazio vettoriale  $C^\infty(P)$  di due strutture algebriche:

- La moltiplicazione ordinaria puntuale, che lo caratterizza di un'algebra associativa;

- Le parentesi di Dirac, per cui è uno spazio dotato di algebra di Lie.

Queste due operazioni possono essere messe in relazione con

$$[F_1 F_2, F_3]^* = [F_1, F_3]^* F_2 + F_1 [F_2, F_3]^* \quad (3.1)$$

Poichè il sistema dinamico è vincolato a stare sulla superficie del vincolo  $\Sigma$ , due funzioni dello spazio delle fasi che coincidono su  $\Sigma$  non possono essere distinte in nessun modo: le funzioni rilevanti sono le funzioni lisce su  $\Sigma$  e non tutte le funzioni lisce.

Si deve quindi caratterizzare algebricamente lo spazio  $C^\infty(\Sigma)$  delle funzioni lisce. L'insieme delle funzioni che si annullano su  $\Sigma$  formano un *ideale*  $N$  in  $C^\infty(P)$  rispetto alla moltiplicazione ordinaria, ovvero il prodotto di un' arbitraria funzione dello spazio delle fasi con una funzione che si annulla in  $\Sigma$  si annulla anch'esso su  $\Sigma$ . Gli elementi in  $N$  possono essere espressi nella forma  $\lambda^a \gamma_a + \mu^\alpha \chi_\alpha$  in quanto  $N$  è generato da  $\gamma_a$  e  $\chi_\alpha$  (dal Teorema 1). Si considera adesso l'algebra del quoziente  $C^\infty(P)/N$  che contiene le classi di equivalenza delle funzioni dello spazio delle fasi, le quali differiscono tra loro per un elemento di  $N$ . Poichè ogni classe di equivalenza di  $C^\infty(P)/N$  definisce una funzione di  $\Sigma$ , si può mostrare che l'algebra del quoziente non è altro che  $C^\infty(\Sigma)$  con la moltiplicazione ordinaria.

### 3.1.2 Osservabili classici

Si definisce un osservabile (classico) come una funzione sullo spazio delle fasi che è invariante per trasformazioni di gauge. Ci si riferisce ad un osservabile inoltre anche come una funzione dello spazio delle fasi che annulla le parentesi di Dirac rispetto a un vincolo di prima classe

$$[F, \gamma_a]^* \approx 0 \quad (3.2)$$

Perciò il concetto di osservabile comporta la restrizione della superficie del vincolo e la condizione di invarianza, che corrisponde alla condizione di prima classe rispetto alle parentesi di Dirac.

Bisogna preoccuparsi di definire l'algebra degli osservabili, facendo in particolare attenzione alla struttura delle parentesi. Infatti l'algebra del quoziente  $C^\infty(\Sigma) \equiv C^\infty(P)/N$  eredita una moltiplicazione ben definita da  $C^\infty(\Sigma)$ , ma in questa non si hanno delle parentesi definite se non nel caso in cui si hanno solo vincoli di seconda classe. Questo perchè  $N$  è stato introdotto come un ideale per la moltiplicazione ordinaria ma non rappresenta un ideale per parentesi di Dirac: se  $F \in C^\infty(P)$  e  $G \in N$  (tale per cui  $G = \lambda^a \gamma_a + \mu^\alpha \chi_\alpha$ ) allora  $[F, G]^* \approx [F, \gamma_a]^* \lambda^a \neq 0$  salvo quando  $F$  è un invariante di gauge ( $[F, \gamma_a]^* \approx 0$ ).

Le funzioni gauge invarianti definiscono la sottoalgebra  $O$  contenente  $N$ , e per la quale è un ideale. Allora solo per queste funzioni si può vedere che si hanno delle parentesi ben definite

$$[F + \lambda^a \gamma_a + \mu^\alpha \chi_\alpha, F' + \lambda'^a \gamma_a + \mu'^\alpha \chi_\alpha]^* \approx [F, F']^*$$

Si conclude affermando quindi che la necessità di ottenere delle parentesi ben definite obbliga a considerare delle funzioni che sono invarianti sotto trasformazioni generate da tutti i vincoli di prima classe, primari e secondari.

## 3.2 Gauge-fixing

Si può proporre un'interpretazione geometrica del gauge-fixing. Infatti un buon set di condizioni di gauge  $C_b(q, p) \approx 0$  definisce una sottovarietà nello spazio delle fasi che interseca tutte le orbite di gauge sulla superficie dei vincoli in un unico punto, rispettando in questo modo le proprietà di accessibilità e completezza che saranno chiarite in seguito. Il numero di condizioni di gauge indipendenti che si possono introdurre nell'analisi del sistema fisico deve essere pari a quello dei vincoli indipendenti di prima classe  $\gamma_a$ , infatti le orbite di gauge individuano una sottovarietà della superficie vincolata di dimensioni pari al numero di vincoli  $\gamma_a$ .

Si devono commentare a questo punto le proprietà di accessibilità e completezza precedentemente citate per il set di condizioni di gauge  $C_b(q, p) \approx 0$  :

- a. Si deve scegliere una trasformazione di gauge *accessibile*, che mappa il set di variabili canoniche  $q, p$  in un set che soddisfa la relazione di cui sopra ed è una trasformazione ottenuta dall'iterazione delle trasformazioni infinitesime  $\delta u^a[F, \gamma_a]$ . La richiesta di accessibilità garantisce la non influenza degli osservabili (gauge invarianti) e restringe soltanto i gradi di libertà di gauge. Inoltre si deve notare che il numero dei parametri  $\delta u^a$  è uguale al numero dei vincoli indipendenti di prima classe  $\gamma_a$ , quindi il numero di condizioni di gauge indipendenti non può essere maggiore del numero di  $\gamma_a$ .
- b. La condizione deve fissare *completamente* il gauge: non deve esistere nessun'altra trasformazione di gauge che preserva la relazione sul set di condizioni di gauge  $C_b(q, p) \approx 0$ . Questo comporta che

$$\delta u^a[C_b, \gamma_a] \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \delta u^a = 0.$$

Le due proprietà insieme implicano che per fissare il gauge, il numero di condizioni indipendenti di gauge deve essere uguale al numero dei vincoli di prima classe indipendenti. In tal caso la matrice formata dalle parentesi di Poisson  $[C_b, \gamma_a]$  sarà una matrice quadrata e, per soddisfare  $\delta u^a = 0$  da  $\delta u^a[C_b, \gamma_a] \approx 0$ , dovrebbe essere invertibile. In questo modo allora si ottiene

$$\det[C_b, \gamma_a] \neq 0. \tag{3.3}$$

Questa condizione determina direttamente la formazione di un set di seconda classe e si può apprezzare che dopo aver completato il gauge-fixing non sono lasciati vincoli di

prima classe, eliminando quindi i gradi di libertà generati da quella trasformazione di gauge relativa a ciascuno di quei vincoli, ma sono lasciati esclusivamente quelli di seconda classe.

Infine bisogna sottolineare che può accadere che non esistano globalmente delle condizioni di gauge valide, come conseguenza delle orbite di gauge definite dalla geometria della superficie vincolata: tale problematica è spesso denominata *ostruzioni di Gribov* e inducono a sviluppare un formalismo più indipendente possibile dal gauge-fixing per studiare l'evoluzione dinamica del sistema vincolato.

### 3.2.1 Gauge-fixing per vincoli di seconda classe

Si è precedentemente evidenziato con la (3.3) come l'effetto di un gauge-fixing sia quello di modificare i vincoli di prima classe, insieme alle condizioni di gauge, in vincoli di seconda classe. Questo suggerisce quindi di interpretare i vincoli di seconda classe come risultanti dalla procedura di gauge-fixing su un sistema equivalente invariante per trasformazioni di gauge e privo di vincoli di seconda classe, ed è un'operazione in generale sempre possibile. Il sistema di gauge equivalente può contenere sia lo stesso numero di variabili, in caso di sistemi semplici, oppure può essere necessario introdurre gradi di libertà extra, senza influenzare la dinamica del sistema che resta comunque invariata.

L'aggiunta di gradi di libertà extra comporta il vantaggio di avere solo vincoli di prima classe e con questi si può evitare di ricorrere alle parentesi di Dirac ed usare quelle di Poisson, finché non si fissa il gauge dalle condizioni di gauge canoniche, che è un elemento che comporta importanti vantaggi in termini di formulazione e trattazione quantitativa di un problema fisico. Ad esempio la quantizzazione delle parentesi di Dirac che dipendono dalle variabili canoniche può essere un'operazione non banale e in alcuni casi non è garantita.

Di seguito per mettere in atto il metodo descritto fino a questo punto si possono formulare due semplici esempi, che mostrano esplicitamente che il sistema di gauge equivalente può contenere lo stesso numero di variabili per casi semplici, oppure bisogna aggiungere gradi di libertà di gauge extra. Nel primo caso si considerano i vincoli  $q_1 = 0$ ,  $p_1 = 0$ , il primo dei quali si può vedere come una condizione di gauge-fixing per l'invarianza generata da  $p_1 = 0$  in modo da poter scrivere  $q_1 \rightarrow q_1 + u$ . In questo senso allora si deve notare che i vincoli di seconda classe  $q_1 = 0$ ,  $p_1 = 0$  sono così equivalenti al singolo vincolo di prima classe  $p_1 = 0$ .

Il modello in cui i vincoli di seconda classe vengono modificati in un set di vincoli esclusivamente di prima classe non è sempre raggiungibile. Infatti si hanno dei casi in cui è necessario introdurre variabili extra in modo da rimuovere i vincoli di seconda classe. Lo si vede nel seguente esempio.

Si considera un set di vincoli  $q_1 = 0$ ,  $p_1 = 0$  e si estende il sistema introducendo un'altra coppia di variabili coniugate  $(q^2, p_2)$ . Si ridefiniscono i vincoli come  $\phi_1 = q_1 + q_2 = 0$

e  $\phi_2 = p_1 - p_2 = 0$ , per i quali si mostra semplicemente che sono di prima classe e generano quindi delle trasformazioni di gauge  $q_1 \rightarrow q_1 + \epsilon_2, p_1 \rightarrow p_1 - \epsilon_1$  e anche  $q_2 \rightarrow q_2 - \epsilon_2, p_2 \rightarrow p_2 - \epsilon_1$ . Allora imponendo le condizioni di gauge  $q_2 = 0, p_2 = 0$  le variabili  $(q^2, p_2)$  vengono eliminate e si torna al sistema originale. Si può quindi concludere che l'introduzione di variabili extra non cambia la dinamica del sistema.

### 3.2.2 Conteggio dei gradi di libertà

Una teoria che contiene soltanto vincoli di seconda classe non vede nell'Hamiltoniana la comparsa di funzioni arbitrarie e lo stato fisico è determinato in maniera univoca da un set di variabili canoniche che soddisfano l'equazione del vincolo. Nella procedura di gauge-fixing si vanno a lasciare nel sistema solo vincoli di seconda classe, quindi si può procedere nel conteggio dei gradi di libertà. Quindi si introducono i termini:

- $N_{gdl}$ , numero dei gradi di libertà;
- $N_{vc}$ , numero di variabili canoniche indipendenti;
- $N_T$ , numero totale di variabili canoniche;
- $N_{sc}$ , il numero di vincoli di seconda classe iniziali;
- $N_{pc}$ , il numero di vincoli di prima classe;
- $N_g$ , il numero delle condizioni di gauge.

Attraverso cui si esprime l'esplicito conteggio dei gradi di libertà fisici del sistema:

$$2N_{gdl} = N_{vc} = N_T - N_{sc} - N_{pc} - N_g = N_T - N_{sc} - 2N_{pc} \quad (3.4)$$

Da tale relazione si può analizzare che il numero dei vincoli di seconda classe è sempre pari, come il numero delle variabili canoniche indipendenti di conseguenza e corrisponde al numero intero di gradi di libertà.

Il conteggio così esposto è ben definito per un finito numero di gradi di libertà, mentre passando al caso continuo si presentano delle questioni di natura sia matematica che fisica basate sulla distinguibilità delle trasformazioni di gauge da quelle che cambiano lo stato fisico.

# Capitolo 4

## Particella relativistica

### 4.1 Introduzione alla meccanica relativistica

Si utilizza questa sezione per introdurre brevemente le proprietà della meccanica relativistica, in modo da porre le basi per la comprensione della successiva trattazione della particella relativistica come un sistema hamiltoniano vincolato, i cui vincoli fungono da generatori di simmetrie di gauge.

All'inizio del '900 si è evidenziata l'incongruenza tra la meccanica Galileiana e le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo, infatti queste non rispettavano la proprietà di invarianza rispetto alle *trasformazioni di Galileo*, proprietà che invece si ottiene attraverso le *trasformazioni di Lorentz*. Bisogna quindi citare i due casi esplicitamente e per farlo si fa riferimento al moto relativo di due sistemi di riferimento inerziali  $K = (t, x, y, z)$  e  $K' = (t', x', y', z')$ , per i quali all'istante iniziale  $t = t' = 0$  le origini  $O$  e  $O'$  corrispondono e tali per cui  $K'$  è in moto rispetto a  $K$  con una velocità  $v$  diretta lungo l'asse  $x$ . Quindi si riportano da [3] le relazioni che definiscono le trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

le quali sono quindi trasformazioni lineari e si basano sull'evidenza di operare con un *tempo assoluto*. Tramite queste relazioni si riesce a mostrare facilmente l'invarianza delle equazioni del moto. D'altra parte l'elettrodinamica, si è detto, presenta una proprietà

di invarianza rispetto alle seguenti trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

La proprietà per cui maggiormente si distingue la formulazione lorentziana sta nel fatto di non avere un tempo assoluto, infatti è presente una dipendenza del tempo dal sistema di riferimento ( $t' \neq t$ ) e si nota dall'espressione di  $t'$  la dipendenza rispetto alla velocità relativa.

Da tale formulazione si evidenzia la presenza del termine  $c$ , che corrisponde alla velocità della luce nel vuoto e affinché le trasformazioni abbiano senso si deve sempre soddisfare  $v < c$ . Si può sottolineare che nel limite non relativistico  $v \ll c$  le trasformazioni di Lorentz sono simili a quelle di Galileo.

In effetti le conseguenze delle trasformazioni di Lorentz riguardano le misure spazio-temporali, in particolare si deve fare riferimento ai concetti della contrazione delle lunghezze e della dilatazione dei tempi. Einstein ha sancito che le trasformazioni di Lorentz fossero quelle corrette per trasformare la meccanica di sistemi di riferimento diversi e in questa ottica è particolarmente utile introdurre per la meccanica relativistica la notazione che fa uso dei quadrivettori definiti nello *spazio di Minkowski*. Tale spazio detto anche spazio-tempo è costituito da 3 dimensioni spaziali e 1 dimensione temporale: in esso un evento è descritto da un punto, mentre un fenomeno fisico è inteso come una successione di eventi, ovvero una linea dello spazio stesso. Per operare in tale spazio si utilizzano i quadrivettori

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

dove si deve porre come prima componente quella temporale in modo da avere  $x^0 = ct$ , mentre le altre saranno date dalle coordinate  $(x, y, z)$  in  $R^3$ .

A questo punto si deve sottolineare che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariato il modulo quadro del vettore posizione

$$s^2 \equiv -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

perciò si parla di *distanza invariante* ed è quindi una grandezza scalare utile anche per classificare i quadrivettori distinguendo quelli di tipo tempo, di tipo luce e di tipo spazio, rispettivamente per  $s^2 < 0$ ,  $s^2 = 0$ ,  $s^2 > 0$ , la quale è anch'essa una classificazione invariante.

Un'altra grandezza che risulta essere invariante sotto trasformazioni di Lorentz è il *tempo proprio*  $\tau$ , inteso come il tempo che si può misurare per ogni oggetto nel sistema di

riferimento solidale con l'oggetto stesso. Quindi per il tempo proprio infinitesimo vale:

$$d\tau \equiv dt' = \gamma^{-1} dt = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{-\frac{ds^2}{c^2}}$$

Da questa relazione si ottiene quindi che il tempo proprio è un invariante relativistico. Considerando una particella che compie un certo moto, essa può essere descritta da una linea nello spazio tempo, nota come *linea di mondo* o linea di universo. Il tempo proprio quindi fornisce una misura della linea di mondo della particella in maniera invariante.

## 4.2 Particella relativistica come sistema vincolato

In questa sezione si propongono quattro descrizioni equivalenti della propagazione della particella relativistica, che per definizione deve essere consistente con l'invarianza per le trasformazioni di Lorentz e più in generale con quelle di Poincarè, in cui si fa uso delle simmetrie di gauge. Successivamente si mette in evidenza che la particella relativistica è dinamicamente descritta da una Lagrangiana singolare, quindi può essere utilizzata come esempio esplicativo della teoria dei sistemi hamiltoniani vincolati sviluppata nei capitoli precedenti.

1. Assumendo di studiare il sistema dinamico da un sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane  $x^\mu = (x^0, x^i) = (t, x^i)$ , dove le funzioni  $x^i(t)$  costituiscono le variabili dinamiche e si impone l'invarianza dell'azione per trasformazioni di Lorentz in modo da ottenere l'invarianza relativistica. Tale passaggio si può realizzare con la formulazione del tempo proprio  $T_0$  per il quale abbiamo in un moto infinitesimo

$$dT_0 = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{dt^2 - dx^i dx^i} = dt \sqrt{1 - \dot{x}^i \dot{x}^i} \quad (4.1)$$

il quale è un invariante relativistico. Quindi si ha l'azione

$$S_1[x^i(t)] = -m \int dT_0 = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{x}^i \dot{x}^i} \quad (4.2)$$

che essendo proporzionale al tempo proprio, dove  $m$  indica la massa della particella, è un invariante per trasformazioni di Lorentz e di Poincarè. Si ottengono le equazioni del moto dal principio di minima azione:

$$\delta S_1[x^i] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m \dot{x}^i}{\sqrt{1 - \dot{x}^i \dot{x}^i}} \right) = 0. \quad (4.3)$$

In questa semplice trattazione si deve quindi sottolineare che le simmetrie rigide sono quelle generate dal gruppo di Poincarè e non vengono utilizzate simmetrie di gauge e le variabili sono tutte "fisiche".

2. Questa appena proposta è una trattazione corretta, ma l'invarianza di Lorentz non si manifesta: si deve proporre una formulazione differente affinché l'invarianza di Lorentz possa manifestarsi e lo si fa sfruttando le simmetrie di gauge messe in evidenza introducendo variabili dinamiche extra. Si può però considerare il caso in cui si vanno ad utilizzare quattro variabili  $x^\mu$ , una delle quali o una loro combinazione deve essere ridondante in modo da ottenere un'equivalenza con l'azione del punto precedente, le quali devono descrivere le coordinate spaziali  $x^i$  e quella temporale  $x^0 \equiv t$ , ponendole sullo stesso piano ed evidenziando una certa simmetria. Questo è reso possibile dalla presenza di simmetrie di gauge.

Si procede quindi introducendo  $x^\mu(\tau)$  le variabili dinamiche con cui si descrive la particella sulla linea di mondo in termini del parametro temporale arbitrario  $\tau$ . L'azione che si deve esprimere è geometricamente la stessa, proporzionale al tempo proprio:

$$S_2 = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (4.4)$$

in cui ora si sta ridefinendo la derivata temporale rispetto al parametro  $\tau$ , ovvero  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} x^\mu$ . Si evidenzia da questa funzione, la quale è uno scalare di Lorentz, che l'invarianza di Lorentz è manifesta.

Si ottengono quindi le equazioni del moto ancora dal principio variazionale di minima azione nella forma:

$$\delta S_2[x^\mu] = 0 \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{m \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Per questa tipologia di sistema si individuano le simmetrie rigide come quelle generate dal gruppo di Poincarè

$$x^\mu(\tau) \rightarrow x'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \quad (4.6)$$

trasformazione che diventa in termini infinitesimi

$$\delta x^\mu(\tau) = \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu \quad (4.7)$$

dove  $\delta x^\mu(\tau) = x'^\mu(\tau) - x^\mu(\tau)$ , mentre  $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ . Tale simmetria di Poincarè garantisce per la sua definizione che il modello è relativistico. Si deve inoltre evidenziare la presenza di una simmetria di gauge (locale)

$$\delta x^\mu = \xi(\tau) \dot{x}^\mu(\tau) \quad (4.8)$$

dove compare il parametro infinitesimo  $\xi(\tau)$  che funge da generatore della simmetria che dipende dalla scelta arbitraria del parametro temporale  $\tau$ , viene quindi detto locale.

Quindi l'azione, in cui si usa la Lagrangiana  $L_2 = -m\sqrt{-\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu}$ , è invariante a meno di termini di bordo sotto queste trasformazioni e si ha:

$$\delta S_2[x^\mu] = \int d\tau \frac{d}{d\tau}(\xi L_2) \sim 0. \quad (4.9)$$

Geometricamente si può interpretare questa simmetria locale come una riparametrizzazione della linea di universo

$$\tau \longrightarrow \tau' = f(\tau) \quad x^\mu(\tau) \longrightarrow x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \quad (4.10)$$

che per trasformazioni infinitesime  $\tau' = \tau - \xi(\tau)$  si riduce a (4.8).

La simmetria di gauge è quindi necessaria se si vuole mostrare l'equivalenza con la trattazione al punto (1.): si ottiene tale equivalenza tramite una trasformazione di gauge, che si è detto riparametrizza la linea d' universo, fissando le variabili dinamiche, cioè "fissando il gauge". Infatti si opera la *scelta del gauge-fixing* ponendo

$$x^0(\tau) = t(\tau) = \tau \quad (4.11)$$

che fissa l'evoluzione temporale della variabile  $x^0(\tau)$ , la quale non è più una variabile dinamica e la si usa come parametro per i punti della linea di mondo della particella. Questo riproduce l'azione  $S_1$ .

3. La terza formulazione si basa sull'uso di una "variabile/campo di gauge", intesa come una variabile la cui trasformazione di gauge contiene la derivata del *parametro di gauge*. Si utilizza il campo di gauge  $e(\tau)$ , che si assume non nullo e invertibile, e l'azione sarà data da

$$S_3[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \frac{1}{2}(e^{-1}\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - em^2) \quad (4.12)$$

La simmetria locale sarà quindi

$$\delta x^\mu = \xi \dot{x}^\mu \quad (4.13)$$

$$\delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e)$$

le quali determinano il principio variazionale nella forma

$$\delta S_3 = \int d\tau \frac{d}{d\tau}(\xi L_3) \sim 0.$$

Si noti che il campo di gauge  $e$  contiene la derivata del parametro locale  $\xi$ . Le simmetrie globali sono le trasformazioni di Poincarè

$$\delta x^\mu(\tau) = \omega^\mu{}_\nu x^\nu(\tau) + a^\mu$$

$$\delta e(\tau) = 0.$$

Le equazioni del moto avranno quindi la forma:

$$\frac{\delta S[x, e]}{\delta e(\tau)} = 0 \longrightarrow e^{-2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\delta S[x, e]}{\delta x^\mu(\tau)} = 0 \longrightarrow \frac{d}{d\tau}(e^{-1} \dot{x}^\mu) = 0 \quad (4.15)$$

Si mostra quindi l'equivalenza con la formulazione nel punto (2.).

Dalla prima di queste due relazioni si risolve

$$e = \pm \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (4.16)$$

da cui sostituendo in  $S_3$  si ottiene

$$S_3[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \pm \frac{1}{m} \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = \mp \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (4.17)$$

e la soluzione vista in (2.) è ottenuta per  $e > 0$ . Dal caso dato invece per  $e < 0$  si osserva l'esistenza delle antiparticelle.

Questa formulazione è superiore alla precedente in quanto ammette anche il caso in cui la particella è senza massa, infatti basta considerare  $m = 0$  nell'azione.

3 bis. Si può mostrare un caso in cui si opera una scelta di gauge-fixing sul campo di gauge, fissando  $e = 1$  e si semplifica l'azione

$$S_{3-bis}[x^\mu(\tau)] = \int dt \frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu. \quad (4.18)$$

Mentre l'equazione del moto per  $e$  con la condizione di gauge-fixing imposta diventa  $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 = 0$ : l'azione semplificata con il vincolo associato è dunque equivalente all'azione gauge invariante.

4. La quarta formulazione è quella hamiltoniana e in particolare risulta essere utile per la quantizzazione canonica. Si procede introducendo  $p_\mu = e^{-1} \dot{x}^\mu$  e la corrispondente hamiltoniana  $\bar{H} = \frac{e}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) \equiv eH$ . Si ottiene allora l'azione nello spazio delle fasi

$$S_4[x^\mu(\tau), p_\mu(\tau), e(\tau)] = \int d\tau \left( p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) \right) \quad (4.19)$$

in cui si considerano  $x^\mu$ ,  $p_\mu$ ,  $e$  come variabili dinamiche indipendenti. La simmetria di gauge allora può essere espressa come

$$\delta x^\mu = \zeta p^\mu \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \delta p_\mu &= 0 \\ \delta e &= \dot{\zeta} \end{aligned}$$

Per cui si vede che sotto tale trasformazione l'azione è invariante

$$\delta S_4 = \int d\tau \frac{d}{d\tau} \frac{\zeta}{2} (p^2 - m^2) \sim 0.$$

Eliminando i momenti sostituendoli con le rispettive equazioni del moto algebriche si ottiene la formulazione vista nel punto (3.):

$$\frac{\delta S_4}{\delta p_\mu} = \dot{x}^\mu - e p^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\mu = e^{-1} \dot{x}^\mu \quad (4.21)$$

in cui si nota dalla struttura che  $S_4$  dipende dalle coordinate  $(x^\mu, p_\mu)$  nello spazio delle fasi e dal campo  $e$  come un moltiplicatore di Lagrange. Le equazioni del moto determinano un vincolo di prima classe

$$C \equiv \frac{1}{2}(p^\mu p_\mu + m^2) = 0 \quad (4.22)$$

il quale funge da generatore delle trasformazioni di gauge sulle coordinate dello spazio delle fasi tramite le parentesi di Poisson:

$$\delta x^\mu = [x^\mu, \zeta C] = \zeta P^\mu \quad (4.23)$$

$$\delta p_\mu = [p_\mu, \zeta C] = 0$$

con  $\zeta(\tau)$  il parametro infinitesimo locale, le quali corrispondono di fatto alle relazioni in (4.20).

Per concludere la tesi si propone l'applicazione del formalismo sviluppato per sistemi hamiltoniani vincolati nei capitoli precedenti al caso specifico della particella relativistica. Quindi si considera il sistema della particella già introdotto nella trattazione (2), in cui esso presenta una certa simmetria di gauge.

Si osserva allora che la Lagrangiana nella forma

$$L = -m \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (4.24)$$

determina un'equazione di Eulero-Lagrange con il termine  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}_\mu}$  che è una matrice quadrata il cui determinante è uguale a zero. Per quanto precedentemente esposto si avranno allora dei vincoli primari dalla definizione dei momenti canonici

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}}.$$

Sfruttando tale relazione si ricava il vincolo del sistema:

$$p^\mu p_\mu = m^2 \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu} = -m^2 \quad (4.25)$$

il quale costituisce un invariante relativistico e si ottiene allora il vincolo nella forma

$$\phi_1 = p_\mu p^\mu + m^2 = 0. \quad (4.26)$$

Si osservi a questo punto che applicando la condizione di consistenza non si determinano per il sistema in analisi vincoli secondari, quindi si può trattare il vincolo ricavato  $\phi_1$  come un vincolo primario di prima classe il quale funge da generatore delle seguenti trasformazioni di gauge:

$$\delta x^\mu = [x^\mu, \zeta C] = \zeta P^\mu \quad (4.27)$$

$$\delta p_\mu = [p_\mu, \zeta C] = 0$$

con  $\zeta(\tau)$  il parametro infinitesimo locale.

L'Hamiltoniana di prima classe della particella relativistica calcolata attraverso la trasformata di Legendre sarà quindi

$$H' = \dot{x}^\mu p_\mu - L = m \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} + m \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = 0 \quad (4.28)$$

che si utilizza per esplicitare l'Hamiltoniana estesa

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad \rightarrow \quad H_E = 0 + e \frac{1}{2} (p^2 + m^2) \quad (4.29)$$

ovvero corrisponde all'Hamiltoniana della trattazione (4.) e si può notare che anche per l'azione invariante per trasformazioni di gauge nello spazio delle fasi di conseguenza si ottiene una relazione analoga ad  $S_4$ :

$$S[x^\mu, p_\mu, e] = \int d\tau (p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{e}{2} (p^\mu p_\mu + m^2)) = S_4. \quad (4.30)$$

# Capitolo 5

## Appendice

Si utilizza l'Appendice di questa tesi per visualizzare quelle che sono le dimostrazioni dei **Teorema 1** e **Teorema 2**, enunciati nel capitolo 1. Di seguito inoltre si riporta la dimostrazione della proprietà secondo cui le parentesi di Poisson che si applicano a due funzioni ne conservano la classe.

**Teorema 1** *Se una funzione liscia dello spazio delle fasi  $G$  si annulla sulla superficie  $\phi_m = 0$ , allora  $G = g^m \phi_m$  per qualche funzione  $g^m$ .*

**Dimostrazione 1** *La dimostrazione si basa sul fatto che uno può scegliere localmente come prima coordinate le funzioni del vincolo indipendenti  $\phi_{m'}$  per un regolare sistema di coordinate  $(y'_m, x_\alpha)$  con  $y'_m \equiv \phi_{m'}$ . In queste coordinate si ha, usando  $G(0, x) = 0$*

$$G(y, x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(ty, x) dt = y_{m'} \int_0^1 G_{m'}(ty, x) dt$$

da cui quindi:

$$G = g^m \phi_m$$

con  $g^{m'} = \int_0^1 G_{m'}(ty, x) dt$  e  $g^{\bar{m}'} = 0$ . Questi passaggi sono validi soltanto localmente.

**Teorema 2** *Se  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  per variazioni arbitrarie  $\delta q^n$ ,  $\delta p_n$  tangente alla superficie del vincolo, allora*

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}$$

per qualche  $u^m$ . Tali uguaglianze sono uguaglianze sulle superfi dei vincoli.

**Dimostrazione 2** *La superficie vincolare è di dimensione  $2N - M'$  e si osserva che le variazioni tangenti  $\delta q^n, \delta p_n$  formano uno spazio vettoriale  $(2N - M')$ . Di conseguenza esistono  $M'$  soluzioni indipendenti di  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  e dall'assunzione della condizione di regolarità i  $M'$  gradienti  $\frac{\delta \phi_{m'}}{\delta q^n}, \frac{\delta \phi_{m'}}{\delta p_n}$  per vincoli indipendenti sono linearmente indipendenti. Quindi i gradienti risolvono  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  per variazioni tangenti e formano una base di soluzioni. Questo dimostra il teorema.*

Infine si fa riferimento alla dimostrazione della proprietà delle parentesi di Poisson enunciata nel capitolo 2 per cui, quando si applicano a funzioni di prima classe restituiscono una funzione di prima classe. Infatti con  $F$  e  $G$  due funzioni di prima classe allora

$$[F, \phi_j] = f_j^{j'} \phi_{j'}$$

$$[G, \phi_j] = g_j^{j'} \phi_{j'}$$

quindi sfruttando l'identità di Jacobi si avranno

$$\begin{aligned} [[F, G], \phi_j] &= [F, [G, \phi_j]] - [G, [F, \phi_j]] \\ &= [F, g_j^{j'} \phi_{j'}] - [G, f_j^{j'} \phi_{j'}] \\ &= [F, g_j^{j'}] \phi_{j'} + g_j^{j'} f_{j'}^{j''} \phi_{j''} - [G, f_j^{j'}] \phi_{j'} - f_j^{j'} g_{j'}^{j''} \phi_{j''} \equiv 0 \end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] C. Teiteboim e M. Henneaux, Quantization of gauge systems (Princeton University Press, 1992).
- [2] V. Barone, Relatività, principi e applicazioni, Programma di matematica e fisica (Bollati Boringhieri, 2004).
- [3] F. Bastianelli, Richiami di meccanica classica, Dispense di Fisica Teorica (Università di Bologna, 2016).
- [4] F. Bastianelli, Relatività ristretta e formalismo tensoriale, Dispense di Fisica Nucleare e Subnucleare (Università di Bologna, 2020).
- [5] F. Bastianelli, Constrained hamiltonian systems and relativistic particles, Dispense di Fisica Teorica 2 (Università di Bologna, 2018).
- [6] R. Balescu, Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics (Faculté des Sciences Université Libre de Bruxelles, 1975).
- [7] P. A. M Dirac, Lectures on quantum mechanics (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964)