

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Equazione differenziale omogenea di secondo  
ordine per il grafico sunrise a 2-loop con masse  
arbitrarie**

**Relatore:**  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

**Presentata da:**  
Filippo Caleca

**Correlatore:**  
Prof. Ettore Remiddi

# Indice

<b>I</b>	<b>Bolla ad 1-loop</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Regolarizzazione di Euclide</b>	<b>6</b>
1.1	Studio per differenti valori di $s$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Regolarizzazione di Minkowski</b>	<b>9</b>
2.1	Studio per differenti valori di $s$ . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Sunrise a 2 loop</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Regolarizzazione di Euclide</b>	<b>13</b>
3.1	$p$ timelike . . . . .	13
3.2	Studio per differenti valori di $E$ . . . . .	14
3.2.1	$m_1 > m_2 + m_3$ . . . . .	15
3.2.2	$m_1 < m_2 + m_3$ . . . . .	16
3.3	$p$ spacelike . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Regolarizzazione di Minkowski</b>	<b>18</b>
4.1	$p$ timelike . . . . .	18
4.2	Studio per differenti valori di $E$ . . . . .	19
4.3	$p$ spacelike . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Il limite <math>d = 2</math></b>	<b>24</b>
5.1	Equazione differenziale per il sunrise . . . . .	26
	<b>Appendici</b>	<b>28</b>
<b>A</b>	<b>Risultati della bolla ad 1-loop</b>	<b>29</b>
<b>B</b>	<b>Integrali ellittici e cambiamenti di variabile di Legendre</b>	<b>31</b>
<b>C</b>	<b>Equazione differenziale nel limite di masse uguali</b>	<b>33</b>

## Sommario

È noto da [1] che è possibile, attraverso le Integration by Part identities (IbP identities) esprimere un qualsiasi diagramma di Feynman di topologia definita (ovvero definito da un certo set di propagatori) in termini di un numero finito di integrali comunemente noti come master integrals. In [4] è stato dimostrato che, dato un diagramma esprimibile in termini di  $n$  master integrals, le IbP identities possono essere ulteriormente sfruttate per ottenere un sistema lineare di equazioni differenziali al prim'ordine per i master integral stessi. Questo equivale a formulare un'equazione differenziale di ordine  $n$ -esimo, le cui  $n$  soluzioni sono, appunto, i master integrals relativi al diagramma di Feynman oggetto di studio. Poiché il sunrise a 2-loop a masse diverse è esprimibile in termini di 4 master integrals è lecito attendersi che l'equazione differenziale ad esso associata sia di quarto ordine. Tuttavia già in [5] è stato mostrato che in realtà è possibile ottenere un'equazione al secondo ordine per tale diagramma di Feynman. L'obiettivo principale di questa trattazione è quello di calcolare il max cut del sunrise a 2-loop a masse diverse, che rappresenta la soluzione della parte omogenea dell'equazione differenziale associata al diagramma, e quindi, attraverso una sorta di operazione di “reverse engineering”, ricostruire la parte omogenea dell'equazione differenziale associata al sunrise a 2-loop a masse diverse.

# Aspetti generali

Nell'ambito della Teoria dei Campi perturbativa le ampiezze di probabilità di transizione sono calcolate in termini di diagrammi di Feynman, ovvero integrali di prodotti di propagatori aventi forma

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{p^2 + m^2}\right) + i\pi\delta(p^2 + m^2).$$

Non ci soffermeremo sulla struttura formale di tali diagrammi, limitandoci al caso particolare di campi aventi spin uguale a zero (in questo caso l'integrale consiste unicamente del prodotto dei denominatori, e sono escluse complicazioni derivanti da prodotti scalari al numeratore).

È importante ricordare che nel calcolo dell'ampiezza della probabilità dei processi di loop si hanno problemi di divergenza. Gli integrali devono essere regolarizzati. Una volta regolarizzati gli integrali sono formalmente finiti. La regolarizzazione utilizzata nel seguito è la regolarizzazione dimensionale, introdotta da 't Hooft e Veltmann nel 1972, che consiste nell'effettuare i calcoli in  $d$  dimensioni per poi riportare il risultato in  $d = 4$  (ma è di interesse anche il caso  $d = 2$ ).

## IbP identities e master integrals

Nell'ambito della regolarizzazione dimensionale per la bolla ad 1-loop vale la condizione

$$B(d, m_1^2, m_2^2, \alpha, \beta) = \int d^d k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \nu_\mu \frac{1}{(k^2 + m_1^2)^\alpha} \frac{1}{((p-k)^2 + m_2^2)^\beta} \right] = 0$$

dove  $\nu_\mu$  può essere qualsiasi impulso interno o esterno al loop (nel caso della bolla può essere quindi  $p_\mu$  o  $k_\mu$ ). Attraverso queste identità è possibile esprimere  $B(d, m_1^2, m_2^2, \alpha, \beta)$ , e quindi qualsiasi grafico di Feynman composto dai medesimi propagatori (e, al numeratore, da prodotti scalari irriducibili attraverso i denominatori) in termini di un numero finito di integrali, detti master integrals. Tali identità sono comunemente note come Integration by Part identities e d'ora in avanti faremo riferimento ad esse come IbP identities. Esiste un algoritmo generale per ricondurre qualsiasi integrale di Feynman a un numero finito di master integrals [1].

Nel caso particolare della bolla ad 1-loop e del sunrise a 2-loop a masse diverse, questi sono descrivibili rispettivamente in termini di uno e quattro master integrals.

È possibile inoltre, applicando nuovamente le IbP identities, ottenere un sistema lineare di equazioni differenziali al prim'ordine per i master integrals, e quindi, nel caso di un sistema a  $n$  equazioni, un'equazione differenziale di ordine  $n$ -esimo [4]. Nel caso particolare della bolla e del sunrise tali equazioni differenziali contengono esclusivamente termini disomogenei reali, quindi per la parte immaginaria di questi diagrammi di Feynman vale un'equazione differenziale omogenea. In particolare per la parte immaginaria del sunrise a 2-loop a masse diverse è possibile, in linea di principio, formulare un'equazione differenziale omogenea al quart'ordine.

## Tagli unitari e max cuts

Definiremo in seguito il taglio unitario e il max cut di un diagramma di Feynman da un punto di vista meramente pratico e non rigoroso, poiché lo scopo principale di questa trattazione è il calcolo del max cut della bolla e del sunrise, e non una introduzione formale alla QED.

Il taglio unitario di un grafico consiste con il sostituire un sottoinsieme dei propagatori (tutti nel caso della bolla e del sunrise) con la delta di Dirac corrispondente al propagatore e un fattore theta che “selezioni” quale dei due zeri dell’argomento della delta considerare nel calcolo dell’integrale. Il taglio unitario di un grafico è legato alla parte immaginaria del grafico stesso dalla regola di Cutkosky Veltman, che esaminiamo nel caso della bolla.

### Regola di Cutkosky Veltman

Trascurando i fattori moltiplicativi e la dipendenza dalle coordinate spaziali il grafico della bolla è dato da

$$I_1 = i \int dk_0 \frac{1}{k_0^2 - A^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k_0 - E)^2 - B^2 + i\epsilon}$$

dove  $A^2$  e  $B^2$  sono reali e positivi. Utilizziamo le seguenti identità:

$$\frac{1}{k_0^2 - A^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2A} \left[ \frac{1}{k_0 - A + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + A - i\epsilon} \right]$$

$$\frac{1}{(k_0 - E)^2 - B^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2B} \left[ \frac{1}{k_0 - E - B + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 - E + B - i\epsilon} \right]$$

e l’integrale diventa una somma di quattro termini

$$\begin{aligned} I_1 &= i \int dk_0 \frac{1}{2A} \left[ \frac{1}{k_0 - A + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 + A - i\epsilon} \right] \frac{1}{2B} \left[ \frac{1}{k_0 - E - B + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 - E + B - i\epsilon} \right] = \\ &= \frac{i}{4AB} \left\{ \int dk_0 \frac{1}{k_0 - A + i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E - B + i\epsilon} - \int dk_0 \frac{1}{k_0 - A + i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E + B - i\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \int dk_0 \frac{1}{k_0 + A - i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E - B + i\epsilon} + \int dk_0 \frac{1}{k_0 + A - i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E + B - i\epsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che chiudendo il percorso di integrazione “in alto” nel piano di  $k_0$ , l’integrando i cui poli hanno entrambi parte immaginaria negativa non contribuisce. Lo stesso ragionamento può essere applicato per quelli aventi entrambi i poli con parte immaginaria positiva. Si ha quindi

$$I_1 = -i \int dk_0 \frac{1}{4AB} \left[ \frac{1}{k_0 - A + i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E + B - i\epsilon} + \frac{1}{k_0 + A - i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E - B + i\epsilon} \right]$$

Possiamo aggiungere a quest’ultima le seguenti quantità

$$Q_1 = \frac{i}{4AB} \int dk_0 \frac{1}{k_0 - A + i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E + B + i\epsilon}$$

$$Q_2 = \frac{i}{4AB} \int dk_0 \frac{1}{k_0 + A - i\epsilon} \frac{1}{k_0 - E - B - i\epsilon}$$

poiché, per le ragioni precedenti, queste sono pari a zero. Ricordando poi l'identità

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$$

e considerando  $I_2 = I_1 + Q_1 + Q_2$ , uguale a  $I_1$  in quanto  $Q_1$  e  $Q_2$  sono uguali a zero, si trova

$$\begin{aligned} I_2 = & +\pi \int dk_0 \frac{1}{2AB} P\left(\frac{1}{k_0 - A}\right) \delta(k_0 - E + B) - \pi \int dk_0 \frac{1}{2AB} P\left(\frac{1}{k_0 + A}\right) \delta(k_0 - E - B) \\ & - i \int dk_0 \frac{\pi^2}{2AB} \delta(k_0 - A) \delta(k_0 - E + B) - i \int dk_0 \frac{\pi^2}{2AB} \delta(k_0 + A) \delta(k_0 - E - B) \end{aligned}$$

La parte immaginaria di  $I_2$ , o di  $I_1$ , è data esclusivamente in termini della funzione delta e theta (taglio unitario). Per tornare alla notazione standard è sufficiente scrivere

$$\delta(k_0 - A) = 2A \Theta(k_0 - A) \delta(k_0^2 - A^2),$$

dove

$$\frac{1}{k_0^2 - A^2 + i\epsilon}$$

è il corrispondente propagatore, mentre  $\Theta(k_0 - A) \delta(k_0^2 - A^2)$  definisce il valore  $k_0$  da considerare. In questa forma possiamo scrivere quanto ottenuto come

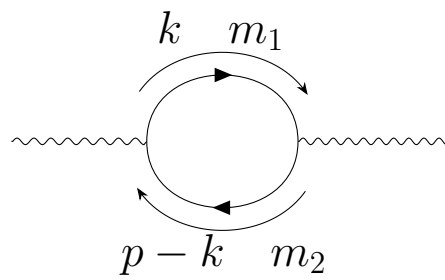
$$\begin{aligned} \text{Im}(I_2) = & \pi^2 \left[ \int dk_0 \Theta(k_0 - A) \delta(k_0^2 - A^2) \Theta(k_0 - E + B) \delta((k_0 - E)^2 - B^2) \right. \\ & \left. + \int dk_0 \Theta(k_0 + A) \delta(k_0^2 - A^2) \Theta(k_0 - E - B) \delta((k_0 - E)^2 - B^2) \right] \end{aligned}$$

---

Il max cut (o taglio massimale in italiano, ma nel seguito ci riferiremo ad esso sempre come max cut) di un grafico di Feynman consiste invece nel sostituire tutti i propagatori esclusivamente con la delta di Dirac corrispondente. Il max cut rappresenta la soluzione della parte omogenea dell'equazione differenziale relativa al grafico stesso. Nel calcolo del max cut, utilizzando l'usuale metrica regolarizzante di Euclide, si incorre spesso in risultati nulli, evitabili invece scegliendo la metrica regolarizzante di Minkowski. Per questo motivo nelle sezioni seguenti calcoleremo il max cut della bolla e del sunrise con metrica regolarizzante di Euclide e di Minkowski, così da poter valutare la compatibilità dei risultati ottenuti.

# Part I

## Bolla ad 1-loop



Procediamo al calcolo del max cut della bolla a 1-loop. Siano  $p = (E, Q)$  e  $s = E^2 - Q^2$ . Dalla definizione operativa di max cut precedentemente esposto otteniamo

$$B(s, d) = \int dk \delta(k^2 + m_1^2) \delta((p - k)^2 + m_2^2) \quad (1)$$

che, espresso in coordinate polari diventa

$$B(s, d) = \Omega(d - 2) \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK K^{d-3} \delta(k^2 + m_1^2) \delta((p - k)^2 + m_2^2)$$

dove  $\Omega(d - 2)$  è l'angolo solido in  $d - 2$  dimensioni. Ricordiamo che l'angolo solido in  $d$  dimensioni vale

$$\Omega(d) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

Nel calcolo del max cut della bolla ci riferiremo agli argomenti delle delta di Dirac rispettivamente come

$$\begin{aligned} D(1) &= k^2 + m_1^2 \\ D(2) &= (p - k)^2 + m_2^2 \end{aligned}$$

Procederemo innanzitutto al calcolo con regolarizzazione di Euclide, quindi procederemo al calcolo con regolarizzazione di Minkowski.



# Capitolo 1

## Regolarizzazione di Euclide

$D(1)$  e  $D(2)$  assumono, con regolarizzazione di Euclide e posto  $p = (E, Q)$

$$\begin{aligned} D(1) &= -k_0^2 + k_x^2 + K^2 + m_1^2 \\ D(2) &= -k_0^2 + k_x^2 + K^2 - E^2 + Q^2 + 2Ek_0 - 2Qk_x + m_2^2. \end{aligned}$$

Sottraendo  $D(1)$  a  $D(2)$  è immediato ottenere la condizione di annullamento di  $D(2)$

$$k_0 = \frac{E^2 - Q^2 + 2Qk_x + m_1^2 - m_2^2}{2E}. \quad (1.1)$$

Possiamo quindi utilizzare questo risultato e integrare rispetto  $k_0$ , ottenendo

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK \delta(D(1)) K^{d-3}. \quad (1.2)$$

Effettuiamo adesso un doppio cambio di variabile  $k_x \rightarrow k'_x = k_x - \frac{Q}{2}$  e

$$k'_x \rightarrow k''_x = k'_x - \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{2(E^2 - Q^2)} Q.$$

Ponendo  $D(1) = 0$  otteniamo un'espressione per  $K^2$

$$K^2 = -\frac{E^2 - Q^2}{E^2} k_x^2 + \frac{(E^2 - Q^2)^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)(E^2 - Q^2)}{4(E^2 - Q^2)}.$$

Effettuiamo a questo punto un nuovo cambio di variabile  $K \rightarrow K^2$  e sfruttiamo quanto appena ottenuto per integrare rispetto  $K^2$ . Poiché l'espressione per  $K^2$  dipende unicamente da  $k_x^2$  possiamo effettuare un altro cambio di variabile  $k_x \rightarrow k_x^2$ .  $B(s, d)$  vale adesso

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4E} \int_0^{\infty} dk_x^2 \Theta(K^2) (k_x^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}}. \quad (1.3)$$

Valutiamo ora questo risultato per differenti valori della variabile di ingresso  $s$  che, lo ricordiamo, è definita come  $s = E^2 - Q^2$ .

### 1.1 Studio per differenti valori di $s$

Introduciamo la seguente notazione

$$R_2(s, m_1^2, m_2^2) = s^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)s + (m_1^2 - m_2^2)^2$$

sottolineando che tale combinazione di  $s$ ,  $m_1^2$  e  $m_2^2$  ricorre con estrema frequenza in situazioni simili, ed è esprimibile in diversi modi; uno su tutti

$$R_2(s, m_1^2, m_2^2) = (s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)$$

che ricorda la formula di Erone per l'area del triangolo. Utilizzando tale notazione si ha

$$K^2 = -\frac{s}{E^2}k_x^2 + \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s}.$$

Ricordando l'espressione (1.3) ottenuta precedentemente, il fattore  $\Theta(K^2)$  impone

$$k_x^2 < R_2(s, m_1^2, m_2^2) \frac{E^2}{4s^2}.$$

Questa condizione dipende chiaramente dal segno di  $R_2(s, m_1^2, m_2^2)$ . È immediato ottenere

$$R_2(s, m_1^2, m_2^2) > 0 \rightarrow s < (m_1 - m_2)^2 \text{ o } s > (m_1 + m_2)^2.$$

analizziamo quindi (1.3) per

$$\begin{aligned} -\infty < s < 0 \\ 0 < s < (m_1 - m_2)^2 \\ (m_1 - m_2)^2 < s < (m_1 + m_2)^2 \\ (m_1 + m_2)^2 < s < \infty \end{aligned}$$

$$-\infty < s < 0$$

Effettuiamo il cambio di variabile

$$k_x^2 = \frac{E^2}{(-s)} \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4(-s)} u$$

ottenendo

$$\begin{aligned} B(s, d) &= \frac{\Omega(d-2)}{4(-s)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4(-s)} \right]^{\frac{d-3}{2}} \int_0^\infty du u^{-\frac{1}{2}} (u-1)^{\frac{d-4}{2}} \Theta(u-1) \\ &= \frac{\Omega(d-2)}{4(-s)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4(-s)} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{d-2}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

dove  $B(\cdot, \cdot)$  è la funzione Beta di Eulero, definita come

$$B(n, m) = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{m-1} dt$$

$$0 < s < (m_1 - m_2)^2$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile

$$k_x^2 = E^2 \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s^2} u$$

e con passaggi analoghi a quanto visto precedentemente otteniamo

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2}\right) \quad (1.5)$$

$$(m_1 - m_2)^2 < s < (m_1 + m_2)^2$$

Visto il segno di  $R_2(s, m_1^2, m_2^2)$  in questo range, effettuiamo il cambiamento di variabile

$$k_x^2 = -E^2 \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s^2} u.$$

$B(s, d)$  diventa quindi

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ -\frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} \int_0^\infty du u^{-\frac{1}{2}} (-u-1)^{\frac{d-4}{2}} \Theta \left[ -\frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} (-u-1) \right]$$

trascuando i fattori moltiplicativi

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du u^{-\frac{1}{2}} (-u-1)^{\frac{d-4}{2}} \Theta \left[ -\frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} (-u-1) \right] = \\ & \int_0^\infty du u^{-\frac{1}{2}} (-u-1)^{\frac{d-4}{2}} \Theta(-u-1) = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$(m_1 + m_2)^2 < s < \infty$$

Effettuiamo il cambio di variabile

$$k_x^2 = E^2 \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s^2} u$$

e otteniamo

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2}\right). \tag{1.7}$$

# Capitolo 2

## Regolarizzazione di Minkowski

Il calcolo con regolarizzazione di Minkowski risulta quasi totalmente analogo a quello effettuato con regolarizzazione di Euclide, l'unica differenza consiste nell'espressione per  $K^2$  che è, in questo caso

$$K^2 = \frac{s}{E^2} k_x^2 - \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s}. \quad (2.1)$$

Combinando ora (1.3) e (2.1) procediamo nuovamente allo studio del risultato per differenti valori di  $s$ .

### 2.1 Studio per differenti valori di $s$

$$-\infty < s < 0$$

Effettuando il cambiamento di variabile

$$k_x^2 = \frac{E^2}{(-s)} \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4(-s)} u$$

si ottiene

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4(-s)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4(-s)} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2}\right) \quad (2.2)$$

$$0 < s < (m_1 - m_2)^2$$

Effettuando il cambio di variabile

$$k_x^2 = E^2 \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s^2} u$$

si ottiene

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{d-2}{2}\right). \quad (2.3)$$

$$(m_1 - m_2)^2 < s < (m_1 + m_2)^2$$

In questo range energetico poniamo

$$k_x^2 = -E^2 \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s^2} u$$

ottenendo

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ -\frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} \int_0^\infty du u^{-\frac{1}{2}} (u+1)^{\frac{d-4}{2}} \Theta \left[ -\frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} (u+1) \right]$$

da cui

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ -\frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3-d}{2}\right). \quad (2.4)$$

Vediamo che, diversamente dal caso euclideo, in questo range il max cut della bolla non si annulla.

$$(m_1 + m_2)^2 < s < \infty$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile

$$k_x^2 = E^2 \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s^2} u$$

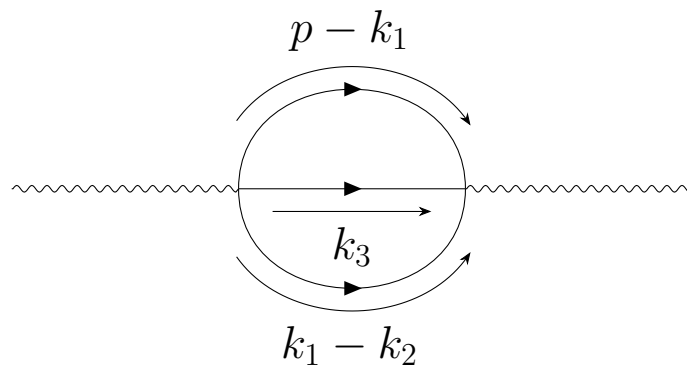
ottenendo

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-2)}{4s^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)}{4s} \right]^{\frac{d-3}{2}} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{d-2}{2}\right). \quad (2.5)$$

Si rimanda all'appendice A per l'elenco dei risultati per ogni range e con diversa metrica regolarizzante.

# Part II

## Sunrise a 2 loop



Dalla definizione operativa di max cut otteniamo l'espressione per il max cut del sunrise a 2 loop con masse diverse.

$$S(E^2, d) = \int dk_1 \int dk_2 \delta(k_2^2 + m_1^2) \delta((k_1 - k_2)^2 + m_2^2) \delta((p - k_1)^2 + m_3^2) \quad (2.6)$$

Si osserva che

$$\int dk_2 \delta(k_2^2 + m_1^2) \delta((k_1 - k_2)^2 + m_2^2)$$

corrisponde di fatto al max cut della bolla, con l'unica differenza che, in questo caso,  $s = -k_1^2$ , quindi lo sostituiamo con  $B(-k_1^2, d)$ . L'integrale diventa quindi, passando in coordinate polari

$$S(E^2, d) = \Omega(d-2) \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK K^{d-3} \delta((p - k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d)$$

dove abbiamo espresso  $k_1$  come  $k_1 = (k_0, k_x, K)$  per alleggerire la notazione. Nel seguito discuteremo separatamente il caso di  $p$  timelike e spacelike.

# Capitolo 3

## Regolarizzazione di Euclide

### 3.1 $p$ timelike

Poniamo innanzitutto  $p = (E, 0)$ . L'integrale oggetto del nostro studio è

$$S(E^2, d) = \int dk_1 \int dk_2 \delta(k_2^2 + m_1^2) \delta((k_1 - k_2)^2 + m_2^2) \delta((p - k_1)^2 + m_3^2)$$

Applichiamo i cambiamenti di variabile  $K \rightarrow K^2$  e  $k_x \rightarrow k_x^2$  e lo shift  $k_0 \rightarrow k_0 - E$ . In tal modo otteniamo

$$S(E^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dk_x^2 \int_0^{\infty} dK^2 (k_x^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta((p - k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d).$$

e le espressioni per  $-k_1^2$  e l'argomento della delta di Dirac sono

$$\begin{aligned} -k_1^2 &= k_0^2 + E^2 + 2Ek_0 - k_x^2 - K^2 \\ (p - k_1)^2 + m_3^2 &= -k_0^2 + k_x^2 + K^2 + m_3^2. \end{aligned}$$

Effettuiamo ora un nuovo cambiamento di variabile,  $k_x^2 \rightarrow z = k_x^2 + K^2$  ottenendo

$$S(E^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{K^2}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dK^2 (z - K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta((p - k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d) \Omega(d-2)$$

Utilizziamo la delta per integrare rispetto  $z$ , (introducendo necessariamente un fattore  $\Theta(k_0^2 - m_3^2 - K^2)$ ). Ricordando ora l'identità

$$[\Theta(x) + \Theta(-x)] = 1$$

riscriviamo l'integrale dividendo in base al segno di  $k_0^2 - m_3^2 - K^2$ . Otteniamo così (omettiamo qui  $\Omega(d-2)$ )

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dK^2 (k_0^2 - m_3^2 - K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(k_0^2 - m_3^2 - K^2) \Omega(d-2) \Theta(k_0^2 - m_3^2) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dK^2 (k_0^2 - m_3^2 - K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(k_0^2 - m_3^2 - K^2) \Omega(d-2) \Theta(m_3^2 - k_0^2). \end{aligned}$$

Consideriamo il primo termine della somma ed effettuiamo il cambio di variabile

$$K^2 \rightarrow u = \frac{K^2}{k_0^2 - m_3^2}.$$



Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(k_0^2 - m_3^2) \int_0^1 du (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{d-4}{2}} = \\ & = \frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{-m_3} dk_0 (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d) \\ & + \frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{m_3}^{\infty} dk_0 (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d). \end{aligned}$$

Analizziamo ora il secondo termine della somma precedente effettuando qui il cambio di variabile

$$K^2 \rightarrow u = \frac{K^2}{m_3^2 - k_0^2}.$$

Così facendo si ottiene

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 (m_3^2 - k_0^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d) \Omega(d-2) \Theta(m_3^2 - k_0^2) \int_0^{\infty} du (-1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{d-4}{2}} \Theta(-(m_3^2 - k_0^2)(1+u)) = 0.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{-m_3} dk_0 (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d) + \\ & + \frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{m_3}^{\infty} dk_0 (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d). \end{aligned} \quad (3.1)$$

con

$$-k_1^2 = E^2 + 2Ek_0 + m_3^2.$$

Studiamo il risultato per differenti valori di  $E$ .

## 3.2 Studio per differenti valori di $E$

Effettuiamo un ultimo cambiamento di variabile

$$k_0 \rightarrow b = -k_1^2 = 2Ek_0 + E^2 + m_3^2 \quad k_0 = \frac{b - m_3^2 - E^2}{2E}$$

l'integrale è quindi, omettendo  $\frac{1}{2}\Omega(d-2)$ ,

$$S(E^2, d) = B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \left[ \left( \int_{-\infty}^{(E-m_3)^2} + \int_{(E+m_3)^2}^{\infty} \right) db \frac{(R_2(E^2, b, m_3^2))^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-2}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B(b, d) \right]. \quad (3.2)$$

A questo punto è necessario studiare la posizione relativa dei punti notevoli del range di integrazione, ovvero  $(E - m_3)^2$  e  $(E + m_3)^2$ , rispetto i punti notevoli di  $B(b, d)$ , ovvero 0,  $(m_1 - m_2)^2$  e  $(m_1 + m_2)^2$ . Ricordando che  $E > 0$  e  $m_1 > m_2 > m_3$  otteniamo

$$(E - m_3)^2 > (m_1 - m_2)^2 \longrightarrow E > m_1 - m_2 + m_3 \quad (3.3)$$

$$E < -m_1 + m_2 + m_3 \quad (3.4)$$

$$(E - m_3)^2 > (m_1 + m_2)^2 \longrightarrow E > m_1 + m_2 + m_3 \quad (3.5)$$

$$(E + m_3)^2 > (m_1 - m_2)^2 \longrightarrow E > m_1 - m_2 - m_3 \quad (3.6)$$

$$(E + m_3)^2 > (m_1 + m_2)^2 \longrightarrow E > m_1 + m_2 - m_3. \quad (3.7)$$

Dividiamo a questo punto lo studio in due differenti casi dipendenti dal segno di  $m_1 - m_2 - m_3$ . Infatti, poiché  $E > 0$ , se  $m_1 > m_2 + m_3$ , la condizione (3.4) è impossibile, mentre se  $m_1 < m_2 + m_3$  la condizione (3.6) è inutile.

### 3.2.1 $m_1 > m_2 + m_3$

In seguito, per ogni range energetico, assegneremo ai punti notevoli del range di integrazione  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , con  $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$ . Nuovamente omettiamo  $\frac{1}{2}\Omega(d-2)$  nei risultati.

$$0 < E < m_1 - m_2 - m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (E - m_3)^2 \quad b_3 = (E + m_3)^2 \quad b_2 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}. \end{aligned}$$

$$m_1 - m_2 - m_3 < E < m_1 - m_2 + m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (E - m_3)^2 \quad b_3 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_2 = (E + m_3)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}. \end{aligned}$$

$$m_1 - m_2 + m_3 < E < m_1 + m_2 - m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (E - m_3)^2 \quad b_2 = (E + m_3)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}. \end{aligned}$$

$$m_1 + m_2 - m_3 < E < m_1 + m_2 + m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (E - m_3)^2 \quad b_2 = (m_1 + m_2)^2 \quad b_1 = (E + m_3)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}. \end{aligned}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 < E < \infty$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (m_1 + m_2)^2 \quad b_2 = (E - m_3)^2 \quad b_1 = (E + m_3)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}. \end{aligned}$$

### 3.2.2 $m_1 < m_2 + m_3$

$$0 < E < -m_1 + m_2 + m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (E - m_3)^2 \quad b_2 = (E + m_3)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi è analogo al range  $m_1 - m_2 + m_3 < E < m_1 + m_2 - m_3$  studiato precedentemente.

$$-m_1 + m_2 + m_3 < E < m_1 - m_2 + m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (E - m_3)^2 \quad b_3 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_2 = (E + m_3)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi è analogo al range  $m_1 - m_2 - m_3 < E < m_1 - m_2 + m_3$  studiato precedentemente.

### 3.3 $p$ spacelike

Poiché  $p$  è spacelike poniamo  $p = (0, Q)$ ,  $p^2 = Q^2$ , con  $Q > 0$ . Si ha

$$S(Q^2, d) = \Omega(d-2) \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK K^{d-3} \delta((p-k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -k_1^2 &= k_0^2 - k_x^2 - K^2 \\ (p-k_1)^2 + m_3^2 &= Q^2 + k_x^2 + K^2 - k_0^2 - 2Qk_x + m_3^2. \end{aligned}$$

Effettuiamo lo shift  $k_x \rightarrow k_x - Q$  e i cambiamenti di variabile  $K \rightarrow K^2$  e  $k_0 \rightarrow k_0^2$ , ottenendo

$$S(Q^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_0^{\infty} dk_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK^2 (k_0^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta((p-k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d).$$

Effettuiamo ora un cambio di variabile simile a quello fatto nel caso timelike, ovvero  $k_0^2 \rightarrow z = k_0^2 - K^2$ , così che

$$\begin{aligned} -k_1^2 &= z - k_x^2 - Q^2 - 2Qk_x \\ (p-k_1)^2 + m_3^2 &= k_x^2 - z + m_3^2 \end{aligned}$$

e utilizziamo quindi la delta per integrare rispetto  $z$ , ottenendo

$$S(Q^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK^2 (k_x^2 + m_3^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d).$$

Si osservi che in questo caso non è presente alcun fattore Theta in quanto  $k_x^2 + m_3^2$  è sempre positivo. Attraverso il seguente cambio di variabile

$$K^2 \rightarrow u = \frac{K^2}{k_x^2 + m_3^2}$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned} S(Q^2, d) &= \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x (k_x^2 + m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d) \int_0^{\infty} du u^{\frac{d-4}{2}} (1+u)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x (k_x^2 + m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d). \end{aligned}$$

Infine effettuiamo un ultimo cambiamento di variabile  $k_x \rightarrow b = m_3^2 - Q^2 - 2Qk_x$  e, attraverso le identità elencate in appendice A ed esplicitando  $B(-k_1^2, d)$ , otteniamo il risultato finale

$$\begin{aligned} S(Q^2, d) &= \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2} (Q^2)^{\frac{d-2}{2}} (\sin(\pi \frac{d-1}{2}))^2} \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(-Q^2, b, m_3^2) R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2} (Q^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi \frac{d-1}{2})} \int_0^{(m_1-m_2)^2} db \frac{[R_2(-Q^2, b, m_3^2) R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ &+ \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2} (Q^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi \frac{d-1}{2})} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} db \frac{[R_2(-Q^2, b, m_3^2) R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

# Capitolo 4

## Regolarizzazione di Minkowski

### 4.1 $p$ timelike

Scegliendo i cambiamenti di variabile  $K \rightarrow K^2$  e  $k_x \rightarrow k_x^2$  otteniamo

$$S(E^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dk_x^2 \int_0^{\infty} dK^2 (k_x^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta((p-k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d).$$

Esplicitiamo l'argomento della delta di Dirac

$$(p-k_1)^2 + m_3^2 = -E^2 - k_0^2 + k_x^2 - K^2 + 2Ek_0 + m_3^2$$

che effettuando lo shift  $k_0 \rightarrow k_0 - E$  diventa

$$(p-k_1)^2 + m_3^2 = -k_0^2 + k_x^2 - K^2 + m_3^2.$$

Attraverso il cambio di variabile  $k_x^2 \rightarrow z = k_x^2 - K^2$  il max cut del sunrise diventa

$$S(E^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dK^2 \int_{-K^2}^{\infty} dz (z + K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} \delta((p-k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d)$$

mentre l'argomento della delta di Dirac e  $-k_1^2$  assumono le seguenti forme

$$(p-k_1)^2 + m_3^2 = -k_0^2 + z + m_3^2 = 0$$

$$-k_1^2 = k_0^2 + E^2 + 2Ek_0 - z.$$

Utilizziamo quindi la delta per integrare rispetto  $z$ , ma affinché l'integrale risulti diverso da zero si deve avere  $k_0^2 - m_3^2 > -K^2$ , per cui introduciamo un fattore  $\Theta(k_0^2 - m_3^2 + K^2)$ .  $S(E^2, d)$  vale ora

$$S(E^2, d) = \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dK^2 (k_0^2 - m_3^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(k_0^2 - m_3^2 + K^2)$$

e  $-k_1^2 = E^2 + 2Ek_0 + m_3^2$ , quindi  $B(-k_1^2, d)$  dipende unicamente da  $k_0$  e dal parametro esterno  $E$ . Ricordando l'identità

$$[\Theta(x) + \Theta(-x)] = 1$$

riscriviamo l'integrale come

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \int_0^{\infty} dK^2 (k_0^2 - m_3^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(k_0^2 - m_3^2 + K^2) [\Theta(k_0^2 - m_3^2) + \Theta(m_3^2 - k_0^2)].$$

Si ha

$$\int_0^\infty dK^2 \Theta(k_0^2 - m_3^2 + K^2) \Theta(k_0^2 - m_3^2) = \int_0^\infty dK^2 \Theta(k_0^2 - m_3^2)$$

poiché, garantito che  $k_0^2 - m_3^2 > 0$ ,  $\Theta(k_0^2 - m_3^2 + K^2)$  è inutile in quanto  $K^2$  varia da 0 a  $\infty$ . Allo stesso modo

$$\int_0^\infty dK^2 \Theta(k_0^2 - m_3^2 + K^2) \Theta(m_3^2 - k_0^2) = \int_{m_3^2 - k_0^2}^\infty dK^2 \Theta(m_3^2 - k_0^2)$$

$S(E^2, d)$  è quindi ora esprimibile come la seguente somma

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^\infty dk_0 \int_0^\infty dK^2 (k_0^2 - m_3^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(k_0^2 - m_3^2) \\ &+ \frac{\Omega(d-2)}{2} \int_{-\infty}^\infty dk_0 \int_{m_3^2 - k_0^2}^\infty dK^2 (k_0^2 - m_3^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} (K^2)^{\frac{d-4}{2}} B(-k_1^2, d) \Theta(m_3^2 - k_0^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Consideriamo il primo termine della somma. effettuando il cambiamento di variabile

$$K^2 \rightarrow u = \frac{K^2}{k_0^2 - m_3^2}$$

otteniamo

$$\frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^\infty dk_0 \Theta(k_0^2 - m_3^2) (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d).$$

Nel secondo termine effettuiamo invece il cambiamento di variabile

$$K^2 \rightarrow u = \frac{K^2}{m_3^2 - k_0^2}$$

ottenendo

$$\frac{\Omega(d-2)}{2} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^\infty dk_0 \Theta(m_3^2 - k_0^2) (m_3^2 - k_0^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d).$$

Riscriviamo quindi il max cut del sunrise come

$$\begin{aligned} S(E^2, d) &= \frac{1}{2} \Omega(d-2) B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \left[ \left( \int_{-\infty}^{-m_3} + \int_{m_3}^\infty \right) dk_0 (k_0^2 - m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \Omega(d-2) B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{-m_3}^{m_3} dk_0 (m_3^2 - k_0^2)^{\frac{d-3}{2}} B(-k_1^2, d). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Di seguito valuteremo questo risultato per differenti valori di  $E$ .

## 4.2 Studio per differenti valori di $E$

Effettuiamo un nuovo cambiamento di variabile

$$k_0 \rightarrow b = -k_1^2 = 2Ek_0 + E^2 + m_3^2 \quad k_0 = \frac{b - m_3^2 - E^2}{2E}$$

$S(E^2, d)$  risulta, omettendo  $\frac{1}{2}\Omega(d-2)$

$$S(E^2, d) = B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \left[ \left( \int_{-\infty}^{(E-m_3)^2} + \int_{(E+m_3)^2}^{\infty} \right) db \frac{(R_2(E^2, b, m_3^2))^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-2}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B(b, d) \right] \\ + B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{(E-m_3)^2}^{(E+m_3)^2} db \frac{(-R_2(E^2, b, m_3^2))^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-2}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B(b, d). \quad (4.3)$$

Le condizioni circa la posizione relativa dei punti di interesse di  $B(b, d)$  rispetto  $(E - m_3)^2$  e  $(E + m_3)^2$  sono identiche a quanto visto in precedenza. L'unica differenza sostanziale consiste nel valore di  $B(b, d)$ . In particolare ricordiamo che, calcolando  $B(b, d)$  con regolarizzazione di Euclide si ottiene  $B(b, d) = 0$  per  $(m_1 - m_2)^2 < b < (m_1 + m_2)^2$ . Come fatto in precedenza, per ogni range energetico indicheremo i punti notevoli del range di integrazione con  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , con  $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$ .

$$0 < E < m_1 - m_2 - m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (E - m_3)^2 \quad b_3 = (E + m_3)^2 \quad b_2 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi il max cut risulta

$$S(E^2, d) = \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ + \frac{\Omega(d-1)}{\sin(\pi\frac{d-1}{2})2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ + \frac{\Omega(d-1)}{\sin(\pi\frac{d-1}{2})2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_4}^{b_3} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2))R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ + \frac{\Omega(d-1)}{\sin(\pi\frac{d-1}{2})2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ + \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\sin(\pi\frac{d-2}{2})}{\sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_2}^{b_1} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\ + \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}.$$

$$m_1 - m_2 - m_3 < E < m_1 - m_2 + m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in  $b$  è

$$b_4 = (E - m_3)^2 \quad b_3 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_2 = (E + m_3)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned}
S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_4}^{b_3} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2))R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2))(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_2}^{b_1} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}.
\end{aligned}$$

$$m_1 - m_2 + m_3 < E < m_1 + m_2 - m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in b è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (E - m_3)^2 \quad b_2 = (E + m_3)^2 \quad b_1 = (m_1 + m_2)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned}
S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_4}^{b_3} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2))(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{\sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_2}^{b_1} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}.
\end{aligned}$$

$$m_1 + m_2 - m_3 < E < m_1 + m_2 + m_3$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in b è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (E - m_3)^2 \quad b_2 = (m_1 + m_2)^2 \quad b_1 = (E + m_3)^2$$



quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned}
S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-2}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_4}^{b_3} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-2}{2})} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_2}^{b_1} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2))R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}.
\end{aligned}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 < E < \infty$$

In questo range energetico l'ordine delle radici in b è

$$b_4 = (m_1 - m_2)^2 \quad b_3 = (m_1 + m_2)^2 \quad b_2 = (E - m_3)^2 \quad b_1 = (E + m_3)^2$$

quindi il max cut risulta

$$\begin{aligned}
S(E^2, d) &= \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}}} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_0^{b_4} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-2}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_4}^{b_3} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_3}^{b_2} db \frac{R_2[E^2, b, m_3^2]R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{1}{2}\right) \int_{b_2}^{b_1} db \frac{[(-R_2(E^2, b, m_3^2))R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\Omega(d-1)}{2^{2d-3}(E^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi\frac{d-1}{2})} B\left(\frac{d-2}{2}, \frac{3-d}{2}\right) \int_{b_1}^{\infty} db \frac{[R_2(E^2, b, m_3^2)R_2(b, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}.
\end{aligned}$$

### 4.3 $p$ spacelike

Poiché  $p$  è spacelike poniamo  $p = (0, Q)$ ,  $p^2 = Q^2$ , con  $Q > 0$ . Possiamo quindi “assorbire” la componente  $k_0$  in  $K$ , poiché abbiamo scelto la metrica di Minkowski per le  $d - 2$  dimensioni di regolarizzazione. Si ha

$$S(Q^2, d) = \Omega(d-1) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_0^{\infty} dK K^{d-2} \delta((p - k_1)^2 + m_3^2) B(-k_1^2, d)$$

$$\begin{aligned}
-k_1^2 &= K^2 - k_x^2 \\
(p - k_1)^2 + m_3^2 &= Q^2 + k_x^2 - K^2 - 2Qk_x + m_3^2.
\end{aligned}$$

Possiamo adesso effettuare lo shift

$$k_x \rightarrow k'_x = k_x - Q$$

trovando un'espressione più agevole per l'argomento della delta di Dirac

$$(p - k_1)^2 + m_3^2 = k_x'^2 - K^2 + m_3^2.$$

L'espressione per  $-k_1^2$  diventa

$$-k_1^2 = K^2 - k_x'^2 - 2Qk'_x - Q^2.$$

D'ora in avanti scriveremo nuovamente  $k_x$  invece di  $k'_x$  così da avere una notazione più confortevole. Effettuiamo il cambio di variabile  $K \rightarrow K^2$  e sfruttiamo la delta per integrare rispetto  $K^2$ .  $S(Q^2, d)$  è ora

$$S(Q^2, d) = \frac{\Omega(d-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x (k_x^2 + m_3^2)^{\frac{d-3}{2}} B(m_3^2 - 2Qk_x - Q^2).$$

effettuiamo ora un cambiamento di variabile simile a quanto fatto per  $p$  timelike, ovvero  $k_x \rightarrow b = m_3^2 - 2Qk_x - Q^2$ , ottenendo

$$S(Q^2, d) = \frac{\Omega(d-1)}{4Q} \int_{-\infty}^{\infty} db \left[ \left( \frac{m_3^2 - b - Q^2}{2Q} \right)^2 + m_3^2 \right]^{\frac{d-3}{2}} B(b, d).$$

Ci accorgiamo infine che

$$\left( \frac{m_3^2 - b - Q^2}{2Q} \right)^2 + m_3^2 = \frac{Q^4 + 2Q^2(b + m_3^2) + (b - m_3^2)^2}{4Q^2} = \frac{R_2(-Q^2, b, m_3^2)}{4Q^2}$$

ed esprimiamo infine  $S(Q^2, d)$  esplicitando  $B(b, d)$

$$\begin{aligned}
S(Q^2, d) &= \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2}(Q^2)^{\frac{d-2}{2}}} \int_{-\infty}^0 db \frac{[R_2(b, m_1^2, m_2^2)R_2(-Q^2, b, m_3^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(-b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2}(Q^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi \frac{d-1}{2})} \int_0^{(m_1-m_2)^2} db \frac{[R_2(b, m_1^2, m_2^2)R_2(-Q^2, b, m_3^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{\sin(\pi \frac{d-2}{2})}{\sin(\pi \frac{d-1}{2})} \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2}(Q^2)^{\frac{d-2}{2}}} \int_{(m_1-m_2)^2}^{(m_1+m_2)^2} db \frac{[R_2(-Q^2, b, m_3^2)(-R_2(b, m_1^2, m_2^2))]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}} \\
&+ \frac{[\Omega(d-1)]^2}{2^{2d-2}(Q^2)^{\frac{d-2}{2}} \sin(\pi \frac{d-1}{2})} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} db \frac{[R_2(b, m_1^2, m_2^2)R_2(-Q^2, b, m_3^2)]^{\frac{d-3}{2}}}{(b)^{\frac{d-2}{2}}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

# Capitolo 5

## Il limite $d = 2$

Poiché i risultati ottenuti con la regolarizzazione di Minkowski risultano compatibili con quelli ottenuti con l'usuale regolarizzazione euclidea ma "più ricchi", decidiamo di approfondire di seguito il risultato ottenuto per il max cut del sunrise a 2-loop con regolarizzazione di Minkowski. Ricordiamo innanzitutto che, in via del tutto generale, si può sempre scrivere  $R_2(s, m_1^2, m_2^2) = (s - (m_1 - m_2)^2)(s - (m_1 + m_2)^2)$ . Disinteressandoci quindi momentaneamente dei coefficienti esterni al segno di integrale e ponendo  $R_4(b, s) = (b - b_1)(b - b_2)(b - b_3)(b - 4)$  è possibile, per  $d = 2$ , esprimere il max cut come una combinazione lineare (dove i coefficienti dipendono però da  $s$  e  $d$ ) dei seguenti integrali

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^0 \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} \\
 I_2 &= \int_0^{b_4} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} \\
 I_3 &= \int_{b_4}^{b_3} \frac{db}{\sqrt{-R_4(b, s)}} \\
 I_4 &= \int_{b_3}^{b_2} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} \\
 I_5 &= \int_{b_2}^{b_1} \frac{db}{\sqrt{-R_4(b, s)}} \\
 I_6 &= \int_{b_1}^{\infty} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}}.
 \end{aligned}$$

È possibile ricondurre questi integrali a integrali ellittici completi e incompleti di prima specie. Di seguito mostreremo in dettaglio come ciò sia possibile solo per uno degli integrali sopra riportati, mentre forniremo i risultati per i restanti elementi. Ulteriori dettagli sugli integrali ellittici e i cambiamenti di variabile di Legendre sono riportati in Appendice B. Consideriamo

$$I_3 = \int_{b_4}^{b_3} \frac{db}{\sqrt{-R_4(b, s)}}$$

effettuiamo il cambiamento di variabile

$$x^2 = \frac{(b_1 - b_3)(b - b_4)}{(b_3 - b_4)(b_1 - b)} \quad b = \frac{b_4(b_1 - b_3) + b_1 x^2 (b_3 - b_4)}{(b_1 - b_3) + (b_3 - b_4)x^2} \quad db = 2x \frac{(b_1 - b_4)(b_3 - b_4)(b_1 - b_3)}{[b_4(b_1 - b_3) + b_1 x^2 (b_3 - b_4)]^2} dx$$

da cui

$$\begin{aligned} b - b_1 &= \frac{(b_4 - b_1)(b_1 - b_3)}{(b_1 - b_3) + (b_3 - b_4)x^2} & b - b_2 &= \frac{-(b_2 - b_4)(b_1 - b_3) + (b_1 - b_2)(b_3 - b_4)x^2}{b_4(b_1 - b_3) + b_1x^2(b_3 - b_4)} \\ b - b_3 &= \frac{(b_1 - b_3)(b_3 - b_4)(1 - x^2)}{b_4(b_1 - b_3) + b_1x^2(b_3 - b_4)} & b - b_4 &= \frac{(b_1 - b_4)(b_3 - b_4)x^2}{b_4(b_1 - b_3) + b_1x^2(b_3 - b_4)}. \end{aligned}$$

A questo punto sostituiamo le espressioni ottenute all'interno dell'integrale

$$I_3 = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{[(b_2 - b_4)(b_1 - b_3) - (b_1 - b_2)(b_3 - b_4)x^2](1 - x^2)}}$$

da cui

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - q^2x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} K(q) \quad (5.1)$$

con

$$q^2 = \frac{(b_1 - b_2)(b_3 - b_4)}{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}$$

e dove

$$K(q) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - q^2t^2)}}$$

è l'integrale ellittico completo di prima specie. Analogamente troviamo

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} \left[ F\left(\sqrt{\frac{b_1 - b_3}{b_1 - b_4}}, q'\right) - F\left(\sqrt{\frac{b_4(b_1 - b_3)}{b_3(b_1 - b_4)}}, q'\right) \right] \quad (5.2)$$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} F\left(\sqrt{\frac{b_4(b_1 - b_3)}{b_3(b_1 - b_4)}}, q'\right) \quad (5.3)$$

$$I_4 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} K(q') \quad (5.4)$$

$$I_5 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} K(q) \quad (5.5)$$

$$I_6 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} F\left(\sqrt{\frac{b_2 - b_4}{b_1 - b_4}}, q'\right) \quad (5.6)$$

dove

$$F(x, q) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - q^2t^2)}}$$

è l'integrale ellittico incompleto di prima specie e

$$q'^2 = 1 - q^2 = \frac{(b_1 - b_4)(b_2 - b_3)}{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}.$$

I dettagli, con il cambiamento di variabile associato ad ogni integrale, sono riportati in appendice B.

## 5.1 Equazione differenziale per il sunrise

Come detto in precedenza, il max cut di un diagramma di Feynman corrisponde alla soluzione dell'equazione differenziale omogenea del diagramma stesso. A partire dalla soluzione ricaviamo, attraverso una sorta di processo di "reverse engineering", l'equazione differenziale omogenea. Consideriamo i termini del tipo

$$F(s) = f(s)K(g(s)).$$

È noto (si veda anche [3] 8.124 (1)) che l'integrale ellittico completo di prima specie è soluzione della seguente equazione differenziale

$$\frac{d}{dk} \left\{ k(1-k^2) \frac{dK(k)}{dk} \right\} - kK(k) = 0$$

che è possibile riscrivere come

$$\frac{d^2K(k)}{dk^2} + \left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{(k-1)} + \frac{1}{(k+1)} \right] \frac{dK(k)}{dk} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{(k+1)} \right] K(k) = 0. \quad (5.7)$$

Derivando  $F(s)$  otteniamo

$$F'(s) = f'(s)K(g(s)) + f(s)g'(s)K'(g(s)) \quad (5.8)$$

$$F''(s) = f''(s)K(g(s)) + 2f'(s)g'(s)K'(g(s)) + f(s)g''(s)K'(g(s)) + f(s)g'(s)^2K''(g(s)) \quad (5.9)$$

Combinando ora (5.7), (5.8), (5.9) otteniamo la seguente equazione differenziale per i termini del tipo  $F(s)$  presenti nel max cut del Sunrise.

$$\begin{aligned} & \left[ -2 \frac{f'(s)^2}{f(s)^2} + \frac{f'(s)g'(s)}{f(s)g(s)} + \frac{f'(s)g'(s)}{f(s)(g(s)-1)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{g''(s)f'(s)}{f(s)g'(s)} + \frac{f''(s)}{f(s)} + \frac{1}{4} \frac{g'(s)^2}{g(s)} - \frac{1}{4} \frac{g'(s)^2}{(g(s)-1)} \right] F(s) \\ & + \left[ 2 \frac{f'(s)}{f(s)} - \frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{g'(s)}{g(s)-1} + \frac{g''(s)}{g'(s)} \right] F'(s) - F''(s) = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Consideriamo quindi il range energetico  $m_1 + m_2 + m_3 < E < \infty$ . In questo range

$$f(s) = \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{s} + m_1 + m_2 + m_3)(\sqrt{s} - m_1 - m_2 + m_3)(\sqrt{s} + m_1 - m_2 - m_3)(\sqrt{s} - m_1 + m_2 - m_3)}}$$

$$g(s) = \frac{\sqrt{(\sqrt{s} + m_1 - m_2 + m_3)(\sqrt{s} - m_1 + m_2 + m_3)(\sqrt{s} + m_1 + m_2 - m_3)(\sqrt{s} - m_1 - m_2 - m_3)}}{\sqrt{(\sqrt{s} + m_1 + m_2 + m_3)(\sqrt{s} - m_1 - m_2 + m_3)(\sqrt{s} + m_1 - m_2 - m_3)(\sqrt{s} - m_1 + m_2 - m_3)}}$$

da cui si ottiene l'equazione differenziale

$$\left[ A(s) + B(s) \frac{d}{ds} + C(s) \frac{d^2}{ds^2} \right] F(s) = 0 \quad (5.11)$$

ove

$$\begin{aligned}
A(s) = & (m_1 - m_2 - m_3)(m_1 + m_2 - m_3)(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3) \\
& (m_1^6 + m_2^6 + m_3^6 - m_1^4 m_2^2 - m_1^2 m_2^4 - m_1^4 m_3^2 - m_2^4 m_3^2 - m_1^2 m_3^4 - m_2^2 m_3^4 + 6m_1^2 m_2^2 m_3^2) \\
& + (-5m_1^8 - 5m_3^8 - 5m_2^8 + 8m_1^6 m_2^2 + 8m_1^2 m_2^6 \\
& + 8m_1^6 m_3^2 + 8m_1^2 m_3^6 + 8m_2^6 m_3^2 + 8m_2^2 m_3^6 \\
& + 8m_1^4 m_2^2 m_3^2 + 8m_1^2 m_2^4 m_3^2 - 6m_1^4 m_3^4 + 8m_1^2 m_2^2 m_3^4 - 6m_1^4 m_2^4 - 6m_2^4 m_3^4) s \\
& + 2(3m_1^6 + 3m_2^6 + 3m_3^6 - 7m_1^4 m_2^2 - 7m_1^2 m_2^4 - 7m_1^4 m_3^2 \\
& - 7m_2^4 m_3^2 - 7m_1^2 m_3^4 - 7m_2^2 m_3^4) s^2 \\
& + (2m_1^4 + 2m_2^4 + 2m_3^4 + 16m_1^2 m_2^2 + 16m_1^2 m_3^2 + 16m_2^2 m_3^2) s^3 \\
& - 7(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) s^4 + 3s^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(s) = & (m_1 - m_2 - m_3)^3 (m_1 + m_2 - m_3)^3 (m_1 - m_2 + m_3)^3 (m_1 + m_2 + m_3)^3 \\
& - 8(m_1 - m_2 - m_3)(m_1 + m_2 - m_3)(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 + m_3) \\
& (m_1^6 + m_2^6 + m_3^6 - m_1^4 m_2^2 - m_1^2 m_2^4 - m_1^4 m_3^2 - m_1^2 m_3^4 - m_2^4 m_3^2 - m_2^2 m_3^4 + 10m_1^2 m_2^2 m_3^2) s \\
& - (-13m_1^8 - 13m_3^8 - 13m_2^8 + 36m_1^6 m_2^2 + 36m_1^2 m_2^6 + 36m_1^6 m_3^2 \\
& + 36m_2^6 m_3^2 + 36m_1^2 m_3^6 + 36m_2^2 m_3^6 - 46m_1^4 m_2^4 - 46m_2^4 m_3^4 - 46m_1^4 m_3^4 \\
& + 124m_1^4 m_2^2 m_3^2 + 124m_1^2 m_2^4 m_3^2 + 124m_1^2 m_2^2 m_3^4) s^2 \\
& + 8(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)(m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 + 6m_2^2 m_3^2 + 6m_1^2 m_2^2 + 6m_1^2 m_3^2) s^3 \\
& - (37m_1^4 + 37m_2^4 + 37m_3^4 + 70m_2^2 m_3^2 + 70m_1^2 m_2^2 + 70m_1^2 m_3^2) s^4 \\
& + 32(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) s^5 - 9s^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(s) = & s(s - (m_1 + m_2 - m_3)^2)(s - (m_1 - m_2 + m_3)^2) \\
& (s - (-m_1 + m_2 + m_3)^2)(s - (m_1 + m_2 + m_3)^2) \\
& (+3s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 + 2m_1^2 m_2^2 + 2m_1^2 m_3^2 + 2m_2^2 m_3^2).
\end{aligned}$$

È possibile dimostrare che, nel limite in cui  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ , (5.11) diventa

$$(3m^2 - s)F(s) - (9m^4 - 20m^2 s + 3s^2)F'(s) - s(s - 9m^2)(s - m^2)F''(s) = 0 \quad (5.12)$$

compatibile quindi con quanto ottenuto in [2].

# Conclusioni

Calcolando il max cut del sunrise (dopo aver precedentemente calcolato quello della bolla) abbiamo trovato una soluzione all'equazione differenziale omogenea per il sunrise a 2-loop a masse diverse. Abbiamo quindi calcolato “a ritroso” tale equazione differenziale omogenea partendo da una particolare proprietà dell'integrale ellittico completo di prima specie. L'equazione differenziale ottenuta è al secondo ordine e in accordo con quanto ottenuto in [5] in modo differente. Per completare lo studio affrontato in questa trattazione sarebbe necessario ricondurre i termini proporzionali a integrali ellittici incompleti di primo tipo (5.2), (5.3) e (5.6) a integrali ellittici completi. Tale obiettivo è rinviato a una futura trattazione.

# Appendice A

## Risultati della bolla ad 1-loop

Iniziamo mostrando alcune relazioni utili tra la funzione Beta di Eulero e l'angolo solido  $\Omega(d)$ , che saranno utili per esprimere i risultati in forma più compatta. Utilizzando le seguenti identità:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

e ricordando che  $\Omega(d) = 2\pi^{\frac{d}{2}}/\Gamma(\frac{d}{2})$  attraverso semplici manipolazioni algebriche si ottiene

$$B\left(\frac{3-d}{2}, \frac{d-2}{2}\right)\Omega(d-2) = \frac{\Omega(d-1)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)}$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2}\right)\Omega(d-2) = \Omega(d-1)$$

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{3-d}{2}\right)\Omega(d-2) = \frac{\sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)}\Omega(d-1)$$

Elenchiamo quindi di seguito i risultati ottenuti nei capitoli 1 e 2 in forma più compatta. Per  $-\infty < s < 0$

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-1)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-1}(-s)^{\frac{d-2}{2}}} \quad \text{metrica di Euclide} \quad (\text{A.1})$$

$$B(s, d) = \Omega(d-1) \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-1}(-s)^{\frac{d-2}{2}}} \quad \text{metrica di Minkowski} \quad (\text{A.2})$$

Per  $0 < s < (m_1 - m_2)^2$

$$B(s, d) = \Omega(d-1) \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-1}(s)^{\frac{d-2}{2}}} \quad \text{metrica di Euclide} \quad (\text{A.3})$$

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-1)}{\sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-1}(s)^{\frac{d-2}{2}}} \quad \text{metrica di Minkowski} \quad (\text{A.4})$$

Per  $(m_1 - m_2)^2 < s < (m_1 + m_2)^2$

$$B(s, d) = 0 \quad \text{metrica di Euclide} \quad (\text{A.5})$$

$$B(s, d) = \Omega(d-1) \frac{[-R_2(s, m_1^2, m_2^2)]^{\frac{d-3}{2}} \sin\left(\pi\frac{d-2}{2}\right)}{2^{d-1}(s)^{\frac{d-2}{2}} \sin\left(\pi\frac{d-1}{2}\right)} \quad \text{metrica di Minkowski} \quad (\text{A.6})$$



Per  $(m_1 + m_2)^2 < s < \infty$

$$B(s, d) = \Omega(d-1) \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-1}(s)^{\frac{d-2}{2}}} \quad \text{metrica di Euclide} \quad (\text{A.7})$$

$$B(s, d) = \frac{\Omega(d-1)}{\sin(\pi \frac{d-1}{2})} \frac{R_2(s, m_1^2, m_2^2)^{\frac{d-3}{2}}}{2^{d-1}(s)^{\frac{d-2}{2}}} \quad \text{metrica di Minkowski} \quad (\text{A.8})$$

# Appendice B

## Integrali ellittici e cambiamenti di variabile di Legendre

Ricordiamo le definizioni di integrale ellittico di primo, secondo e terzo tipo.

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (\text{B.1})$$

$$E(x, k) = \int_0^x dt \frac{\sqrt{(1-k^2t^2)}}{\sqrt{(1-t^2)}} \quad (\text{B.2})$$

$$\Pi(x, n, k) = \int_0^x \frac{dt}{(1-nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (\text{B.3})$$

questa è detta forma canonica di Legendre. Esaminiamo di seguito i cambi di variabile necessari a ricondurre gli integrali del limite  $d = 2$  a integrali ellittici.

### $I_1$ e $I_2$

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} = \int_{-\infty}^{b_4} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} - \int_0^{b_4} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} = \int_{-\infty}^{b_4} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}} - I_2$$

poniamo

$$x^2 = \frac{(b_1 - b_3)(b_4 - b)}{(b_1 - b_4)(b_3 - b)}$$

ottenendo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\sqrt{(b_1 - b_3)(b_2 - b_4)}} \left[ \int_0^{\sqrt{\frac{b_1 - b_3}{b_1 - b_4}}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-q'^2x^2)}} - \int_0^{\frac{b_4(b_1 - b_3)}{b_3(b_1 - b_4)}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-q'^2x^2)}} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} \left[ F\left(\sqrt{\frac{b_1 - b_3}{b_1 - b_4}}, q'\right) - F\left(\sqrt{\frac{b_4(b_1 - b_3)}{b_3(b_1 - b_4)}}, q'\right) \right] \end{aligned}$$

### $I_4$

$$I_4 = \int_{b_3}^{b_2} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}}$$

poniamo

$$x^2 = \frac{(b_2 - b_4)(b - b_3)}{(b_2 - b_3)(b - b_4)}$$

ottenendo

$$I_4 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - q'^2 x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} K(q')$$

$I_5$

$$\int_{b_2}^{b_1} \frac{db}{\sqrt{-R_4(b, s)}}$$

poniamo

$$x^2 = \frac{(b_2 - b_4)(b_1 - b)}{(b_1 - b_2)(b - b_4)}$$

ottenendo

$$I_4 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - q'^2 x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} K(q)$$

$I_6$

$$\int_{b_1}^{\infty} \frac{db}{\sqrt{R_4(b, s)}}$$

poniamo

$$x^2 = \frac{(b_2 - b_4)(b - b_1)}{(b_1 - b_4)(b - b_2)}$$

ottenendo

$$I_6 = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} \int_0^{\sqrt{\frac{b_2 - b_4}{b_1 - b_4}}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - q'^2 x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(b_2 - b_4)(b_1 - b_3)}} F\left(\sqrt{\frac{b_2 - b_4}{b_1 - b_4}}, q'\right)$$

# Appendice C

## Equazione differenziale nel limite di masse uguali

Per  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  si ha

$$\begin{aligned}A(s) &= -9m^{10} + 39m^8s - 66m^6s^2 + 54m^4s^3 - 21m^2s^4 + 3s^5 = \\ &= -3(s - m^2)^4(3m^2 - s) \\ B(s) &= -27m^{12} + 168m^{10}s - 411m^8s^2 + 504m^6s^3 - 321m^4s^4 + 96m^2s^5 - 9s^6 \\ &= -3(s - m^2)^4(9m^4 - 20m^2s + 3s^2) \\ C(s) &= 3s(s - 9m^2)(s - m^2)^5\end{aligned}$$

quindi l'equazione assume la forma

$$\begin{aligned}-3(s - m^2)^4(3m^2 - s)F(s) + 3(s - m^2)^4(9m^4 - 20m^2s + 3s^2)F'(s) \\ + 3s(s - 9m^2)(s - m^2)^5F''(s) = 0\end{aligned}$$

dividendo per  $-3(s - m^2)^4$

$$(3m^2 - s)F(s) - (9m^4 - 20m^2s + 3s^2)F'(s) - s(s - 9m^2)(s - m^2)F''(s) = 0$$

# Bibliografia

- [1] K.G. Chetyrkin and F.V. Tkachov. An algorithm for calculating multiloop integrals. *Nuc. Phys. B192*, 1981.
- [2] S. Laporta e E. Remiddi. Analytic treatment of the two loop equal mass sunrise graph. *Nucl.Phys. B704*, 2005.
- [3] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*, chapter 3.145, 3.147. Academic Press Press, 1943.
- [4] Ettore Remiddi. Differential equations for feynman graph amplitudes. *Nuovo Cim. A110 (1997) 1435-1452*, 1997.
- [5] S. Weinzierl e R. Zayadeh S. Müller-Stach. A second-order differential equation for the two-loop sunrise graph with arbitrary masses. 2012.