Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Soluzioni del sistema integrodifferenziale con derivata frazionaria di Riemann-Liouville tramite risolventi frazionari

Tesi di Laurea in Equazioni differenziali

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Angelo Favini

Presentata da:
Francesca Barich

VI Sessione
Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione

Le equazioni differenziali frazionarie hanno attirato notevole attenzione di molti matematici negli ultimi vent'anni, e sono risultate modelli fondamentali in vari problemi di natura fisica, biologica e ingegneristica; infatti vengono considerate come modelli alternativi alle equazioni differenziali non lineari. Recentemente sono stati trattati molti risultati interessanti sull'esistenza e la controllabilità di soluzioni di equazioni differenziali frazionarie, tra questi troviamo [3],[5],[9],[12],[13],[18]. La derivata frazionaria di Riemann-Liouville ha singolarità in zero e l'analisi matematica delle equazioni differenziali frazionarie di Riemann-Liouville è più complicata. In questo elaborato verrà analizzato il lavoro di S. Ji, M. Wang [10] e verrà approfondito. Si considererà perciò il seguente sistema semilineare integrodifferenziale con derivata frazionaria di Riemann-Liouville:

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s,x(s))ds\right), \ t \in J' := (0,b], \\ lim_{t\to 0^+}\Gamma\alpha t^{1-\alpha}x(t) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

dove $0 < \alpha < 1$, D^{α} *è la derivata di Riemann-Liouville di ordine* α, $A : \mathscr{D}(A) \subseteq X \to X$ *è il generatore infinitesimale di un risolvente frazionario di ordine* α $\{S_{\alpha}(t), t > 0\}$ *su* X *spazio di Banach, e gli operatori* $h : \Delta \times X \to X$ *e* $f : J \times X \times X \to X$ *sono funzioni non lineari, dove* $\Delta = \{(t,s), 0 \le s \le t \le b\}$, J:=[0,b].

In questo elaborato si studierà l'esistenza delle soluzioni al problema (1), *partendo nel primo capitolo con l'introduzione di alcune nozioni preliminari utili nella trattazione e proseguendo poi con l'enunciare l'esistenza di una soluzione (debole) in* $C^0_{1-\alpha}(J, X)$ *spazio di Banach, costruito per risolvere il problema della non limitatezza dei risolventi frazionari in* $t = 0$. *Nel secondo capitolo verranno elencate le condizioni minime necessarie per avere soluzioni al problema* (1) *e verranno enunciati alcuni Lemmi utili per dimostrare l'esistenza delle soluzioni. Infine nel capitolo terzo verrà illustrata un'applicazione di quanto detto nella parte teorica, la quale sfrutterà nella sua formulazione alcuni risultati ottenuti negli elaborati citati nella bibliografia.*

Capitolo 1

Nozioni e concetti preliminari sui risolventi frazionari

1.1 Spazi di Banach e integrabilità secondo Bochner

Definizione 1.1.1. $(X, \|\cdot\|_X)$ *spazio normato si dice spazio di Banach se è completo nella metrica definita dalla norma, cioè se* (X, d) *spazio vettoriale è completo* $(d = \|x - y\|_X\,, x, y \in X)$*, cioè se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento di X.*

Definizione 1.1.2. *Sia* $(X, \mathscr{F}, \mu)$ *uno spazio misurabile e sia* B *uno spazio di Banach. Una funzione misurabile* $f : X \to B$ *è integrabile secondo Bochner o, per brevità, Bochner integrabile, se esiste una successione* $\{S_n\}_{n\geq 1}$ *di funzioni semplici integrabili (nel senso usuale di Lebesgue, cioè* $\sum_{k=1}^{N} c_k\mu(A_k)$*, la funzione prende il valore* c_k *sugli inisiemi* A_k *che suddividono* A*) tale che:* $lim_{n\to\infty} \int_X \|f - S_n\|_B \, d\mu = 0$*, dove l'integrale è l'integrale di Lebesgue.*

L'integrale di Bochner è definito da:

$$\int_X f d\mu = lim_{n\to\infty}\int_X S_n d\mu.$$

Denoteremo con $C^0(J,X)$ *lo spazio delle funzioni continue da* J *in* X *con norma:* $\|x\|_X = sup\left\{\|x(t)\|, t\in J\right\}$, *con* $\mathscr{L}(X)=\mathscr{L}(X,X)$ *lo spazio degli operatori lineari limitati da* X *in se stesso, e con* $L^p(J,X)$ *lo spazio delle funzioni fortemente misurabili con norma:* $\|f\|_{L^p} = (\int_0^b \|f(t)\|_X^p\, dt)^{1/p}$, *tali che, appunto,* $t \to \|f(t)\|_X^p$ *sia sommabile su un intervallo* J, *dove* $1\le p<\infty$ *e* J *è un intervallo* $[0,b]$.

Per definire una soluzione al problema (1) *, considereremo lo spazio:*
$C^0_{1-\alpha}(J,X) := \left\{x(t)\,; t^{1-\alpha}x(t)\in C^0(J,X)\right\}$, $0<\alpha<1$, *con norma:*
$\|x\|_{C_{1-\alpha}} = sup\left\{\|t^{1-\alpha}x(t)\|_X\,; t\in J\right\}$, *dove* $t^{1-\alpha}x(t)\,|_{t=0} = lim_{t\to 0^+}t^{1-\alpha}x(t)$.
Per come lo abbiamo definito $C^0_{1-\alpha}(J,X)$ *è uno spazio di Banach.*

1.2 L'integrale frazionario di Riemann-Liouville e il risolvente frazionario di ordine α

Daremo ora alcune definizioni e risultati sulle derivate frazionarie e sulle equazioni differenziali frazionarie.

Definizione 1.2.1. *La funzione Gamma è la funzione continua* $\Gamma:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *definita da:* $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.
Si può verificare che $\Gamma(1) = 1$ *e* $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, *da cui segue che* $\Gamma(n+1)=n!$, *per ogni* $n\in\mathbb{N}$.

Definizione 1.2.2. *[12] L'integrale frazionario di Riemann-Liouville di ordine* $\alpha\in\mathbb{R}^+$ *di una funzione* $f\in L^1(J,X)$ *è definito da:*

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$$

dove $\Gamma(\cdot)$ *è la funzione Gamma e* $t > 0$.

Definizione 1.2.3. *[12] La derivata frazionaria di Riemann-Liouville di ordine* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *di una funzione* $f \in L^1(J, X)$ *è definita da:*

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds$$

dove $t > 0$ *e* $\alpha \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$.
In particolare per $0 < \alpha < 1$, $D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\, ds$, $t > 0$.

Nelle due definizioni appena elencate, e a seguire in questo elaborato, l'integrabilità sarà da intendere secondo Bochner. Ovviamente le ipotesi preliminari che verranno fatte nei Lemmi e nei Teoremi che enunceremo saranno connesse alla Bochner integrabilità.

*Sia * il simbolo di convoluzione:* $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)\, g(s)\, ds$,
dove f *e* g *sono funzioni fortemente misurabili, cioè Bochner integrabili.*
Per convenienza prenderemo: $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *per* $t > 0$ *e* $g_\alpha(t) = 0$ *per* $t \leq 0$, $0 < \alpha < 1$*; si ha:*
i) $I_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t)$,
ii) $D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * f)(t)$.

Definizione 1.2.4. *[12] Sia* $0 < \alpha < 1$, *la famiglia* $\{S_\alpha(t), t > 0\} \subseteq \mathscr{L}(X)$ *è detta un risolvente frazionario di ordine* α *se soddisfa:*
(i) $S_\alpha(\cdot)\, x \in C^0(\mathbb{R}^+, X)$ *e* $lim_{t \to 0^+} \Gamma(\alpha)\, t^{1-\alpha} S_\alpha(t)\, x = x$, $x \in X$*;*
(ii) $S_\alpha(t)\, S_\alpha(s) = S_\alpha(s)\, S_\alpha(t)$, $s, t > 0$*;*
(iii) $S_\alpha(t)\, I_s^\alpha S_\alpha(s) - I_t^\alpha S_\alpha(t)\, S_\alpha(s) = g_\alpha(t)\, I_s^\alpha S_\alpha(s) - g_\alpha(s)\, I_t^\alpha S_\alpha(t)$,
$s, t > 0$.

1.3 Il generatore infinitesimale del risolvente frazionario e risultati di convergenza nella topologia operatoriale uniforme

L'operatore lineare A definito da:

$$Ax = \Gamma(2\alpha)\, lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1-\alpha} S_\alpha(t)\, x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x}{t^\alpha}, x \in \mathscr{D}(A)$$

è il generatore infinitesimale del risolvente frazionario $S_\alpha(t)$*, e il dominio di* A *è l'insieme:*

$$\mathscr{D}(A) = \left\{ x \in X; lim_{t\to 0^+} \frac{t^{1-\alpha} S_\alpha(t)\, x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x}{t^\alpha} \ \textit{esiste} \right\}$$

Si ha che il risolvente frazionario $S_\alpha(t)$ *è illimitato per* t *sufficientemente piccolo, ma* $t^{1-\alpha} S_\alpha(t)$ *è limitato sull'intervallo* $[0{,}b]$*,* $b \in \mathbb{R}^+$*. Indicheremo con* $M = sup_{t\in J} \|t^{1-\alpha} S_\alpha(t)\|_X$*,* $J{=}[0{,}b]$.

Daremo adesso due definizioni che saranno estremamente utili in seguito:

Definizione 1.3.1. *Sia* X *uno spazio di Banach. Un operatore lineare* $A : \mathscr{D}(A) \to X$*,* $\mathscr{D}(A) \subseteq X$*, si dice chiuso se* $\forall$ *successione* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathscr{D}(A)$ *convergente ad un elemento* $x \in X$*, tale che* $lim_{i\to\infty} Ax_i = y \in X$ *si ha:*
$x \in \mathscr{D}(A)$ *e* $Ax{=}y$.

Definizione 1.3.2. *Un operatore* A *si dice densamente definito se il suo dominio è denso in* X*, cioè se:* $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$.

Lemma 1.3.1. *[12] Sia $\{S_\alpha(t), t > 0\}$ un risolvente frazionario di ordine α e sia A il suo generatore infinitesimale; allora:*
(i) $AS_\alpha(t)\,x = S_\alpha(t)\,Ax\ \forall\ x \in \mathscr{D}(A)$, $S_\alpha(t)\,x \in \mathscr{D}(A)$, $t > 0$;
(ii) $S_\alpha(t)\,x = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x + AI_t^\alpha S_\alpha(t)\,x$, $\forall\ x \in X$, $t > 0$;
(iii) $S_\alpha(t)\,x = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x + I_t^\alpha S_\alpha(t)\,Ax$, $\forall\ x \in \mathscr{D}(A)$, $t > 0$;
(iv) A è chiuso e densamente definito.

Ricordiamo ora le proprietà fondamentali di un semigruppo:
1) $T(t+s) = T(t)T(s) = T(s)T(t)$, $t, s \geq 0$;
2) $T(0) = I$, *dove I è l'operatore identità in X.*
T(t) è un semigruppo fortemente continuo o C_0 se inoltre vale:
3) $lim_{t\to 0}T(t)x = x$, $\forall\ x \in X$.

Definizione 1.3.3. *Indicheremo con topologia operatoriale uniforme la topologia della convergenza uniforme definita dalla famiglia delle seminorme della forma: $\|T\|_{op} = sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_X}{\|x\|_X} = sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|_X$, con X spazio di Banach e $T \in \mathscr{L}(X)$.*

Prima di procedere abbiamo bisogno di enunciare un Teorema relativo alla proprietà di precompattezza, utile nella dimostrazione del prossimo Lemma.

Teorema 1.3.1 (Ascoli-Arzelà). *Sia (X, d) spazio metrico compatto, sia $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazio di Banach e sia $C_b^0(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue limitate da X a Y, dotato della norma uniforme e quindi spazio di Banach; allora $\mathscr{F} \subseteq C_b^0(X, Y)$ è relativamente compatto (o precompatto) se valgono le due seguenti condizioni:*
(i) $\mathscr{F}(X)$ è precompatto in Y, $\forall\ x \in X$;
(ii) $\mathscr{F}$ è equicontinuo, cioè: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $\|f(x) - f(y)\|_Y < \epsilon$, $\forall\ x,y \in X$, $d(x, y) < \delta$, $\forall\ f \in \mathscr{F}$.

La famiglia dei risolventi frazionari che stiamo studiando, definita per $t > 0$, non è limitata per t sufficientemente piccolo, ma i risolventi frazionari possiedono comunque la proprietà di forte continuità e la proprietà 1 di semigruppo per $t > 0$. Per ovviare al problema della non limitatezza in $t = 0$ abbiamo bisogno del seguente risultato di convergenza per i risolventi frazionari nella topologia operatoriale uniforme.

Lemma 1.3.2. *Sia $\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t), t > 0\}$ equicontinuo e compatto; allora $\forall\ t > 0$ vale:*

(i) $lim_{h\to 0^+} \|(t+h)^{1-\alpha}S_\alpha(t+h) - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h) \cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)\|_{op} = 0$;

(ii) $lim_{h\to 0^+} \|t^{1-\alpha}S_\alpha(t) - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h) \cdot (t-h)^{1-\alpha}S_\alpha(t-h)\|_{op} = 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t), t > 0\}$ è compatto; allora l'insieme:

$$P_t = \{t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x; \|x\|_X \leq 1\},$$

è relativamente compatto in $X\ \forall\ t > 0$.

Quindi possiamo trovare una famiglia finita $\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i; \|x_i\|_X \leq 1\}_{i=1}^m \subset P_t$ per cui $\exists\ \epsilon > 0$ tale che:

$$\left\|t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x - t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i\right\|_X < \frac{\epsilon}{3(1+\Gamma(\alpha)M)} \tag{1.1}$$

con M definito come in precedenza.

Sia M che Γ appartengono ai reali positivi e per Definizione 1.2.4(i) *si ha:*

$\exists\ h_1 > 0$ tale che

$$\left\|t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h) \cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i\right\|_X < \frac{\epsilon}{3}, \tag{1.2}$$

per ogni $0 < h \leq h_1$ e $1 \leq i \leq m$.

Inoltre poichè $\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t)\}$ è equicontinuo $\forall\ t > 0$,

$\exists\ h_2 > 0$ tale che

$$\left\|(t+h)^{1-\alpha}S_\alpha(t+h)x - t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x\right\|_X < \frac{\epsilon}{3}, \tag{1.3}$$

per ogni $0 < h \leq h_2$ *e* $\|x\|_X \leq 1$.

Ora per $0 < h \leq min\{h_1, h_2\}$ *e per* $\|x\|_X \leq 1$, *da* (1.1), (1.2) *e* (1.3) *si ha che:*

$$\begin{aligned}
&\left\|(t+h)^{1-\alpha}S_\alpha(t+h)x - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h)\cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x\right\|_X \\
\leq &\left\|(t+h)^{1-\alpha}S_\alpha(t+h)x - t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x\right\|_X \\
&+ \left\|t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x - t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i\right\|_X \\
&+ \left\|t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h)\cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i\right\|_X \\
&+ \left\|\Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h)\cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_i - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h)\cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x\right\|_X \\
< &\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(1+\Gamma(\alpha)M)} + \frac{\epsilon}{3} + (\Gamma(\alpha)M)\frac{\epsilon}{3(1+\Gamma(\alpha)M)} \\
= &\frac{\epsilon}{3} + (1+\Gamma(\alpha)M)\frac{\epsilon}{3(1+\Gamma(\alpha)M)} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon;
\end{aligned}$$

questo implica che $\forall\ t > 0$ *si ha:*

$$lim_{h\to 0^+}\left\|(t+h)^{1-\alpha}S_\alpha(t+h) - \Gamma(\alpha)h^{1-\alpha}S_\alpha(h)\cdot t^{1-\alpha}S_\alpha(t)\right\|_{op} = 0$$

il che prova (i).

Per provare (ii) si può applicare ad (i) la sostituzione: t+h=u, $\forall\ t > 0$ *e si dimostra il Lemma.* □

1.4 Soluzione (debole) del problema (1) tramite l'integrale frazionario di Riemann-Liouville in $C^0_{1-\alpha}(J, X)$

Definizione 1.4.1. *Una funzione* $x \in C^0_{1-\alpha}(J, X)$ *è detta soluzione (debole) del problema* (1) *se soddisfa:*

$$x(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x_0 + AI^\alpha_t x(t) + I^\alpha_t f\left(t, x(t), \int_0^t h(t,s,x(s))ds\right),\ \ t \in J' = (0, b].$$

La definizione appena data è coerente con quanto detto fino ad ora (riferimento a *[6]* e *[18]*), *ma ci fornisce una formulazione più debole di quella classica. Infatti il concetto di soluzione debole è legato a quello di derivata debole: si tratta di definire la nozione di derivata anche per le funzioni integrabili ma non necessariamente differenziabili. Una soluzione classica è invece una funzione di classe C^k, che è soluzione di un'equazione alle derivate parziali di ordine k.*

Lemma 1.4.1. ***[18]*** *Sia $f \in L^p(J, X)$, $1 \leq p < \infty$. Allora:*

$$lim_{h \to 0} \int_0^b \|f(t+h) - f(t)\|_X^p \, dt = 0,$$

dove $f(t) = 0$ per $t \notin J$.

Capitolo 2

Soluzione al problema tramite risolventi frazionari di Riemann-Liouville

2.1 Dimostrazione dell'esistenza della soluzione del problema (1) tramite risolventi frazionari

In questo capitolo discuteremo le condizioni necessarie e sufficienti per avere l'esistenza delle soluzioni del problema (1)*, senza utilizzare l'assunzione di Lipschitzianità di funzioni non lineari. In seguito sfrutteremo le condizioni poste per ottenere risultati importanti, che ci permetteranno di dimostrare l'esistenza di almeno una soluzione del problema* (1)*, tramite risolventi frazionari.*
Sia $r > 0$*, definiamo l'insieme* $W_r := \left\{ x \in C^0_{1-\alpha}(J, X); \|x\|_{C_{1-\alpha}} \leq r \right\}$*, dove* $\|x\|_{C_{1-\alpha}}$ *è la norma definita a* pag 7, Capitolo 1.

Per brevità di scrittura scriveremo $Hx(t) = \int_0^t h(t,s,x(s))ds$.

Daremo ora le seguenti ipotesi necessarie sul sistema integrodifferenziale frazionario (1)*:*

(H1) $\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t), t > 0\}$ *è equicontinuo e compatto.*

(H2) *La funzione non lineare* h*:* $\Delta \times X \to X$ *soddisfa:*

1. *per quasi ogni* $(t,s) \in \Delta := \{(t,s), 0 \leq s \leq t \leq b\}$ *la funzione* $h(t,s,\cdot) : X \to X$ *è continua, e*

   $\forall\ x \in X$ *la funzione* $h(\cdot,\cdot,x) : \Delta \to X$ *è fortemente misurabile;*

2. $\exists\ m \in \mathbb{R}^+$ *tale che:* $\|h(t,s,\cdot)\|_X \leq m\,\|x\|_X$.

(H3) *La funzione non lineare* $f : J \times X \times X \to X$ *soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $f(t,\cdot,\cdot)$ *: è continua per quasi ogni* $t \in J$ *e* $f(\cdot,x,y) : J \to X$ *è misurabile* $\forall$ *x,y* $\in X$*;*

2. *Per quasi ogni* $t \in J$ *e x,y* $\in X$ *si ha:*

   $$\|f(t,x,y)\|_X \leq \theta(t) + \rho t^{1-\alpha}(\|x\|_X + \|y\|_X) \ ,$$

   dove $\theta(t) \in L^p(J,X)$*,* $p > \frac{1}{\alpha}$*,* $0 < \alpha < 1$ *e* $0 < \rho < \frac{\alpha^2}{Mb\alpha + Mb^2m}$.
   Con questa scelta di ρ *si ha che* $0 < \rho < \frac{1}{M}$ *per* $0 > \alpha < 1$*,* $b, m > 0$ *e* $M = sup_{t\in J}\|t^{1-\alpha}S_\alpha(t)\|_X$*,* J=[0,b].

Le ipotesi appena elencate saranno condizioni fondamentali per i risultati che andremo ad analizzare in questa sezione. Prima di trattare i Lemmi che ci permetteranno di dimostrare l'esistenza della soluzione al problema, enunceremo uno dei Teoremi fondamentali sulla convergenza.

Teorema 2.1.1 (Convergenza dominata)**.** *Siano $f_n : I \to X$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni Bochner integrabili, con I intervallo qualsiasi in $\mathbb{R}$ o prodotto di due intervalli qualsiasi di $\mathbb{R}$, e X spazio di Banach. Assumiamo che $f(t) = lim_{n\to\infty} f_n(t)$ esista quasi ovunque e che esista una funzione integrabile $g : I \to \mathbb{R}^+$ tale che $\|f_n(t)\|_X \leq g(t)$ quasi ovunque $\forall\ n \in \mathbb{N}$; allora f è Bochner integrabile e $\int_I f(t)dt{=}lim_{n\to\infty} \int_I f_n dt$. Inoltre vale: $\int_I \|f(t) - f_n(t)\|_X\, dt \overset{n\to\infty}{\to} 0$.*

Richiameremo adesso una proposizione che ci permetterà di studiare meglio la convoluzione.

Proposizione 2.1.1. *[2] Siano X, Y spazi di Banach, sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X) = \{f : \mathbb{R}^+ \to X;\ f$ è Bochner integrabile su $[0, t], \forall\ t > 0\}$ e sia
$T : \mathbb{R}^+ \to \mathscr{L}(X, Y)$ fortemente continuo; allora la convoluzione:*

$$(T * f)(t) = \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, ds$$

*esiste come integrale secondo Bochner e definisce una funzione continua:
$T * f : \mathbb{R}^+ \to Y$.*

Lemma 2.1.1. *Sia $f \in L^p(J, X)$ con $p > \frac{1}{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ e sia l'ipotesi (H1) soddisfatta; allora la convoluzione:*

$$(S_\alpha * f)(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s) ds,$$

$t \in J$, esiste ed è una funzione continua su J.

Dimostrazione. Esistenza) *Dalla proposizione precedente sappiamo che $S_\alpha(t - \cdot)f(\cdot)$ è misurabile sull'insieme $(0, t)$ e per come abbiamo definito M abbiamo:*

$$\begin{aligned} \|(S_\alpha * f)(t)\|_X &= \left\| \int_0^t \left((t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s)\right) \cdot (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right\|_X \\ &\leq M \int_0^t \left\|(t-s)^{\alpha-1} f(s)\right\|_X ds. \end{aligned}$$

Per $p > \frac{1}{\alpha} > 1$, $0 < \alpha < 1$, *si prende il coniugato di* p, *cioè* $p' = \frac{p}{p-1} > 1$; *poichè per ipotesi* $f \in L^p(J,X)$ *possiamo sfruttare la* disuguaglianza di Hölder, *per ottenere:*

$$\begin{aligned}
&\leq M \|f\|_{L^p} \left(\int_0^t \left((t-s)^{\alpha-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq M \|f\|_{L^p} \left(\left(\frac{p-1}{\alpha p - 1} \right) t^{\frac{\alpha p-1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq M \|f\|_{L^p} b^{\alpha - \frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1} \right)^{1-\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

che ci permette di dire che $S_\alpha * f$ *esiste.*

Continuità) *Vogliamo dimostrare che* $S_\alpha * f \in C^0(J,X)$.

Siano t_1, t_2 *tale che* $0 < \epsilon < t_1 < t_2 \leq b$; *allora si ha:*

$$\begin{aligned}
&\|(S_\alpha * f)(t_2) - (S_\alpha * f)(t_1)\|_X \\
=&|| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2 - s) f(s) ds - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s) f(s) ds ||_X \\
\leq&|| \int_0^{t_1-\epsilon} \left((t_2-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_2-s) - (t_1-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_1-s) \right) \\
&\cdot (t_2-s)^{\alpha-1} f(s) ds ||_X \\
&+ || \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} \left((t_2-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_2-s) - (t_1-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_1-s) \right) \\
&\cdot (t_2-s)^{\alpha-1} f(s) ds ||_X \\
&+ || \int_0^{t_1} (t_1-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_1-s) \cdot \left((t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1} \right) f(s) ds ||_X \\
&+ || \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_2-s) \cdot (t_2-s)^{\alpha-1} f(s) ds ||_X \\
\leq& sup_{s \in [0, t_1-\epsilon]} \left\| (t_2-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_2-s) - (t_1-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t_1-s) \right\|_X \\
&\cdot \|f\|_{L^p} b^{\alpha-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1} \right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2M \|f\|_{L^p} \cdot \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left((t_2 - t_1 + \epsilon)^{\frac{\alpha p-1}{p-1}} - (t_2 - t_1)^{\frac{\alpha p-1}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&+ M \|f\|_{L^p} \left(\int_0^{t_1} \left((t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} ds\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&+ M \|f\|_{L^p} \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right)^{1-\frac{1}{p}} (t_2 - t_1)^{\alpha-\frac{1}{p}}. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Ora grazie all'equicontinuità di $\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t), t > 0\}$, al Lemma 1.4.1 *e all'arbitrarietà di ϵ si ottiene:*

$$
\|(S_\alpha * f)(t_2) - (S_\alpha * f)(t_1)\|_X \overset{t_1 \to t_2}{\to} 0,
$$

il che dimostra che $(S_\alpha * f)(t)$ è continua su J'.

Per mostrare la continuità di $S_\alpha * f$ in zero notiamo che prendendo $0 < t \leq b$ si ha:

$$
\begin{aligned}
\|(S_\alpha * f)(t) - (S_\alpha * f)(0)\|_X &= \left\| \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) \cdot (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right\|_X \\
&\leq M \|f\|_{L^p} t^{\alpha - \frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right)^{1-\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

da cui segue che $S_\alpha * f(t) \to S_\alpha * f(0)$ per $t \to 0^+$.

Si ha quindi che $S_\alpha * f(\cdot) \in C^0(J, X)$ e abbiamo dimostrato il Lemma. □

Lemma 2.1.2. *Supponiamo che siano soddisfatte $(H1)$,$(H2)$ e $(H3)$; allora $x \in C^0_{1-\alpha}(J, X)$ è soluzione del problema* (1) *se e solo se x soddisfa:*

$$
x(t) = S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, x(s), Hx(s)) ds, \ t \in J'. \qquad (2.2)
$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$) *Sfruttando il* Lemma 1.3.1(ii):

$$
S_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x + A I_t^\alpha S_\alpha(t) x, \ \forall \ x \in X, \ t > 0,
$$

e ricordando le notazioni definite per $t > 0$, $0 < \alpha < 1$:

$g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $I_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t)$, *si ha che* $\forall\ x \in X$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$*:*

$$S_\alpha(t)x = g_\alpha(t)x + A(g_\alpha * S_\alpha)(t)x.$$

Segue dalla chiusura di A *generatore infinitesimale e dalla* Proposizione 1.1.7 *in [1] che:*

$$g_\alpha(t) = S_\alpha(t) - (Ag_\alpha * S_\alpha)(t).$$

Sia $x(\cdot)$ *una soluzione (debole) del problema* (1) (Definizione 1.4.1); *dal* Lemma 1.3.1(ii) *si ha:*

$$\begin{aligned} g_\alpha * x =& (S_\alpha - Ag_\alpha * S_\alpha) * x \\ =& S_\alpha * x - S_\alpha * (Ag_\alpha * x) \\ =& S_\alpha * (x - Ag_\alpha * x) \\ =& S_\alpha * (g_\alpha x_0 + g_\alpha * f\left(\cdot, x\left(\cdot\right), Hx\left(\cdot\right)\right)) \\ =& g_\alpha * (S_\alpha x_0 + S_\alpha * f\left(\cdot, x\left(\cdot\right), Hx\left(\cdot\right)\right)), \end{aligned}$$

e questo, grazie all'ipotesi (H1) *con* f *definita come in* (H3), *implica che:*

$$x(t) = S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, x(s), Hx(s))ds.$$

$\Leftarrow$) *Supponiamo che* $x(\cdot)$ *soddisfi la formula* (2.2). *Dal* Lemma 2.1.1 *sappiamo che* $x(\cdot)$ *è ben definita su* J'. *Dalla definizione di generatore infinitesimale del risolvente frazionario* $S_\alpha(\cdot)$, Capitolo 1 pag 9, *abbiamo che:*

$$AI_t^\alpha x(t) = lim_{s\to 0^+} \Gamma(2\alpha) \frac{\left(s^{1-\alpha} S_\alpha(s) - \frac{1}{\Gamma_\alpha}\right) I_t^\alpha x(t)}{s^\alpha}. \tag{2.3}$$

Inoltre si ha:

$$\begin{aligned} &(s^{1-\alpha} S_\alpha(s) - \frac{1}{\Gamma_\alpha}) I_t^\alpha x(t) \\ =& [s^{1-\alpha} S_\alpha(s) - s^{1-\alpha} g_\alpha(s)) (I_t^\alpha S_\alpha(t)x_0 + g_\alpha * S_\alpha * f(\cdot, x(\cdot), Hx(\cdot))(t)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&s^{1-\alpha}[S_\alpha(s)I_t^\alpha S_\alpha(t)x_0 - g_\alpha(s)I_t^\alpha S_\alpha(t)x_0]\\
&+ s^{1-\alpha}[S_\alpha(s)\cdot(I_t^\alpha S_\alpha) * f(\cdot,x(\cdot),Hx(\cdot))(t)\\
&- g_\alpha(s)\cdot(I_t^\alpha S_\alpha) * f(\cdot,x(\cdot),Hx(\cdot))(t)]\\
=&s^{1-\alpha}\left[S_\alpha(t)I_s^\alpha S_\alpha(s)x_0 - g_\alpha(t)I_s^\alpha S_\alpha(s)x_0\right]\\
&+ s^{1-\alpha}\left[I_s^\alpha S_\alpha(s)S_\alpha(t) - I_s^\alpha S_\alpha(s)g_\alpha(t)\right] * f(\cdot,x(\cdot),Hx(\cdot))(t)\\
=&s^{1-\alpha}I_s^\alpha S_\alpha(s)[S_\alpha(t)x_0 - g_\alpha(t)x_0 + S_\alpha * f(\cdot,x(\cdot),Hx(\cdot))(t)\\
&- g_\alpha * f(\cdot,x(\cdot),Hx(\cdot))(t)]\\
=&s^{1-\alpha}I_s^\alpha S_\alpha(s)\left[x(t) - g_\alpha(t)x_0 - I_t^\alpha f(t,x(t),Hx(t))(t)\right].
\end{aligned}
$$

Quindi (2.3) *equivale a:*

$$
\begin{aligned}
&AI_t^\alpha x(t)\\
=&lim_{s\to 0^+}\Gamma(2\alpha)s^{1-\alpha}I_s^\alpha S_\alpha(s)\left[x(t) - g_\alpha(t)x_0 - I_t^\alpha f(t,x(t),Hx(t))(t)\right]. \quad (2.4)
\end{aligned}
$$

Notiamo inoltre che:

$$
\begin{aligned}
&||\Gamma(2\alpha)s^{1-\alpha}I_s^\alpha S_\alpha(s)||_X = ||\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s s^{1-2\alpha}(s-\tau)^{\alpha-1}S_\alpha(\tau)xd\tau - x||_X\\
=&||\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{1-\alpha}(1-\tau)^{\alpha-1}S_\alpha(s\tau)xd\tau - x||_X\\
=&||\frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)(s\tau)^{1-\alpha}S_\alpha(s\tau)xd\tau\\
&-\frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1}xd\tau||_X\\
\leq&\frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1}d\tau\cdot sup_{\tau\in[0,1]}\left\|\Gamma(\alpha)(s\tau)^{1-\alpha}S_\alpha(s\tau)x - x\right\|_X\\
\leq&sup_{\tau\in[0,1]}\left\|\Gamma(\alpha)(s\tau)^{1-\alpha}S_\alpha(s\tau)x - x\right\|_X.
\end{aligned}
$$

Dalla Definizione 1.2.4(i) *otteniamo:*

$$
\left\|\Gamma(2\alpha)s^{1-2\alpha}I_s^\alpha S_\alpha(s)x - x\right\|_X \to 0,\ \ s\to 0^+. \quad (2.5)
$$

Combinando insieme (2.4) *e* (2.5) *si ottiene:*

$$AI_t^\alpha x(t) = x(t) - g_\alpha(t)x_0 - I_t^\alpha f(t, x(t), Hx(t)),$$

che equivale a:

$$x(t) = AI_t^\alpha x(t) + g_\alpha(t)x_0 + I_t^\alpha f(t, x(t), Hx(t)),$$

e questo prova che x è soluzione del problema (1) *e si conclude.* $\square$

2.2 Compattezza di GW_r in $C^0_{1-\alpha}(J, X)$

Lemma 2.2.1. *Supponiamo che siano soddisfatte* $(H1)$,$(H2)$ *e* $(H3)$ *e sia* $W_r = \left\{x \in C^0_{1-\alpha}(J, X); \|x\|_{C_{1-\alpha}} \leq r\right\}$; *allora la mappa* $G : W_r \to C_{1-\alpha}(J, X)$ *definita da:*

$$(Gx)(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, x(s), Hx(s)) ds$$

è compatta.

Dimostrazione. Poniamo

$$B = \left\{y \in C^0(J, X);\ y(t) = t^{1-\alpha}(Gx)(t),\ x \in W_r,\ t \in J\right\}.$$

Per dimostrare la compattezza di GW_r in $C^0_{1-\alpha}(J, X)$ basta dimostrare che l'insieme B è precompatto in $C^0(J, X)$, grazie al Teorema 1.3.1.
Per prima cosa mostreremo che $B(t) = \{y(t);\ y \in B\} \subseteq X$ è precompatto in X, $\forall\ t \in J$. Se $t = 0$ allora $B(0) = 0$ e si dimostra la precompattezza. Supponiamo quindi $t > 0$; per $0 < \epsilon < t$ possiamo definire l'insieme:
$B^\epsilon(t) = \{y^\epsilon(t);\ x \in W_r,\ t \in J'\} \subseteq X$, *dove:*

$$y^\epsilon(t) = \epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \cdot \Gamma(\alpha) t^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s-\epsilon) f(s, x(s), Hx(s)) ds.$$

Per le ipotesi (H3) *e* (H2), *sapendo che per* $x \in W_r$, $\|x\|_{C_{1-\alpha}} \leq r$, $s \in [0,b]$, *si ha:*

$$\begin{aligned}
\|f(s,x(s),Hx(s))\|_X \leq & \theta(s) + \rho s^{1-\alpha} \left(\|x(s)\|_X + \left\| \int_0^s h(s,\tau,x(\tau))d\tau \right\|_X \right) \\
\leq & \theta(s) + \rho s^{1-\alpha} \left(\|x(s)\|_X + \int_0^s m \|x(\tau)\|_X d\tau \right) \\
\leq & \theta(s) + \rho s^{1-\alpha} \|x(s)\|_X + \rho s^{1-\alpha} \int_0^s m\tau^{\alpha-1} \|x\|_{C_{1-\alpha}} d\tau \\
\leq & \theta(s) + \rho s^{1-\alpha} \|x(s)\|_X + \rho s^{1-\alpha} \int_0^s m\tau^{\alpha-1} \|x\|_{C_{1-\alpha}} d\tau \\
\leq & \theta(s) + \rho r + \rho s^{1-\alpha} m \frac{s^\alpha}{\alpha} r \\
\leq & \theta(s) + \rho r + \rho \frac{ms}{\alpha} r \\
\leq & \theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Dalla (2.6) *per* $x \in W_r$, $t \in J'$, *utilizzando la* Disuguaglianza di Hölder *come nella dimostrazione del* Lemma 2.1.1 *si ha:*

$$\begin{aligned}
& \left\| t^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s-\epsilon) f(s,x(s),Hx(s))ds \right\|_X \\
\leq & b^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} \left\| (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon) \cdot (t-s-\epsilon)^{\alpha-1} f(s,x(s),Hx(s)) \right\|_X ds \\
\leq & Mb^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} \left\| (t-s-\epsilon)^{\alpha-1} f(s,x(s),Hx(s)) \right\|_X ds \\
\leq & Mb^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} (t-s-\epsilon)^{\alpha-1} \left(\theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r \right) ds \\
\leq & Mb^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} (t-s-\epsilon)^{\alpha-1} \theta(s) ds \\
& + Mb^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} (t-s-\epsilon)^{\alpha-1} \left(\rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r \right) ds \\
\leq & M \left(b \frac{p-1}{\alpha p - 1} r \right)^{1-\frac{1}{p}} \|\theta\|_{L^p} + \frac{Mb}{\alpha} \left(\rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r \right) < \infty. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Dall'ipotesi (H1) *per* $\epsilon > 0$ *si ha che l'operatore* $\epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon)$ *è compatto. Quindi adesso sappiamo che* $B^\epsilon(t)$ *è precompatto in* X, $\forall\ t \in J'$.

Siano $t \in J'$ e $\delta \in (\epsilon, t)$; allora abbiamo

$$
\begin{aligned}
&||y(t) - y^{\epsilon}(t)||_X \\
\leq & t^{1-\alpha}[|| \int_0^{t-\epsilon} (t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) \cdot (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s)) ds \\
& - \epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \Gamma(\alpha) \int_0^{t-\epsilon} (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon) \\
& \cdot (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \\
& + ||\epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \Gamma(\alpha) \int_0^{t-\epsilon} (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} \\
& S_\alpha(t-s-\epsilon) \cdot \left((t-s)^{\alpha-1} - (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} \right) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \\
& + || \int_{t-\epsilon}^{t} (t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) \cdot (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X] \\
\leq & b^{1-\alpha} \int_0^{t-\epsilon} ||[(t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) - \Gamma(\alpha) \epsilon^{1-\alpha} (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon)] \\
& (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s))||_X ds + b^{1-\alpha} \left\| \epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \right\|_X \Gamma(\alpha) \\
& \cdot M \int_0^{t-\epsilon} ||[(t-s)^{\alpha-1} (t-s-\epsilon)^{\alpha-1}] f(s, x(s), Hx(s))||_X ds \\
& + b^{1-\alpha} M \int_{t-\epsilon}^{t} ||(t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s))||_X ds \\
\leq & b^{1-\alpha} \int_0^{t-\delta} ||(t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) - \Gamma(\alpha) \epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \\
& (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon)||_X (t-s)^{\alpha-1} (\theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r) ds \\
& + b^{1-\alpha} \int_{t-\delta}^{t-\epsilon} ||(t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) - \Gamma(\alpha) \epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \\
& (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon)||_X (t-s)^{\alpha-1} (\theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r) ds \\
& + b^{1-\alpha} M^2 \Gamma(\alpha) \left(\int_0^{t-\epsilon} [(t-s)^{\alpha-1} (t-s-\epsilon)^{\alpha-1}]^{\frac{p}{p-1}} ds \right)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} \\
& + b^{1-\alpha} M \int_{t-\epsilon}^{t} ||(t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s))||_X ds \\
:= & I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned}
$$

dove

$$\begin{aligned}
I_1 =& b^{1-\alpha} \int_0^{t-\delta} ||(t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) - \Gamma(\alpha)\epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \\
& (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon)||_X (t-s)^{\alpha-1}(\theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r) ds, \\
I_2 =& + b^{1-\alpha} \int_{t-\delta}^{t-\epsilon} ||(t-s)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s) - \Gamma(\alpha)\epsilon^{1-\alpha} S_\alpha(\epsilon) \\
& (t-s-\epsilon)^{1-\alpha} S_\alpha(t-s-\epsilon)||_X (t-s)^{\alpha-1}(\theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r) ds, \\
I_3 =& + b^{1-\alpha} M^2 \Gamma(\alpha) \left(\int_0^{t-\epsilon} [(t-s)^{\alpha-1}(t-s-\epsilon)^{\alpha-1}]^{\frac{p}{p-1}} ds \right)^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}, \\
I_4 =& + b^{1-\alpha} M \int_{t-\epsilon}^{t} ||(t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), Hx(s))||_X ds.
\end{aligned}$$

Dal Lemma 1.3.2. *sappiamo che* $I_1 \to 0$ *per* $\epsilon \to 0^+$. *Dall'arbitrarietà di* ϵ *e* δ *e dall'assoluta continuità dell'integrale, ereditata dalla Bochner integrabilità, si ha:* $I_2 \to 0$, $I_4 \to 0$ *per* $\epsilon, \delta \to 0^+$. *Infine dal* Lemma 1.4.1 *si ottiene che* $I_3 \to 0$ *per* $\epsilon \to 0^+$.

Quindi per $t \in J'$, *si ha:*

$$lim_{\epsilon \to 0^+} \|y(t) - y^\epsilon(t)\|_X = 0,$$

e questo implica che $B(t) = \{y(t); y \in B\}$ *è precompatto in* X *in quanto esiste una famiglia arbitraria di insiemi precompatti chiusi in* X.

Adesso andremo a mostrare l'equicontinuità di B *in* J.

Procedendo come si è fatto per (2.7), *si ottiene:*

$$\begin{aligned}
& || \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \\
\leq & M b^{\alpha - \frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1}^{1-\frac{1}{p}} \right) \|\theta\|_{L^p} + \frac{M b^\alpha}{\alpha} \left(\rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r \right) \\
:= & F_r < \infty, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

per $t \in J$, $x \in W_r$.

Sia $y \in B$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b$, *allora si ha:*

$$\begin{aligned}
&\|y(t_2) - y(t_1)\|_X \\
=&t_2^{1-\alpha}|| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds \\
&- t_1^{1-\alpha} \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \\
\leq&||(t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}) \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \\
&+ t_1^{1-\alpha}|| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds \\
&- \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \\
\leq&(t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}) F_r + b^{1-\alpha}|| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds \\
&- \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X.
\end{aligned}$$

Dalla (2.6) *sappiamo che:*

$$\|f(s, x(s), Hx(s))\|_X \leq \theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r, \ \theta \in L^p(J, X).$$

Dall'espressione (2.2) *del* Lemma 2.1.1 *abbiamo:*

$$\begin{aligned}
&|| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds \\
&- \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s) f(s, x(s), Hx(s)) ds||_X \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

per $t_1 \to t_2$, *indipendentemente da* $x \in W_r$.

Abbiamo quindi:

$$lim_{t_1 \to t_2} \|y(t_2) - y(t_1)\|_X = 0,$$

che dimostra l'equicontinuità di B *in* J. *Perciò per quanto detto all'inizio della dimostrazione per il* Teorema di Ascoli-Arzelà *si ha che* $G : W_r \to C^0_{1-\alpha}(J, X)$ *è una mappa compatta.* □

2.3 Teorema dell'esistenza delle soluzioni posto come un problema di punto fisso

In questo paragrafo dimostreremo l'esistenza di almeno una soluzione al problema (1), *sotto determinate condizioni iniziali. Prima di focalizzarci sul teorema in questione enunceremo un altro teorema, che ci permetterà di avanzare nella dimostrazione dell'esistenza della soluzione.*

Teorema 2.3.1 (Punto fisso di Schauder)**.** *Sia* $(X, \|\cdot\|_X)$ *uno spazio di Banach e sia* $K \subseteq X$ *un insieme non vuoto, chiuso e convesso. Sia* $T : K \to K$ *un'applicazione tale che:*
i) T *è continua;*
ii) $\overline{T(K)} \subseteq K$ *è compatto; allora* $\exists\ x \in K$ *tale che* $T(x) = x$.

Per insieme convesso si intende un insieme nel quale, per ogni coppia di punti, il segmento che congiunge i due punti sia interamente contenuto nell'insieme di partenza, o più precisamente:
$\forall$ *coppia di punti* $x, y \in A$ *insieme convesso, il segmento che li congiunge:*
$\{(1+t)x + ty; t \in (0,1)\}$ *è interamente contenuto in* A.
Ora siamo pronti per dimostrare il teorema:

Teorema 2.3.2. *Siano le ipotesi* $(H1)$,$(H2)$ *e* $(H3)$ *soddisfatte, allora il sistema* (1) *ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Trasformeremo il problema di esistenza delle soluzioni in un problema di punto fisso; per far questo grazie al Lemma 2.1.2 *introdurremo l'operatore* $\phi : C^0_{1-\alpha}(J, X) \to C^0_{1-\alpha}(J, X)$ *definito da:*

$$\phi x(t) = S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, x(s), Hx(s)) ds.$$

Si verifica facilmente che il punto fisso di ϕ è soluzione del problema (1).
Proveremo quindi che ϕ ha un punto fisso sfruttando il Teorema di punto fisso di Schauder *enunciato in precedenza.*
Lo dimostreremo per passi:
Passo 1) *Possiamo affermare che $\phi W_r \subseteq W_r$ in $C_{1-\alpha}$, dove:*

$$r \geq \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - Mb(\alpha\rho + \rho bm)} \left[M \|x_0\| + M \left(b \frac{p-1}{\alpha p - 1} \right)^{1-\frac{1}{p}} \|\theta\|_{L^p} \right],$$

e $W_r = \left\{ x \in C^0_{1-\alpha}(J, X); \|x\|_{C_{1-\alpha}} \leq r \right\}$, *definito come nella sezione precedente.*
Infatti dalla (2.8) *si ha che per $x \in W_r$, $t \in J$ vale:*

$$\begin{aligned} &\left\| t^{1-\alpha} \phi x(t) \right\|_X \\ \leq &\left\| t^{1-\alpha} S_\alpha(t) x_0 \right\|_X + b^{1-\alpha} \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, x(s), Hx(s)) ds \right\|_X \\ \leq &M \|x_0\| + M \left(b \frac{p-1}{\alpha p - 1}^{1-\frac{1}{p}} \right) \|\theta\|_{L^p} + \frac{Mb^\alpha}{\alpha} \left(\rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r \right) \\ \leq &r. \end{aligned}$$

Passo 2) *Mostriamo ora che l'operatore ϕ è continuo su $W_r \subseteq C^0_{1-\alpha}(J, X)$.*
Possiamo supporre che esista una successione x_n tale che $x_n \to x$ in W_r.
Dalle ipotesi $(H2)$ *e* $(H3)$, *per $t \in J$, si ha:*

$$(t-s)^{\alpha-1} \left(f(s, x_n(s), Hx_n(s)) - f(s, x(s), Hx(s)) \right) \to 0,$$

per quasi ogni $s \in [0,t\,]$, e dalla (2.6) *segue:*

$$\begin{aligned} &(t-s)^{\alpha-1} \| f(s, x_n(s), Hx_n(s)) - f(s, x(s), Hx(s)) \|_X \\ \leq &2(t-s)^{\alpha-1} (\theta(s) + \rho r + \rho \frac{mb}{\alpha} r), \;\; s \in [0, t\,]. \end{aligned}$$

Infine dal Teorema della convergenza dominata (Teorema 2.2.1) *si ha:*

$$t^{1-\alpha}\left\|\phi x_n(t)-\phi x(t)\right\|_X \leq t^{1-\alpha}\int_0^t \left\|(t-s)^{1-\alpha}S_\alpha(t-s)^{\alpha-1}\right\|_X$$

$$(t-s)^{\alpha-1}\left\|f(s,x_n(s),Hx_n(s))-f(s,x(s),Hx(s))\right\|_X ds$$

$$\leq Mb^{1-\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left\|(f(s,x_n(s),Hx_n(s))-f(s,x(s),Hx(s)))\right\|_X ds \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

che implica la continuità dell'operatore ϕ su W_r.

Passo 3) Mostriamo come ultimo passo la compattezza dell'operatore ϕ. Sia

$$\phi=\phi_1+\phi_2,$$

dove $\phi_1(t)=S_\alpha(t)x_0$, $\phi_2(t)=\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,x(s),Hx(s))ds$.

Dal Lemma 2.2.1 *si ottiene la compattezza di ϕ_2 in W_r. Invece per la compattezza di ϕ_1 basta dimostrare che l'insieme:*

$$V=\left\{z\in C^0(J,X); z(t)=t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_0, x_0\in X, t\in J\right\},$$

è precompatto in $C^0(J,X)$.

Si vede facilmente che $V(0)=\left\{\frac{x_0}{\Gamma(\alpha)}\right\}$, $V(t)=\{t^{1-\alpha}S_\alpha(t)x_0\}$ per $t>0$, è precompatto in X. Supponiamo che $0\leq t_1\leq t_2\leq b$;

se $t_1=0$ in riferimento alla Definizione 1.2.4 (i) *si ha:*

$$\left\|z(t_2)-z(0)\right\|_X=\left\|t_2^{1-\alpha}S_\alpha(t_2)x_0-\frac{x_0}{\Gamma(\alpha)}\right\|_X \overset{t_2\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

Se $t_1>0$, procedendo come prima e dall'ipotesi (H1) *si ha:*

$$\left\|z(t_2)-z(t_1)\right\|_X\leq\left\|t_2^{1-\alpha}S_\alpha(t_2)x_0-t_1^{1-\alpha}S_\alpha(t_1)x_0\right\|_X \overset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0.$$

Per il Teorema di Ascoli-Arzelà *si ha che V è precompatto in $C^0(J,X)$, e quindi $\phi=\phi_1+\phi_2$ è un operatore compatto in $C^0_{1-\alpha}(J,X)$.*

Si conclude grazie al Teorema di punto fisso di Schauder (Teorema 2.3.1), *che esiste un punto fisso x per cui $\phi x=x$, che è soluzione del problema* (1). $\square$

Capitolo 3

Una possibile applicazione

3.1 Soluzione del sistema evolutivo integrodifferenziale con derivata frazionaria di Riemann-Liouville

Consideriamo il seguente sistema evolutivo integrodifferenziale con la derivata frazionaria di Riemann-Liouville della forma:

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + F\left(t, u(t,x), \int_0^t h_1(t,s,u(s,x))ds\right), \ 0 < t \leq 1, \ 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ lim_{t\to 0^+}\Gamma\alpha t^{1-\alpha}u(t,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Sia $X = L^2(0,1)$ *spazio di Banach e sia* $A : \mathscr{D}(A) \subseteq X \to X$ *l'operatore definito da:* $Az = z''$, *con dominio:*

$$\mathscr{D}(A) = \{z \in X; z, z' \textit{sono assolutamente continue, } z'' \in X, z(0) = z(1) = 0\}.$$

Da Pazy([16]), pag 234, *abbiamo che l'operatore* A *è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico compatto* $T(t)$, $t \geq 0$.

Da [18] si ha che gli autovalori di A sono della forma: $\lambda_n = -n^2\pi^2$*,* $n \in \mathbb{N}$*, e i corrispondenti autovettori sono:* $e_n(x) = \sqrt{2}sin(n\pi x)$*,* $n \geq 1$*,* $e_0 = 1$*, che formano una base ortogonale per* $L^2(0,1)$*. Infatti derivando gli autovettori si ottiene:* $e_n'(x) = \sqrt{2}n\pi cos(n\pi x)$*,* $e_n''(x) = -\sqrt{2}n^2\pi^2 sin(n\pi x)$*, e quindi:*

$$Ae_n'' = e_n'' = \lambda_n e_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Per dimostrare l'ortogonalità basta usare il metodo induttivo e sfruttare la formula di addizione del seno nei passi di induzione.

Quindi T(t) è dato da:

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} < z, e_n > e_n, \ \forall \ z \in L^2(0,1), \ \forall \ t > 0.$$

Se $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sin(n\pi x)$ *abbiamo:*

$$T(t)u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t} c_n sin(n\pi x).$$

Dall'esempio di [12] sappiamo che A è il generatore infinitesimale di un risolvente frazionario S_α *di ordine* α *e*

$$S_\alpha(t)u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{1-\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-n^2\pi^2 t^\alpha) c_n sin(n\pi x).$$

Dove $E_{\alpha,\alpha}(\cdot)$ *è la funzione di Mittag-Leffler definita da:*

$$E_{\alpha,\alpha}(-n^2\pi^2 t^\alpha) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{2k} \pi^{2k} t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha(k+1))}, \ 0 < \alpha < 1.$$

Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$*; la formula della trasformata di Laplace dell'integrale frazionario di Riemann-Liouville è indicata con il simbolo*
$L\left\{I_t^\alpha f(t)\right\} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$*,* $\lambda \to L\left\{I_t^\alpha f(t)\right\}(\lambda)$ *ed è definita da:*

$$L\left\{I_t^\alpha f(t)\right\}(\lambda) = \tfrac{1}{\lambda^\alpha}\widehat{f}(\lambda),$$

dove $\widehat{f}$ *è la trasformata di Laplace, della funzione f, definita da:*

$$\widehat{f} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \;\; Re\lambda > w, \, |f(t)| \leq ce^{wt}, \; c \; costante.$$

Utilizzando il procedimento di [14], tramite la trasformata di Laplace e la funzione di densità di probabilità si ottiene:

$$t^{1-\alpha} S_\alpha(t) u_0(x) = \alpha \int_0^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) T(t^\alpha \theta) u_0(x) d\theta, \tag{3.1}$$

per ogni $u_0 \in X$, *dove:*

$$\xi_\alpha(\theta) = \tfrac{1}{\alpha} \theta^{-1-\frac{1}{\alpha}} \varpi_\alpha(\theta^{\frac{1}{\alpha}})$$

è la funzione di densità di probabilità su $(0, \infty)$, $\xi_\alpha(\theta) \geq 0$ e

$$\varpi_\alpha(\theta) = \tfrac{1}{\pi} \textstyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \theta^{-n\alpha-1} \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!} sin(n\pi\alpha), \; \theta \in (0, \infty).$$

La formula (3.1) *mostra che:*

$$t^{1-\alpha} S_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) T(t^\alpha \theta) d\theta.$$

Dal Lemma 2.9 *in* [18] *segue che la famiglia degli operatori* $\{t^{1-\alpha} S_\alpha(t), t > 0\}$ *è equicontinua, compatta e* $\|t^{1-\alpha} S_\alpha(t)\|_{L^2} \leq \frac{\alpha M'}{\Gamma(1+\alpha)} := M$, *dove* $M' = sup\{\|T(t)\|_{L^2}; 0 \leq t \leq 1\}$. *Perciò l'ipotesi* (H1) *è soddisfatta.*
Sia f la funzione continua $f : [0, b] \times X \times X \to X$ *definita da:*

$$f(t, u, h) = F(t, u(t, x), h(t, x)), \; 0 < t \leq 1, 0 < x < 1.$$

con $h : \Delta \times X \to X$ *definita da:*

$$h(t, x) = \textstyle\int_0^t h_1(t, s, u(s, x)) ds.$$

Prendiamo:

$$F\left(t, u(t, x), \int_0^t h_1(t, s, u(s, x)) ds\right)$$
$$= e^{-t} cos(u(t, x)) + \rho t^{1-\alpha} \left(u(t, x) + \int_0^t cos(ts) u(s, x) ds\right),$$

dove $0 < \rho < \frac{\alpha^2}{M\alpha+M}$*. Quindi le funzioni non lineari* f *e* h *soddisfano le ipotesi* (H2) *e* (H3).

Sia $u(t)x = u(t,x)$*, per* $t,x \in (0,1)$*; allora il sistema differenziale preso in considerazione all'inizio del capitolo può essere presentato nella forma astratta* (1)*, e tutte le condizioni del* Teorema 2.3.2 *sono soddisfatte. Perciò esiste una funzione* $u \in C_{1-\alpha}(J, L^2(0,1))$ *che è soluzione del sistema considerato in questo capitolo.*

Conclusioni

In questo elaborato è stato introdotto un sistema semilineare integrodifferenziale con derivata frazionaria di Riemann-Liouville e si sono discusse le condizioni per l'esistenza di soluzioni al sistema (1) *tramite risolventi frazionari, senza utilizzare la condizione di lipschtzianità. In ultima analisi è stato adoperato il Teorema di punto fisso di Schauder, trasformando l'esistenza delle soluzioni in un problema di punto fisso. Ci sono due punti dell'elaborato in cui si deve prestare particolare attenzione. Il primo è il fatto che il risolvente frazionario di Riemann-Liouville* $S_\alpha(t)$ *non è limitato in* $t = 0$ *e il secondo è che* $S_\alpha(t)$ *non ha le proprietà di semigruppo, e ciò significa che la compattezza di* $S_\alpha(t)$ *(o* $t^{1-\alpha}S_\alpha(t)$*) non implica l'equicontinuità di* $S_\alpha(t)$ *(o* $t^{1-\alpha}S_\alpha(t)$*).*

Consapevole che ci potrebbe essere un ulteriore spazio di ricerca nello studio della stabilità e controllabilità delle soluzioni, la mia attenzione si è focalizzata esclusivamente sull'esistenza delle soluzioni del problema (1)*, seguendo il modello dovuto a S. Jin e M. Wang [10].*

Bibliografia

[1] M. Abbaszadeh, H.J. Marquez, "Non linear observer design for one-sided Lipschitz systems", Proceedings of the American Control Conference, 2015.

[2] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F.Neubrander, "Vector-Valued Laplace transforms and Cauchy problems", Birkhauser, Berlin, 2011.

[3] K. Balachandran, S. Kiruthika, "Existence results for fractional integro-differential equations with nonlocal condition via resolvent operators", Comput. Math. Appl., 2011.

[4] M. Bragdi, "On the theory and applications of fractional differential equations", Ph.D. Thesis, Université Larbi ben M'hidi d'oum-El-Bouaghi, 2013.

[5] J. Du, W. Jiang, D. Pang, A.U.K. Niazi, "Exact Controllability for Hilfer Fractional Differential Inclusions Involving Nonlocal Initial Conditions", Complexity, 2018.

[6] Z. Fan, "Existence and regularity of solutions for evolution equations with Riemann-Liouville fractional derivatives", Indag. Math., 2014.

[7] N. Heymans, I. Podlubny, "Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives", Rheol. Acta, 2006.

[8] E. Hille, R.S. Phillips, "Functional Analysis and Semi-groups", American mathematical society, Baltimora, 1957.

[9] S. Ji, G. Li, "Solutions to nonlocal fractional differential equations using a noncompact semigroup", Electron. J. Diff. Equ., 2013.

[10] S. Ji, M. Wang, "Solutions to Riemann-Liouville fractional integrodifferential equations via fractional resolvents", E-mail a Angelo Favini, 2019.

[11] T. Kato, "Perturbation theory for linear operators", Springer Science+Business Media, New York, 1966.

[12] K. Li, J. Peng, "Fractional resolvents and fractional evolution equations", Appl. Math. Lett., 2012.

[13] K. Li, J. Peng, J. Jia, "Cauchy problems for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives", J. Funct. Anal., 2012.

[14] Z. Liu, X. Li, "Approximate controllability of fractional evolution systems with Riemann-Liouville fractional derivatives", Siam Journal on Control and Optim., 2015.

[15] K. Yosida, "Functional Analysis", Springer-Verlag, Berlino, 1980.

[16] A. Pazy, "Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations", Springer-Verlag, New York, 1983.

[17] W. Rudin, "Real and complex analysis", McGraw-Hill, Singapore, 1987.

[18] J.Wang, Y. Zhou, W. Wei, H. Xu, "Nonlocal problems for fractional integrodifferential equations via fractional operators and optimal controls", 2011.