

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**LA TEORIA
DEI
FRATTALI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Martina Baldacci

Sessione unica
Anno Accademico 2018/2019

...Alla mia famiglia

Indice

Introduzione	vii
1 La dimensione di Hausdorff	1
1.1 Misure Astratte e misure metriche	1
1.2 Misure di Hausdorff in \mathbb{R}^n	6
1.2.1 Misura di Hausdorff α -dimensionale	6
1.2.2 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane	11
1.3 Dimensione di Hausdorff	12
1.4 Esempi di frattali matematici	16
1.4.1 L'insieme di Cantor	16
1.4.2 La curva di Koch	18
2 L' Autosimilarità	21
2.1 Contrazioni e insiemi Autosimilari	22
2.2 Dimensione di un insieme autosimilare	28
3 Applicazione box-counting	31
3.1 Box Counting	31
3.2 Tecnica di misura	33
Bibliografia	37
Ringraziamenti	39

Elenco delle figure

1	il cavolo romano	ix
2	zoom del cavolo romano	ix
1.1	L'insieme di Cantor	16
1.2	La curva di Koch	18
1.3	Fiocco di neve di Koch	19
2.1	albero matematico	21
2.2	il tappeto di Sierpinski	29

Elenco delle tabelle

Introduzione

”Meraviglie senza fine saltano fuori da semplici regole, se queste sono ripetute senza una fine” (Benoit Mandelbrot dalle TED Conferences 2010, febbraio 2010).

Può sembrare strano ma fino a poco tempo fa non esisteva una geometria capace di descrivere i fenomeni naturali. Gli oggetti della nostra esperienza non hanno di per sè i bordi lisci e le forme regolari del cono, del cerchio, di una sfera o di una retta come afferma la geometria euclidea. Il mondo è in verità rugoso, increspato, di forma irregolare, in disordine.

Un frattale è, intuitivamente, una figura in cui un singolo motivo viene ripetuto su scale decrescenti. Il termine, derivante dal latino ”fractus”, il cui corrispondente verbo latino ”frangere” significa rompere, vuole sottolineare una proprietà che accomuna tutti i frattali: l’irregolarità, ovvero, l’impossibilità di descriverli come luogo dei punti che soddisfano semplici condizioni geometriche o analitiche. Proprio per questo motivo furono protagonisti della rivoluzione matematica avvenuta tra la geometria classica del 19esimo secolo (caratterizzata dalle forme regolari di euclide) e quella moderna del 20esimo secolo.

Il padre della teoria dei frattali è considerato Benoit Mandelbrot, che per primo formalizzò le proprietà di queste figure, prima di lui considerate degli oggetti eccezionali, ”mostri matematici”; diversi frattali classici sono infatti stati descritti da celebri matematici del passato, come Cantor, Peano, Hilbert, Von Koch, Sierpinski, ma fu solo con *The fractal geometry of nature* che essi trovarono posto in una teoria unificata, che ne sottolineava i legami

con forme tipiche della natura (alberi, foglie, coste, etc.).

Da questi esempi emergono proprietà fondamentali, quali: l'**autosimilarità** (struttura uguale a tutte le scale) e la **dimensione intermedia** (sebbene un frattale possa essere rappresentato in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è intera (per esempio, la curva di von Koch ha dimensione 1.26)..).

Considerando ad esempio l' **albero**, esso è una struttura apparentemente disordinata, la cui costruzione si basa su una regola implementata (1. radice, 2. tronco, 3. diramazione in 2-3 rami, ripartire dal punto 1. per ogni ramo e così via) che lo rende identico a tutte le scale (autosimilarità). Infatti se ingrandiamo un ramo, otteniamo l'albero di partenza.

Il **polmone**, presente nella gabbia toracica di ognuno di noi, risulta essere simile all'albero in quanto la struttura che lo identifica si basa sulla diramazione ad ogni scala, che gli permette di essere contenuto in uno spazio limitato, malgrado la sua superficie sia ampia quanto un campo da tennis.

Anche il **sistema vascolare** costituito da vasi sanguigni è un esempio di frattale in quanto le principali vene si diramano in affluenti sempre più piccoli ,ma identici ,per consentire alla maggior parte del sangue di raggiungere gli spazi più stretti nel più breve tempo possibile. Ulteriore esempio è il conosciuto **cavolo romano** che come evidenziano le seguenti due immagini è autosimilare. Tale proprietà è vantaggiosa, perché espone la pianta alla luce da tutte le angolazioni possibili. Questo è il motivo per cui il cavolfiore romanesco può crescere anche in luoghi con poca luce.

Come si può osservare dagli esempi mostrati, il frattale è uno dei tanti modi in cui le forme viventi si evolvono per sopravvivere e prosperare in un particolare habitat.



Figura 1: il cavolo romano



Figura 2: zoom del cavolo romano

Il merito di Mandelbrot è quindi quello di aver elaborato una nuova geometria che dia la possibilità di descrivere la natura intorno a noi. Grazie a lui si può ragionare in modo diverso: le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, i profili delle coste non sono cerchi, la corteccia degli alberi non è liscia, il fulmine non viaggia in linea retta. La **geometria dei frattali** è dunque una scoperta, un nuovo linguaggio che ha rivoluzionato il modo in cui gli scienziati osservano il mondo.

Gli argomenti principali di questo elaborato sono le proprietà che caratterizzano i frattali: la dimensione frattale, ovvero la dimensione di Hausdorff e

l'autosimilarità, con particolare attenzione ad alcune tecniche di calcolo della dimensione (fine primo capitolo e terzo capitolo).

I primi due capitoli si susseguono presentando in modo dettagliato le due qualità dei Frattali appena descritte. Precisamente nel primo capitolo vengono enunciati i principali risultati della *teoria della misura*, impiegati per definire la premisura di Hausdorff da cui si ricava la misura α -dimensionale di Hausdorff, per terminare poi con la dimensione di Hausdorff e la sua applicazione a isometrie e a mappe lipschitziane.

La dimensione di uno spazio è intuitivamente il numero di parametri indipendenti necessari alla descrizione di un punto. La dimensione topologica è un numero naturale che esprime questo concetto applicabile a qualsiasi spazio topologico. Essa però si comporta in maniera del tutto inaspettata con i frattali; ad esempio la dimensione topologica dell'insieme di Cantor (frattale classico) è zero, ma esso si comporta come uno spazio di dimensione superiore. La dimensione di Hausdorff offre un'altro modo di definire la dimensione, che coinvolge la metrica. Supponendo che (X, d) sia uno spazio metrico, per definire tale dimensione si è interessati a contare il numero di insiemi di massimo un certo diametro necessari a coprire X . Chiaramente diminuendo il diametro aumenta il numero di insiemi. Questo procedimento diretto porta alla così detta *dimensione di box-counting* che vedremo nel terzo capitolo, ma l'intuizione di Hausdorff fu quella di affrontare il problema indirettamente usando la Teoria della misura sviluppata precedentemente da Lebesgue e Caratheodory. Hausdorff per prima cosa definisce una famiglia di misure di copertura per X , ovvero un'intera famiglia di misure sui sottoinsiemi di X , una per ogni possibile valore $\alpha \in [0, \infty]$ (dimensione di Hausdorff α -dimensionale). Per sorreggere la costruzione di questa misura ne definisce un'altra, la premisura di Hausdorff. Arriva così a definire la dimensione di Hausdorff come il valore soglia α al di sopra del quale la misura α -dimensionale è zero e al di sotto del quale è infinito.

Le ultime pagine de "La dimensione di Hausdorff" sono dedicate al calcolo della dimensione dei frattali matematici più noti, quali: *l'insieme di Cantor*

e *La curva di Koch*.

A seguire nel terzo ed ultimo capitolo si tratta l'applicazione di **box-counting**, che consiste nella definizione della dimensione di box-counting, particolarmente utile per la semplicità di calcolo e la possibilità che questa fornisce di stimare dall'alto la dimensione di Hausdorff.

Capitolo 1

La dimensione di Hausdorff

In matematica, la dimensione di Hausdorff è una dimensione frattale. Fu introdotta nel 1918 dal matematico Felix Hausdorff.

La dimensione frattale è un parametro molto importante che determina il "grado di irregolarità" dell'oggetto frattale preso in esame. Questo capitolo ha lo scopo di definire tale misura, mostrando al termine i passi per calcolarla rispetto due famosi frattali matematici: *l'insieme di Cantor* e *La curva di Koch*.

1.1 Misure Astratte e misure metriche

Definizione 1.1 (misura su X). Se X è un arbitrario insieme non vuoto, si chiama misura su X una funzione

$$m: \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(A) \leq m(B)$ se $A \subseteq B \subseteq X$ (m è monotona)

3.

$$m\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right) \leq \sum_{k \in N} m(A_k)$$

se $A_k \subseteq X, \forall k \in N$ (m è numerabilmente sub-additiva)

Osservazione 1. Ogni misura m su X è finitamente sub-additiva.

Più esplicitamente:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) \leq \sum_{k=1}^p m(A_k).$$

Questa si ottiene dai punti 1 e 3 prendendo $A_k = \emptyset \forall k \geq p+1$.

Esempio 1. La misura esterna di Lebesgue in \mathbb{R}^n è uno degli esempi più importanti di misura. Indicheremo tale misura con μ_n .

Definizione 1.2. Un sottoinsieme A di X si dice m -misurabile se $m(E) = m(E \cap A) + m(E \cap A')$ per ogni $E \subseteq X$. Con A' abbiamo indicato il complementare di A rispetto a X : $A' = X \setminus A$

Osservazione 2. Si possono dimostrare le seguenti proprietà degli insiemi m -misurabili:

- Un sottoinsieme A di X è m -misurabile se, e solo se, è misurabile il suo complementare.
- Ogni sottoinsieme A di X avente m -misura nulla (i.e. $m(A) = 0$) è m -misurabile.
- \emptyset e X sono m -misurabili.
- se $(A_k)_{k \in \mathcal{A}}, \mathcal{A} \subseteq N$, è una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi di X m -misurabili, allora

$$\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

e

$$\bigcap_{k \in \mathcal{A}} A_k$$

sono m -misurabili. Inoltre se $A_k \cap A_h = \emptyset$ per $k \neq h$,

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{A}} m(A_k)$$

- Se A e B sono sottoinsiemi m -misurabili di X , allora $A \setminus B$ è m -misurabile. Inoltre se $B \subseteq A$ e $m(B) < +\infty$,

$$m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$$

- Se $(A_k)_k$ è una successione di sottoinsiemi m -misurabili di X e se $(A_k)_k$ è monotona crescente (i.e. $A_k \subseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$), allora

$$m\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_k)$$

- Se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi m -misurabili di X , se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente (i.e. $A_k \supseteq A_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$) e se $m(A_1) < +\infty$ allora

$$m\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(A_k)$$

Definizione 1.3. Il supporto di una misura μ è il più piccolo insieme chiuso X tale che $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$. Diciamo che μ è una misura sull'insieme A se A contiene il supporto di μ .

Se m è una misura su uno spazio metrico (X, d) , risulta di particolare interesse studiare la m -misurabilità dei sottoinsiemi *chiusi* (o equivalentemente, dei sottoinsiemi aperti) di X .

Una condizione sufficiente di m -misurabilità dei chiusi di (X, d) è stata data da Carathéodory. Questa condizione si basa sulla nozione di *distanza* fra insiemi.

Definizione 1.4 (distanza fra insiemi). Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di X si chiama distanza di A da B il numero reale:

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Proposizione 1.1 (proprietà distanza fra insiemi). *Siano A e B sottoinsiemi di X . Allora:*

- $d(A, B) = d(B, A)$;
- $d(A, B) = 0$ se $A \cap B \neq \emptyset$;
- $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$;
- se $x \in X$ allora $x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$;
- $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \forall x, y \in X$.

Definizione 1.5 (misura metrica). Se m è una misura su (X, d) , si dice che m è una misura metrica rispetto la distanza d se $m(A \cup B) = m(A) + m(B), \forall A, B : d(A, B) > 0$

Teorema 1.2 (Carathéodory). *Se m è una misura metrica su (X, d) , ogni sottoinsieme chiuso di X è m -misurabile.*

Corollario 1.3. *Se m è una misura metrica su (X, d) , ogni sottoinsieme aperto di X è m -misurabile.*

Definizione 1.6. Una famiglia \mathcal{A} di sottoinsiemi di X è chiamata σ -algebra se

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
2. $A \setminus B \in \mathcal{A}$ se A e $B \in \mathcal{A}$;
- 3.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

se $A_k \in \mathcal{A}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 3. Notare che anche l'intersezione finita o numerabile di elementi di una σ -algebra \mathcal{A} appartiene ad \mathcal{A} ; infatti se $(A_n)_{n \in \mathbb{I}}$ è una famiglia

finita o numerabile in \mathcal{A} , utilizzando il fatto che una σ -algebra è chiusa per complementarietà e per unione numerabile allora:

$$\bigcap_{n \in \mathcal{I}} A_n = \left(\bigcap_{n \in \mathcal{I}} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}$$

Osservazione 4. Osserviamo inoltre che se $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ è una famiglia (non necessariamente numerabile) di σ -algebre su X allora

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_i$$

è ancora una σ -algebra. Questo giustifica la seguente definizione:

Definizione 1.7. Data una famiglia \mathcal{H} di sottoinsiemi di X , indichiamo con $\sigma(\mathcal{H})$ l'intersezione di tutte le σ -algebre che contengono \mathcal{H} . In altri termini, $\sigma(\mathcal{H})$ è la più piccola σ -algebra che contiene \mathcal{H} ed è pertanto chiamata σ -algebra generata da \mathcal{H} .

Definizione 1.8 (σ -algebra di *Borel*). Dato uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) , la σ -algebra generata dalla topologia \mathcal{T} è detta σ -algebra di *Borel*. Gli insiemi di questa prendono il nome di *boreliani*.

Nel caso di uno spazio metrico (X, d) la topologia considerata è quella indotta dalla distanza d su X .

Osservazione 5. Se m è una misura metrica su (X, d) la totalità dei sottoinsiemi di X m -misurabili è una σ -algebra che contiene i chiusi di X . Tale σ -algebra contiene quindi quella dei boreliani.

Quindi vale che:

Proposizione 1.4. *Se m è una misura metrica su (X, d) ogni boreliano di (X, d) è m -misurabile.*

1.2 Misure di Hausdorff in \mathbb{R}^n

1.2.1 Misura di Hausdorff α -dimensionale

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, poniamo

$$\omega_\alpha := \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}$$

dove Γ indica la *funzione gamma* di Eulero definita, per $s > 0$, nel modo seguente

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

E' importante osservare che il numero reale positivo ω_α , quando α è un intero positivo, è la misura di Lebesgue α dimensionale del disco unitario di \mathbb{R}^α . Per ogni sottoinsieme non vuoto B di \mathbb{R}^n poniamo

$$r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) := \frac{1}{2} \{ \sup |x - y| \mid x, y \in B \}$$

dove *diam* sta per diametro definito nel terzo capitolo. Poniamo inoltre $m_\alpha(\emptyset) = 0$ e, se $B \neq \emptyset$,

$$m_\alpha(B) = \omega_\alpha (r(B))^\alpha$$

Esempio 2. Sia

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2 \}$$

il disco di \mathbb{R}^3 di centro (a, b, c) e raggio r . Risulta $r(B) = r$ e $m_\alpha(B) = \omega_\alpha r^\alpha$.

In particolare

$$m_\alpha(B) = \begin{cases} \frac{4}{3} \pi r^3, & \text{se } \alpha = 3, \\ \pi r^2, & \text{se } \alpha = 2, \\ 2\pi, & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Definizione 1.9 (δ -ricoprimento). Se A è un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{R}^n e se δ è un numero reale positivo, si chiama δ -ricoprimento di A una famiglia $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n tale che:

1. \mathcal{A} è finito o numerabile,
2. $\text{diam}(B_k) \leq \delta$, per ogni $k \in \mathcal{A}$,
- 3.

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k$$

Definiamo:

$$H_\alpha^\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k) \text{ t.c. } (B_k)_{k \in \mathcal{A}}, \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}$$

Se $0 < \delta' < \delta$ ogni δ' ricoprimento di A è anche un δ -ricoprimento di A ; pertanto

$$H_\alpha^\delta(A) \leq H_\alpha^{\delta'}(A).$$

La funzione

$$]0, +\infty[\ni \delta \longmapsto H_\alpha^\delta(A) \in [0, +\infty]$$

è quindi monotona decrescente e, di conseguenza, ha limite in $[0, +\infty]$ per $\delta \longmapsto 0^+$.

Definizione 1.10 (misura di Hausdorff α -dimensionale). Si chiama misura di Hausdorff α -dimensionale di A il numero reale esteso

$$H_\alpha := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^\delta(A) = \sup_{\delta > 0} H_\alpha^\delta(A)$$

Osservazione 6. Poichè esiste una iniezione naturale di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^{n+p} , $p \geq 1$ (basta infatti identificare \mathbb{R}^n col sottospazio $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, $0 \in \mathbb{R}^p$), ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n è quindi anche contenuto in \mathbb{R}^{n+p} . Tuttavia la misura di Hausdorff α -dimensionale di A **non** dipende dallo spazio euclideo nel quale A si considera immerso. Basta infatti osservare che

$$m_\alpha(B \cap \mathbb{R}^n) \leq m_\alpha(B), \forall B \subseteq \mathbb{R}^{n+p}.$$

Proposizione 1.5. $H_\alpha^\delta(A)$ e H_α sono misure su \mathbb{R}^n . Inoltre H_α è una misura metrica rispetto alla distanza euclidea. Precisamente:

- $H_\alpha^\delta(\emptyset) = H_\alpha(\emptyset) = 0$
- H_α^δ e H_α sono sub-additive.
- $\text{dist}(A, B) > 0 \Rightarrow H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B)$

Dimostrazione. Proviamo che H_α^δ è sub-additiva su \mathbb{R}^n . Scegliamo

$$\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$$

e che $\text{diam} C_j^k \leq \delta$; quindi $\{C_j^k\}_{k=1}^\infty$ ricopre $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Allora:

$$H_\alpha^\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \omega_\alpha\left(\frac{\text{diam} C_j^k}{2}\right)^\alpha$$

Prendendo l'inf. troviamo:

$$H_\alpha^\delta\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty H_\alpha^\delta(A_k)$$

Proviamo le affermazioni relative a H_α . Prima di tutto

$$H_\alpha(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^\delta(\emptyset) = 0.$$

Inoltre se $A \subseteq \bigcup_{k \in N} A_k$, per ogni $\delta > 0$ si ha:

$$H_\alpha^\delta(A) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha^\delta(A_k) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha(A_k).$$

E quindi:

$$H_\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\alpha^\delta(A) \leq \sum_{k \in N} H_\alpha(A_k).$$

Con questo è provato che H_α è monotona e numerabilmente sub-additiva e che, quindi, è una misura su \mathbb{R}^n . Dimostriamo infine che H_α è una misura metrica.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $d(A, B) > 0$. Dobbiamo provare che

$$H_\alpha(A \cup B) = H_\alpha(A) + H_\alpha(B).$$

Ovviamente, poichè m è sub-additiva, basta dimostrare la disuguaglianza

$$H_\alpha(A \cup B) \geq H_\alpha(A) + H_\alpha(B). \quad (1.1)$$

Se $H_\alpha(A \cup B) = +\infty$ la (1.1) è ovvia. Supponiamo quindi $H_\alpha(A \cup B) < +\infty$. Essendo $H_\alpha^\delta \leq H_\alpha$ sarà allora

$$H_\alpha^\delta(A \cup B) < +\infty, \forall \delta > 0.$$

Fissato ad arbitrio $\epsilon > 0$, scegliamo un δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di $A \cup B$, con $0 < \delta < d(A, B)$, tale che

$$H_\alpha^\delta(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(B_k). \quad (1.2)$$

Poniamo ora $\mathcal{A}' = \{k \in \mathcal{A} \text{ t.c. } B_k \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{A}'' = \{k \in \mathcal{A} \text{ t.c. } B_k \cap B \neq \emptyset\}$. Poichè $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di $A \cup B$, le famiglie $(B_k)_{k \in \mathcal{A}'}$ e $(B_k)_{k \in \mathcal{A}''}$ sono δ -ricoprimenti, rispettivamente, di A e di B . Se $0 < \delta < d(A, B)$ risulta poi $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$. Infatti, se esistesse $k \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$, gli insiemi $B_k \cap A$ e $B_k \cap B$ sarebbero entrambi non vuoti, e risulterebbe ,

$$d(A, B) \leq \text{diam}(B_k) \leq \delta,$$

contrariamente all'ipotesi.

Da $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' = \emptyset$ e da (1.2) otteniamo allora

$$H_\alpha^\delta(A \cup B) + \epsilon > \sum_{k \in \mathcal{A}'} m_\alpha(B_k) + \sum_{k \in \mathcal{A}''} m_\alpha(B_k) \geq H_\alpha^\delta(A) + H_\alpha^\delta(B)$$

per $0 < \delta < d(A, B)$. Da questa, per $\delta, \epsilon \rightarrow 0$, si ottiene la (1.1). \square

Corollario 1.6. *Ogni boreliano di \mathbb{R}^n è H_α -misurabile qualunque sia $\alpha \geq 0$*

Dimostrazione. Segue direttamente dalla proposizione precedente e dalla Proposizione 1.4 . \square

La misura di Hausdorff H_α è regolare nel senso seguente:

Teorema 1.7. *Qualunque sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un boreliano B di \mathbb{R}^n tale che*

$$B \supseteq A \text{ e } H_\alpha(B) = H_\alpha(A)$$

Dimostrazione. Se $H_\alpha(A) = +\infty$ l'affermazione è banale: in questo caso, infatti, basta prendere $B = \bar{A}$. Supponiamo allora $H_\alpha(A) \leq +\infty$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un $\frac{1}{k}$ -ricoprimento di A , $(B_j^k)_{j \in \mathcal{A}_k}$ tale che

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(B_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}$$

Poniamo

$$B^k = \bigcup_{j \in \mathcal{A}_k} \bar{B}_j^k$$

e

$$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B^k$$

L'insieme B è un boreliano di \mathbb{R}^n contenente A e

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(B^k) + \frac{1}{k} \quad (1.3)$$

in quanto

$$H_\alpha^{(1/k)}(B) \leq H_\alpha^{(1/k)}(B^k) \leq \sum_{j \in \mathcal{A}_k} m_\alpha(\bar{B}_j^k) < H_\alpha^{(1/k)}(A) + \frac{1}{k}.$$

Per $k \rightarrow +\infty$ da (1.3) si trae $H_\alpha(B) \leq H_\alpha(A)$. D'altra parte, essendo $A \subseteq B$, $H_\alpha(A) \leq H_\alpha(B)$. Quindi $H_\alpha(A) = H_\alpha(B)$. \square

Inoltre abbiamo un altro importante risultato che riguarda la misura di Hausdorff N -dimensionale:

Teorema 1.8. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora la misura di Hausdorff N -dimensionale di A è uguale alla misura di Lebesgue di A , cioè:*

$$H_n(A) = \mu_n(A)$$

Ora riportiamo alcuni importanti risultati per quanto riguarda la misura di Hausdorff e le funzioni lipschitziane.

1.2.2 Misura di Hausdorff e funzioni lipschitziane

Definizione 1.11. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^p$, si dice lipschitziana in A se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in A$$

La costante L che compare al secondo membro di questa disuguaglianza si dice che è una costante di Lipschitz di f .

Esempio 3. Ogni trasformazione lineare $T: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = \|T\|$. Infatti

$$|T(x) - T(y)| = |T(x - y)| \leq \|T\| |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Esempio 4. Anche una isometria $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione lipschitziana, infatti:

$$|F(x) - F(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, ogni isometria è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$. Dato che le trasformazioni ortogonali, le traslazioni sono isometrie, allora sono anche funzioni lipschitziane.

Il principale risultato che riguarda le funzioni lipschitziane e la misura di Hausdorff è il seguente:

Teorema 1.9. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz L .

Allora, per ogni $\alpha \geq 0$, risulta

$$H_\alpha(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha(A). \quad (1.4)$$

Dimostrazione. Proviamo che per ogni $\delta > 0$ risulta

$$H^{L\delta}(f(A)) \leq L^\alpha H_\alpha^\delta(A) \quad (1.5)$$

Da questa, per $\delta \rightarrow 0^+$, seguirà (1.4).

Osserviamo prima di tutto che per ogni $B \subseteq A$,

$$\text{diam}(f(B)) = \sup_{x, y \in B} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x, y \in B} |x - y| = L \text{diam}(B). \quad (1.6)$$

Allora, se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un arbitrario δ -ricoprimento di A , $(f(B_k))_{k \in \mathcal{A}}$ è un $L\delta$ -ricoprimento di $f(A)$, e quindi

$$H^{L\delta}(f(A)) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} m_\alpha(f(B_k)) \leq \text{per la (1.6)} \sum_{k \in \mathcal{A}} L^\alpha m_\alpha(f(B_k))$$

Da questa, per l'arbitrarietà del δ -ricoprimento $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di A , segue la (1.5). \square

Corollario 1.10. *Per ogni $\lambda > 0$ risulta*

$$H_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha H_\alpha(A)$$

Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha \geq 0$. Qui abbiamo posto

$$\lambda A = \delta(\lambda)(A) := \{\lambda x | x \in A\}$$

Dimostrazione. Poichè $\delta(\lambda)$ è una funzione lipschitziana con costante $L = \lambda$, per il teorema appena enunciato risulta:

$$H_\alpha(\lambda A) \leq \lambda^\alpha H_\alpha(A) = \lambda^\alpha H_\alpha\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right) \leq \lambda^\alpha \left(\frac{1}{\lambda}\right)^\alpha H_\alpha(\lambda A) = H_\alpha(\lambda A)$$

Quindi $H_\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha H_\alpha(A)$. \square

1.3 Dimensione di Hausdorff

La definizione di dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n prende forma dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.11. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n tale che*

$$H_\alpha(A) < +\infty$$

per un opportuno $\alpha \geq 0$, allora

$$H_{\alpha+t}(A) = 0, \forall t > 0$$

Dimostrazione. Per ogni δ e $t > 0$ e per ogni δ -ricoprimento di A , $(B_k)_{k \in \mathbf{A}}$, si ha

$$\begin{aligned} H_{\alpha+t}^\delta(A) &\leq \sum_{k \in \mathbf{A}} m_{\alpha+t}(B_k) = \sum_{k \in \mathbf{A}} \omega_{\alpha+t} \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^{\alpha+t} \leq \\ &\leq (\text{poichè } \text{diam}(B_k) \leq \delta) \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} \left(\frac{\delta}{2} \right)^t \sum_{k \in \mathbf{A}} \omega_\alpha \left(\frac{\text{diam}(B_k)}{2} \right)^\alpha = \\ &= (\text{posto } c_{\alpha,t} = \frac{\omega_{\alpha+t}}{\omega_\alpha} 2^{-t}) c_{\alpha,t} \delta^t \sum_{k \in \mathbf{A}} m_\alpha(B_k). \end{aligned}$$

Prendendo, all'ultimo membro, l'estremo inferiore rispetto a tutti i δ -ricoprimenti di A , si ottiene

$$H_{\alpha+t}^\delta(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha^\delta(A) \leq c_{\alpha,t} \delta^t H_\alpha(A).$$

Per $\delta \rightarrow 0^+$ l'ultimo membro di queste disuguaglianze tende a zero, in quanto $t > 0$ e $H_\alpha(A) < +\infty$ per ipotesi. Allora

$$H_{\alpha+t}(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{\alpha+t}^\delta(A) = 0.$$

□

Corollario 1.12. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ risulta*

$$H_{n+t}(A) = 0 \quad \forall t > 0 \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Se $D(0, k)$ indica il disco di \mathbb{R}^n di centro 0 e raggio k , risulta

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap D(0, k))$$

e quindi, per la sub-additività numerabile della misura di Hausdorff,

$$H_{n+t}(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H_{n+t}(A \cap D(0, k)). \tag{1.8}$$

D'altra parte

$$H_n(A \cap D(0, k)) = \mu_n(A \cap D(0, k)) \leq \mu_n(D(0, k)) = \mu_n k^n < +\infty,$$

e quindi, per la proposizione precedente

$$H_{n+t}(A \cap D(0, k)) = 0, \forall t > 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da questa e dalla (1.7) segue subito la (1.8). \square

Definizione 1.12 (Dimensione di Hausdorff). Si chiama dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n il numero reale non negativo

$$\alpha(A) := \inf\{s > 0 \mid H_s(A) = 0\}$$

Osserviamo esplicitamente che per il Corollario precedente (1.11), qualunque siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $s > n$ risulta $H_s(A) = 0$. Pertanto

$$\alpha(A) = \dim_H(A) \leq n \text{ per ogni } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Proposizione 1.13. *Se A è un insieme p -piatto di \mathbb{R}^n (cioè è contenuto in uno spazio vettoriale di $\dim=p \in \mathbb{R}^n$) allora:*

$$\dim_H(A) \leq p$$

Proposizione 1.14. *Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n avente dimensione di Hausdorff $\alpha(A) > 0$, allora*

$$H_t(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } t > \dim_H(A) \\ +\infty, & \text{se } 0 \leq t < \dim_H(A) \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $t > \dim_H(A)$ esiste $s < t$ tale che $H_s(A) = 0$. Per la Proposizione 1.10 risulta quindi $H_t(A) = 0$.

Se $0 \leq t < \dim_H(A)$ e se fosse, ragionando per assurdo, $H_t(A) < +\infty$, ancora per la Proposizione 1.10 si avrebbe $H_s(A) = 0$ per ogni $s > t$. Ne verrebbe per la Definizione 1.12, $\dim_H(A) \leq t$, contro l'ipotesi. \square

Concludiamo con alcuni esempi:

Esempio 5. Se $a \in \mathbb{R}^n$, allora

$$H_0(\{a\}) = 1.$$

Infatti se $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ è un δ -ricoprimento di A , allora

$$\sum_{k \in \mathcal{A}} m_0(B_k) = \sum_{k \in \mathcal{A}} \omega_0(r(A))^0 = \omega_0 \text{card} \mathcal{A} = \text{card} \mathcal{A} \geq 1$$

Pertanto $H_0^\delta(\{a\}) \leq 1$ per ogni $\delta > 0$. D'altra parte, essendo ovviamente $(\{a\})$ un δ -ricoprimento di $\{a\}$, qualunque sia $\delta > 0$, risulta

$$H_0^\delta(\{a\}) \leq m_0(\{a\}) = \omega_0(r\{a\})^0 = 1$$

Allora $H_0^\delta(A) = 1$ per ogni $\delta > 0$, e quindi $H_0(A) = 1$.

Esempio 6. Se A è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n finito o numerabile allora

$$H_0(A) = \text{card}(A) \text{ e } \dim_H(A) = 0.$$

Infatti, se $A = \{a_k \text{ t.c. } k \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$ e $a_k \neq a_h$ se $k \neq h$, allora

$$H_0(A) = H_0\left(\bigcup_{k \in \mathcal{A}} \{a_k\}\right) =$$

$(\{a_k\})$ è H_0 -misurabile in quanto chiuso e $\{a_k\} \cap \{a_h\} = \emptyset$ per $a_k \neq a_h$)

$$= \sum_{k \in \mathcal{A}} H_0(\{a_k\}) = \text{card} \mathcal{A} = 1$$

($\text{card} \mathcal{A} = \text{card} A$)

Per dimostrare che $\dim_H(A) = 0$ basta osservare che, per ogni $t > 0$, si ha

$$H_t(A) \leq \sum_{k \in \mathcal{A}} H_t(\{a_k\}) = 0$$

In quanto, essendo $H_0(\{a_k\}) = 1$, risulta $H_t(\{a_k\}) = 0$ per ogni $t > 0$.

Esempio 7. Ogni sottoinsieme μ_p -misurabile di \mathbb{R}^p avente misura (di Lebesgue) positiva ha dimensione di Hausdorff p . Infatti se $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e $\mu_p(A) > 0$, allora per il *Teorema 1.8*, $H_p(A) > 0$. Di conseguenza, se s è un numero reale non negativo tale che $H_s(A) = 0$, deve essere $s > p$. In altri termini

$$\inf\{s \geq 0 \mid H_s(A) = 0\} \geq p,$$

D'altra parte, poichè $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $\dim_H(A) \leq p$. In definitiva $\dim_H(A) = p$.

1.4 Esempi di frattali matematici

1.4.1 L'insieme di Cantor

L'insieme di Cantor è il più noto sottoinsieme di \mathbb{R} avente dimensione di Hausdorff non intera; vediamo di cosa si tratta. Consideriamo l'intervallo chiuso $[0, 1]$ e costruiamo l'insieme di Cantor C così definito:

$$C = \bigcap_{k \geq 0} C_k$$

dove $(C_k)_{k \geq 0}$ è la successione dei plurintervalli chiusi definita, per ricorrenza,

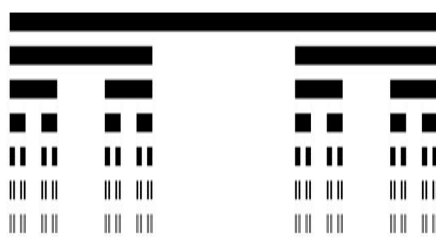


Figura 1.1: L'insieme di Cantor

nel modo che segue:

- C_0 è l'intervallo chiuso $[0, 1]$.
- C_1 si ottiene rimuovendo da C_0 l'intervallo aperto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, quindi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
- C_2 si ottiene rimuovendo, dal centro di ogni intervallo componente C_1 , un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^2$; quindi $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

In generale, l'iterato C_{k+1} si ottiene rimuovendo dal centro di ogni intervallo componente C_k un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^{k+1}$.

Calcoliamo la misura di *Lebesgue* di questo insieme.

Notiamo che il plurintervallo C_k è quindi unione di 2^k intervalli chiusi e disgiunti ciascuno dei quali ha lunghezza $(\frac{1}{3})^k$. La lunghezza totale di ogni C_k è quindi $(\frac{2}{3})^k$.

La misura di Lebesgue di C è:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

La misura di Lebesgue è quindi nulla malgrado l'insieme sia non vuoto.

Calcoliamo ora la misura di *Hausdorff*.

Indicando con $\mathcal{I}_k = (I_{k,j})_{j=1, \dots, 2^k}$ la famiglia di questi intervalli di lunghezza $(\frac{1}{3})^k$, \mathcal{I}_k è un δ_k -ricoprimento di C con $\delta_k = (\frac{1}{3})^k$. Per ogni $t \geq 0$ risulta quindi

$$H_t^{\delta_k}(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} m_t(I_{k,j}) = 2^k \omega_t \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)^t = \omega_t 2^{-t} 2^k 3^{-kt}$$

Da questa disuguaglianza, indicando con s il numero reale

$$s := \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

si ha

$$H_t^{\delta_k}(C) \leq \omega_t 2^{-t} \exp(k(s-t)\log 3)$$

e quindi, per ogni $t > s$

$$H_t(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_t^{\delta_k}(C) = 0$$

mentre, per $t = s$,

$$H_s(C) = \lim_{k \rightarrow +\infty} H_s^{\delta_k}(C) \leq \omega_s 2^{-s}.$$

Si può mostrare che vale anche la disuguaglianza inversa:

$$H_s(C) \geq \omega_s 2^{-s}$$

Pertanto

$$H_s(C) = \omega_s 2^{-s}$$

$$\dim(C) = \alpha(C) = s$$

1.4.2 La curva di Koch

La curva di Koch, descritta per la prima volta nel 1904 da Helge Von Koch, matematico svedese, è definita ricorsivamente in questo modo: partiamo dal primo intervallo C_0 , un segmento che possiamo identificare con l'intervallo $[0, 1]$, poi dividiamo C_0 in tre parti uguali. Togliamo la parte centrale e la sostituiamo con una 'punta' costituita da due lati lunghi un terzo della linea originaria che formano un angolo pari a 60 gradi. In questo modo si ottiene una spezzata costituita da quattro segmenti uguali. Si ripete la stessa operazione su ognuno di questi quattro segmenti, ottenendo così una spezzata più complessa formata da 16 piccoli segmenti, lunghi ciascuno $\frac{1}{9}$ della linea originaria. Si prosegue così all'infinito e il limite di questa sequenza è la curva di Koch. (Figura 1.2)

Dato che la curva di Koch, che denotiamo con K , si ottiene ricorsivamente come l'insieme di Cantor, si ripete lo stesso ragionamento per il calcolo della dimensione di Hausdorff di C , ottenendo:

$$\dim_H(K) = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$

Una importante particolarità della curva di Koch è che malgrado sia una curva continua, che non interseca mai se stessa (i triangoli costruiti su ciascun lato sono abbastanza piccoli da impedirne l'intersezione), essa non ha tangente in nessun punto.

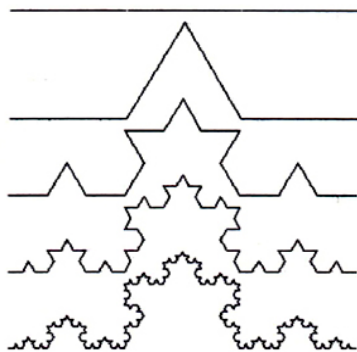


Figura 1.2: La curva di Koch

Le tre curve di Koch, originate da tre lati di un triangolo equilatero generano il fiocco di neve di Koch. La costruzione di quest'ultimo parte infatti da un'isola a forma di triangolo equilatero con i lati di lunghezza unitaria. Poi si divide ciascun lato in tre intervalli, che avranno quindi lunghezza $\frac{1}{3}$. Successivamente si colloca sull'intervallo centrale di ciascuno dei tre lati un promontorio a forma di triangolo equilatero, dai lati di lunghezza $\frac{1}{3}$. Si ottiene così un esagono regolare stellato, o stella di David, il cui perimetro ha lunghezza uguale a 4. Si ripete lo stesso procedimento su tutti i 12 lati e si continua iterativamente... Il risultato è una curva infinita, infatti ad ogni passo la lunghezza aumenta di $\frac{4}{3}$ di quanto era prima. (Figura 2.3)

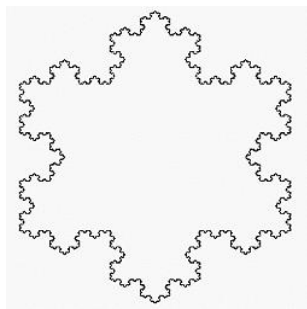


Figura 1.3: Fiocco di neve di Koch

Osservazione 7. Per costruire la curva di Koch divido in tre l'intervallo $[0, 1]$ e poi costruisco un 'triangolo' nell'intervallo centrale, ottenendone quattro e così via. La dimensione di Hausdorff che ottengo è $\frac{\ln 4}{\ln 3}$.

Allo stesso modo, nell'insieme di Cantor divido l'intervallo unitario in tre segmenti e ne considero solo due. In questo caso la dimensione di Hausdorff è $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Concludo osservando che se avessi un frattale costruito dividendo l'intervallo unitario in tre segmenti, per poi prenderne cinque, la sua dimensione sarebbe $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Capitolo 2

L' Autosimilarità

Questo capitolo come anticipato nell'introduzione è dedicato alla seconda proprietà che caratterizza i frattali: l'autosimilarità, ovvero la capacità di ripetersi identicamente a tutte le scale. Ingrandendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale. Il principale scopo è mostrare usando la teoria degli spazi metrici ed il teorema delle contrazioni come sia possibile caratterizzare dal punto di vista matematico in maniera semplice gli insiemi autosimilari. Ad esempio in un albero ogni ramo è simile all'intero albero e ogni rametto è a sua volta simile al proprio ramo, e così via.

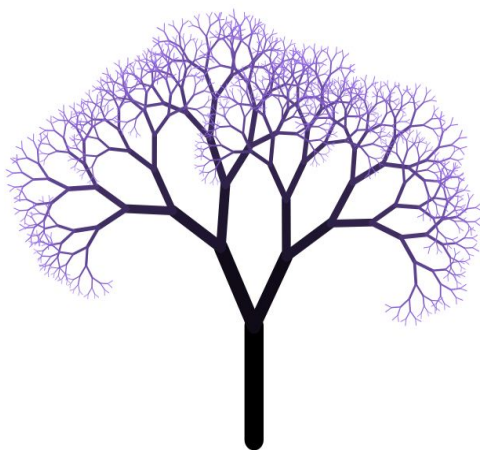


Figura 2.1: albero matematico

2.1 Contrazioni e insiemi Autosimilari

Con la seguente definizione iniziamo a descrivere dal punto di vista matematico questi insiemi.

Definizione 2.1 (Contrazione). Diciamo che la mappa $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una contrazione se esiste una costante (di Lipschitz o di contrazione) $c \in (0,1)$ in modo che la disuguaglianza

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq c\|x - y\|$$

valga per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se poi si ha $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = d(\varphi(x), \varphi(y)) = c\|x - y\| = d(x, y)$ allora φ trasforma insiemi in altri geometricamente simili e φ prende il nome di *similitudine* (o contrazione simile).

In altre parole, una mappa φ è una contrazione se soddisfa la definizione di funzione di Lipschitz con una costante $c < 1$. Secondo il principio di contrazione, che "vive" nel contesto degli spazi metrici completi (ovvero uno spazio metrico dove ogni successione di Cauchy è convergente), φ ha un unico punto fisso \bar{x} , cioè esiste \bar{x} che soddisfa l'equazione:

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x}) \tag{2.1}$$

Questo risultato viene enunciato e dimostrato nel Teorema di Banach-Cacciopoli come segue.

Teorema 2.1 (Banach-Cacciopoli (o delle contrazioni)). *Sia (E, d) uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $\varphi: E \rightarrow E$ una mappa tale che $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y) \forall x, y \in E$ con $c < 1$.*

Allora esiste ed è unico un punto \bar{x} t.c $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$.

Dimostrazione. esistenza:

Sia $x_0 \in E$ un punto qualunque. Si costruisce la successione x_k per ricorrenza, ponendo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Ovvero: $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$...

Sfruttando la metrica d e la proprietà di contrazione appena definita si valuta la distanza tra due punti successivi x_k, x_{k+1} come segue:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\varphi(x_k), \varphi(x_{k-1})) \leq cd(x_k, x_{k-1}) \leq \dots \leq c^k d(x_1, x_0).$$

Da questo si ricava facilmente che x_k è una successione di Cauchy e dunque converge (lo spazio metrico è completo): $x_k \rightarrow \bar{x}$. Vediamolo:

Si prendono due numeri n, m naturali t.c. $m \leq n$ e attraverso la disuguaglianza triangolare e la proprietà di cui sopra si ha

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_m, x_{n-1}) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=m}^{n-1} c^i d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \sum_{i=m}^{n-1} c^i \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{n-m-1} c^{i+m} = d(x_1, x_0) c^m \sum_{i=0}^{n-m-1} c^i \leq d(x_1, x_0) c^m \frac{1}{1-c} \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è ottenuta portando fuori c^m e maggiorando con la somma della serie geometrica che converge per $n \rightarrow \infty$ in quanto il termine generale è compreso tra 0 e 1. Quindi per $m \leq n$ si ha che:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0) c^m \frac{1}{1-c} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

La successione (x_k) è dunque convergente e per il criterio di Cauchy delle successioni essa è di Cauchy. Essendo lo spazio metrico completo, vale anche il viceversa, ovvero ho la garanzia dell'esistenza del limite $x_k \rightarrow \bar{x}$. Allora essendo φ continua (perchè è lipschitziana) ed essendo $\varphi(x_k) = x_{k+1} \rightarrow \bar{x}$ si ha che

$$\bar{x} \leftarrow x_{k+1} = \varphi(x_k) \rightarrow \varphi(\bar{x})$$

Dunque esiste un punto fisso: $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

unicità:

Se ora si avesse $\varphi(\bar{y}) = \bar{y}$ con $\bar{y} \neq \bar{x}$, si avrebbe

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) \leq cd(\bar{x}, \bar{y}) < d(\bar{x}, \bar{y})$$

Assurdo. Dunque \bar{x} è l'unico punto fisso. □

Osservazione 8. Importante è osservare che una contrazione porta sì punti in punti, ma anche insiemi in insiemi; ed essendo continua, porta compatti in compatti (immagine di compatto tramite funzione continua è un compatto).

Premessa

Perchè si parla di compatto? Perchè come vedremo l'insieme autosimilare è un compatto (fisso).

Usando la distanza di Hausdorff, che permette di misurare la distanza tra compatti di uno spazio metrico, se f è una contrazione da uno spazio metrico in sè, allora la funzione F , definita da $F(K) = \{f(x), x \in K\}$ per ogni compatto K , è una contrazione dallo spazio dei compatti in sè rispetto alla distanza di Hausdorff. Siccome lo spazio dei compatti di uno spazio metrico completo è a sua volta completo una volta che vi si consideri la distanza di Hausdorff, è possibile applicare il teorema delle contrazioni ad F , e dedurre così l'esistenza di un unico "compatto fisso" K , tale che $F(K) = K$. Se però, invece di avere una sola contrazione f , ne abbiamo due, siano esse f e g , allora risulta essere una contrazione (sullo spazio dei compatti, e rispetto alla distanza di Hausdorff) la funzione $F(K) = f(K) \cup g(K)$. Le contrazioni generano come compatto fisso un insieme autosimilare (definizione che segue), o generano un compatto fisso che approssima bene (nel senso della distanza di Hausdorff) un insieme "reale" come un albero o una felce.

Definizione 2.2. Sia $n \geq 2$ un numero naturale e sia $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\}$ un'insieme di contrazioni definite su \mathbb{R}^n . Diciamo che un insieme $V \neq \emptyset$, compatto in \mathbb{R}^n (gli insiemi compatti di \mathbb{R}^n sono solo i chiusi e limitati) è autosimilare o invariante per le funzioni φ_i se soddisfa

$$V = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(V) \quad (2.2)$$

Esempio 8. Consideriamo l'insieme di Cantor C :

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

⋮

$$C = \bigcap_{k \geq 0} C_k.$$

oppure...

$$C = \frac{C}{3} \cup \left(\frac{C}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

Posto

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{3}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

e

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \cup \varphi_2(x)$$

risulta

$$C = \varphi(C)$$

C è dunque invariante per le mappe φ_1 e φ_2 .

Ora sia $K(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutti gli insiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^n (spazio metrico). Preso $A \in K(\mathbb{R}^n)$ poniamo:

$$N_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; \text{dist}(x, A) \equiv \min_{y \in A} |x - y| \leq \epsilon\}$$

e diciamo che $N_\epsilon(A)$ è l' ϵ -collare di A .

Definizione 2.3 (Distanza di Hausdorff). Siano $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$

$$d_H(A, B) = \min_{\epsilon \geq 0} \{A \subset N_\epsilon(B), B \subset N_\epsilon(A)\}$$

$K(\mathbb{R}^n)$ con questa distanza diventa uno spazio metrico.

Teorema 2.2. *Con la distanza di Hausdorff d_H , $K(\mathbb{R}^n)$ diventa uno spazio metrico completo*

Dimostrazione. Sia $\{A_i\}$ una successione di Cauchy arbitraria in $K(\mathbb{R}^n)$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ possiamo scegliere un $m \equiv m(\epsilon)$ abbastanza grande con $d_H(A_p, A_q) \leq \epsilon$ per ogni coppia di interi p e q , $p \geq q \geq m$. Dobbiamo far vedere che la successione $\{A_i\}$ converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un punto di $K(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$E_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$$

Ogni E_k è un insieme compatto. Dato che la successione $\{E_k\}$ è monotona decrescente, l'insieme

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

appartiene a $K(\mathbb{R}^n)$. Da qui segue che

$$E \subset E_q = \overline{\bigcup_{i=q}^{\infty} A_i} \subset N_{\epsilon}(A_q).$$

Dall'altro lato, dato $x \in A_q$, esistono punti $y_p \in A_p$ tali che $\|x - y_p\| \leq \epsilon$, per ogni intero p , $p \leq q$, perchè $A_q \subset N_{\epsilon}(A_p)$. Se z è un punto di accumulazione della successione $\{y_p\}$, abbiamo che $\|x - z\| \leq \epsilon$. Inoltre, per ogni $p \geq k$ abbiamo

$$y_p \in A_p \subset E_p \subset E_k,$$

e E_k è compatto, otteniamo che $z \in E_k$ e dato che k era arbitrario ciò implica che $z \in E$. Quindi abbiamo che

$$x \in N_{\epsilon}(\{z\}) \subset N_{\epsilon}(E).$$

Così $d_H(E, A_q) \leq \epsilon$ e cioè la successione $\{A_i\}$ converge a E . \square

Grazie a questo risultato, come accennato nella premessa, si dimostra che l'insieme autosimilare è unico.

Teorema 2.3. *Data una famiglia di n contrazioni $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\}$, $n \geq 2$ numero naturale, esiste un unico insieme autosimilare V .*

Dimostrazione. Definiamo prima una mappa $\phi : K(\mathbb{R}^n) \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\phi(A) = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A)$$

Le $\varphi_i(A)$ sono le immagini di A tramite le contrazioni al variare di i . Per quanto visto e dimostrato in topologia, l'immagine di un insieme compatto tramite funzione continua è un compatto e l'unione finita di compatti è compatta (siano K_1, \dots, K_m insiemi compatti, un ricoprimento di aperti U di

$\bigcup_i K_i$ ricopre ogni singolo K_i che per compattezza esiste una famiglia finita $U_i \subseteq U$ che ricopre K_i e l'unione $\bigcup_i U_i$ è un sottoricoprimento finito di $\bigcup_i K_i$. Di conseguenza $\phi(A)$ è compatto. In quanto $K(\mathbb{R}^n)$ dotato della distanza di Hausdorff è uno spazio metrico completo, per applicare il teorema delle contrazioni e dimostrare l'esistenza di un unico compatto fisso A t.c. $\phi(A) = A$ (l'insieme autosimilare V), rimane da dimostrare che ϕ è una contrazione su $K(\mathbb{R}^n)$. Allora dimostriamo che ϕ è una contrazione. Presi $A_0, A_1, A_2, A_3 \in K(\mathbb{R}^n)$ insiemi arbitrari, essi godono delle seguenti proprietà:

- $d_H(\varphi_i(A_0), \varphi_i(A_1)) \leq c(\varphi_i)d_H(A_0, A_1)$
- $d_H(A_0 \cup A_1, A_2 \cup A_3) \leq \max\{d_H(A_0, A_2), d_H(A_1, A_3)\}$

Per provare la prima proprietà, poniamo $s = d_H(A_0, A_1)$; poi per ogni $x \in A_0$ esiste un certo $y \in A_1$ tale che $\|x - y\| \leq s$. Questo implica che

$$\|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)\| \leq c(\varphi_i)\|x - y\| \leq c(\varphi_i)s$$

e quindi $\varphi_i(x) \in N_t(\varphi_i(A_1))$, dove scriviamo per semplicità $c(\varphi_i)s = t$. Da questo otteniamo che $\varphi_i(A_0) \subset N_t(\varphi_i(A_1))$, dato che si è scelto x in modo arbitrario. Con lo stesso procedimento si ottiene l'altra inclusione.

Per dimostrare la seconda proprietà poniamo $s = d_H(A_0, A_2)$ e $t = d_H(A_1, A_3)$, l'inclusione $A_0 \subset N_s(A_2)$ e $A_1 \subset N_t(A_3)$ danno le inclusioni: $A_0 \cup A_1 \subset N_s(A_2) \cup N_t(A_3) \subset N_r(A_2 \cup A_3)$ dove $r = \max\{s, t\}$. La seconda inclusione si ottiene dal medesimo procedimento.

$\forall A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ e la ripetuta applicazione della seconda proprietà si ottiene

$$d_H(\phi(A), \phi(B)) = d_H\left(\bigcup_{i=1}^n \varphi_i(A), \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} d_H(\varphi_i(A), \varphi_i(B)).$$

Dalla prima proprietà:

$$\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} c(\varphi_i)\right) d_H(A, B)$$

da cui otteniamo la disuguaglianza

$$\max_{1 \leq i \leq n} c(\varphi_i) < 1$$

e quindi otteniamo che ϕ è una contrazione su $K(\mathbb{R}^n)$. □

2.2 Dimensione di un insieme autosimilare

La costruzione frattale attraverso le contrazioni ha un vantaggio, ovvero il fatto che la dimensione dell' insieme autosimilare è spesso più facile da calcolare rispetto alla dimensione di Hausdorff vista nel primo capitolo. Data una famiglia di contrazioni $\{\varphi_i\}_i$ definiamo la dimensione di similarità $dim_S(V)$ dell'insieme V autosimilare come la radice positiva di un'equazione in d che dipende solo dalle costanti di Lipschitz delle contrazioni:

$$\sum_{i=1}^n (c(\varphi_i))^d = 1$$

$dim_S(V)$ non è però una vera dimensione, questo accade solo sotto certe condizioni dove essa corrisponde alla dimensione di Hausdorff di V .

Si verifica la seguente disuguaglianza.

Teorema 2.4. *Per un insieme autosimilare V vale*

$$\alpha(V) \leq dim_S(V)$$

dove con $\alpha(V)$ è la dimensione di Hausdorff definita nel capitolo "La dimensione di Hausdorff".

Definizione 2.4. L'insieme di contrazioni $\{\varphi_i\}_i$ soddisfa la condizione di *insieme aperto* se esiste un intorno aperto limitato $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \emptyset$ tale che

$$\varphi_i(U) \subset U, 1 \leq i \leq n, \text{ e } \varphi_i(U) \cap \varphi_j(U) = \emptyset, i \neq j.$$

Inoltre diciamo che $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una contrazione simile se $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = c(\varphi)\|x - y\|$, per ogni x e y in \mathbb{R}^n .

Teorema 2.5 (di Hutchinson). *Per un insieme autosimilare V definito da una famiglia di contrazioni simili che soddisfano la condizione di insieme aperto, vale $\alpha(V) = dim_S(V)$.*

Riprendiamo l'insieme di Cantor.

Esempio 9. I Fattori di contrazione o costanti di Lipschitz sono $c(\varphi_1) = c(\varphi_2) = \frac{1}{3}$.

Calcolo la dimensione di similarità $dim_S(C)$ rispetto la definizione data come segue:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

Da questa equazione si ha che $d = dim_S(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

La condizione di insieme aperto è soddisfatta con l'intervallo limitato, non vuoto $U = (0, 1)$, quindi per quanto detto nel teorema 2.5 $dim_S(C) = dim_H(C)$. Paragonando il risultato appena trovato con quello del primo capitolo nella sezione "Esempi di frattali matematici", ritroviamo la stessa soluzione.

Esempio 10. Il tappeto di Sierpinski è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 definito ricorsivamente, tipo il Kantor, come segue: si parte dal quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Si divide il quadrato in nove quadratini uguali e si comincia col togliere la parte interna del quadratino centrale. Ad ogni passo si divide ogni quadrato superstito in nove e si toglie l'interno del quadratino centrale (si guardi la figura 2.2). Ogni volta si ottengono otto quadratini di lunghezza $\frac{1}{3}$ rispetto a quello da cui siamo partiti.

Il tappeto di Sierpinski è ottenuto da otto contrazioni con costante $c(\varphi) = \frac{1}{3}$. Allora la dimensione di Hausdorff si ottiene risolvendo la seguente equazione:

$$8\left(\frac{1}{3}\right)^d = 1$$

Per cui $d = \frac{\ln 8}{\ln 3}$ (vale circa 1,89)

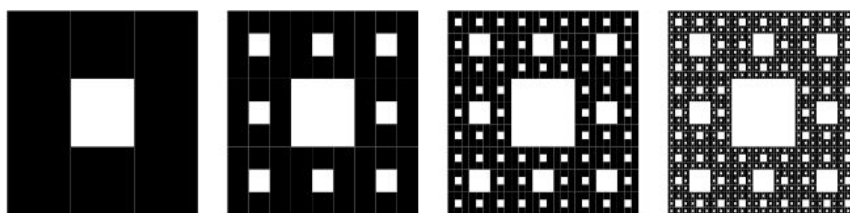


Figura 2.2: il tappeto di Sierpinski

Come per Kantor verifichiamo la dimensione di Hausdorff della Curva di Koch K , calcolata nel primo capitolo.

Esempio 11. K è un insieme autosimilare corrispondente alle contrazioni di \mathbb{C} . Si ha $\varphi_1(z) = \omega\bar{z}$ e $\varphi_2(z) = \bar{\omega}(\bar{z} - 1) + 1$, dove $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{6}$. Le costanti delle contrazioni valgono : $c(\varphi_1) = c(\varphi_2) = |\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Come ormai sappiamo per calcolare la dimensione di similarità risolviamo :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^d = 1$$

e otteniamo che $\dim_S K = \frac{\log 4}{\log 3}$ che corrisponde (in quanto soddisfa la condizione di insieme aperto) alla dimensione di Hausdorff calcolata nel primo capitolo.

Capitolo 3

Applicazione box-counting

3.1 Box Counting

La dimensione di box-counting, che si caratterizza per la facilità di calcolo e stima, si definisce nel seguente modo:

Definizione 3.1. Il **diametro** di un sottoinsieme A di uno spazio metrico é l'estremo superiore delle distanze tra i punti di A

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Definizione 3.2 (dimensione box-counting inferiore e superiore). Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, limitato e sia $N_\delta(X)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che ricoprono X . Le dimensioni di box-counting *inferiore* e *superiore* sono rispettivamente definite come:

$$\text{dim}_B X \swarrow = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \quad (3.1)$$

$$\text{dim}_B X \nearrow = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \quad (3.2)$$

Se queste coincidono allora il limite esiste e definiamo in generale la dimensione di box-counting di X come:

$$\text{dim}_B X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \quad (3.3)$$

Esistono però varie definizioni equivalenti di tale dimensione e alcune sono più convenienti da usare.

Prendiamo ad esempio i cubi in \mathbb{R}^n nelle δ -coordinate della forma

$$[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta] \quad (3.4)$$

dove $m_1 \dots m_n$ sono interi. Sia $N'_\delta(X)$ il numero di δ -cubi (appena definiti) che intersecano X . Questi formano una collezione di $N'_\delta(X)$ insiemi di diametro $\delta\sqrt{n}$ che ricoprono X , quindi $N_{\delta\sqrt{n}}(X) \leq N'_\delta(X)$.

Se $\delta\sqrt{n} \leq 1$ allora:

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(X)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(X)}{-\log \sqrt{n} - \log \delta} \quad (3.5)$$

Quindi facendo il limite inferiore e superiore per $\delta \rightarrow 0$ otteniamo:

$$\dim_B X \swarrow = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(X)}{-\log \delta} \quad (3.6)$$

$$\dim_B X \nearrow = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(X)}{-\log \delta} \quad (3.7)$$

D'altra parte ogni insieme di diametro al più δ è contenuto in 3^n δ -cubi, quindi:

$$N'_\delta(X) \leq 3^n N_\delta(X) \quad (3.8)$$

e prendendo i logaritmi otteniamo le disuguaglianze opposte di (3.6) e (3.7). Quindi nella definizione di box-counting possiamo prendere $N_\delta(X)$ come il numero di δ -cubi che intersecano X .

Proposizione 3.1. *La dimensione inferiore e superiore di box-counting di un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n sono date da:*

$$\dim_B X \swarrow = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta}$$

$$\dim_B X \nearrow = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta}$$

e se il limite esiste la dimensione di box-counting di X è

$$\dim_B X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta}$$

dove $N_\delta(X)$ è equivalentemente:

il piú piccolo numero di palle chiuse di raggio δ che ricoprono X

il piú piccolo numero di cubi di lato δ che ricopre X

il piú piccolo numero di insiemi di diametro al piú δ che ricoprono X

il piú grande numero di palle disgiunte di raggio δ con centri in X

Questa lista puó essere ulteriormente estesa; in sostanza si considera la definizione piú adatta ad una particolare applicazione.

E' possibile ottenere una stima dall'alto della dimensione di Hausdorff attraverso la dimensione di box-counting come vedremo nel seguente paragrafo.

3.2 Tecnica di misura

Che legame c'è tra la dimensione box counting di un insieme e la sua dimensione di Hausdorff?

Proposizione 3.2. *Supponiamo che X possa essere ricoperto da n_k insiemi di diametro al piú δ_k , con $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$, allora:*

$$\dim_H(X) \leq \dim_B X \swarrow \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

e se $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$, per qualche $0 < c < 1$, vale

$$\dim_B X \nearrow \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

Inoltre, se $n_k \delta_k^s$ è limitata allora $H_s(X) < \infty$.

Dimostrazione. Posto $s = \dim_H(X)$, possiamo supporre $s > 0$, altrimenti la tesi sarebbe banalmente verificata. Per $t > 0$ sufficientemente piccolo, per la Proposizione (1.14), vale che $H_{s-t}(X) > 0$. Possiamo inoltre supporre, ponendo $s-t = c$, che $H_c(X) > \omega_c$; infatti se non fosse vero potremmo dilatare X utilizzando il Corollario (1.10) e il fatto che la dimensione di Hausdorff

rimane invariata. Consideriamo ora, un δ -ricoprimento di X costituito da N_δ insiemi. Si ha che:

$$2\omega_c < H_c^\delta(X) \leq \omega_c N_\delta \delta^c, \forall \delta > 0 \text{ abbastanza piccolo} \quad (3.9)$$

Da cui:

$$e^0 = 1 < 2 \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} N_\delta \delta^c = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} e^{\log(N_\delta) + c \log \delta} \quad (3.10)$$

Quindi, dato che

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0^+} (\log(N_\delta) + c \log \delta) > 0 \quad (3.11)$$

per la permanenza del segno si ha che $\exists \delta_0$ con $0 < \delta_0 < 1$ tale che:

$$\log(N_\delta) + c \log(\delta) > 0, \forall \delta \in (0, \delta_0) \quad (3.12)$$

allora

$$c(-\log \delta) < \log N_\delta \implies c < \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} \quad (3.13)$$

Passando al limite inferiore si ottiene che:

$$c \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta} \quad (3.14)$$

Infine, dato che si era posto $c = s-t$ si ottiene per $t \rightarrow 0^+$ la prima disuguaglianza dell' enunciato, mentre le altre derivano immediatamente dalle definizioni. Per l'ultima parte si ha che

$$H_s^{\delta_k}(X) \leq \omega_s n_k \delta_k^s \quad (3.15)$$

quindi $H_s^{\delta_k}(X)$ tende per $k \rightarrow \infty$ a un limite finito $H_s(X)$. \square

Nel seguente esempio riprendiamo l'insieme di Cantor C , valutandone la Proposizione appena dimostrata.

Esempio 12. Si vuole dimostare che $\dim_B(C) \swarrow = \dim_B(C) \nearrow = \dim_B(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, confermando così la Proposizione. Un ricoprimento di C è dato sicuramente dai 2^k intervalli di \mathcal{I}_k di lunghezza 3^{-k} , da cui $N_\delta(C) \leq 2^k$ se $3^{-k} < \delta < 3^{-k+1}$. Dalla definizione di box-counting si ha che:

$$\dim_B(C) \nearrow = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(C)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

D'altra parte, qualsiasi intervallo di lunghezza δ con $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ interseca al massimo un solo intervallo di lunghezza 3^{-k} usato per la costruzione di C . Essendocene 2^k di questi intervalli, è necessario avere almeno 2^k intervalli di lunghezza δ per ricoprire C , da cui $\dim_B(C) \not\prec \geq \frac{\log 2}{\log 3}$.

Bibliografia

- [1] K.J. Falconer (1990), *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, 1990.
- [2] K.J Falconer (1985), *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985.
- [3] Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, Jun Kigami (1993), *Mathematics of Fractals*, American Mathematical Society, vol. 167 , 1993.
- [4] Ermanno Lanconelli (1997), *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte*, Pitagora Editrice Bologna , 1997.
- [5] Benoit B. Mandelbrot (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, 1982.

Siti Web Consultati

I Frattali e la Matematica di Benoit-Mandelbrot-doc completo

<https://youtu.be/vTInHhV11qY>

Luigi Orsina, *Teorema delle contrazioni e sistemi di funzioni iterate*, Appunti del corso.

<http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/Frattali.pdf>

Frattali come figure Autosimili

<http://www.di.unito.it/stefano/Mathematica-Articoli/FrattaliComeFigure/FrattaliAutosimili>

<http://www-dimat.unipv.it/gilardi/WEBGG/PSPDF/frattali.pdf>

Emanuele Paolini, *da Cacciopoli ai frattali autosimilari*, 15 aprile 2015.

<http://pagine.dm.unipi.it/paolini/diletto/cacciopoli/step-2>

Ringraziamenti

Sarà difficile riassumere in poche righe quello che per me sono significati questi anni di triennale. Sono entrata da adolescente confusa e spensierata e ne esco da donna che sa quello che vuole, che conosce il sacrificio, l'impegno e che è riconoscente per quello che ha potuto imparare e per quello che ha, una famiglia robusta: mamma Carla e papà Paolo sempre presenti, sempre pronti ad ascoltarmi e a motivarmi, Nicolás oltre che meraviglioso fidanzato, rappresenta luce per questa vita che è sempre ricca di ostacoli ma che ci regala anche cose belle appunto. Leone, il mio gatto persiano, mai un esame è stato preparato senza di lui. Le mie amiche, Giulia, Alessandra, Sara, Laura, Nadia, Michela, sorelle che ormai da quasi 10 anni fanno parte del mio quotidiano. Questi anni di università per quanto impegnativi, hanno regalato tante emozioni, nuove esperienze e amicizie calde e durature. Alessia, Carola, Simone, Daniele, ... voi lo sapete quanti momenti bui ma soprattutto quanti sorrisi abbiamo condiviso!

Una parola, Grazie.

Vorrei infine ringraziare la Professoressa Annamaria Montanari per la pazienza, la gentilezza, la professionalità che mi ha mostrato nel corso di questi mesi.