

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**ANALISI DEI METODI DI
OTTIMIZZAZIONE UNIDIMENSIONALE
NELLA SCUOLA SECONDARIA DI
SECONDO GRADO**

Relatore:
Chiar.mo Prof Paolo Negrini

Presentata da:
Patrizia Guerreschi

VI sessione
Anno accademico: 2018/2019

Indice

1. <u>Introduzione</u>	1
2. <u>Breve storia dell'ottimizzazione</u>	2
2.1. Il primo problema di massimo: il problema di Didone	3
2.2. Il primo problema di ottimo esplicitamente formulato: Euclide	3
2.3. L'ottimizzazione nella Grecia antica	5
2.4. Non solo problemi geometrici	7
2.5. Lo sviluppo del calcolo differenziale: Fermat, Leibniz ed Eulero	9
2.6. Recenti sviluppi	18
3. <u>L'insegnamento dei massimi e minimi di una funzione nella classe quinta</u>	21
3.1. Il problema del massimo rettangolo inscritto in un cerchio	29
3.2. Il problema del minimo cono circoscritto ad una sfera	30
3.3. Problemi proponibili agli studenti di classe quinta	32
4. <u>Problemi di ottimizzazione risolti senza l'uso delle derivate</u>	34
4.1. Problemi di ottimo legati alla geometria	35
4.1.1. Il problema del triangolo di area massima dati due lati	35
4.1.2. Il problema di Regiomontano	37
4.1.3. Il primo problema di massimo: il problema di Didone o isoperimetrico	39
4.1.4. Il problema dei triangoli isoperimetrici	43
4.1.5. Il problema dei rettangoli isoperimetrici	44
4.1.6. Il problema del triangolo di minimo perimetro	49

4.1.7. Il problema della rete stradale	53
4.1.8. Il problema del quadrato opaco	57
4.2. Problemi trigonometrici risolvibili tramite ottimo di semplici funzioni trigonometriche	59
4.3. Problemi di ottimo legati alla fisica	69
4.3.1. La gittata massima di un moto parabolico	69
4.3.2. La legge di riflessione della luce	70
4.3.3. La legge di rifrazione della luce	72
4.4. Un problema di minimo di natura discreta: il teorema dei quattro colori	76
5. <u>Conclusioni</u>	81
6. <u>Bibliografia e sitografia</u>	82

1. Introduzione

L'ottimizzazione unidimensionale si occupa di trovare l'ottimo di una funzione obiettivo $f(x)$ che dipende da una sola variabile x . Tali problemi sono riconducibili a problemi di massimo e minimo; ottimizzare significa dunque trovare i valori della variabile x per i quali la funzione obiettivo $f(x)$ assume il valore massimo o il valore minimo, a seconda di che cosa il problema richiede. Le nozioni di massimo e di minimo si possono riunire sotto il termine di estremo. I problemi che richiedono di trovare i massimi e i minimi di una funzione vengono chiamati anche "problemi estremali".

Tali problemi sono frequenti nel campo dell'ingegneria e dell'economia, e in moltissimi rami della scienza, ed è per questo che è molto importante avere dimestichezza con la loro risoluzione fin dalle prime classi della scuola secondaria di secondo grado. Considerando la vita quotidiana, ci rendiamo conto che la tendenza ad ottimizzare fa parte sia della natura che del comportamento umano. L'uomo tenta di compiere il minimo sforzo, o di utilizzare il minor tempo possibile, per ottenere un determinato risultato, cerca di sfruttare al massimo le risorse a disposizione per raggiungere un obiettivo. Vedremo come in gran parte della fisica e della tecnica abbiano importanza fondamentale certi principi secondo i quali i processi fisici avvengono in natura in modo che alcune grandezze, quali il tempo e l'energia, raggiungano il massimo o il minimo dei valori che possono assumere. Molti di questi processi possono essere studiati in un modo ormai convenzionale, grazie al metodo risolutivo elaborato da Fermat, Leibniz e Newton, che costituiva un'incredibile evoluzione per il XVII secolo, mentre viene ora padroneggiato in qualsiasi scuola secondaria di secondo grado. Questo metodo tuttavia si può applicare solamente a partire dalla classe quinta della scuola superiore. Scopo del mio lavoro di tesi è mostrare come alcuni problemi si possano risolvere anche nelle classi precedenti grazie a metodi alternativi, e analizzare tali metodi risolutivi confrontandoli con il metodo del calcolo differenziale.

2. Breve storia dell'ottimizzazione

Lo sviluppo dei metodi per risolvere i problemi di ottimo è legato indissolubilmente alla storia dell'analisi matematica. Lo studio dei problemi di massimo e minimo è cominciato in tempi molto remoti, circa 25 secoli fa. Per un lungo periodo di tempo non c'è stato un modo uniforme di risolvere tali problemi, ognuno di essi veniva risolto con un metodo particolare. All'inizio del XVII secolo nasce però il bisogno di trovare metodi generali di risoluzione, che vengono sviluppati al tempo della formazione di una branca della matematica chiamata analisi, da parte di matematici come Fermat, Newton e Leibniz. In quel periodo diventa chiaro che certi problemi di ottimizzazione giocano un ruolo cruciale nelle scienze naturali; in particolare si scopre che molte leggi della natura possono essere derivate dai "principi variazionali", ovvero principi utilizzati per risolvere un problema scientifico con gli strumenti del calcolo delle variazioni. Secondo questi principi, se abbiamo un possibile insieme di moti di un sistema meccanico, o di un raggio di luce, o di un fluido, ecc., quello che verrà effettivamente compiuto sarà quello che massimizza o minimizza una determinata quantità fisica. Esempi di problemi fisici che seguono i principi variazionali sono il problema della riflessione, della rifrazione, o della brachistocrona, che vedremo meglio in seguito.

Questi problemi concreti cominciano a sorgere verso la fine del XVII secolo, ed è l'esigenza di risolverli, insieme a quella di risolvere altri problemi di geometria o meccanica, che porta alla creazione della branca dell'analisi matematica conosciuta come "calcolo delle variazioni". Il calcolo delle variazioni è quell'area della matematica definita dal seguente problema: determinare, in una famiglia assegnata di oggetti, quello che rende minima (oppure massima) una certa grandezza. Gli oggetti in questione possono essere funzioni, curve, superfici o altro.

Lo sviluppo del calcolo delle variazioni continuerà per circa due secoli, e sembrerà che all'inizio del '900 l'argomento si sia esaurito, che già tutto sia stato scoperto in merito; tuttavia, proprio in quel periodo, nascono nuove esigenze. Nel campo dell'economia e della tecnologia sorgono nuovi problemi che non riescono ad essere risolti con i metodi fino ad allora conosciuti.

È allora necessario creare un nuovo campo dell'analisi, conosciuta come "analisi convessa", che riguarda lo studio delle funzioni convesse e dei problemi di estremo di tali funzioni. Le nuove esigenze della tecnologia, in particolare dell'esplorazione dello spazio, danno vita ad una nuova serie di problemi che non possono essere risolti col calcolo delle variazioni: è tra il 1950 e il 1960 che si sviluppa, da parte di matematici sovietici, la "teoria del controllo ottimale".

2.1. Il primo problema di massimo: il problema di Didone

Il primo problema di massimo conosciuto compare sottoforma di leggenda nel libro dell'Eneide del poeta Virgilio. La leggenda narra che nel IX secolo a.C. Didone, principessa di origine fenicia, fuggì per mare, insieme alla sorella e a pochi fedeli, dopo l'uccisione di suo marito Sicheo da parte del fratello Pigmalione, e, arrivata sulle coste della Libia, chiese al re Iarba un pezzo di terreno su cui poter fondare la sua città, Cartagine. Tale pezzo di terra doveva essere grande "quanto potesse essere abbracciato da una pelle di toro". Il re, pensando che la quantità di terreno richiesta non dovesse essere molto estesa, concesse a Didone quanto da lei richiesto, ma ella tagliò la pelle di toro in sottilissime strisce, con le quali poté formare un cordone abbastanza lungo da "abbracciare" una zona molto ampia di terreno. Didone voleva quindi trovare l'area massima possibile da poter circondare con questa striscia di pelle di bue. Questo problema, noto come "problema di Didone", è quello che noi ora classificheremmo come problema isoperimetrico, ovvero: dato un perimetro di lunghezza data quale sarà la figura piana con tale perimetro che racchiude l'area massima? I Greci avevano capito che tale figura doveva essere la circonferenza (nel caso di Didone la semicirconferenza, dato che ella voleva uno sbocco sul mare), tuttavia non ne possedevano una dimostrazione. Didone stessa aveva capito che tale figura era una circonferenza, dato che Virgilio usa la parola "circumdare" (circondare, racchiudere in un cerchio) nel suo scritto.

I tentativi di formulare rigorosamente tale dimostrazione terranno occupati i matematici per molti secoli a venire, a partire da Archimede, Zenodoro e Pappo, attraversando tempi più recenti con Eulero, Galileo, Legendre, Riccati, Simpson, fino ad arrivare ad Hilbert nei tempi moderni.

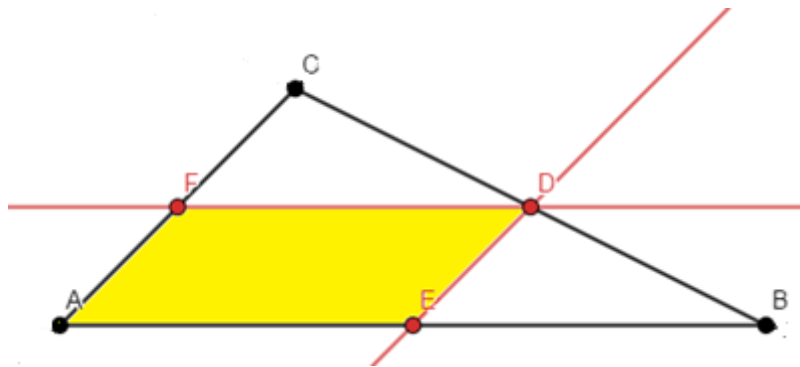
2.2. Il primo problema di ottimo esplicitamente formulato: Euclide.

Non stupisce il fatto che il primo problema di ottimo formulato in modo esplicito compaia negli "Elementi" di Euclide, in particolare nel libro IV. Gli "Elementi" sono 13 libri scritti dal matematico Euclide nel III secolo a.C.; essi abbracciano tutto il sapere riguardante la matematica elementare posseduto sino ad allora (aritmetica, geometria sintetica e algebra), mentre non si occupano dell'arte del calcolo, considerata troppo elementare, e di coniche e curve, considerate troppo avanzate. È la versione del tempo di quello che ora potremmo considerare un libro del liceo, ed è il

testo più tradotto di sempre, infatti arriva a noi attraverso le traduzioni greche e arabe successive, che si teme abbiano modificato più o meno profondamente il testo originario. In particolare il libro IV è dedicato ai poligoni regolari inscrittibili e circoscrittibili ad un cerchio, ed è in questo contesto che si inserisce il primo problema di massimo, formulato esplicitamente nella Proposizione 27: “Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta e deficienti di figure parallelogrammatiche simili e similmente situate rispetto al parallelogramma descritto su metà della retta, ha area maggiore quel parallelogramma che è applicato a metà della retta e che è simile al difetto”.

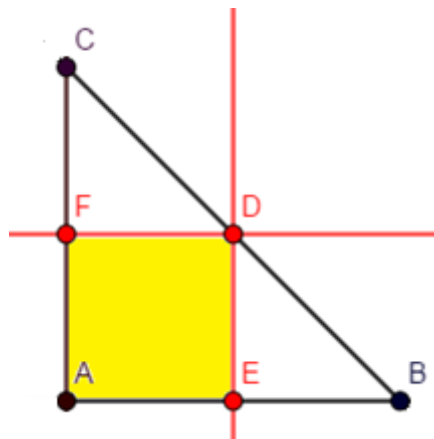
In termini moderni potremmo enunciarlo in questo modo:

“Dato un triangolo ABC , se da un punto D del lato \overline{BC} si tracciano le parallele \overline{ED} ad \overline{AC} , \overline{FD} ad \overline{AB} , l’area del parallelogramma $AEDF$ è massima quando D è il punto medio di \overline{BC} .”



Euclide dimostra questo problema mostrando che qualsiasi altro parallelogramma ha area minore di quella del parallelogramma costruito sui punti medi, e ne differisce da esso per l’area di un altro parallelogramma.

Nel caso particolare in cui $\overline{AB} = \overline{AC}$ e l’angolo \widehat{BAC} sia retto, tra tutti i rettangoli di perimetro dato il quadrato è quello di area massima (proprietà già contenuta nella Proposizione 5 del Libro II degli Elementi, il quale si occupa di problemi di algebra geometrica, che oggi risolveremmo con equazioni di primo e secondo grado).



2.3. L'ottimizzazione nella Grecia antica

Sulla scia degli "Elementi" vengono scritti altri libri, come "Sulla sfera e sul cilindro", del matematico greco Archimede, originario di Siracusa, vissuto anch'egli nel III secolo a.C. Questo volume sembra essere la loro diretta continuazione, dato che riparte proprio da dove questi terminano, ovvero dai solidi di rotazione. L'interesse per i problemi isoperimetrici continua in Archimede spostandosi nelle tre dimensioni, infatti la Proposizione IX del libro II recita: "Tra tutti i segmenti sferici compresi da uguale superficie, il maggiore è l'emisfero", ovvero quello di massimo volume è la semisfera. I matematici greci dunque, oltre a notare la proprietà isoperimetrica del cerchio (cioè quella di racchiudere la maggiore area possibile tra le figure piane con lo stesso perimetro), notano anche la proprietà isoepifanica della sfera (cioè quella di racchiudere il maggior volume possibile tra le figure solide con la stessa superficie).

Qualche decennio dopo Apollonio (262 a.C. – 190 a.C.) nella sua opera "Le coniche" (considerata un capolavoro del tempo, che soppianta tutti i trattati precedenti sul tema, e che vale al suo autore il titolo di "Grande geometra"), in particolare nel libro V (a noi pervenuto solo grazie alle traduzioni in lingua araba), si occupa della determinazione delle rette di lunghezza massima e minima che possono essere condotte ad una conica a partire da determinati punti. Apollonio considera questo argomento indispensabile per coloro che si occupano di matematica, e rimprovera i suoi colleghi che non se ne sono sino ad allora occupati a suo dire degnamente. I suoi teoremi sui massimi e sui minimi non sono altro che teoremi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche. Nella determinazione delle rette di lunghezza massima e minima Apollonio inizia a trattare punti speciali situati sull'asse maggiore di una conica a centro o sull'asse di una parabola, per poi passare ai punti dell'asse minore di un'ellisse, e infine considera punti generici all'interno della conica, producendo una serie di teoremi che sono molto vicini alle teorie moderne sulle normali e sui raggi di curvatura della geometria differenziale delle curve. Apollonio si spinge anche a formulare criteri che permettono di dire quante normali si possono tracciare da un punto dato ad una conica, criteri che equivalgono alle moderne equazioni della teoria delle evolute.

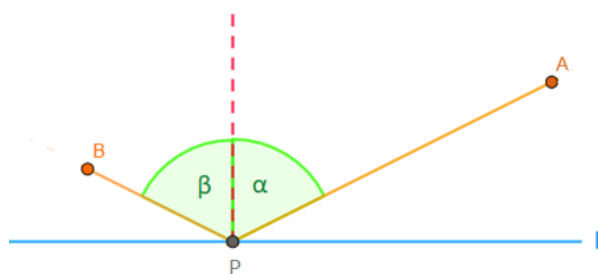
Tra coloro che si interessano alle questioni di ottimizzazione troviamo anche Zenodoro, matematico greco vissuto nel II secolo a.C., che nel suo libro "Sulle figure isoperimetriche" confronta le superfici dei poligoni di egual perimetro e dimostra che l'area maggiore è racchiusa da quelli con maggior numero di lati, e dunque dal cerchio. Dimostra inoltre che, a parità di perimetro e di numero di lati, sono i poligoni regolari a racchiudere l'area maggiore, il che si

potrebbe enunciare con “un poligono massimale, se esiste, deve essere regolare”.

Egli raggiunge una conclusione analoga nelle tre dimensioni considerando poliedri con uguale superficie e sostenendo che quello con volume massimo sia la sfera, sebbene non ne dia una dimostrazione. Il suddetto libro è andato perduto, ma Pappo, matematico alessandrino del IV secolo d.C., ne ha riportati i risultati nel suo libro “Collezioni matematiche”. Pappo fa nel IV secolo d.C. ciò che aveva fatto Euclide nel III secolo a.C., raccogliendo il sapere matematico sino ad allora posseduto nelle sue “Collezioni”, così come Euclide aveva fatto negli “Elementi”. Il suo libro è considerato l’ultimo trattato matematico rilevante dell’antichità, dopodiché ci saranno in Europa una serie di matematici poco rilevanti (Proclo, Eutocio, Boezio), e lo sviluppo della matematica si sposterà in altre zone come l’Oriente (Cina e India), per poi ritornare in Europa solo nel Medioevo. I ragionamenti di Zenodoro hanno cambiato profondamente il modo di affrontare il problema isoperimetrico, tanto è vero che fino al XVII secolo saranno ripetuti in modo pressoché identico, e le prime innovazioni nelle tecniche dimostrative di tale problema saranno apportate da Jakob Steiner nel 1800.

Nel I secolo d.C. Erone di Alessandria, interessato alle misure in ottica e in meccanica, riporta nel suo libro “Catottrica” un’importante conseguenza della legge della riflessione secondo la quale un raggio di luce proveniente da un punto A e incidente su uno specchio piano L in un punto P viene riflesso nella direzione di un punto B tale che \overline{AP} e \overline{PB} formano con L angoli uguali. Erone mostra che tra tutti i cammini possibili per andare da A a B passando per lo specchio L il più breve è quello per cui gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali. Questo è a tutti gli effetti considerabile un problema di minimo.

Erone mostra come la natura conosca bene la geometria e la sfrutti a suo vantaggio: gli storici della scienza vedono in questo principio una prima intuizione del fatto che la natura sia guidata da principi estremali. Sarà solo nel XVII secolo che anche la legge della rifrazione verrà enunciata in termini di un problema di minimo, da parte del matematico Fermat: ciò che caratterizza la traiettoria di un raggio di luce che va da un punto ad un altro in un mezzo non omogeneo è l’impiego del tempo minimo.



2.4. Non solo problemi geometrici

I problemi di massimo e minimo che si sono succeduti nella storia non riguardano solo la geometria, ma anche l'algebra. Uno dei problemi più celebri è quello del matematico bresciano Niccolò Tartaglia, vissuto nella prima metà del XVI secolo. Il problema recita: "si divida il numero 8 in due parti, tali che il risultato della moltiplicazione del prodotto delle due parti per la loro differenza sia massimo". Per capire come Tartaglia risolse questo problema dobbiamo porci nel contesto del tempo. Il primo a risolvere le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + ax = b$ fu Scipione Del Ferro (1465-1526), che lo scrisse in un libricino ma non lo pubblicò. Tale scoperta venne rivelata da Del Ferro al suo allievo prediletto Fior. Nel 1535 Fior sostenne di essere capace a risolvere le equazioni di terzo grado e sfidò Tartaglia: i due matematici proposero l'un l'altro una serie di equazioni di terzo grado da risolvere. Tartaglia riuscì a risolvere tutte le equazioni proposte da Fior (che erano tutte del tipo $x^3 + ax = b$), mentre Fior solo alcune di quelle proposte da Tartaglia. Cardano (1501-1576) volle sapere da Tartaglia la soluzione di tali equazioni, anche perché al tempo ci si basava sulla sentenza di Luca Pacioli (1445-1517) dell'impossibilità di trovare un metodo generale per la risoluzione delle equazioni di terzo grado. Tartaglia, dopo numerosi rifiuti si decise a rivelare il metodo risolutivo, ma sotto forma di filastrocca (a parole, senza numeri), solo sotto la promessa da parte di Cardano di non pubblicare tale rivelazione. Cardano tradusse tale filastrocca in linguaggio matematico e, posto $u - v = q$ e $uv = \frac{p^3}{27}$:

- per la soluzione delle equazioni del tipo $x^3 + qx = p$ risulta:

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

- per la soluzione delle equazioni del tipo $x^3 = qx + p$ risulta:

$$x = \sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

- per la soluzione delle equazioni del tipo $x^3 + p = qx$ risulta:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

In quest'ultimo caso Cardano si accorgerà che il radicando della radice quadrata non è sempre estraibile, dato che può risultare un numero negativo. Tale problema verrà risolto da Bombelli qualche anno più tardi, con la sua aritmetica dei numeri complessi.

Cardano e il suo allievo Ferrari (che sapeva già risolvere le equazioni di quarto grado basandosi sulla risoluzione di quelle di terzo grado, ma non poteva pubblicare la soluzione perché vincolato dalla promessa del suo maestro fatta a Tartaglia) si recarono a Bologna e scoprirono che Scipione Del Ferro sapeva già risolvere le equazioni di terzo grado prima di Tartaglia, dunque si sentirono svincolati dalla promessa di segretezza fattagli. Cardano pubblicò così nel 1543 l'"Ars Magna", con riportate le soluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado.

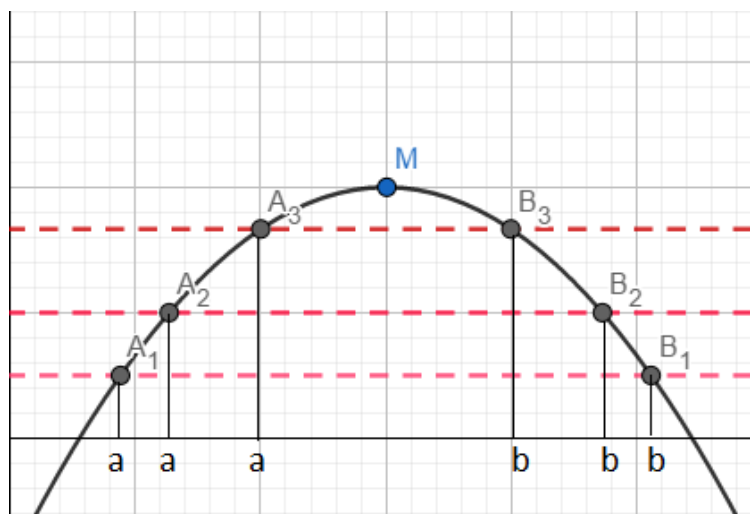
Tartaglia fornisce la soluzione del problema sopra citato senza dimostrazione, riportando semplicemente che "dividendo il numero 8 in 2 parti, e aumentando il suo quadrato di un terzo del suo quadrato, otteniamo il quadrato della differenza delle due parti desiderate", quindi se consideriamo $a + b = 8$, Tartaglia sostiene che $\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{8}{2}\right)^2 = (a - b)^2$, da cui otteniamo $a = 4 + \frac{4}{4+\sqrt{3}}$.

Si pensa che Tartaglia sia arrivato alla soluzione passando proprio da un'equazione di terzo grado del tipo $x^3 - S^2x + 4M = 0$, dove $x = a - b$, S è il numero da dividere (in questo caso $S = 8$), e M il massimo in questione, quindi

$$M = x \left(\frac{S}{2} + \frac{x}{2}\right) \left(\frac{S}{2} - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x^3 - S^2x + 4M = 0$$

2.5. Lo sviluppo del calcolo differenziale: Fermat, Leibniz ed Eulero

Fermat nel 1637 pubblica il manoscritto “Metodo per trovare massimi, minimi e tangenti alle curve”, nel quale sono riportate le sue ricerche sui massimi e minimi di semplici funzioni, che verranno poi applicate per determinare le tangenti alle curve. Il metodo descritto da Fermat è un metodo algebrico, che si basa sul fatto che nell’intorno di un massimo o di un minimo le variazioni dell’ordinata siano insensibili rispetto all’incremento dell’ascissa corrispondente al massimo o al minimo stesso. Fermat considera una funzione f (sebbene non sia corretto per il tempo parlare di funzione, poiché tale concetto si svilupperà solo alla fine del XVII secolo con Leibniz, quindi è più corretto parlare di una variabile al più dipendente da un’altra) di cui vuole calcolare il massimo M . Presa una curva, che per comodità si dirà avere equazione $f(x)$, sapendo che essa è dotata di massimo M e volendo calcolare il punto x tale per cui $f(x) = M$, si può partire dalla seguente considerazione: prendendo un valore t minore di M , l’equazione $f(x) = t$ avrà due soluzioni: a e b che si troveranno da parti opposte rispetto ad M . Poiché $f(a) = t$ e $f(b) = t$, si ha $f(a) = f(b)$, quindi $f(a) - f(b) = 0$ e quindi, dividendo per $a - b$ si ottiene $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0$. Se ora avviciniamo t a M , sempre restando al di sotto, anche i punti $A = (a; f(a))$ e $B = (b; f(b))$ si avvicineranno fra loro, fino a che coincideranno quando t raggiungerà il valore massimo M . Quindi, dopo aver fatto le dovute semplificazioni, si pone $a = b$ e si trova un’equazione dalla quale si può ricavare il punto di massimo a e quindi il valore di M .



Per esempio, volendo calcolare quale sia tra tutti i rettangoli di perimetro dato quello di area massima, si considerano i rettangoli di perimetro $2P$, di base a e altezza $P - a$ supponendo, senza perdita di generalità, che $P > a$. L'area di un tale rettangolo è pari a $a(P - a) = aP - a^2$

quindi la richiesta è di trovare il punto di massimo della curva di equazione $f(a) = aP - a^2$.

Seguendo il metodo sopra citato si ha:

$$0 = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{aP - a^2 - bP + b^2}{a - b} = \frac{P(a - b) - (a - b)(a + b)}{a - b} = P - a - b$$

Imponendo a questo punto $a = b$ si ottiene $P - 2a = 0$, e dunque $a = \frac{P}{2}$, che risolve il problema.

Nell'opera di Fermat, in realtà, si fa riferimento ad un altro metodo, di più ampia applicazione rispetto a quello appena riportato, il cosiddetto metodo dell'adequazione. Questo concetto, di origine molto più antica di Fermat stesso, stava ad indicare l'utilizzo di uguaglianze tra due quantità solo approssimativamente uguali. Il metodo precedente può essere per esempio riscritto considerando, invece che due quantità a e b tali che $f(a) = f(b)$, due quantità a ed $(a + b)$ tali che $f(a + b) - f(a) = 0$.

In questo modo si semplifica notevolmente l'equazione del metodo sopra descritto, perché non si deve dividere per $a - b$, bensì solamente per b .

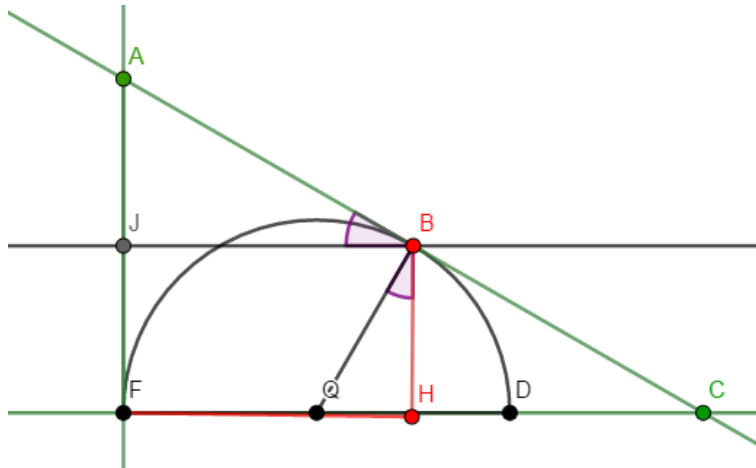
Quindi, l'equazione si riscrive come:

$$0 = \frac{f(a + b) - f(a)}{b}$$

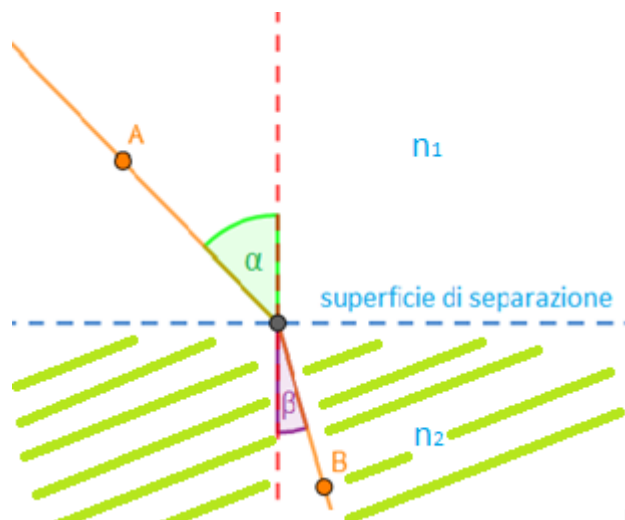
Si è ancora lontani dal concetto di derivazione, nonostante questa equazione possa sembrare molto simile al rapporto incrementale e la posizione di b possa apparire come un passaggio al limite del tipo $b \rightarrow 0$. Semplicemente, Fermat utilizza degli incrementi (probabilmente per la prima volta) ponendoli successivamente pari a 0, per creare un'equazione risolvibile. Tale metodo è valido per la costanza della curva in un piccolo intorno di un punto stazionario, ma per Fermat è semplicemente l'assimilazione in un punto singolare di due punti che, lontani dal massimo, rimarrebbero distinti. La certezza è che tali metodi hanno creato solide basi per il lavoro di Leibniz e anche per quello di Eulero e degli altri pionieri del calcolo differenziale. La nuova idea dell'incremento sarà infatti ripresa da tutti gli autori seguenti.

Nonostante Fermat ponesse l'accento su metodi generali (e algebrici) di risoluzione dei problemi di massimo e minimo, egli riporta anche un problema risolto con metodo geometrico:

“Consideriamo la semicirconfenza FDB di diametro \overline{FD} , sia \overline{BH} la perpendicolare al diametro. Si vuole trovare il massimo del prodotto $\overline{FH} \cdot \overline{HB}$ ”. Fermat dimostra che il punto B tale per cui questo prodotto è massimo è il punto in cui $\overline{AB} = \overline{BC}$, che risulta essere il punto in cui $\overline{FH} = \frac{3}{2} \overline{FD}$.



Come accennato in precedenza Fermat, alla fine del XVII secolo, si occupa della rifrazione della luce. Egli infatti deriva la legge di Snell ($\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$) partendo dall'assunzione che la luce si muova più lentamente in un mezzo più denso (indice di rifrazione n_2 maggiore) rispetto ad uno più rarefatto (indice di rifrazione n_1 minore). Fermat utilizza il principio estremale per dire che “in un mezzo non omogeneo la luce viaggia da un punto all'altro lungo il cammino che richiede il tempo minimo”.



Curiosamente Fermat non utilizza, per dimostrare la legge di Snell, l'algoritmo che aveva già a disposizione per trovare i massimi e i minimi: questo accade semplicemente perché egli è in grado di applicare quell'algoritmo (che consisteva essenzialmente nel porre la derivata uguale a zero, anche se ancora il concetto di derivata non era definito) solo a funzioni polinomiali, ma non sa come applicarlo a funzioni radicali (che compaiono nell'espressione della funzione che esprime la lunghezza del cammino spezzato AB). Il primo a derivare la legge di Snell utilizzando le derivate è Leibniz, che ha posto le basi per l'analisi matematica nel 1684.

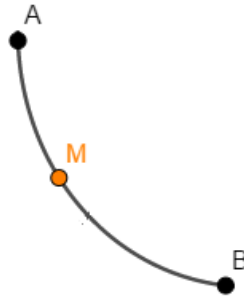
Da questo momento in poi l'idea del carattere estremale dei fenomeni naturali sarà la luce guida della scienza, e tra il XVII e il XIX secolo diverrà chiaro che la natura opera "ottimamente" sia in ottica, che in meccanica, che in termodinamica, che in altri campi.

Tutti i metodi alle differenze di Fermat e la teoria della geometria analitica di Descartes vengono studiati da Leibniz, matematico tedesco, che è in grado di scrivere una vera e propria teoria matematica nuova e semplice per il calcolo delle tangenti, sottotangenti e dei massimi o minimi di date funzioni. Nel 1684 Leibniz pubblica un articolo intitolato "Un nuovo metodo per Massimi e Minimi" ponendo in esso le basi del calcolo differenziale. Egli introduce infatti il concetto di differenziale e di differenziazione, tramite le comuni regole delle operazioni tra derivate prime oggi conosciute. Leibniz mostra poi come si possano determinare i massimi e i minimi e i flessi delle curve e sottolinea la maggiore semplicità ed efficacia, rispetto agli altri metodi, per risolvere il problema delle tangenti, che consiste nel considerare direttamente i differenziali invece della sottotangente. Egli spiega come il segno dei differenziali in un punto della curva sia legato alla pendenza della curva in quel punto: potrà essere una quantità positiva o negativa a seconda di come è direzionata la tangente nel punto alla curva stessa. La curva nel punto può essere crescente (differenziale positivo, tangente con coefficiente positivo), o decrescente (differenziale negativo, tangente con coefficiente negativo). L'autore fa immediatamente notare che nessuno dei due casi si presenta in un punto M , massimo relativo della curva: siccome in M le ordinate non crescono né decrescono, risulta intuitivo che il differenziale in quel punto, non essendo né positivo né negativo, sarà nullo, la tangente nel punto sarà pertanto parallela all'asse delle ascisse in quanto avente coefficiente nullo. Egli analizza anche il segno dei differenziali quadrati, mostrandone il legame con la concavità della curva, definendo i casi di convessità (differenziale quadrato positivo), concavità (differenziale quadrato negativo) e punto di flesso (differenziale quadrato nullo). Sino ad allora erano stati elaborati metodi come quello di Fermat, ma

quest'ultimo era applicabile solo in casi molto ristretti. Grazie al metodo di Leibniz, utilizzando i differenziali, si possono ora calcolare i massimi e i minimi quasi in ogni caso. Nei suoi lavori Leibniz dunque non solo trova la condizione necessaria per essere un massimo o un minimo, ovvero annullare la derivata prima della funzione da massimizzare o minimizzare (condizione non sufficiente poiché l'annullamento della derivata prima si verifica anche nei punti di flesso a tangente orizzontale), ma usa anche il differenziale secondo per distinguere tra un massimo e un minimo. Con l'aiuto della relazione $f'(x) = 0$ Leibniz risolve un gran numero di problemi, incluso la derivazione della legge della rifrazione. I lavori di Leibniz sono molto significativi per il suo tempo, in essi si può distinguere il concetto di approssimazione lineare delle funzioni, e la connessione tra la tangente e la derivata prima.

Il metodo di risoluzione dei punti di estremo di una funzione dipendente da una sola variabile è stato quindi elaborato prima da Fermat (solo per i polinomi), e poi da Newton e Leibniz in termini più generali. Lo studio dei massimi e minimi di funzioni dipendenti da più di una variabile avverrà molto più tardi.

Leibniz, così come i fratelli Jean e Jacques Bernoulli, Newton, ed altri matematici della fine del XVII secolo, lavorano a partire dal giugno 1696 ad un problema destinato a diventare uno dei problemi di ottimo più famosi della storia: il problema della brachistocrona. Tale problema viene proposto da Jean Bernoulli appunto nel giugno 1696, anche se già Galileo se ne interrogava nel 1638 nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai moti locali". Il testo recita: "Dati due punti A e B in un piano verticale, trovare il cammino AMB attraverso il quale un punto mobile M, in virtù del suo peso, si muova per andare da A a B nel modo più veloce". Il calcolo delle variazioni nasce proprio nel 1697 quando Jean Bernoulli riesce a risolvere tale problema, sostenendo che il cammino seguito non è quello in linea retta da A a B, ma è quello che minimizza il tempo di viaggio, e risulta essere un arco di cicloide. Jean Bernoulli non sarà l'unico a risolvere questo problema, ma anche il fratello Jacques, e poi Newton e Leibniz giungeranno alla stessa soluzione. La cicloide inoltre diviene la prima curva "non-antica" connessa con le leggi della natura, infatti Huygens scopre che un corpo che scivola lungo una cicloide, senza attrito, oscilla con un periodo che non è influenzato dalla posizione iniziale del corpo sulla cicloide (proprietà tautocrona della cicloide).



Alla fine del XVII secolo dunque, col sorgere di problemi come il problema della brachistocrona o alcuni problemi isoperimetrici, in cui sono testate “curve arbitrarie”, ovvero non descrivibili tramite un numero finito di parametri, nasce una branca speciale del “calcolo”, chiamato “calcolo delle variazioni”, che si sviluppa nel XVIII e XIX secolo, grazie ad Eulero, Lagrange, Weierstrass, ed altri matematici.

Tale branca della matematica viene sviluppata nell'arco di pochi decenni, tanto che nel 1744 Eulero, matematico svizzero studente di Jean Bernoulli, ha già pubblicato il trattato, dal nome lunghissimo: “Sul come calcolare delle linee curve sapendo servirci delle proprietà del massimo o del minimo o in altri termini la risoluzione di un problema di isoperimetria avendo inteso un assunto generalissimo”, meglio conosciuto col più breve “Methodus”. Eulero è un matematico molto prolifico, produce in vita più di 500 scritti, e più di altri 300 verranno pubblicati dopo la sua morte. È proprio nel periodo in cui vive a stretto contatto con Jean Bernoulli che comincia ad interessarsi di calcolo delle variazioni, e, insieme al suo maestro, si occupa di problemi derivanti dai problemi isoperimetrici proposti da Jacques Bernoulli al fratello Jean. Sebbene già siano note soluzioni ad alcuni dei problemi nominati, esse sono soltanto congetture, in quanto manca l'apparato teorico necessario a dimostrarle. Nel “Methodus” Eulero scrive un elenco di 100 quesiti tramite il quale vuole proporre una soluzione innovativa a tutti i problemi di calcolo delle variazioni. L'opera è la prima vera raccolta di metodi variazionali nella storia della matematica ed è il fondamentale punto di partenza per il lavoro di ricerca di altri autori in questo nuovo campo, come Lagrange. L'autore studia un metodo per determinare le curve che, data una particolare formula, possiedano la proprietà di essere massimi o minimi rispetto ad essa.

Il libro, nella sua parte iniziale, riporta una prima definizione: “Il metodo dei massimi e dei minimi applicato alle linee curve è il metodo per trovare le linee curve che godono di proprietà di massimi e minimi”. Il primo capitolo esamina le generalità del problema, cita definizioni preliminari e riporta alcune note che l'autore sfrutterà nel seguito della sua trattazione.

Eulero è molto influenzato dai lavori della fine del secolo precedente, ma pone una sostanziale differenza tra la teoria sua e dei Bernoulli e quelle proposte da tutti i matematici precedenti che avevano avuto a che fare con l'analisi infinitesimale, come Fermat, Cartesio e Leibniz. Le principali differenze stanno nel metodo stesso e negli oggetti della ricerca, infatti prima si proponeva, data una particolare linea curva, di trovare le quantità delle variabili che massimizzavano o minimizzavano la suddetta curva; i metodi euleriani, nonché bernoulliani, propongono invece di trovare la curva che minimizza o massimizza una data formula. In questa annotazione vi è un chiaro riferimento al lavoro compiuto dai fratelli Bernoulli sulla curva brachistocrona come prima vera trattazione in merito a questo tipo di problema.

Eulero scrive: “In precedenza la relazione tra y e x si suppone sia data, o in altre parole la funzione f di equazione $y = f(x)$ si suppone sia conosciuta; e l'eguagliare y e $y + \frac{dy}{dx}\Delta x + c$, o rendere $dy = 0$, ci permette di trovare un particolare valore di x che sostituito in $y = f(x)$ dà il massimo o il minimo valore di y . In seguito, al contrario, la relazione tra y e x non è data ma cercata, o in altre parole la forma della funzione $f(x)$ è l'oggetto della ricerca”. Specifichiamo che il concetto di funzione è nato con Leibniz e Bernoulli alla fine del XVII secolo. Il primo introduce il termine “funzione”, il secondo associa tale termine con la nozione di “un'espressione costituita in qualche modo da una quantità variabile e da costanti”. Eulero più tardi rende l'idea di Bernoulli più concreta, definendo una funzione come “un'espressione analitica costituita da una quantità variabile e da costanti”, e introduce il simbolismo $f(x)$.

L'opera continua definendo due differenti metodi, quello assoluto e quello relativo. Il primo recita: “tra tutte le curve relative ad una certa ascissa trovare quella per cui, posta una data quantità variabile, si ottenga un valore di massimo o minimo”. Il secondo: “non più tra tutte le possibili curve relative ad una certa determinata, ma rispetto ad alcune che condividono certe proprietà, trovare quella che gode delle proprietà di massimo o minimo rispetto a certe quantità date”. Si può immediatamente notare l'importanza del secondo metodo per quanto riguarda i cosiddetti problemi isoperimetrici.

Eulero dirà che “formula di massimo e minimo sarà quella quantità (variabile) per la quale la curva richiesta deve generare un valore massimo o minimo”. L'idea di formula in Eulero è legata soprattutto a formule integrali, che oggi si chiamerebbero funzionali integrali, che l'autore si proponeva di massimizzare o minimizzare attraverso l'uso di alcuni metodi. L'integrale, o per

meglio dire la formula integrale, è un concetto già saldamente radicato nella cultura matematico-scientifica del XVIII secolo, manca però una teoria del calcolo integrale come è oggi conosciuta, formalizzata solo un secolo più tardi da Riemann. Non esiste una scrittura dell'integrale definito tra due estremi anche se, ogniqualvolta viene effettuata un'operazione del genere, essa viene dichiarata a parole.

Una parte molto interessante del "Methodus" è la seconda appendice, che comincia dicendo che siccome tutti i moti della natura seguono leggi di massimo o di minimo, allora appare ovvio che anche considerando cammini curvi che i corpi descrivono sotto l'azione di certe forze si dovranno ottenere proprietà di massimo o di minimo. L'appendice è molto importante perché contiene la prima pubblicazione del principio di minima azione, che è però attribuito a Maupertuis, matematico contemporaneo di Eulero. Il principio di minima azione, come formulato da Eulero, recita: "Sia M la massa di un corpo (in realtà si tratta di un corpo puntiforme che si muove in un piano), sia v la metà della radice della sua velocità (in realtà il testo dice che v è la radice della velocità, ma questo crea problemi successivamente), sia ds la lunghezza di un elemento di arco lungo il cammino; allora tra tutte le curve che passano per gli stessi estremi, la curva richiesta è quella che rende minimo l'integrale $\int M ds\sqrt{v}$ o, con M costante, l'integrale $\int ds\sqrt{v}$ ". Eulero sottolinea che se la distanza ds è percorsa in un tempo dt allora $ds = dt\sqrt{2v}$ e l'integrale si può scrivere come $\int ds\sqrt{v} = \sqrt{2}\int v dt$.

Per prima cosa si osserva che se non ci sono forze agenti sulla particella e la sua velocità iniziale è costante, allora il suo principio implica che s è un minimo e il moto deve essere uniforme lungo una linea retta che unisca i due estremi: questa è la legge di Newton sul moto.

Nel caso in cui l'unica forza agente sia la gravità, Eulero ricava che la traiettoria è una parabola. Successivamente Eulero tratta il caso di una forza verso il basso che non è più una costante, ma una funzione X di x ; poi il caso in cui agiscono una forza orizzontale $Y(y)$ e una forza verticale $X(x)$ e poi il caso di forze centrali, e mostra che il suo principio produce risultati noti anche in questo caso.

Infine, Eulero osserva anche che il suo principio è applicabile al caso di più corpi o particelle.

Eulero conclude l'appendice riflettendo sulla generalizzazione del principio di minima azione e sottolinea che il principio sembra incorrere in difficoltà quando si consideri il moto in un mezzo resistente. In effetti Lagrange nel 1788 mostrerà che il principio è valido in generale per forze

conservative in cui tutti i vincoli siano indipendenti dal tempo; nel caso contrario l'integrale potrebbe non avere un estremo.

Nel 1755 il diciannovenne torinese Giuseppe Lodovico Lagrange scrive una lettera a Eulero con allegata un'appendice in cui viene esposta una nuova e rivoluzionaria idea: il giovane, che già si interessa di problemi del calcolo delle variazioni stimolato dalle ricerche di Eulero, dice di essere in grado di eliminare la necessità dei lunghi calcoli geometrici dal metodo del 1744 e di ridurre il processo ad un apparato puramente analitico. Eulero giudica molto interessante il lavoro di Lagrange, che chiama "calcolo delle variazioni", tanto da mettere in secondo piano il suo metodo, per far avere al ragazzo tutto il merito della scoperta. Lagrange lavora sulle sue idee fino al 1760, quando vengono pubblicate nella rivista "Miscellanea Taurinensia", poi produce altri lavori sull'argomento fino a che nel 1788 esce l'opera più importante: "Meccanica Analitica", dove si trovano anche i cosiddetti moltiplicatori di Lagrange, su cui non ci soffermeremo poiché utilizzati nell'ottimizzazione multidimensionale. Nella lettera del 1755 Lagrange dice ad Eulero di essere stato ispirato proprio da una sua frase: "è desiderabile un metodo libero dalla geometria". Per fare ciò Lagrange definisce una nuova forma di differenziale che viene chiamata variazione e che indica con δ invece che con d . Lagrange è in corrispondenza con Eulero per un lungo periodo di tempo prima di pubblicare i suoi importanti risultati sui "Miscellanea Taurinensia" per la prima volta nel 1760/61.

Pare evidente come fino ad ora l'esistenza del minimo (o massimo) venga implicitamente assunta come certa dalla natura stessa del problema, in pratica viene postulata (pare ovvio che esista il percorso più veloce che una particella percorre per andare da un punto ad un altro in un piano verticale, così come esiste "sicuramente" la figura che, a parità di perimetro, racchiude l'area massima). Gli studi di Eulero e di Lagrange ci forniscono le condizioni necessarie per determinare i minimi (o massimi): porre la variazione uguale a zero fornisce un'equazione differenziale di cui il minimo (o massimo) è soluzione; tuttavia i procedimenti presuppongono implicitamente l'appartenenza delle soluzioni a particolari classi di funzioni regolari, inoltre nei loro procedimenti viene sfruttato il fatto che l'annullarsi dell'integrale che rappresenta la variazione implichi l'annullarsi della funzione integranda. Questo è il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, che nei primi tempi dello sviluppo della teoria viene considerato quasi come un assioma. I metodi classici si basano sull'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali per determinare l'esistenza del minimo (o massimo) di funzionali integrali. Nel caso di una dimensione si tratta di risolvere un problema agli estremi per equazioni differenziali ordinarie, di cui sappiamo che l'esistenza delle

soluzioni è data solo in casi particolari; nel caso di integrali multipli, invece, si tratta di risolvere un'equazione differenziale alle derivate parziali (o sistemi di equazioni) che può essere molto complicata.

2.6. Recenti sviluppi

In tempi più recenti l'accresciuta sensibilità per il rigore espositivo ha dato impulso a ricerche volte a dimostrare l'effettiva esistenza di minimi o massimi di funzionale. Agli inizi del XIX secolo le questioni di esistenza e determinazione delle soluzioni si separano; nel calcolo delle variazioni si ottengono importanti risultati, spesso legati a considerazioni di natura fisica. Alla fine del XIX secolo Riemann dà un nuovo impulso alle ricerche sul calcolo delle variazioni affrontando il problema da un punto di vista diverso: provare l'esistenza delle soluzioni di equazioni differenziali attraverso l'esistenza del minimo di funzionali integrali. Questo procedimento è il cosiddetto principio di Dirichlet: assegnata un'equazione differenziale, se essa può essere vista come l'equazione di Eulero-Lagrange di un funzionale integrale, stabilendo con tutt'altri metodi l'esistenza del minimo per il funzionale si ottiene l'esistenza della soluzione dell'equazione differenziale di partenza. Il punto centrale è proprio questo: si deve provare in modo diretto l'esistenza del minimo per ottenere come conseguenza l'esistenza della soluzione della relativa equazione differenziale. Nasce così il procedimento dei metodi diretti, grazie ai quali per tutto il XX secolo sono stati dati notevoli contributi alla teoria delle equazioni differenziali e al calcolo delle variazioni.

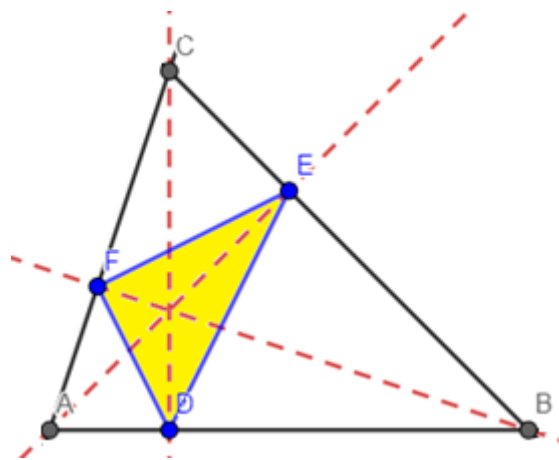
Jakob Steiner nel 1800 inventa delle tecniche per dimostrare che ogni figura con un dato perimetro che racchiude l'area massima deve essere necessariamente un cerchio.

Tali tecniche si basano sul principio che se una figura piana massima non è un cerchio si può trovare un'altra figura isoperimetrica alla prima che abbia un'area maggiore. Steiner viene però attaccato dai matematici a lui contemporanei, che lo accusano di non occuparsi del problema dell'esistenza della soluzione del problema isoperimetrico, ma solo della soluzione di tale problema supponendone data l'esistenza. Sarà Wilhelm Blaschke, all'inizio del '900, che dimostrerà l'esistenza di una figura di area massima utilizzando il teorema di compattezza nella classe delle figure convesse.

Weierstrass, alla fine del XIX secolo, propone una dimostrazione variazionale generale

sull'esistenza delle figure di area massima, ma il cambiamento radicale nell'approccio alle questioni riguardanti aree e perimetri avviene solamente nel XX secolo con Lebesgue e la sua teoria della misura.

Per quanto riguarda i problemi di ottimo di tipo geometrico Hermann Schwarz, matematico tedesco attivo nella seconda metà del XIX secolo e nei primi vent'anni del XX secolo, dimostra che, dato un triangolo acutangolo ABC , il triangolo inscritto in esso con perimetro minimo è uno solo, ed è quello avente i vertici ai piedi delle altezze del triangolo dato.



Nel 1884 Schwarz dimostra anche la proprietà di isoperifania della sfera nello spazio tridimensionale, e nel 1958 Ennio de Giorgi dimostra che vale la stessa proprietà in uno spazio di dimensione maggiore.

Alla fine del XIX secolo Volterra, e più tardi Frechet, Hadamard, e molti altri, cominciano a sviluppare una branca dell'analisi definita "infinito-dimensionale", che precisamente riguarda il calcolo differenziale ed integrale in spazi di dimensioni infinite. Si può certamente dire che in realtà l'analisi infinito-dimensionale è una branca della matematica basata esattamente sulla stessa idea dell'analisi dimensionale finita, di difficoltà non superiore, di conseguenza affronta i problemi di massimo e minimo in modo molto simile a quelli in dimensione finita. È proprio all'interno dell'analisi infinito-dimensionale, all'inizio del XX secolo, che viene generalizzata la nozione di derivata che viene insegnata oggi nelle scuole secondarie di secondo grado. L'analisi infinito-dimensionale consente di avere una visione unificata dei problemi di massimo e minimo applicati alle funzioni dipendenti da una o più variabili e dei problemi di calcolo delle variazioni.

Ai giorni nostri possiamo dire che nelle situazioni più generali il teorema di Fermat rimane valido per i problemi senza vincoli: negli estremi la derivata si annulla. Nel caso di problemi di calcolo delle variazioni, la versione corretta del teorema di Fermat è l'equazione differenziale conosciuta come equazione di Eulero. Dato che il numero di problemi senza vincoli è relativamente basso, è possibile formalizzare alcuni problemi con vincoli tramite delle equazioni. Lagrange trova un modo di risolvere i problemi di massimo e minimo per funzioni vincolate, costruendo la funzione ora indicata come "funzione di Lagrange" (una funzione consistente nella somma della funzione da minimizzare o massimizzare con la combinazione lineare delle equazioni rappresentanti i vincoli) e trattando tale funzione come una funzione non vincolata. Ponendo il differenziale di tale funzione uguale al vettore nullo si trovano i massimi e i minimi vincolati della funzione originaria.

3. L'insegnamento di massimi e minimi di una funzione nella classe quinta

Nei programmi standard dell'insegnamento liceale, i massimi e i minimi delle funzioni in un'unica variabile vengono trattati nella classe quinta, secondo il metodo delle derivate prime e seconde, che ripercorro brevemente in questo capitolo.

In matematica si dice che una funzione $f(x)$ in un'unica variabile, a valori reali, possiede in un punto x_0 del suo dominio un massimo globale (o assoluto) se in x_0 essa assume un valore maggiore o uguale a quello che assume negli altri punti del dominio, ovvero se:

$$\forall x \in D: f(x_0) \geq f(x)$$

Viceversa, possiede in un punto x_0 del suo dominio un minimo globale (o assoluto) se in x_0 essa assume un valore minore o uguale a quello che assume negli altri punti del dominio, ovvero se:

$$\forall x \in D: f(x_0) \leq f(x)$$

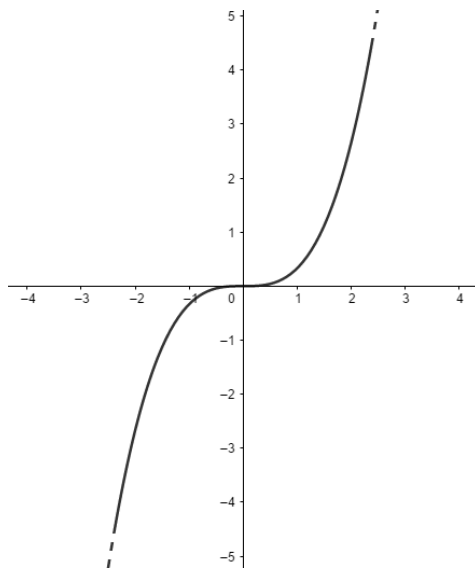
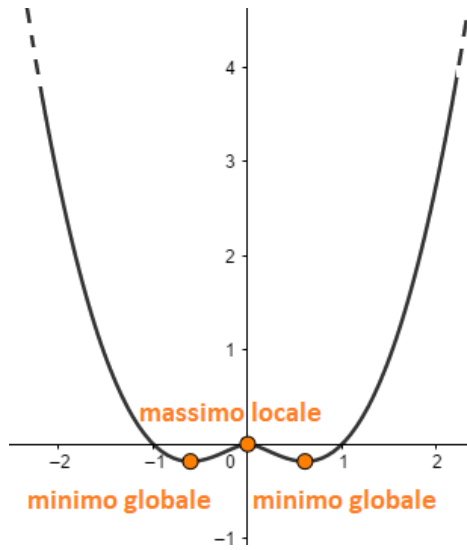
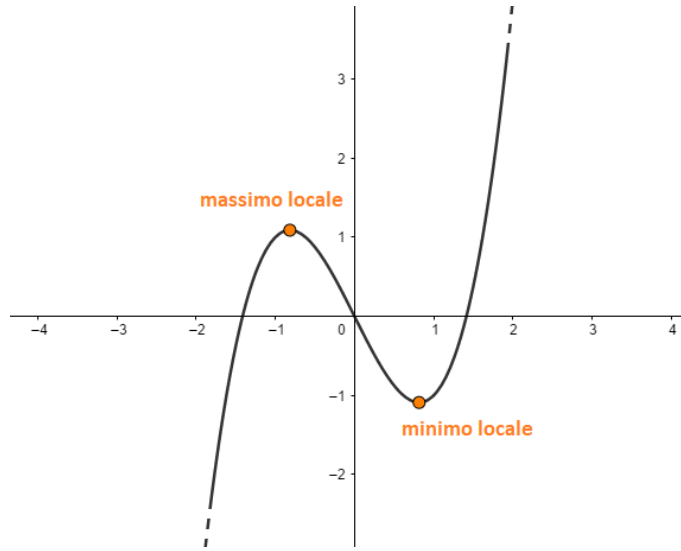
Si dice invece che una funzione $f(x)$ in un'unica variabile, a valori reali, possiede in un punto x_0 del suo dominio un massimo locale (o relativo) se x_0 è di accumulazione per l'insieme del dominio e se:

$$\exists I \text{ intorno di } x_0: \forall x \in I, f(x_0) \geq f(x)$$

Viceversa, possiede in un punto x_0 del suo dominio un minimo locale (o relativo) se x_0 è di accumulazione per l'insieme del dominio e se:

$$\exists I \text{ intorno di } x_0: \forall x \in I, f(x_0) \leq f(x)$$

Una funzione può possedere solo massimi e minimi relativi e non assoluti, oppure possedere massimi relativi e minimi assoluti (e viceversa), oppure possedere sia massimi relativi che assoluti, oppure ancora non possedere alcun massimo né alcun minimo.



Appare chiaro che:

$$x_0 \text{ è massimo (o minimo) assoluto} \Rightarrow x_0 \text{ è massimo (o minimo) relativo}$$

ma non vale la relazione inversa.

I punti di massimo e minimo vengono anche detti punti estremanti, e i valori assunti dalla funzione in questi punti sono detti estremi della funzione.

Il metodo standard per la ricerca dei massimi e dei minimi consiste nell'utilizzo della derivata prima ed eventualmente della derivata seconda.

È di fondamentale importanza porre l'accento sul significato geometrico della derivata prima e della derivata seconda. La derivata di una funzione $f(x)$ calcolata nel punto x_0 è definita come il limite del rapporto incrementale nel punto x_0 , per un incremento tendente a 0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

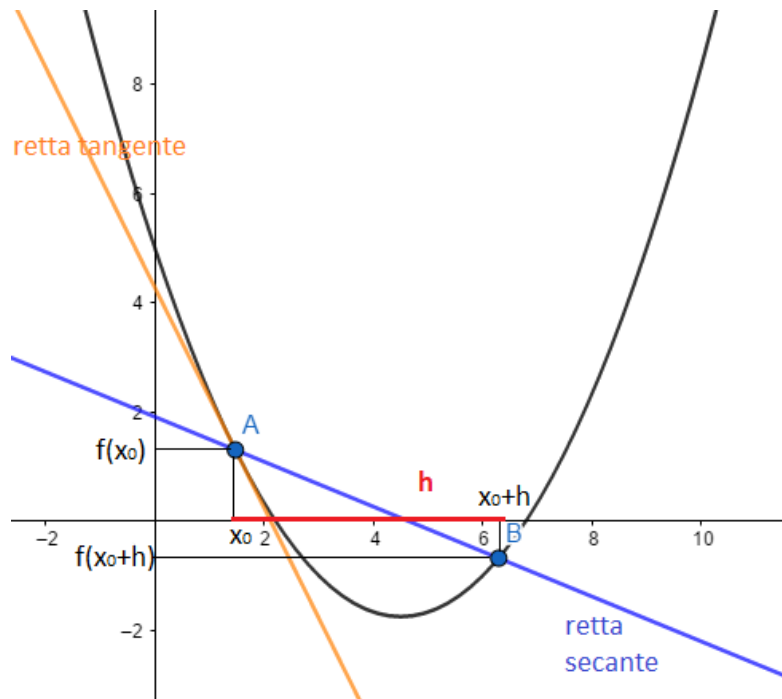
Tramite la derivata prima si definisce la retta tangente ad una curva $f(x)$ in un punto x_0 , chiedendo che la retta approssimi la curva nel punto x_0 a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo per x che tende a x_0 . Si definisce quindi retta tangente nel punto x_0 la retta $y - f(x_0) = m(x - x_0)$ per cui la differenza tra la funzione e la retta stessa nel punto considerato tende a 0 con un ordine superiore a $(x - x_0)$, quando x tende ad x_0 , ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

quindi:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se si considera una qualsiasi funzione $f(x)$, continua in un intervallo $[a, b]$, possiamo definire il coefficiente angolare della tangente ad $f(x)$ in $x_0 \in (a, b)$ come la derivata della funzione $f(x)$ calcolata nel punto x_0 .



Infatti, se si considerano due punti $A(x_0, f(x_0))$ e $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ appartenenti alla curva $y = f(x)$ e si traccia la retta passante per questi due punti (detta retta secante) otteniamo che:

$$m(\text{secante}) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quando il punto B si avvicina al punto A in modo da coincidere con esso, otteniamo che h tende a 0, e che la secante diventa tangente, di conseguenza:

$$m(\text{tangente}) = \lim_{B \rightarrow A} m(\text{secante}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Ne consegue che, dato che nei punti di massimo e minimo in cui la funzione è derivabile la tangente è parallela all'asse delle x , il coefficiente di tale tangente sarà nullo, e quindi la derivata in tali punti sarà nulla. Nel caso di una funzione derivabile in una variabile reale infatti, la condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché un punto x_0 interno al dominio possa essere di massimo o di minimo locale è data dal teorema di Fermat, in base al quale la derivata prima di una funzione deve annullarsi in quel punto.

Quando la funzione $f(x)$ in esame è un polinomio il metodo di ricerca della derivata può essere algebrizzato, e il problema si semplifica alla ricerca della molteplicità di una radice, richiedendo che x_0 sia una radice almeno doppia del polinomio $p(x)$ tale che:

$$p(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$$

quindi, scomponendo il polinomio $p(x)$ tramite un raccoglimento di $(x - x_0)$, si ha che il polinomio $p(x) = (x - x_0)h(x)$ ha x_0 come radice almeno doppia se $h(x_0) = 0$.

Per capire meglio questo procedimento, che raramente viene insegnato nelle scuole superiori, forniamo un semplice esempio. Consideriamo la funzione polinomiale $f(x) = x^3 - 2x^2$ e cerchiamone la tangente nel punto $x_0 = 1$.

Il polinomio $p(x)$ suddetto sarà:

$$p(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = x^3 - 2x^2 + 1 - m(x - 1) = (x - 1)(x^2 - x - 1 - m)$$

Il nostro $h(x)$ è dunque il polinomio $x^2 - x - 1 - m$. Imponiamo $h(1) = 0$. Si ottiene dunque $1 - 1 - 1 - m = 0$, ovvero $m = -1$. La retta tangente cercata è pertanto: $y + 1 = -1(x - 1)$.

Se si utilizza invece il metodo della derivata prima per calcolare il coefficiente si deve prima trovare la derivata prima generica, dunque $f'(x) = 3x^2 - 4x$, e poi calcolarne il valore nel punto $x_0 = 1$, ovvero $m = f'(1) = -1$. Come possiamo notare il coefficiente angolare trovato è il medesimo in entrambi i modi.

Per funzioni di natura più generale dunque la derivata è strumento per definire la retta tangente; quando le funzioni sono polinomiali i due metodi si sovrappongono.

In una funzione almeno di classe C^2 la derivata seconda stabilisce invece la concavità della funzione in quel punto, sappiamo che se $f''(x_0) < 0$ la concavità sarà rivolta verso il basso, se $f''(x_0) > 0$ la concavità sarà rivolta verso l'alto, mentre se $f''(x_0) = 0$ siamo in presenza di un punto di flesso, ovvero un punto di cambiamento della concavità.

Nel caso quindi in cui la derivata seconda calcolata in un punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$ sia positiva siamo in presenza di un minimo, se è negativa siamo in presenza di un massimo, se è nulla siamo in presenza di un punto di flesso a tangente orizzontale.

Per capire la natura del punto x_0 tale che $f'(x_0) = 0$ si può anche studiare il segno della derivata prima nell'intorno del punto x_0 :

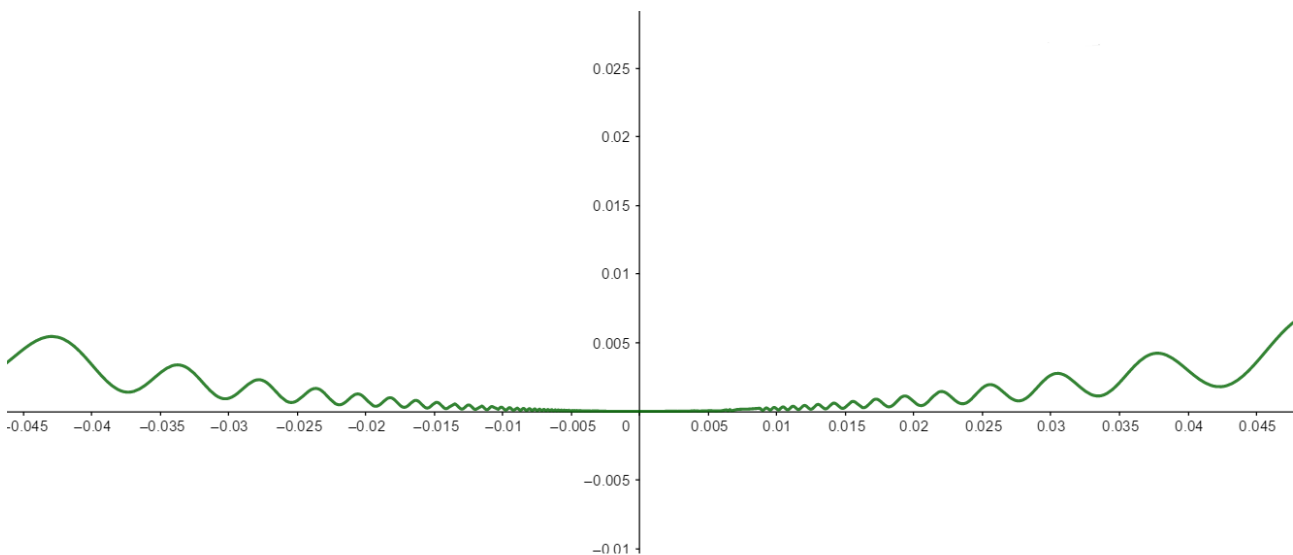
- se per $x < x_0$ $f'(x) > 0$ e per $x > x_0$ $f'(x) < 0$ allora x_0 è punto di massimo
- se per $x < x_0$ $f'(x) < 0$ e per $x > x_0$ $f'(x) > 0$ allora x_0 è punto di minimo
- se sia per $x < x_0$ che per $x > x_0$ si ha $f'(x) < 0$ oppure sia per $x < x_0$ che per $x > x_0$ si ha $f'(x) > 0$ allora x_0 è punto di flesso a tangente orizzontale

Questa condizione, tuttavia, è necessaria ma non sufficiente. Ci sono alcune particolari funzioni in cui la funzione nell'intorno del punto x_0 non è monotona né a destra né a sinistra.

Se consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, otteniamo che la

derivata in $x \neq 0$ sarà $f'(x) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}$.

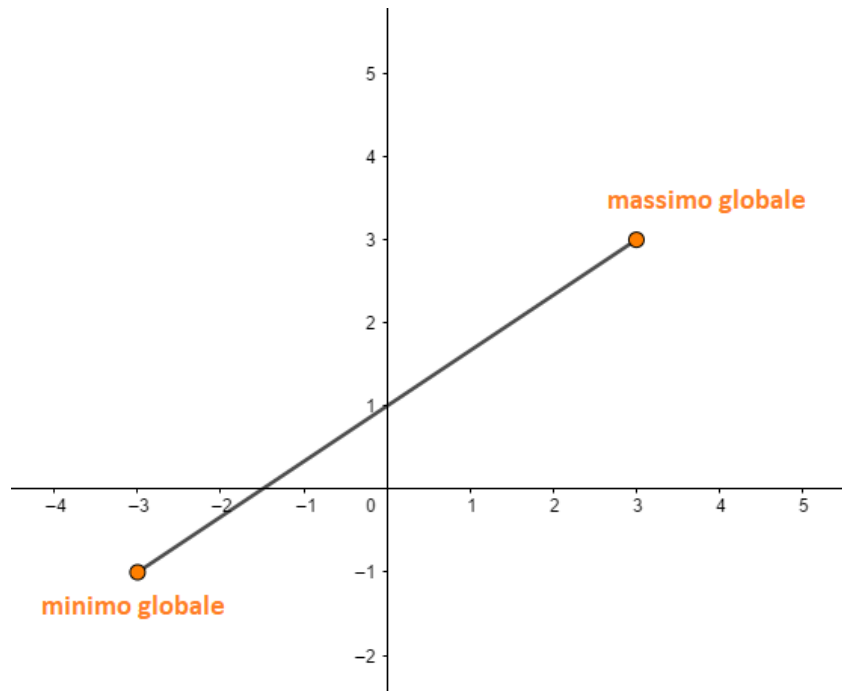
Nell'intorno di 0 la derivata oscilla tra 1 e -1, di conseguenza la funzione non è monotona né a sinistra né a destra dello 0, e la suddetta classificazione non si può utilizzare.



La trattazione fino ad ora fatta vale per i punti di massimo e minimo “regolari”, tuttavia ci sono altre due possibilità in cui possiamo avere punti di massimo e minimo, senza avere tangente a coefficiente nullo in essi.

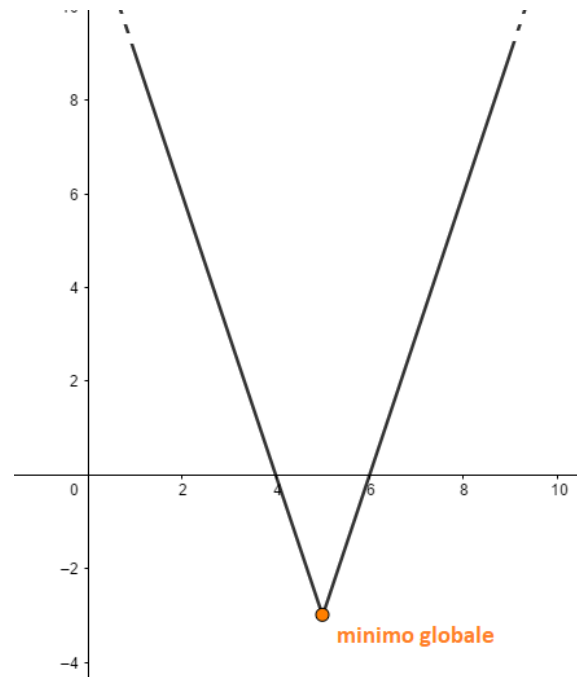
Questi sono:

-punti in cui il dominio viene “troncato”

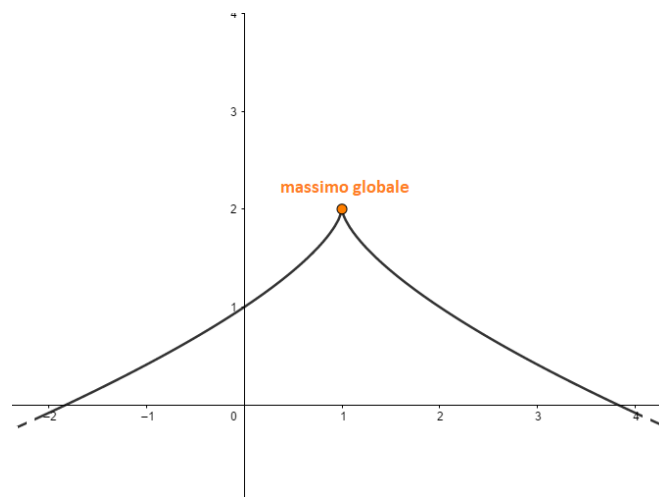


-punti di non derivabilità, in particolare punti angolosi e cuspidi:

si dice che x_0 è punto angoloso se la derivata nel punto non esiste poiché la tangente sinistra e destra nel punto x_0 hanno coefficienti diversi di cui almeno uno finito: possono essere entrambi finiti e diversi, oppure uno finito e l'altro infinito.



Si dice che x_0 è punto di cuspidè se la derivata nel punto non esiste poiché la tangente sinistra e destra nel punto x_0 hanno entrambe coefficienti infiniti e diversi. I punti di cuspidè sono sempre punti di massimo o minimo locale.

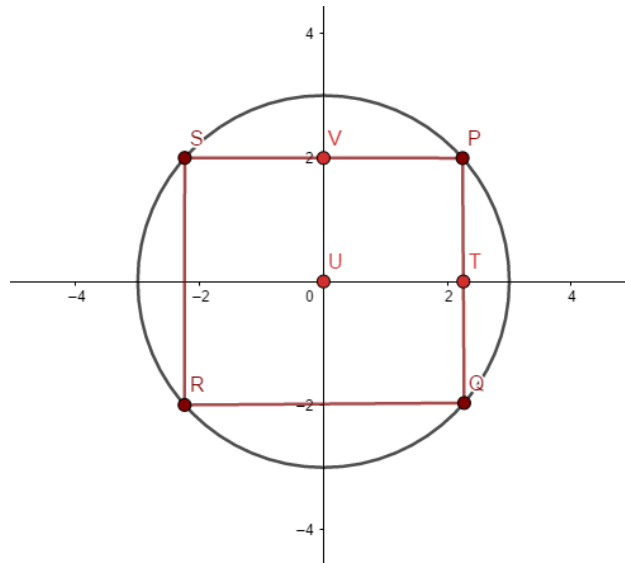


I problemi che “vale la pena” di risolvere con il metodo sopra descritto, cioè con il calcolo differenziale, sono problemi in cui è facile trovare la funzione da massimizzare o minimizzare, e di cui è semplice calcolare la derivata. È di fondamentale importanza scrivere tale funzione in funzione di un unico parametro, laddove sia possibile.

I problemi solitamente proposti in una classe quinta sono problemi di geometria analitica, piana e solida. Mostriamo due problemi significativi risolvibili con il metodo delle derivate.

3.1. Il problema del massimo rettangolo inscritto in un cerchio

Sia una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$, qual è il rettangolo di area massima inscrivibile in essa?



Dobbiamo trovare l'area del rettangolo in funzione di un'unica incognita. Consideriamo un punto P sulla circonferenza nel primo quadrante, esso avrà coordinate: $P = (x, \sqrt{9 - x^2})$.

Dato che l'area del rettangolo PQRS è quattro volte quella del rettangolo PTUV, sarà:

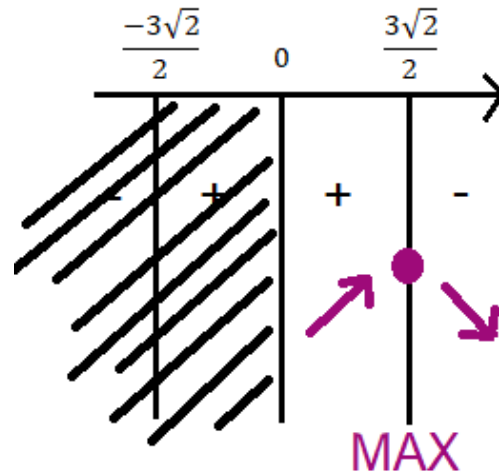
$$A = 4x\sqrt{9 - x^2}$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$A' = 4\sqrt{9 - x^2} + \frac{4x(-2x)}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{72 - 8x^2 - 8x^2}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{72 - 16x^2}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{36 - 8x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Analizzando il segno della derivata prima si ottiene:

$$36 - 8x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

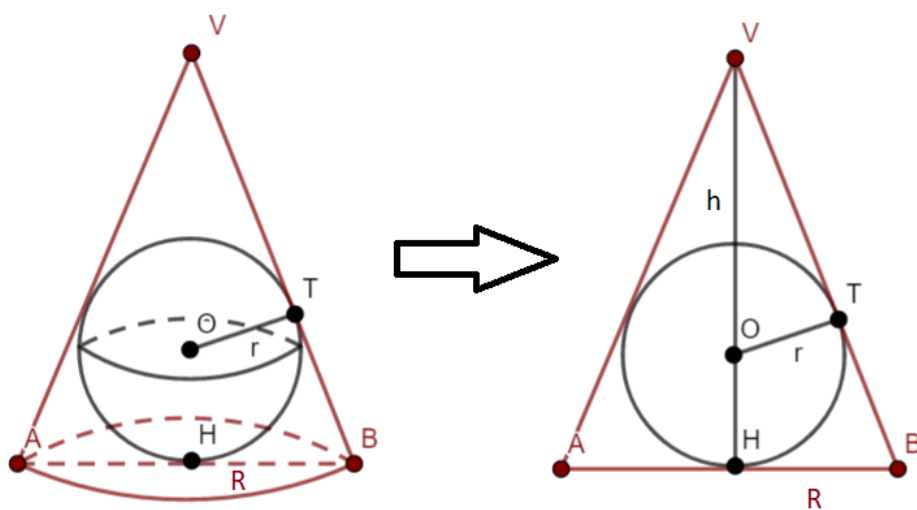


Avendo scelto il punto P nel primo quadrante trovo che ottengo area massima per $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, quindi il rettangolo di area massima inscritto in una circonferenza è il quadrato.

3.2. Il problema del minimo cono circoscritto ad una sfera

Si può utilizzare il calcolo differenziale con efficacia anche ad alcuni problemi tridimensionali. Uno di questi è ad esempio il problema che richiede di trovare il cono di volume minimo da poter circoscrivere ad una sfera di raggio r .

È consigliabile passare dalle 3 dimensioni alle 2 dimensioni sezionando i solidi con un piano perpendicolare alla base del cono e passante per il suo asse.



Consideriamo dato il raggio r della sfera, mentre R e h , che sono rispettivamente raggio e altezza del cono, sono incogniti. Sarà dunque $R > 0$ e $h > 2r$.

Consideriamo il volume del cono $V = \frac{\pi}{3} hR^2$, e notiamo immediatamente che esso è in funzione di due incognite, cerchiamo di renderlo in funzione solo di una delle due incognite, e del raggio r della sfera a cui deve essere circoscritto.

Utilizziamo la proporzione tra i lati corrispondenti dei due triangoli simili OTV e BHV .

Notiamo che:

$$\overline{BV} : \overline{BH} = \overline{OV} : \overline{OT}$$

Ovvero:

$$\sqrt{h^2 + R^2} : R = (h - r) : r$$

Risulta che:

$$R^2 = \frac{r^2 h}{h - 2r}$$

Sostituendo nella formula del volume del cono si ottiene:

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \frac{r^2 h^2}{h - 2r}$$

Derivando il volume rispetto ad h si ricava:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \frac{2hr^2(h - 2r) - r^2h^2}{(h - 2r)^2} = \frac{\pi}{3} \frac{h^2r^2 - 4r^3h}{(h - 2r)^2}$$

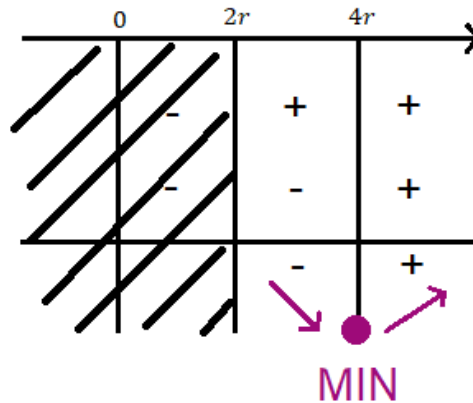
Ponendo la derivata maggiore o uguale a 0 si ha che:

$$h(hr^2 - 4r^3) \geq 0$$

Quindi: F1: $h \geq 0$

F2: $h \geq 4r$

Tenendo presente che $h > 0$ si ha:



Il cono circoscritto di volume minimo si ha in corrispondenza di $h = 4r$, e quindi di $R = \sqrt{2}r$.

3.3. Problemi proponibili agli studenti di classe quinta

Di seguito proponiamo altri classici problemi risolvibili con il calcolo differenziale, presentati in quinta superiore:

- Tra i triangoli rettangoli di area a^2 dimostra che quello di ipotenusa minima è quello isoscele.
- Considera un triangolo equilatero ABC il cui lato misura l . Tra i rettangoli inscritti nel triangolo, aventi lato sulla base \overline{AB} , determina quello di area massima e quello di diagonale minima.
- Considera una semicirconferenza di diametro \overline{AB} e raggio r . Considera un trapezio $ABCD$ inscritto nella semicirconferenza e determina la misura della base minore in modo che l'area del trapezio sia massima.
- Determina il massimo volume di un cono retto inscritto in una sfera di raggio r .

- Determina la massima area della superficie laterale di un cilindro retto inscritto in una sfera di raggio r .
- Determina l'area minima della superficie laterale di un cono retto circoscritto ad una sfera di raggio r .
- Dato un cono retto di raggio r e altezza h , trova raggio e altezza del cilindro inscritto avente area laterale massima e di quello avente volume massimo.
- Tra le piramidi quadrangolari regolari la cui superficie laterale ha area S , determina la misura dello spigolo di base di quella avente volume massimo.
- Tra le piramidi rette a base quadrata circoscritte ad una semisfera di raggio r , determina la misura dell'altezza di quella avente superficie totale di area minima e di quella di volume minimo.

4. Problemi di ottimizzazione risolti senza l'uso delle derivate

Lo studio dei problemi di ottimo è solitamente affrontato nella classe quinta unicamente come applicazione del calcolo differenziale, che è indubbiamente un valido metodo per risolvere i problemi di massimo e minimo, tuttavia è spesso visto dagli alunni come un insieme di regole automatiche da applicare in maniera meccanica e non come un'indagine critica, e si può appunto utilizzare solamente a partire dalla metà del quinto anno. Spesso inoltre i problemi di massimo e minimo hanno risoluzioni migliori, rispetto all'uso delle derivate, da un punto di vista dei tempi di calcolo, oltre al fatto che talvolta la funzione di cui ricercare l'ottimo è difficile da trovare.

È quindi importante avvicinare gli studenti ai problemi di ottimo fin dalle prime classi della scuola superiore, mostrando loro come si possano calcolare massimi e minimi richiesti in alcuni casi specifici senza l'utilizzo della derivata prima della funzione da ottimizzare, quindi utilizzando dimostrazioni di geometria sintetica o proprietà intrinseche della funzione stessa. Ad esempio è facile trovare che il massimo o il minimo di una parabola coincidono col suo vertice a seconda che la concavità sia negativa o positiva, e che il massimo o minimo di una funzione lineare di seno o coseno è visibile facilmente dal grafico (quando quindi la funzione è del tipo $a \cos x + b \sin x + c$, dato che essa è trasformabile, tramite metodo dell'angolo aggiunto, in una funzione del tipo $A \sin(x + \alpha) + c$).

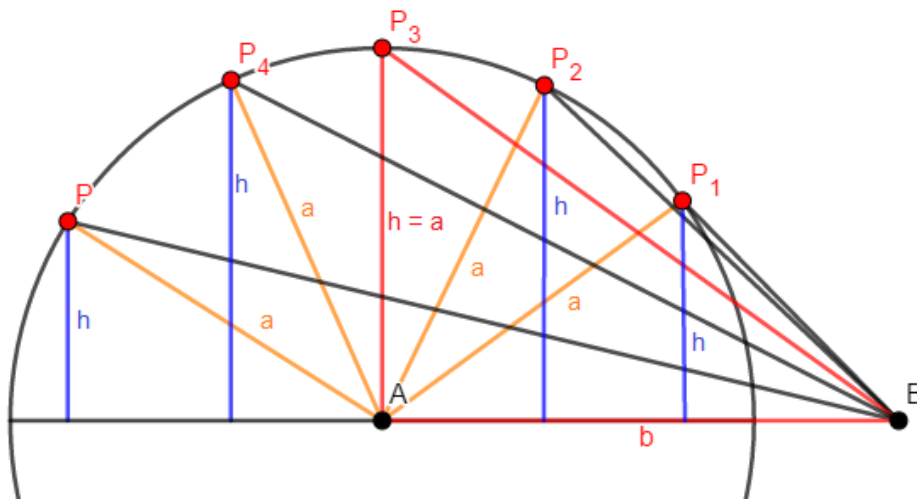
È importante proporre problemi di massimo e minimo che abbiano a che fare con la realtà, e che abbiano connessioni con la fisica terrestre, come i problemi di riflessione e rifrazione della luce, o della gittata massima, al fine di avvicinare gli studenti allo studio della matematica e abituarli al pensiero scientifico, e stimolare in essi la capacità di porsi domande a cui si possono dare risposte tramite le abilità acquisite a scuola nelle ore di matematica.

4.1. Problemi di ottimo legati alla geometria

4.1.1. Il problema del triangolo di area massima dati due lati

Si richiede di trovare il triangolo di area massima che si può ottenere assegnati due lati a e b . Consideriamo un triangolo qualsiasi con lati a e b e prendiamo b (di estremi A e B) come base; tracciamo la circonferenza di centro A e raggio a e prendiamo un punto P che facciamo variare sulla circonferenza.

Per ciascun punto P tracciamo il triangolo APB e ne tracciamo l'altezza h .



Ciascun triangolo avrà area $A = \frac{bh}{2}$, quindi, dato che la base è sempre il segmento \overline{AB} di lunghezza b , il triangolo di area massima sarà quello con l'altezza massima, che appare evidente essere quello in cui l'altezza coincide con il lato a , cioè quando il punto P si trova sulla circonferenza in modo che il segmento \overline{PA} sia perpendicolare al segmento \overline{AB} . Di conseguenza il triangolo di area massima dati due lati a e b sarà il triangolo rettangolo in cui a e b sono i cateti, ovvero nella figura soprastante sarà il triangolo ABP_3 . Tale dimostrazione si può utilizzare già in prima superiore.

Un secondo modo di trovare tale triangolo, affrontabile in quarta superiore con la trigonometria, è considerare l'area del triangolo come $A = \frac{ab}{2} \sin \alpha$, dove a e b sono due lati e α è l'angolo tra loro compreso.

L'angolo α , essendo la somma degli angoli interni di un triangolo pari a π , può assumere tutti i valori tra 0 e π (estremi non compresi, altrimenti il triangolo degenererebbe in un segmento), e noi sappiamo che all'interno di questo intervallo il seno assume valore massimo in corrispondenza di $\alpha = \frac{\pi}{2}$, di conseguenza anche l'area assume valore massimo in corrispondenza di $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dunque il triangolo cercato risulta essere rettangolo con a e b come cateti.

Questo è un ottimo problema per mostrare che, se si usa il calcolo differenziale, è di fondamentale importanza la scelta dell'incognita in funzione della quale impostare la funzione da ottimizzare.

Se considero con x il terzo lato del triangolo l'espressione dell'area in funzione di x sarà:

$$A(x) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-x)} = \sqrt{\left(\frac{a+b+x}{2}\right)\left(\frac{a+b+x}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+x}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+x}{2}-x\right)}$$

che appare una funzione la cui derivata è difficile e lunga da calcolare.

Se invece si sceglie di utilizzare l'angolo α come incognita torniamo all'espressione precedente:

$$A(\alpha) = \frac{ab}{2} \sin \alpha$$

semplicemente derivabile in:

$$A'(\alpha) = \frac{ab}{2} \cos \alpha$$

che se posta maggiore o uguale a 0 fa ottenere:

$$\cos \alpha \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

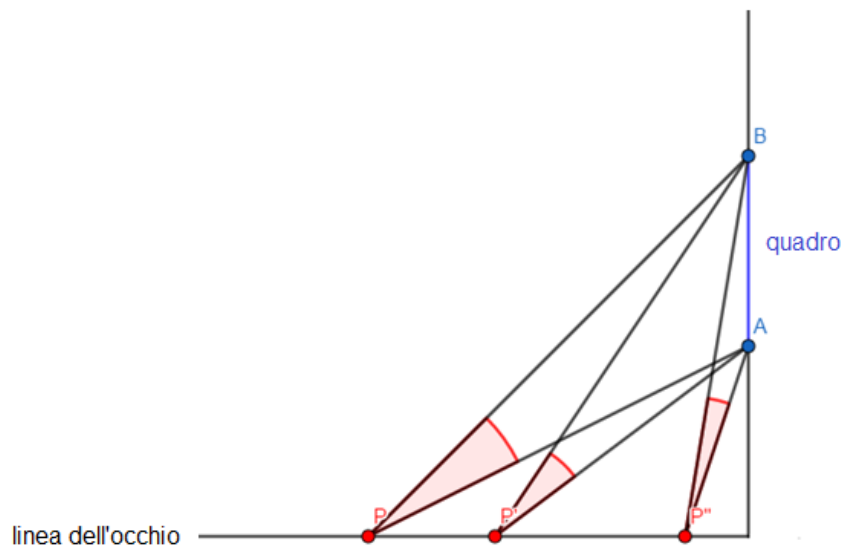
che limitato al fatto che α possa assumere solo valori tra 0 e π , non compresi, fa sì che

$$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

La funzione $A(\alpha)$ assume dunque valore massimo in $\frac{\pi}{2}$.

4.1.2. Il problema di Regiomontano

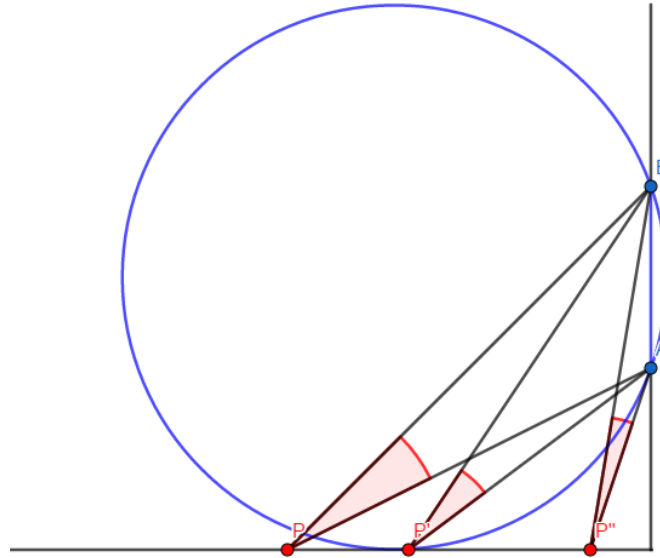
Il problema di Regiomontano è stato proposto da Johannes Muller (detto Regiomontano) nel XV secolo. Esso recita: “un dipinto è appeso ad un muro; data l’altezza del lato superiore e inferiore del quadro rispetto al piano di vista quanto deve valere la distanza dell’osservatore dal muro affinché sia massimo l’angolo sotteso dal dipinto e il cui vertice è l’occhio dell’osservatore?”



Sostanzialmente ci si chiede quale sia la posizione nella quale l’osservatore debba stare al fine di massimizzare l’angolo APB .

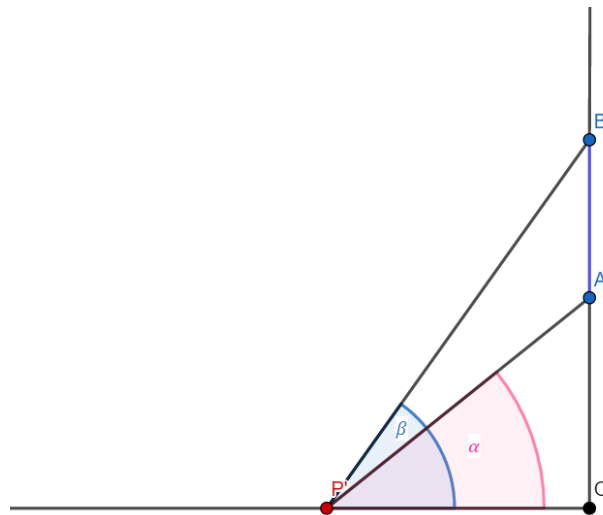
La soluzione si può facilmente trovare con considerazioni di geometria sintetica.

Esiste un unico cerchio passante per A e B e tangente al piano di vista. Se la posizione P dell’osservatore si muovesse lungo il cerchio l’angolo sotteso dal dipinto rimarrebbe costante poiché angolo alla circonferenza che insiste sulla stessa corda \overline{AB} . Tutte le posizioni sulla retta dell’osservatore tranne il punto di tangenza sono fuori dal cerchio, e pertanto per quei punti l’angolo sotteso dal quadro è minore.



Nella figura qui sopra l'angolo più grande è $\widehat{AP'B}$, poiché P' è il punto di intersezione del cerchio suddetto con la linea di vista.

Il problema si può risolvere anche con il calcolo differenziale. L'angolo che si deve massimizzare è $\beta - \alpha$, e, dato che la tangente matematica dell'angolo è una funzione crescente in $(0, \frac{\pi}{2})$, posso massimizzare la funzione tangente per trovare l'angolo in questione.

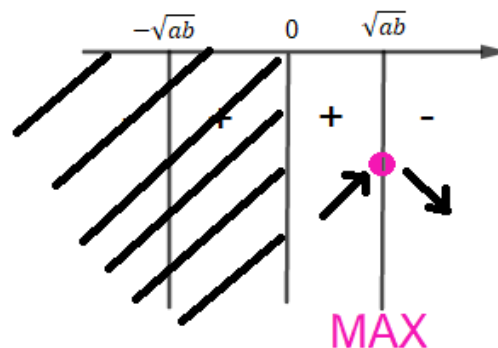


$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \tan\beta} = \frac{\frac{\overline{BO}}{\overline{OP'}} - \frac{\overline{AO}}{\overline{OP'}}}{1 + \frac{\overline{BO}}{\overline{OP'}} \frac{\overline{AO}}{\overline{OP'}}} = (\overline{BO} - \overline{AO}) \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP'}^2 + \overline{AOBO}}$$

Se chiamo $\overline{OP'} = x$, ottengo che $f(x) = (\overline{B\overline{O}} - \overline{A\overline{O}}) \frac{x}{x^2 + \overline{A\overline{O}} \overline{B\overline{O}}}$ è la funzione da massimizzare, quindi devo calcolarne la derivata e studiare dove questa si annulla. È sufficiente massimizzare la parte frazionaria dato che $(\overline{B\overline{O}} - \overline{A\overline{O}})$ è una costante positiva K . Ponendo $\overline{B\overline{O}} = b$ e $\overline{A\overline{O}} = a$ ottengo:

$$f'(x) = K \frac{ab - x^2}{(x^2 + ab)^2}$$

Studiando il segno della derivata ottengo: $ab - x^2 \geq 0$, quindi $-\sqrt{ab} \leq x \leq \sqrt{ab}$.



Abbiamo quindi un massimo in $x = \sqrt{ab}$, che è la media geometrica dell'altezza superiore ed inferiore del quadrato. Anche in questo caso si nota come la dimostrazione di geometria sintetica sia molto più veloce, e geometricamente più significativa, di quella che utilizza le derivate.

4.1.3. Il primo problema di massimo: il problema di Didone o isoperimetrico

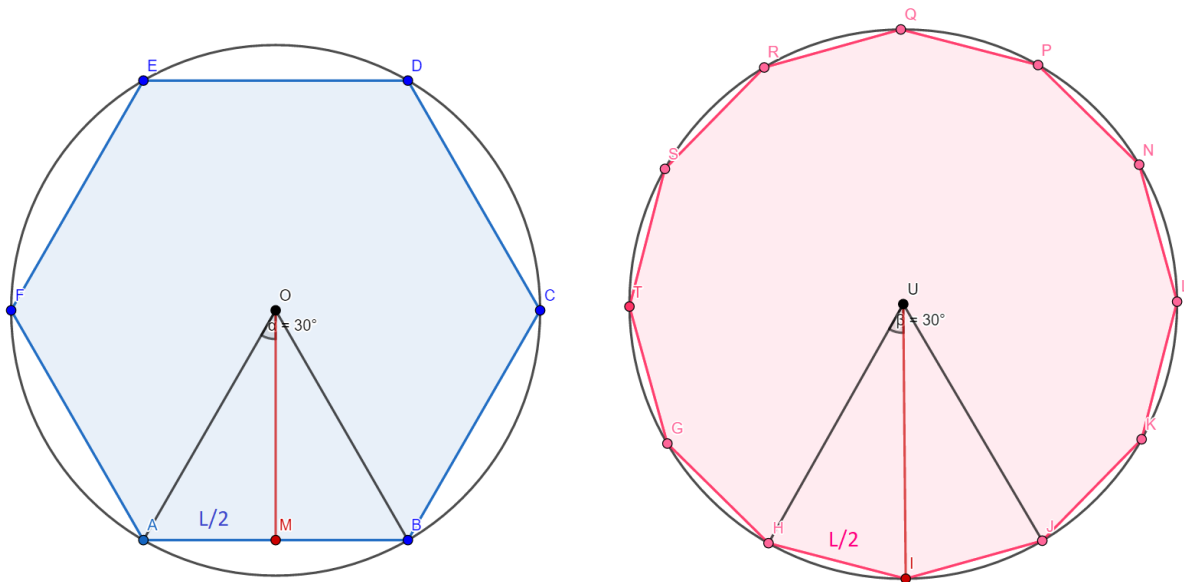
Abbiamo già parlato in precedenza del problema di Didone. Riformulandolo oggi potremmo chiederci quale sia la figura piana, con perimetro $2p$ assegnato, che racchiude l'area massima. Sarà un triangolo, un quadrato, un cerchio, o un poligono non regolare? Nel problema di Didone, essendoci l'impedimento della "costa" che spezzava a metà la figura cercata, la soluzione era il semicerchio; noi non imporremo tale limitazione. Tale problema si chiama problema isoperimetrico.

I greci avevano già intuito che la figura che risolveva questo problema fosse il cerchio, ma per anni non riuscirono a darne una dimostrazione rigorosa. Solo tra il 1838 e il 1841 il matematico tedesco

Steiner fornì la risoluzione con un approccio esclusivamente geometrico, e nel 1900 ne venne data una dimostrazione ricorrendo al calcolo differenziale.

Dimostrazione alla Steiner:

Supponiamo che esista la soluzione del problema degli isoperimetri, cioè che data una lunghezza $2p$ sia sempre possibile trovare una curva di tale lunghezza $2p$ che racchiuda l'area massima. Se consideriamo un esagono regolare di perimetro $2p$ inscritto in una circonferenza, notiamo che se dividiamo a metà i lati, di misura $L = p/3$, e "spostiamo" tali punti medi come se il perimetro dell'esagono fosse uno spago, otteniamo un nuovo poligono regolare di esattamente 12 lati (il doppio di prima), con area maggiore, ma sempre inferiore a quello della circonferenza in cui esso è inscritto: tale circonferenza sarà di area maggiore di quella in cui è inscritto l'esagono.



È facilmente dimostrabile che l'area del dodecagono regolare di lato $L/2$ è superiore a quella dell'esagono regolare di lato L . Consideriamo l'esagono regolare di lato $\overline{AB} = L$ e troviamo il punto medio M di \overline{AB} : avremo dunque che $\overline{AM} = L/2$. L'angolo \widehat{AOM} , con O centro della circonferenza in cui è inscritto l'esagono, è ovviamente pari a 30° , essendo un dodicesimo dell'angolo giro, di conseguenza, per le proprietà dei triangoli emiequilateri, l'altezza \overline{OM} del triangolo rettangolo AOM , è pari a $\sqrt{3}L/2$. L'area del triangolo rettangolo AOM sarà dunque:

$$A = \frac{1}{2} \overline{AO} \overline{OM} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}L^2}{8}$$

L'area dell'esagono regolare sarà pertanto 12 volte l'area del triangolo AOM , quindi:

$$A_{tot} = \frac{3\sqrt{3}L^2}{2}$$

Se ora consideriamo il dodecagono regolare di lato $\overline{HI} = L/2$, avremo che il raggio della circonferenza in cui esso è inscritto, ad esempio il segmento \overline{HU} , con U centro della circonferenza, non sarà più uguale al raggio precedente. L'area del triangolo HUI sarà pari a $\frac{1}{2}\overline{HU}^2 \sin 30^\circ$. Per trovare \overline{HU}^2 è sufficiente considerare il triangolo HUI , che non è più un triangolo rettangolo, bensì isoscele. L'angolo \widehat{HUI} è pari a 30° , essendo un dodicesimo dell'angolo giro, di conseguenza è possibile trovare facilmente il lato \overline{HU} tramite il teorema dei coseni; otteniamo così

$\overline{HU}^2 = \frac{L^2}{4(2-\sqrt{3})}$. L'area del triangolo rettangolo HUI sarà dunque:

$$A' = \frac{1}{2}\overline{HU}^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \frac{L^2}{4(2-\sqrt{3})} \frac{1}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})L^2}{16}$$

L'area del dodecagono regolare sarà pertanto 12 volte l'area del triangolo AOM , quindi:

$$A'_{tot} = \frac{3(2+\sqrt{3})L^2}{4}$$

Dato che $\frac{3(2+\sqrt{3})}{4} > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ abbiamo dimostrato che l'area del dodecagono regolare di lato la metà di quello di un esagono regolare è maggiore, quindi a parità di perimetro l'area aumenta all'aumentare del numero dei lati.

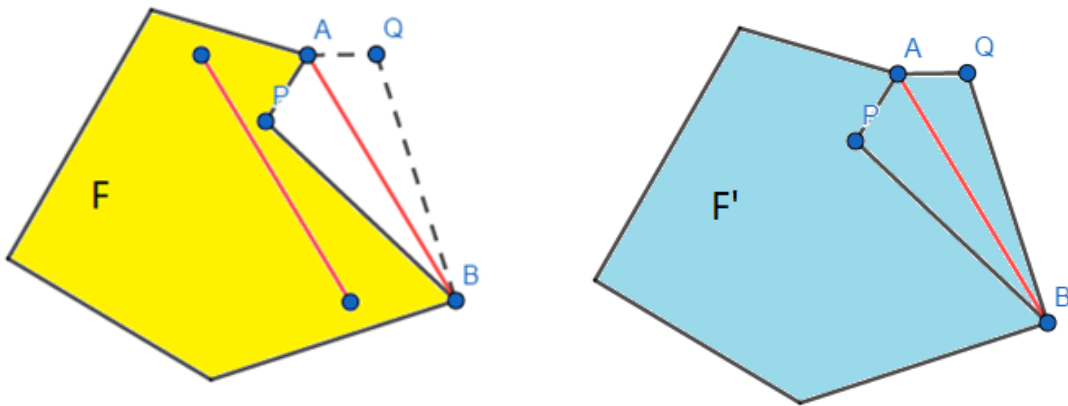
Se ripetiamo il procedimento otteniamo poligoni regolari con 24, 48, 96, ... $6n$ lati, tutti con perimetro comune, ma man mano di area maggiore. Ciascuno dei poligoni considerati ha comunque area minore di quella del cerchio delimitato dalla circonferenza di lunghezza uguale al perimetro costante $2p$ dei poligoni. Tale cerchio è quindi la figura di area massima, tra quelle il cui contorno ha misura fissata.

Ammissa quindi l'esistenza della figura cerchiamo di capire quale sia.

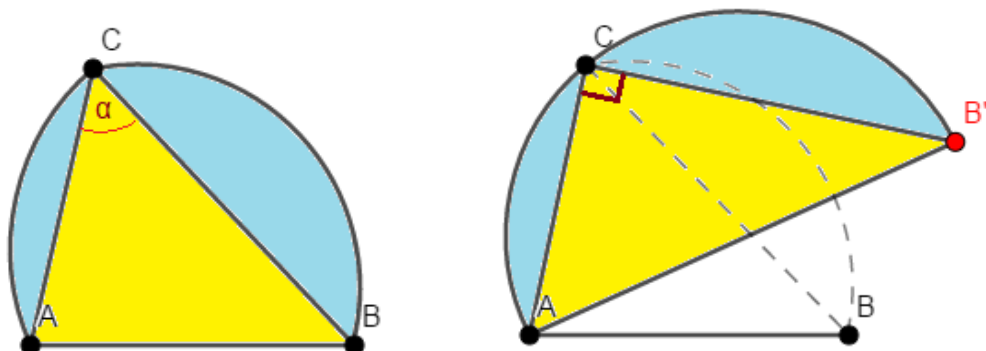
Dobbiamo dimostrare che la figura cercata deve essere convessa, e lo facciamo per assurdo.

Supponiamo per assurdo che la figura F soluzione del problema non sia convessa, quindi esisterà almeno una concavità, cioè esisterà un segmento \overline{AB} che congiunge due punti A e B della figura, che non sia interamente contenuto in F . Con una traslazione possiamo fare in modo che gli estremi del segmento cadano sul bordo di F , e che quindi l'intero segmento stia al di fuori di F .

Ribaltiamo simmetricamente l'arco APB di F rispetto ad \overline{AB} : si ottiene l'arco AQB che ha la stessa lunghezza di APB , quindi la figura F e la nuova figura F' hanno lo stesso perimetro ma la seconda ha area maggiore. Questo è assurdo perché F è già la figura di area massima; ciò dimostra che la figura soluzione del problema di Didone non può essere concava, deve perciò essere convessa.



Sia dunque F la figura che risolve il problema di Didone. Prendiamo sul bordo di F un punto C e consideriamo il triangolo ABC , dimostriamo che è rettangolo in C . Se considero il punto C e traccio i segmenti \overline{AC} e \overline{BC} l'area di F si divide in tre parti. Se per assurdo l'angolo in C non fosse retto, potremmo muovere le due regioni "esterne" di F spostando solo il punto B finché l'angolo in C non sarà rettangolo. In tale manovra, detta manovra di Steiner, non si alterano le lunghezze dei lati \overline{AC} e \overline{BC} , ma dato che l'area di un triangolo con due lati assegnati è massima quando l'angolo tra loro compreso è retto, l'area del triangolo ACB' sarà maggiore di quella del triangolo ACB . Tuttavia, l'area delle due regioni di F "esterne" al triangolo non è cambiata durante la manovra, quindi l'area complessiva della figura F risulterà aumentata, ma questo non è possibile perché F era già la figura di area massima. Pertanto, il triangolo ACB deve essere rettangolo, e questo succede quando \overline{AB} coincide col diametro di una semicirconferenza e C è un punto su di essa.



Come ultima parte della dimostrazione si vuole provare che la figura che risolve il problema isoperimetrico è il doppio della figura che risolve il problema di Didone, ovvero la circonferenza. Infatti, se F è la figura che risolve il problema isoperimetrico, se consideriamo una retta r che divide in due parti uguali il contorno di F , allora la retta r divide in due parti uguali anche l'area racchiusa da F . Se supponiamo per assurdo che una parte sia più grande dell'altra, e la simmetrizziamo rispetto ad r , otteniamo che la figura complessiva avrà area maggiore di F (che dovrebbe già essere quella con area maggiore) pur avendo lo stesso perimetro. Ciò è assurdo. Di conseguenza la figura che risolve il problema isoperimetrico è proprio la circonferenza.

4.1.4. Il problema dei triangoli isoperimetrici

Ci chiediamo quale sia il triangolo di area massima avente un certo perimetro assegnato $2p$.

Utilizziamo il metodo delle disuguaglianze per risolvere questo problema.

Sia p la misura del semiperimetro, e x, y, z le misure dei lati, allora: $p = \frac{x+y+z}{2}$.

L'area sarà dunque data dalla formula di Erone: $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$.

Vogliamo determinare il valore massimo di A quando x, y e z assumono tutti quei valori positivi per i quali risulta soddisfatta l'equazione $2p = x + y + z$.

Possiamo considerare la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica, presi i tre numeri non negativi $p-x, p-y, p-z$ si avrà:

$$\sqrt[3]{(p-x)(p-y)(p-z)} \leq \frac{(p-x) + (p-y) + (p-z)}{3} = \frac{3p-x-y-z}{3} = \frac{3p-2p}{3} = \frac{p}{3}$$

Quindi, elevando ambo i membri al cubo, si ottiene:

$$(p-x)(p-y)(p-z) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Quindi:

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \leq \sqrt{\left[p\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} = \sqrt{\left(\frac{p^4}{3^3}\right)} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

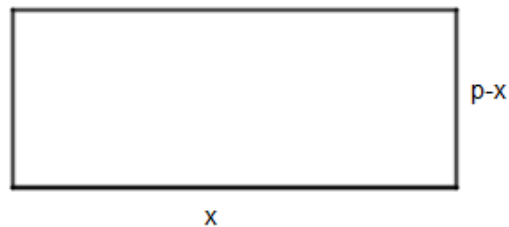
In questa disequazione vale il segno di uguaglianza se e solo se $p - x = p - y = p - z$, cioè se e solo se $x = y = z$, cioè se e solo se il triangolo è equilatero.

Abbiamo quindi dimostrato che tra tutti i triangoli di dato perimetro, quello equilatero è quello di area massima.

4.1.5. Il problema dei rettangoli isoperimetrici

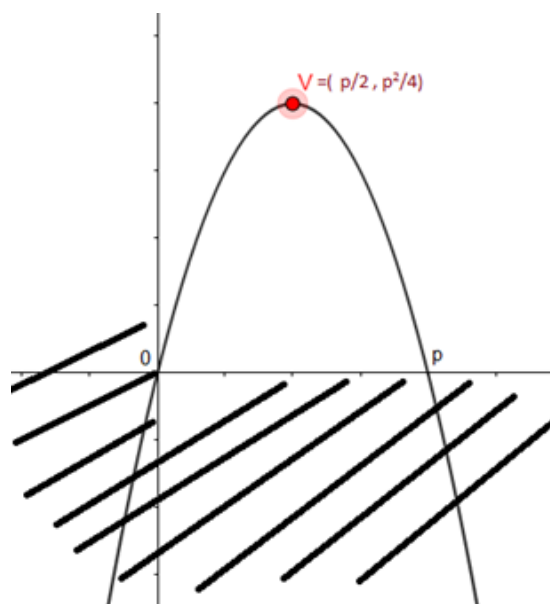
Si richiede di trovare tra tutti i rettangoli di dato perimetro $2p$ quello di area massima.

Questo è uno dei problemi di ottimo più antichi, ed è facilmente risolvibile già in seconda o terza superiore, dopo aver affrontato lo studio della parabola in geometria analitica.



Infatti, è sufficiente chiamare con x un lato, di conseguenza l'altro lato sarà $p - x$, e si ottiene facilmente l'area in funzione di x , che è:

$$A(x) = x(p - x) = -x^2 + px$$



Tale funzione è una parabola con asse parallelo all'asse y e concavità rivolta verso il basso, chiaramente limitata tra 0 e p . Il massimo della funzione è pertanto il vertice, che si ottiene in $x = \frac{p}{2}$, ovvero quando ogni lato del quadrilatero è $\frac{1}{4}$ del perimetro, pertanto il rettangolo in questione è un quadrato.

Tale problema si può risolvere anche con il metodo delle disuguaglianze. Se si chiamano i due lati con x e y sarà $2p = 2x + 2y$ e $A = xy$. Appare chiaro che deve essere $0 \leq x \leq p$ e $0 \leq y \leq p$. Di conseguenza l'area A del rettangolo non può assumere valori arbitrariamente grandi, sicuramente dovrà essere $0 \leq xy \leq p^2$.

Utilizziamo la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica di due numeri, secondo la quale, se x e y sono numeri non negativi, si ha:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Di conseguenza risulta:

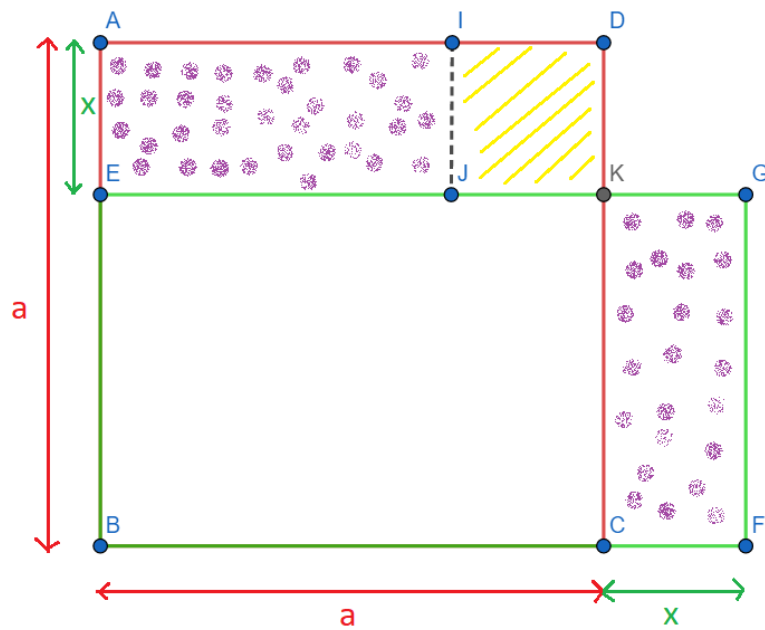
$$\frac{p}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Quindi:

$$\frac{p^2}{4} \geq xy = A$$

Questo valore limite dell'area viene raggiunto se e solo se $x = y$; per tutte le altre coppie soddisfacenti le condizioni iniziali l'area è minore, di conseguenza il rettangolo di area maggiore, considerato un dato perimetro, è il quadrato.

Un ulteriore metodo per dimostrare che è il quadrato ad essere il rettangolo isoperimetrico di maggiore area è il seguente: consideriamo un quadrato $ABCD$ di lato a (di perimetro quindi $4a$), e costruiamo il rettangolo $EBFG$ ottenuto aumentando un lato del quadrato di una misura x , e diminuendo l'altro lato della stessa quantità x .



Otteniamo così un rettangolo di misure $a + x$ e $a - x$, la cui area sarà pertanto

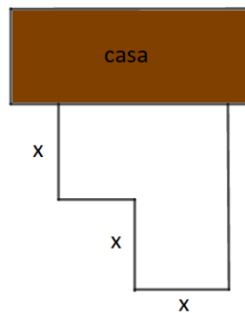
$A = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2$. Questo dimostra che l'area del quadrato (a^2) sarà sempre in eccedenza rispetto all'area del rettangolo, di un valore x^2 , ovvero dell'area del quadrato $IJKD$. I due rettangoli $AEIJ$ e $KCFG$ sono infatti equivalenti, aventi entrambi dimensioni x ed $a - x$, quindi l'area del rettangolo $EBCF$ è equivalente all'area del poligono $ABCKJI$.

Vista la facilità delle dimostrazioni sopra riportate, si deduce quanto sia poco conveniente utilizzare il metodo delle derivate.

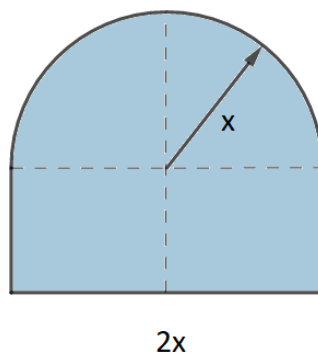
Si può dedurre, dai due problemi precedenti, che un poligono con n lati e perimetro $2p$ abbia area massima quando ciascun lato valga $\frac{2p}{n}$, quindi quando tale poligono sia regolare.

Altri problemi che utilizzano il metodo del vertice della parabola come individuazione del massimo o minimo riguardano sia problemi algebrici che geometrici, ad esempio:

- Qual è il massimo prodotto che si può ottenere moltiplicando due numeri la cui somma è 26? Quali sono i due numeri il cui prodotto è massimo?
- Qual è il minimo prodotto che si può ottenere moltiplicando due numeri che differiscono di 7? Quali sono i due numeri il cui prodotto è minimo?
- Si vuole costruire un recinto della forma in figura attorno ad una casa, avendo a disposizione 60 metri di rete. Indicata con x la lunghezza dei lati in figura, trova per quali valori di x si ottiene il recinto di area massima.



- Una finestra è costituita da un rettangolo, sormontato da un semicerchio, di diametro coincidente con un lato del rettangolo. Supponendo che il perimetro della finestra sia 30m, trovare x in modo che dalla finestra entri la massima luce possibile (ovvero sia della massima area possibile).

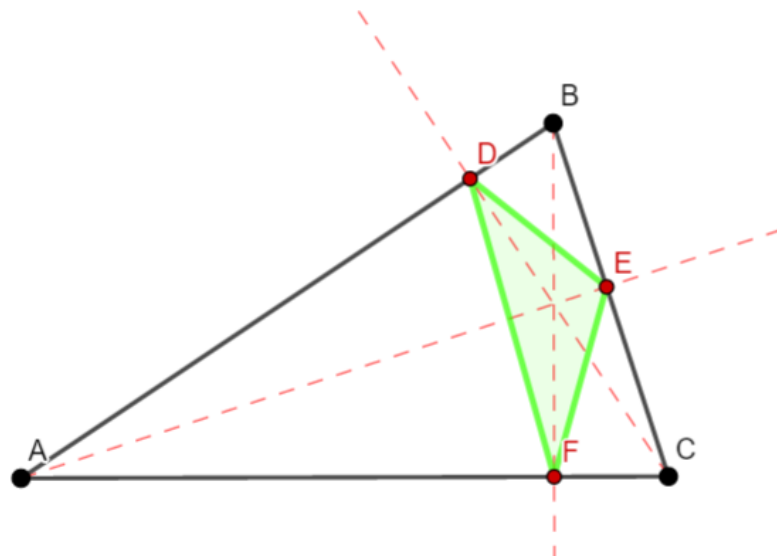


- Una compagnia di autobus vorrebbe aumentare il costo del biglietto, che attualmente è di 1 euro. Secondo una ricerca di mercato, si stima che il numero degli utenti che quotidianamente utilizzano l'autobus diminuirebbe di 250 unità per ogni incremento del biglietto di 25 centesimi. Attualmente la compagnia ha una media di 4000 passeggeri al giorno. Qual è il prezzo del biglietto che ottimizza l'incasso giornaliero?
- Una compagnia aerea decide di stabilire il prezzo del biglietto di un volo (per persona) nel seguente modo: 200 euro più 10 euro per ogni posto che resterà libero. L'aereo dispone di 150 posti. Quanti posti devono restare liberi perché la compagnia ottenga il massimo ricavo?
- Un filo lungo 20 cm viene tagliato in due parti. Con i due pezzi ottenuti si formano due quadrati. In quale punto bisogna tagliare il filo perché la somma delle aree dei quadrati sia minima?
- In una città di 15000 abitanti la velocità di propagazione di un virus influenzale, espressa in termini del numero di nuovi casi registrati al giorno, è direttamente proporzionale al prodotto tra il numero degli individui infetti e il numero di individui non infetti. Quando il 20% della popolazione è infetta, il virus si propaga alla velocità di 400 nuovi casi al giorno. Qual è la massima velocità di propagazione del virus?
- Determina il punto P, sull'asse y, in corrispondenza del quale è minima la somma dei quadrati delle distanze di P da $A = (-4,0)$ e $B = (2,1)$.
- Scrivi l'equazione della parabola passante per $A = (-1,0)$ e $B = (0,2)$ tangente in B alla retta di equazione $y = 3x + 2$. Sull'arco AB di parabola determina il punto P in modo che l'area del triangolo APB sia massima.
- Determina i vertici del rettangolo di perimetro massimo (avente i lati paralleli agli assi cartesiani) inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ e dall'asse x.

4.1.6. Il problema del triangolo di minimo perimetro

Dato un triangolo acutangolo, qual è il triangolo inscritto in esso con perimetro minimo?

Schwarz risolse il problema alla fine del XIX secolo, dimostrando che tale triangolo è quello che ha per vertici i piedi delle tre altezze del triangolo acutangolo di partenza. Tale triangolo viene detto ortico. Se immaginiamo che i lati del triangolo ABC siano specchi, il triangolo ortico DEF è l'unico percorso chiuso che un raggio di luce può compiere toccando una sola volta ogni specchio.



Vediamo come poterlo dimostrare efficacemente, in un modo facilmente comprensibile dagli alunni.

Per prima cosa bisogna dimostrare una particolare proprietà del triangolo ortico, ovvero che le altezze del triangolo acutangolo ABC sono le bisettrici del triangolo ortico DEF .

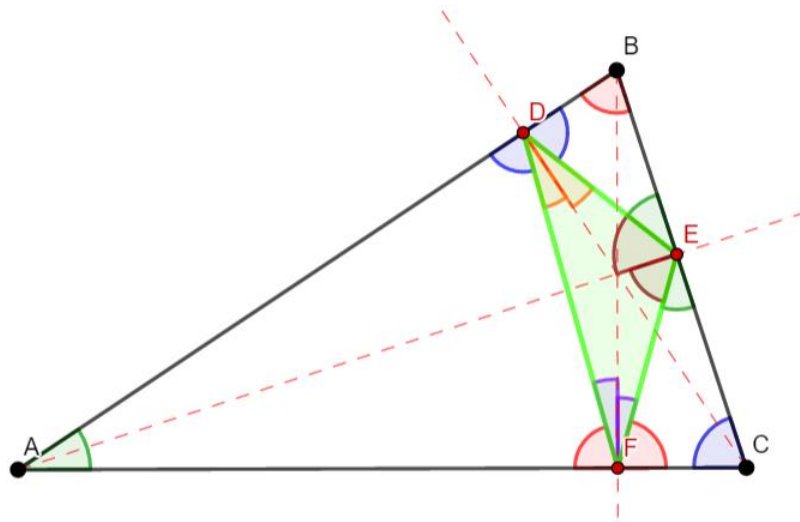
Per farlo consideriamo i triangoli rettangoli ABE e BCD , che avendo l'angolo \hat{B} in comune, sono simili. Quindi si può dire che $\overline{AE} : \overline{CD} = \overline{BE} : \overline{BD}$. Sappiamo anche che \overline{AE} e \overline{CD} sono altezze rispettivamente delle basi \overline{BC} e \overline{AB} , dunque si può dire che $\overline{AE} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{BC}$. Combinando insieme le due proporzioni otteniamo che

$$\overline{BE} : \overline{BD} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

Da questa proporzione si evince che i triangoli BDE e ABC sono simili, dato che hanno anche l'angolo \hat{B} in comune.

Operando le stesse considerazioni possiamo notare che i triangoli FEC e ABC sono simili, così come i triangoli ADF ed ABC .

In particolare si ha che $\widehat{EFC} = \widehat{CBA} = \widehat{DFA}$, $\widehat{BCA} = \widehat{BDE} = \widehat{FDA}$ e $\widehat{BED} = \widehat{CEF} = \widehat{CAB}$.



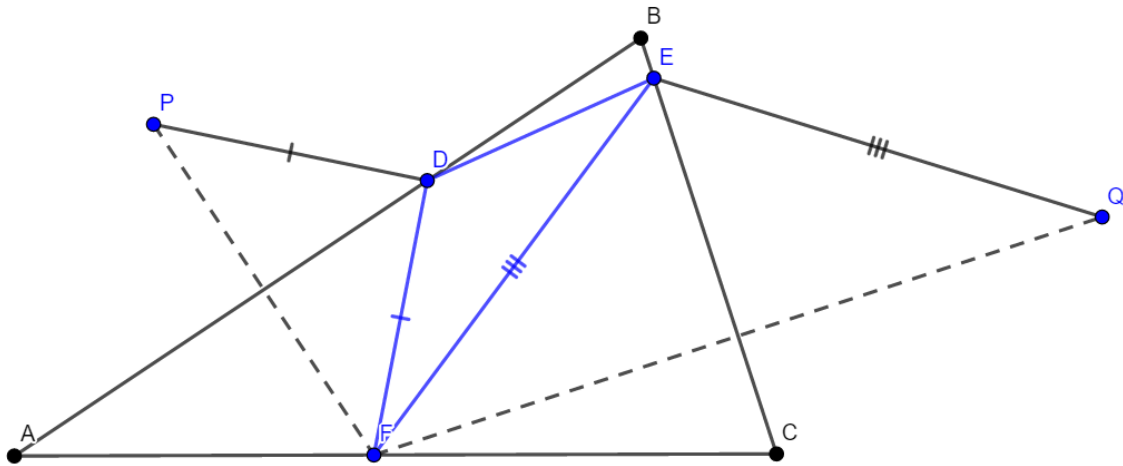
Consideriamo gli angoli \widehat{BEA} e \widehat{CEA} : essi sono retti, dato che \overline{AE} è altezza del lato \overline{BC} . Di conseguenza $\widehat{DEA} = \widehat{FEA}$, per differenza di angoli congruenti (o perché complementari di angoli congruenti).

Analogamente $\widehat{EDC} = \widehat{CDF}$ e $\widehat{DFB} = \widehat{BFE}$.

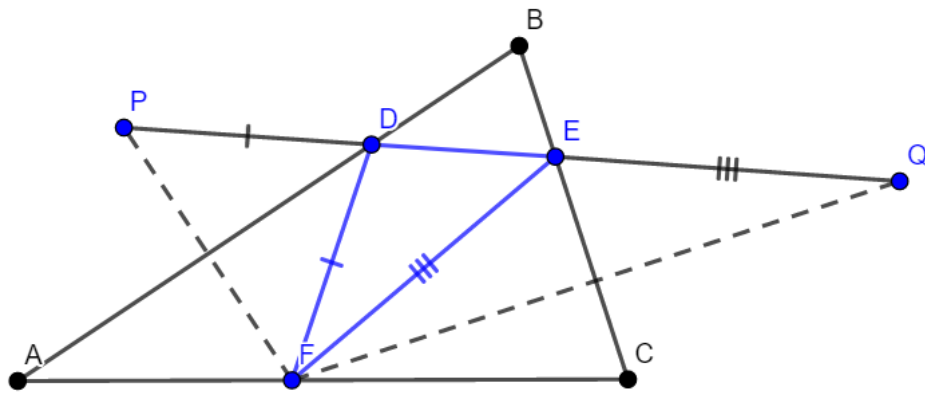
Abbiamo quindi dimostrato che le altezze del triangolo ABC sono le bisettrici dei vertici del triangolo ortico DEF .

Passiamo ora a dimostrare il teorema vero e proprio, ovvero che se ABC è triangolo acutangolo allora il perimetro minimo di un triangolo inscritto all'interno di ABC è quello del triangolo ortico DEF .

Fissiamo nel triangolo ABC un punto F sul lato \overline{AC} e inscriviamo un triangolo qualsiasi DEF all'interno del triangolo ABC . Indichiamo con P e Q i simmetrici di F rispetto ad \overline{AB} e a \overline{BC} : di conseguenza avremo $\overline{PD} = \overline{DF}$ e $\overline{FE} = \overline{EQ}$.



Il perimetro del triangolo DEF , che sarebbe $\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FD}$, è quindi uguale a $\overline{DE} + \overline{EQ} + \overline{PD}$. Chiaramente questa somma di distanze sarà minima quando P, D, E, Q sono allineati, quindi il triangolo minimo tra i triangoli inscritti in ABC avente un vertice in F sarà quello in cui si prendono i punti D ed E come intersezione dei lati \overline{AB} e \overline{BC} con la retta congiungente i punti P e Q simmetrici di F rispetto ad \overline{AB} e \overline{BC} stessi.

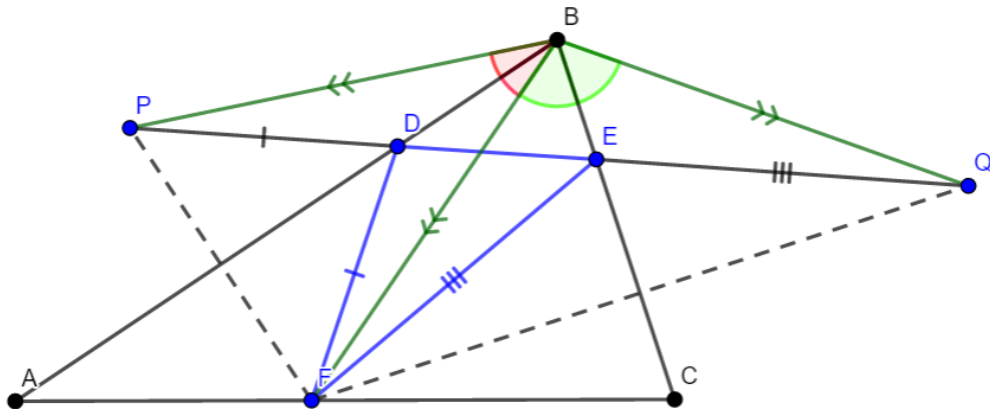


Ora bisogna vedere qual è la posizione di F che minimizza il perimetro del triangolo inscritto.

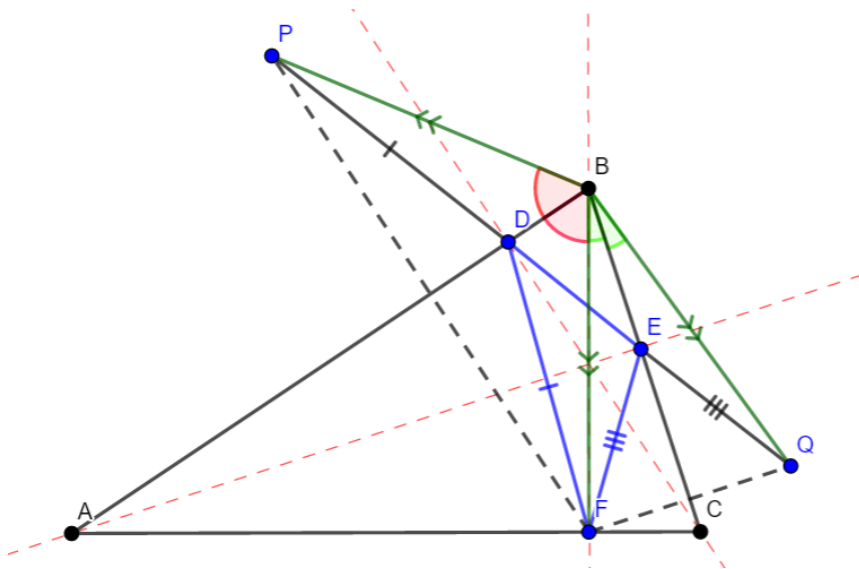
Tracciamo i segmenti \overline{BP} , \overline{BF} e \overline{BQ} : i triangoli PBF e FBQ sono isosceli, e, dato che $\overline{PB} = \overline{BF} = \overline{BQ}$, il triangolo PBQ è isoscele anch'esso, sulla base \overline{PQ} , indipendentemente dalla scelta del punto F .

Il lato \overline{BA} è la bisettrice dell'angolo \widehat{FBP} , e \overline{BC} è la bisettrice dell'angolo \widehat{FBQ} , quindi $\widehat{PBD} = \widehat{DBF}$ e $\widehat{FBE} = \widehat{EBQ}$, quindi l'angolo \widehat{PBQ} è il doppio dell'angolo \widehat{ABC} . Dato che l'angolo \widehat{ABC} non cambia, non cambia neanche l'angolo \widehat{PBQ} , indipendentemente dalla posizione del punto F .

Noi sappiamo già che la lunghezza della base \overline{PQ} è la stessa del perimetro del triangolo DEF da minimizzare.



Essendo l'angolo \widehat{PBQ} di ampiezza fissata se ne deduce che la lunghezza della base \overline{PQ} è minima quando la lunghezza degli altri due lati \overline{BP} e \overline{BQ} è minima, ma dato che \overline{BP} e \overline{BQ} sono congruenti col lato \overline{BF} , essi saranno di lunghezza minima quando \overline{BF} stesso è di lunghezza minima, e ciò avviene quando \overline{BF} è perpendicolare al lato \overline{AC} , cioè coincide con la sua altezza. Il triangolo inscritto di perimetro minimo è dunque quello che si ottiene prendendo come punto F il piede della perpendicolare condotta da B su \overline{AC} , e come D ed E le intersezioni di \overline{PQ} con \overline{AB} e \overline{BC} .



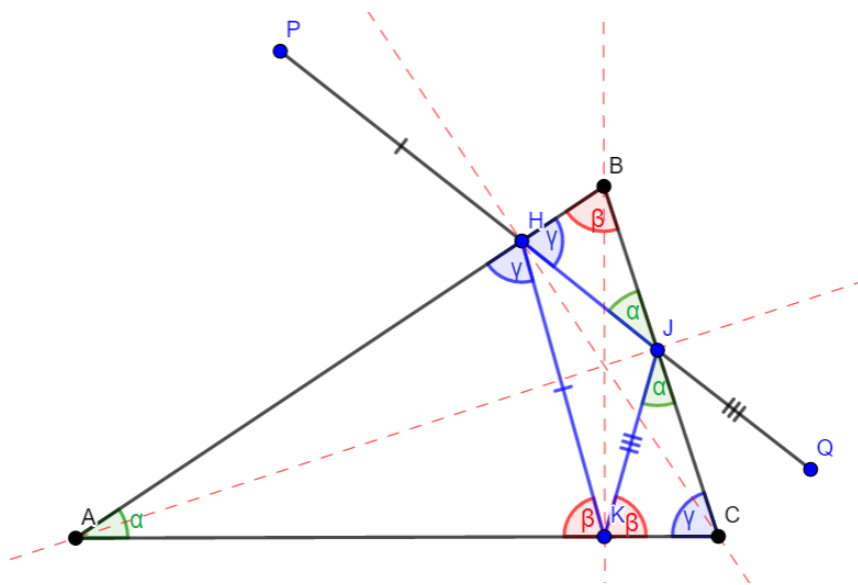
Ora bisogna solo dimostrare che effettivamente il DEF trovato è il triangolo ortico di ABC , cioè che anche D ed E sono i piedi delle perpendicolari di C su \overline{AB} e di A su \overline{BC} .

Consideriamo il triangolo ortico HJK . Sappiamo che $\widehat{CKJ} = \beta$ e $\widehat{KJC} = \widehat{BJH} = \alpha$, allora $\widehat{KJH} = \pi - 2\alpha$. Essendo Q il simmetrico di K rispetto a \overline{BC} risulta che $\widehat{QJK} + \widehat{KJH} = 2\alpha + \pi - 2\alpha = \pi$, quindi i punti Q, J e H sono allineati.

Analogamente sappiamo che $\widehat{AKH} = \beta$ e $\widehat{AHK} = \widehat{BHJ} = \gamma$, quindi $\widehat{JHK} = \pi - 2\gamma$. Essendo P il simmetrico di K rispetto ad \overline{AB} risulta che $\widehat{PHK} + \widehat{KHJ} = 2\gamma + \pi - 2\gamma = \pi$, quindi i punti P, H e J sono allineati.

Abbiamo dunque dimostrato che i quattro punti P, H, J e Q sono allineati, di conseguenza i punti H e J coincidono con i punti D ed E della costruzione precedente.

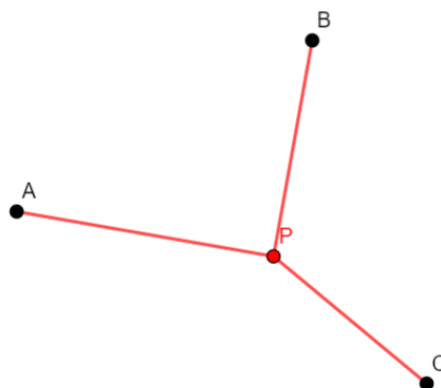
Il triangolo DEF è dunque il triangolo ortico di ABC .



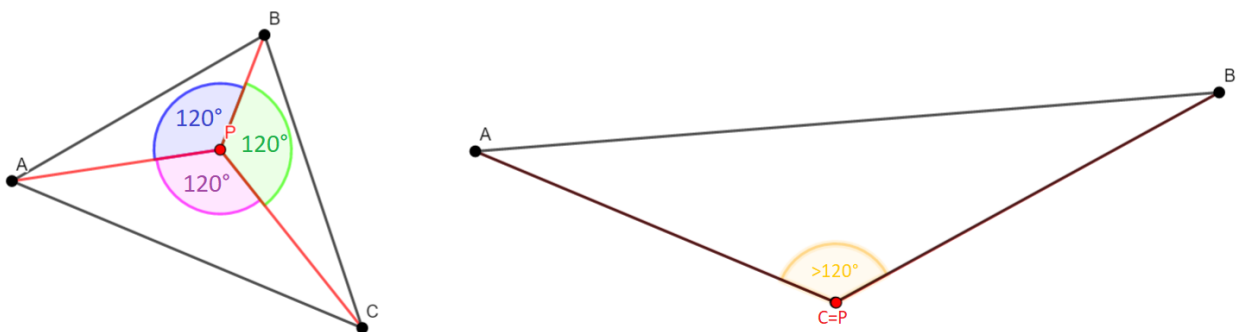
4.1.7. Il problema della rete stradale

Dati tre villaggi, qual è la più corta tra tutte le reti stradali che li collegano?

Ovvero: dati tre punti A, B, C qual è il punto P tale per cui la somma delle distanze \overline{AP} , \overline{BP} e \overline{CP} è minima?



Il problema fu proposto per la prima volta da Pierre de Fermat nel XVII secolo in una lettera che inviò ad Evangelista Torricelli, e quest'ultimo trovò la soluzione. Torricelli disse che il punto P (chiamato per ovvie ragioni punto di Torricelli-Fermat) doveva stare nella posizione in cui i tre segmenti formano tra loro angoli di 120° , oppure, se uno degli angoli del triangolo ABC è maggiore di 120° , il punto P deve coincidere con uno dei tre punti A, B o C. Il punto di Torricelli-Fermat è oggi considerato un punto notevole del triangolo, così come il baricentro, l'ortocentro, l'incentro e il circocentro.



Questo tipo di minimizzazione viene seguito anche in natura, ad esempio dalle lamine di liquido saponoso, che si dispongono tra loro in modo da formare angoli diedri di 120° , così da ridurre al minimo la tensione superficiale.

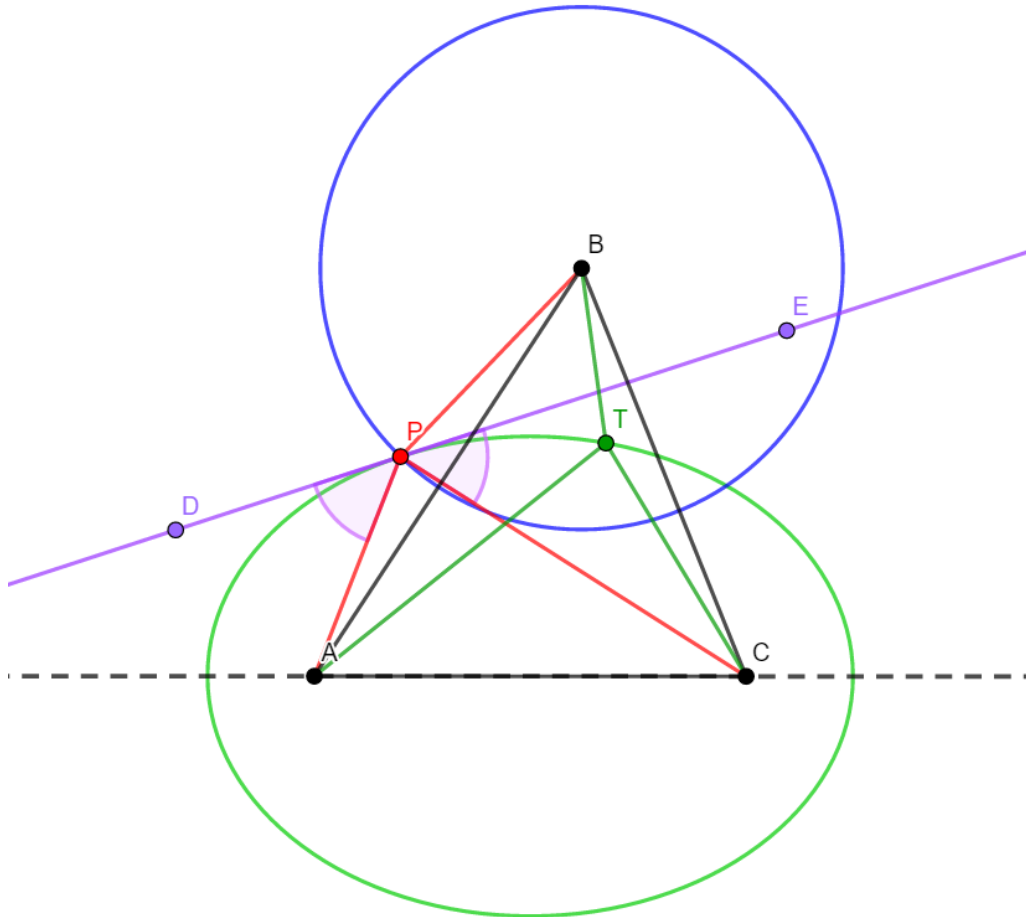
Nel secolo successivo il problema venne generalizzato da Steiner ad n punti da collegare, ovvero trovare una rete di segmenti connessi tra loro, tale per cui la somma delle lunghezze di questi segmenti sia minima, chiamata "rete minima". La soluzione è tanto più difficile quanto più n cresce, ed è fortemente condizionata dalla disposizione dei punti stessi. Questo tipo di considerazioni viene utilizzata per costruire reti elettriche, idriche, telefoniche. Il matematico Melzak creò un algoritmo per trovare la rete di lunghezza minima in un finito numero di passaggi; questo algoritmo ha però un costo computazionale molto elevato. Quando n cresce troppo i tempi di risoluzione crescono esponenzialmente, e quindi il problema diventa intrattabile.

Propongo qui una buona dimostrazione, presentabile agli studenti alla fine della terza superiore.

Teniamo presente che questa dimostrazione, per assurdo, vale per triangoli acutangoli, quindi non vale per triangoli che abbiano un angolo ottuso o per triangoli degeneri, quelli cioè in cui A, B e C sono allineati.

Siano dati tre punti A, B, C e un quarto punto P tale che $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ sia la minima possibile, allora i tre angoli \widehat{APB} , \widehat{BPC} , \widehat{CPA} sono uguali.

Per assurdo supponiamo che P sia il punto di distanza minima, tale che $\widehat{APB} \neq \widehat{BPC}$.

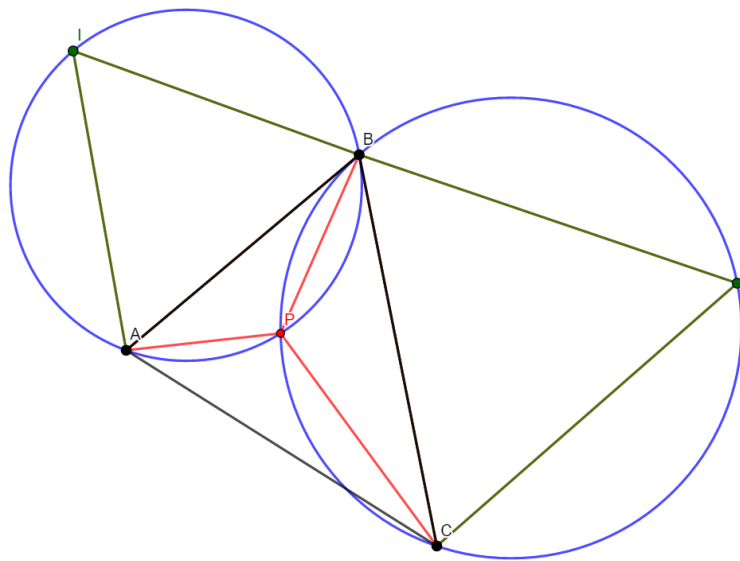


Si costruisca l'ellisse con fuochi A e C e passante per il punto P, e si conduca la tangente in P all'ellisse. Presi un punto D e un punto E su tale tangente, da parti opposte di P, si ha quindi che $\widehat{DPA} = \widehat{EPC}$, dunque, dato che $\widehat{APB} \neq \widehat{BPC}$, si avrà che $\widehat{BPD} \neq \widehat{BPE}$.

Si tracci ora la circonferenza di centro B e raggio \overline{PB} e si consideri un punto T qualsiasi appartenente all'ellisse e giacente all'interno di questa circonferenza. Sicuramente avremo $\overline{TB} < \overline{PB}$, dato che \overline{PB} è il raggio della circonferenza e T è un punto interno alla circonferenza con tale raggio. Avremo inoltre che $\overline{TA} + \overline{TC} = \overline{PA} + \overline{PC}$, dato che P e T sono entrambi punti dell'ellisse.

Si è quindi trovato un punto T tale per cui $\overline{TA} + \overline{TB} + \overline{TC} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$, ma P era per ipotesi il punto di distanza minima, si ottiene quindi l'assurdo.

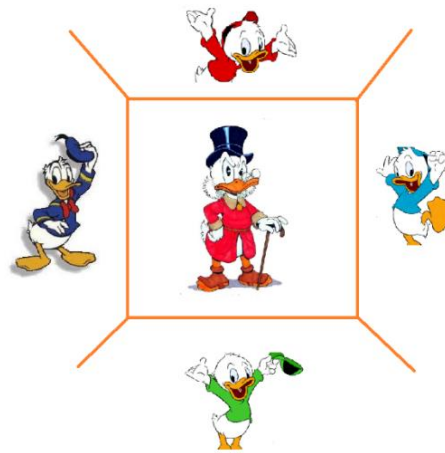
Appurato che se A , B e C sono i vertici di un triangolo acutangolo allora il punto P che minimizza le distanze è quello per cui i segmenti \overline{PA} , \overline{PB} e \overline{PC} formano angoli tra loro di 120° , è consigliabile mostrare agli alunni un semplice metodo per individuare tale punto P . Costruiamo sui lati \overline{AB} e \overline{BC} due triangoli equilateri ABI e BCJ . Costruiamo la circonferenza che passa per i punti A , B ed I e quella che passa per i punti B , C e J . Queste due circonferenze si incontreranno nel punto B e nel punto P cercato. Infatti, i segmenti \overline{PA} , \overline{PB} e \overline{PC} formeranno tra loro angoli uguali, dato che, essendo l'angolo \widehat{BCJ} e l'angolo \widehat{BAI} di 60° , allora gli angoli \widehat{BPC} e l'angolo \widehat{BPA} saranno di 120° . Essi sono infatti angoli alla circonferenza sottesi dalla stessa corda ma su parti opposte dell'arco di circonferenza.



Tuttavia, quando uno qualsiasi dei tre angoli del triangolo ABC è maggiore di 120° , il punto P della figura precedente non può essere trovato, dato che altrimenti la somma degli angoli interni di due triangoli sarebbe maggiore di quattro retti. In questo caso il punto P cercato coinciderà con uno qualsiasi dei tre punti del triangolo: A , B o C .

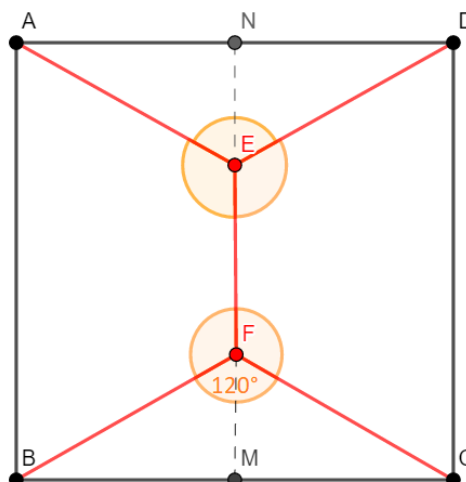
4.1.8. Il problema del quadrato opaco

Il proprietario di un terreno non vuole che i suoi quattro vicini di casa, con lui confinanti, comunichino fra di loro attraverso la sua proprietà. Egli ha comprato casa da poco e vorrebbe vivere nella quiete, mentre i quattro non fanno altro che chiacchierare attraverso il suo terreno, disinteressandosi della sua presenza. Questo fatto lo innervosisce molto, così decide di costruire un muro all'interno del suo terreno in modo da impedire ai vicini di comunicare tra loro. Vuole farlo al minor costo possibile, quindi vuole che il muro sia il più corto possibile.



Questo problema equivale quindi a trovare il cammino più corto che connette quattro punti tra loro, ed è quindi a tutti gli effetti un problema di ottimizzazione. Per questo problema sono state trovate due soluzioni, una con un muro connesso e una con un muro non connesso.

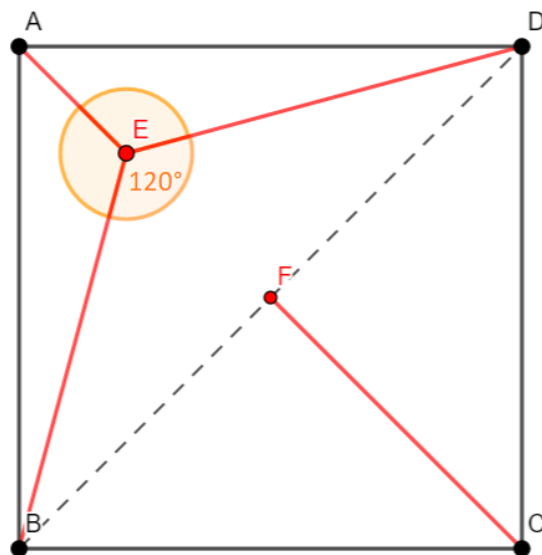
La soluzione del muro connesso è stata trovata da Steiner, e riprende la soluzione del problema della minima rete stradale. Infatti, gli angoli che formano i "nodi" dei vari pezzi di muro sono proprio angoli di 120° .



Si considera un quadrato di lato unitario. Utilizzando le proprietà del triangolo $30^\circ-60^\circ$ possiamo trovare la lunghezza del muro, infatti possiamo calcolare facilmente il lato \overline{BF} e il lato \overline{FM} , da cui poi si può calcolare \overline{EF} .

Dato che \overline{BM} è la metà del lato \overline{BC} avremo che $\overline{BM} = \frac{1}{2}$. A questo punto si avrà subito che $\overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $\overline{BF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Quindi $\overline{EF} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. Allora il muro sarà lungo in totale $1 + \sqrt{3}$.

Una soluzione del muro non connesso è stata trovata da Poirier, che ha seguito i suggerimenti di alcuni suoi alunni di scuola secondaria di secondo grado. Anche questa soluzione chiama in causa gli angoli di 120° .



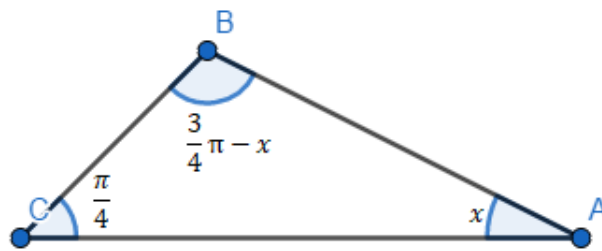
In questo caso la lunghezza totale del muro è $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, che è leggermente minore di quella del minimo muro connesso. Se viene meno il requisito della connessione è dunque possibile costruire un muro più corto, tuttavia la suddetta soluzione è valida ma non è detto che sia quella ottimale.

4.2. Problemi trigonometrici risolvibili tramite ottimo di semplici funzioni trigonometriche

Esponiamo due esempi di problemi risolvibili facilmente con le proprietà di massimo e minimo delle funzioni trigonometriche, già proponibili nelle classi quarte.

- Nel triangolo ABC è $\overline{AB} = 2$, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ e $\widehat{BAC} = x$. Quanto può valere al massimo l'area del triangolo ABC ?

In questi problemi è fondamentale spiegare agli alunni di eseguire un disegno preciso, in cui ricavare subito tutti i possibili angoli passando dalla somma interna degli angoli di un triangolo, e tutti i possibili lati che servono tramite il teorema dei seni e dei coseni, al fine di calcolare l'area, che è la funzione da massimizzare.



Prima di procedere col problema stabiliamo le condizioni di esistenza di x , ovvero $0 < x < \frac{3}{4}\pi$.

Si deve massimizzare l'area del triangolo, che sarà: $A = \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{BC} \sin x$, dunque è necessario trovare il lato \overline{BC} , tramite il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{BC}}{\sin x}$$

Risulta dunque essere $\overline{BC} = 2\sqrt{2} \sin x$

Da qui si ottiene facilmente l'area, che risulta essere:

$$A = 2\sqrt{2} \sin x \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = 2 \sin x \cos x + 2(\sin x)^2$$

A questo punto si può procedere in due modi, ovvero utilizzando il calcolo differenziale oppure scegliendo di scrivere l'area in funzione di un'unica funzione goniometrica, per trovarne facilmente

il massimo.

Proviamo prima col calcolo differenziale:

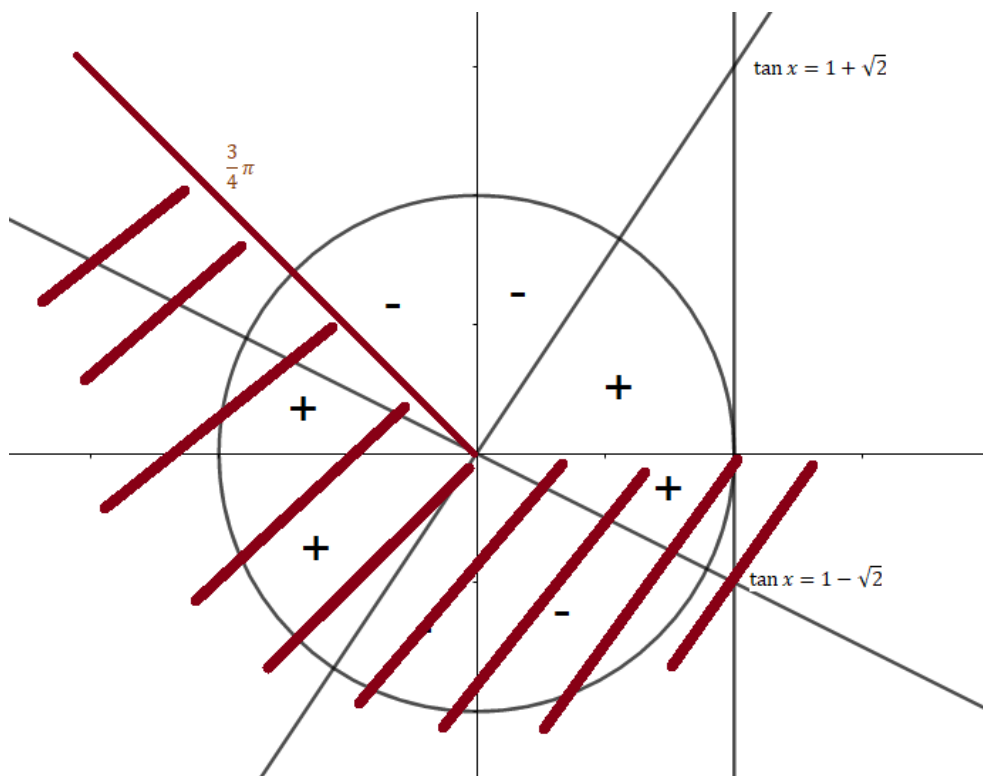
$$A' = 2(\cos x)^2 - 2(\sin x)^2 + 4 \sin x \cos x$$

Studiando il segno della derivata si ottiene un'equazione di secondo grado in $\tan x$:

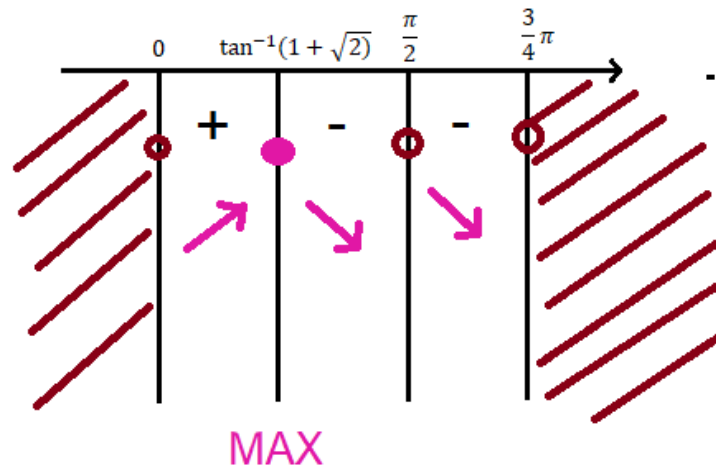
$$(\tan x)^2 - 2 \tan x - 1 \leq 0$$

da cui si ottiene:

$$1 - \sqrt{2} \leq \tan x \leq 1 + \sqrt{2}$$



“Stendendo in linea” il risultato vediamo bene dove si trova il massimo:



L'area massima si ha in corrispondenza di $x = \tan^{-1}(1 + \sqrt{2})$.

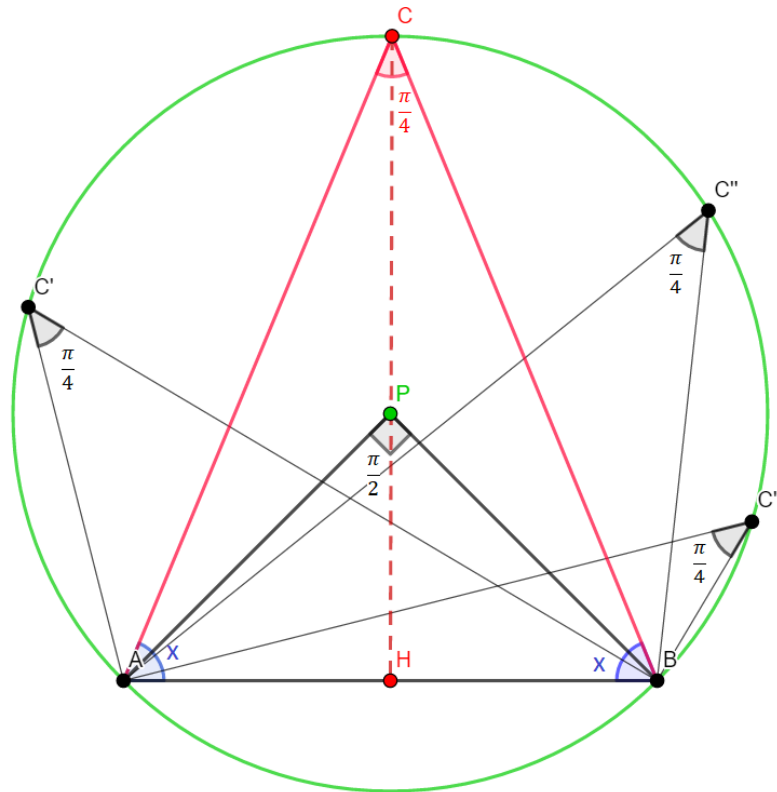
Se invece operiamo nel secondo modo, ovvero cercando di scrivere l'area in funzione di una sola funzione goniometrica, otteniamo, utilizzando le formule di sdoppiamento e dell'angolo aggiunto:

$$A = \sin 2x - \cos 2x + 1 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

che raggiunge il massimo quando il seno dell'angolo è massimo (cioè assume il valore 1), ovvero quando $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, ovvero quando $x = \frac{3}{8}\pi$.

Si nota immediatamente come questa soluzione si ricavi in modo più veloce e preciso (otteniamo subito il valore dell'angolo senza dover passare dalla funzione inversa della tangente e quindi dover usare un calcolatore), oltre ad essere più ragionato e meno meccanico.

Un ulteriore metodo, che opera considerazioni geometriche oltre che trigonometriche, è l'utilizzo del luogo dei punti. Se infatti consideriamo il lato \overline{AB} del triangolo ABC , e prendiamo il punto P sull'asse del segmento \overline{AB} tale che $\widehat{APB} = \frac{\pi}{2}$, e costruiamo poi la circonferenza avente centro P e passante per il punto A (e quindi anche per B), allora avremo che gli angoli \widehat{ACB} , $\widehat{AC'B}$, $\widehat{AC''B}$ e $\widehat{AC'''B}$ misurano tutti $\frac{\pi}{4}$, essendo angoli alla circonferenza di un angolo al centro retto: in questo modo ci riconduciamo al problema di partenza. Ora dobbiamo capire qual è la posizione del punto C (chiaramente vincolato alla circonferenza, per mantenere l'angolo in C pari a $\frac{\pi}{4}$) affinché l'area del triangolo ABC sia massima.

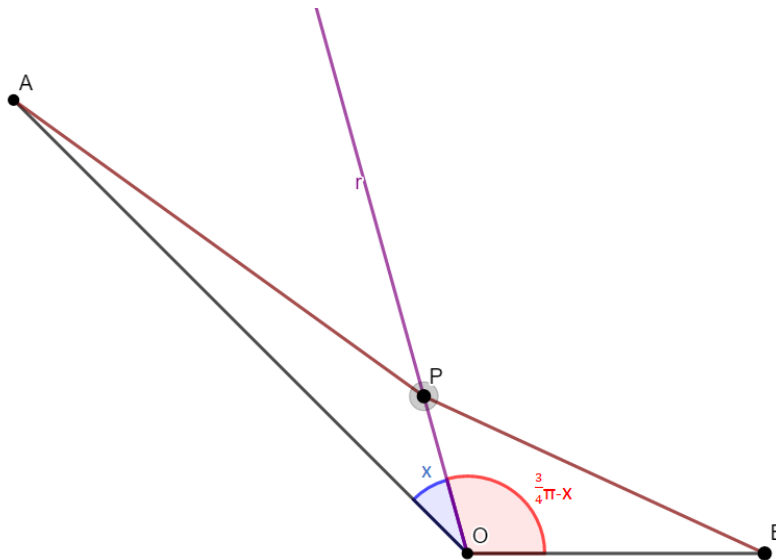


Essendo l'area del triangolo la semplice moltiplicazione della sua base per la sua altezza, avremo che questa sarà massima quando l'altezza sarà massima, e questo si ha quando il punto C si trova, oltre che sulla circonferenza, anche sull'asse del segmento \overline{AB} , ovvero quando l'altezza coincide con il segmento \overline{CH} . In questo caso avremo che gli angoli alla base saranno uguali, essendo il triangolo ABC isoscele, dato che C sta sull'asse del segmento, e misureranno $x = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3}{8}\pi$.

- È dato l'angolo $\widehat{AOB} = \frac{3}{4}\pi$, $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = \sqrt{2}$. Internamente a questo angolo traccia una semiretta r , che forma con OA un angolo di misura x ; considera su r il punto P tale che $\overline{OP} = 1$ e determina per quale valore di x è minima la somma dei quadrati delle distanze di P da A e da B .

Per prima cosa si deve scrivere la relazione da minimizzare, ovvero $f(x) = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$, e cercare di calcolare i lati \overline{PA} e \overline{PB} in funzione appunto di x .

Appare subito chiaro che: $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$.



Come prima cosa si trovano i due lati \overline{PA} e \overline{PB} tramite il teorema del coseno:

$$\overline{PA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OA} \overline{OP} \cos x = 10 - 6 \cos x$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OB} \overline{OP} \cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = 3 + 2 \cos x - 2 \sin x$$

Quindi risulta:

$$f(x) = 10 - 6 \cos x + 3 + 2 \cos x - 2 \sin x = 13 - 4 \cos x - 2 \sin x$$

A questo punto si può sempre procedere in due modi, ovvero 0tramite angolo aggiunto, minimizzando la funzione seno, oppure tramite l'utilizzo della derivata prima della funzione.

Tramite metodo dell'angolo aggiunto si ottiene:

$$f(x) = -2\sqrt{5} \sin\left(x + \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right) + 13$$

Si nota subito che il minimo della funzione si ha in corrispondenza del valore massimo del seno, ovvero:

$$\sin\left(x + \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right) = 1$$

che si ottiene quando: $x + \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$, ovvero $x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Allo stesso risultato si può pervenire, più lungamente, tramite lo studio del segno della derivata prima:

$$f'(x) = 4 \sin x - 2 \cos x$$

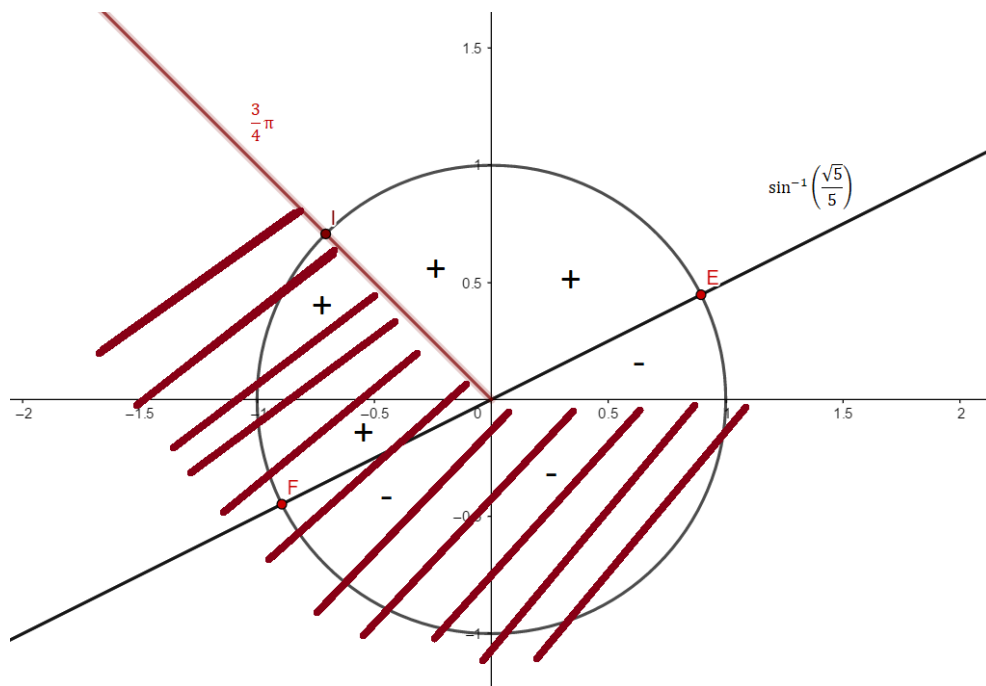
Se ne studia il segno: $4 \sin x - 2 \cos x \geq 0$

Si ottiene una semplice disequazione lineare: $\sin x \geq \frac{\cos x}{2}$

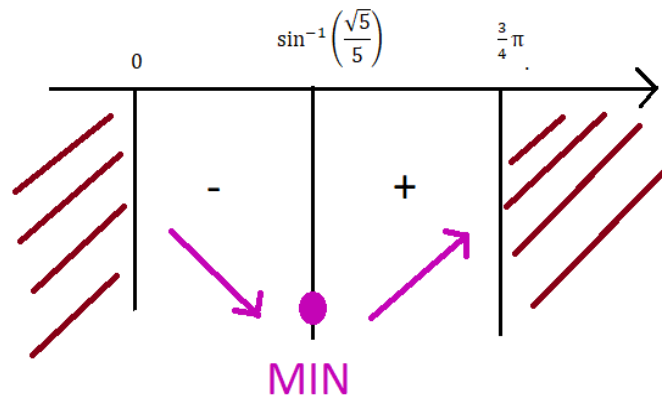
$$\begin{cases} \sin x = \frac{\cos x}{2} \\ (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Graficamente possiamo notare che:

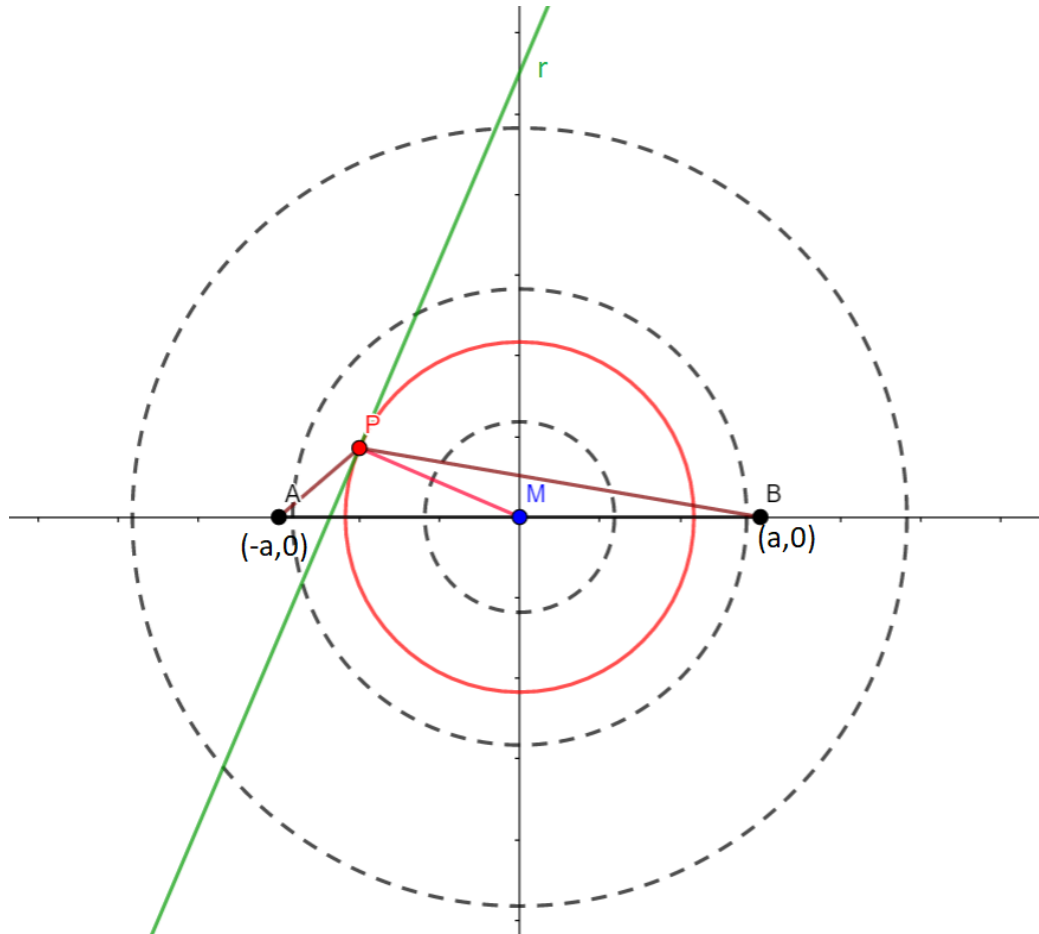


Stendendo in linea possiamo subito notare dove sia il minimo:



Otterremo dunque un minimo per $x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Il risultato è lo stesso di quello ottenuto col metodo precedente, ma anche in questo caso il procedimento è più lungo.

Anche questo secondo problema si può risolvere operando considerazioni di tipo geometrico. Consideriamo prima un problema intermedio, ovvero trovare quale punto P su una data retta r minimizza la somma dei quadrati delle distanze da A e da B .



Consideriamo il segmento \overline{AB} e inseriamolo in un piano cartesiano, in modo che i punti A e B siano di coordinate rispettivamente $A = (-a, 0)$ e $B = (a, 0)$. Prendiamo il punto medio M, che sarà quindi di coordinate $M = (0,0)$ e consideriamo un generico punto $P = (x, y)$ appartenente alla retta r fissata. Sarà:

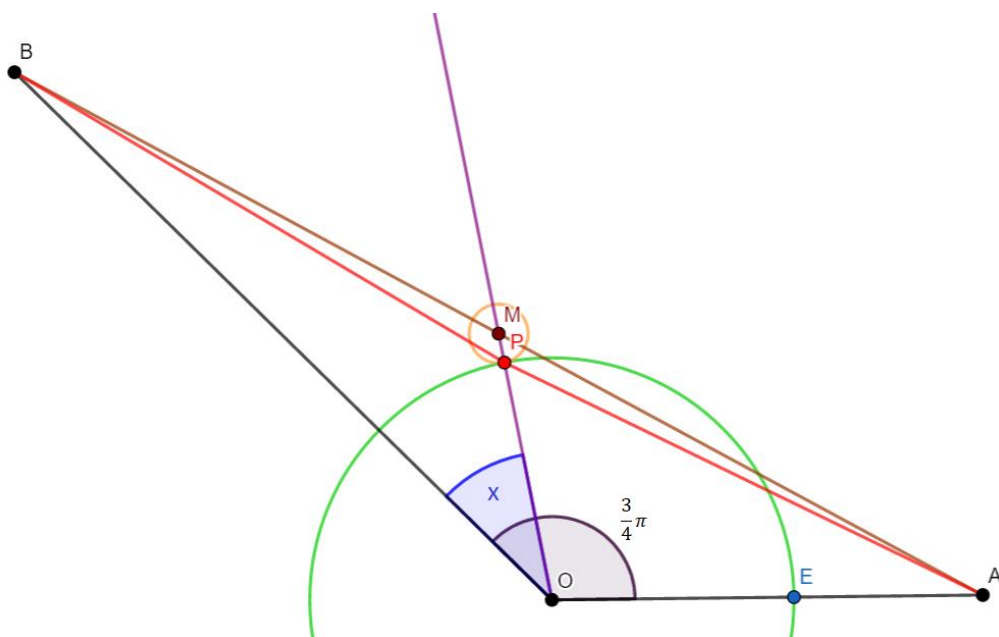
$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (x + a)^2 + (x - a)^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2a^2$$

Quindi se considero le curve di livello tali che $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k$, ottengo che $x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - a^2$,

dunque il punto P appartiene a delle circonferenze di centro M e raggio pari a $\sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$ variabile. Il

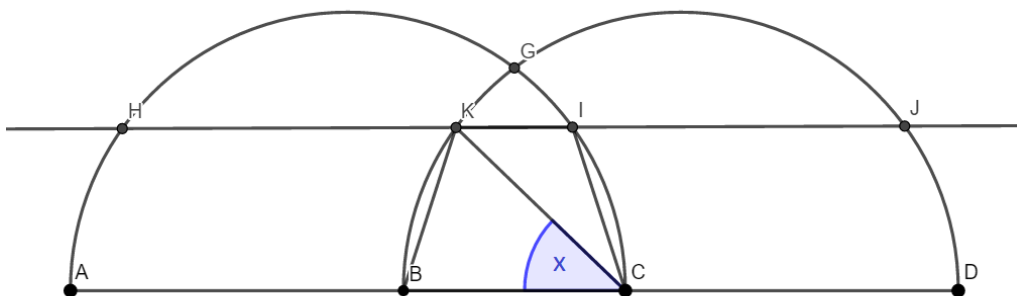
punto P deve appartenere comunque anche alla retta r , quindi avremo che il minimo raggio che soddisferà questa equazione sarà pari alla distanza tra il punto M e la retta r . Possiamo dunque dire che il punto P appartenente alla retta r che minimizza la somma delle distanze da due punti A e B è il punto di intersezione tra la retta r e la circonferenza con centro in M e tangente alla retta stessa.

A questo punto possiamo tornare al problema originale, considerando il segmento \overline{AB} e trovandone il punto medio M. Il punto P considerato deve stare su una circonferenza di raggio 1, dato che la distanza $\overline{OP} = 1$ per ipotesi. La circonferenza con centro in M con il raggio minore che soddisfa questa condizione è quella tangente alla circonferenza di centro O e raggio 1, dunque M, P ed O devono essere allineati, pertanto P deve appartenere alla retta passante per M ed O, ma anche alla circonferenza di centro O e raggio 1: starà pertanto sulla loro intersezione.



Altri problemi da proporre di questo tipo sono:

- In un cerchio di raggio r si tracci una corda \overline{AB} , la cui distanza dal centro è $\frac{r}{2}$. Sul minore dei due archi \overline{AB} di circonferenza si consideri un punto C e si determini l'angolo $\widehat{CAB} = x$ in modo che sia massima la somma $2\overline{AC} + 3\overline{BC}$.
- Nel triangolo ABC sia $\overline{AB} = 2$, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$ e $\widehat{BAC} = x$. Per quale valore di x è massima la mediana \overline{CM} ?
- Si consideri una semicirconferenza di centro O e diametro di misura $\overline{AB} = 2$. Nel semipiano, avente come origine la retta \overline{AB} che la contiene, si tracci la semiretta tangente alla semicirconferenza in A e si consideri su di essa il punto M tale che $\overline{MA} = 4$. Sia P un punto sulla semicirconferenza; posto $\widehat{MAP} = x$, si esprima in funzione di x il quadrato della misura di \overline{MP} e si stabilisca qual è il valore minimo che può assumere al variare di P sulla semicirconferenza.
- In un triangolo ABC , non degenere, l'ipotenusa \overline{AB} misura a e $\widehat{BAC} = x$. Costruisci, esternamente al triangolo ABC , il triangolo equilatero ACD e trova per quale valore di x il rapporto $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2}{\overline{AB}^2}$ è massimo.
- Siano A, B, C, D punti allineati, tali che $\overline{AB} = \overline{CD} = 5$ e $\overline{BC} = 3$. Si tracci la retta parallela al segmento \overline{AD} e passante per K .
Trovare il valore di x (con x angolo indicato in figura) per cui l'area del trapezio $BCIK$ è massima.

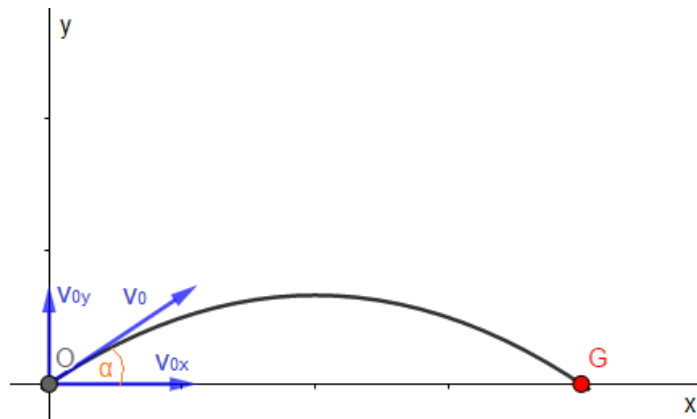


- Sia OAB un settore circolare di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio 1. Inscrivi all'interno di esso un rettangolo $MNPQ$ e traccia il segmento \overline{QO} . Chiamo l'angolo $\widehat{QOB} = x$. Stabilisci qual è il valore di x per cui l'area è massima e calcolane il valore in tal caso.

4.3. Problemi di ottimo legati alla fisica

4.3.1. La gittata massima di un moto parabolico

Quando in prima superiore si affronta il moto parabolico dei corpi, viene spesso chiesto quale sia la gittata massima, ovvero il punto più lontano in cui può arrivare il corpo, lanciato con una certa velocità V_0 con inclinazione α sopra l'orizzontale.



Per ottenere la risposta si devono analizzare le due componenti del moto parabolico: quella orizzontale, in cui il moto è rettilineo uniforme, e quella verticale, in cui il moto è uniformemente accelerato con accelerazione g diretta verso il basso.

$$\begin{cases} x = x_0 + V_{0x}\Delta t \\ y = y_0 + V_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \end{cases}$$

Sapendo che $x_0 = 0$, che $y_0 = 0$, e che:

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

si ottiene che:

$$\begin{cases} x = V_0 \cos \alpha \Delta t \\ y = V_0 \sin \alpha \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2 \end{cases}$$

Si ricava il tempo dalla prima equazione e lo si sostituisce nella seconda, ponendo $y = 0$ (dato che il corpo arriva a terra):

$$\Delta t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

$$0 = V_0 \sin \alpha \frac{x}{V_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 (\cos \alpha)^2}$$

Si ottiene quindi:

$$x = 2 \frac{V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

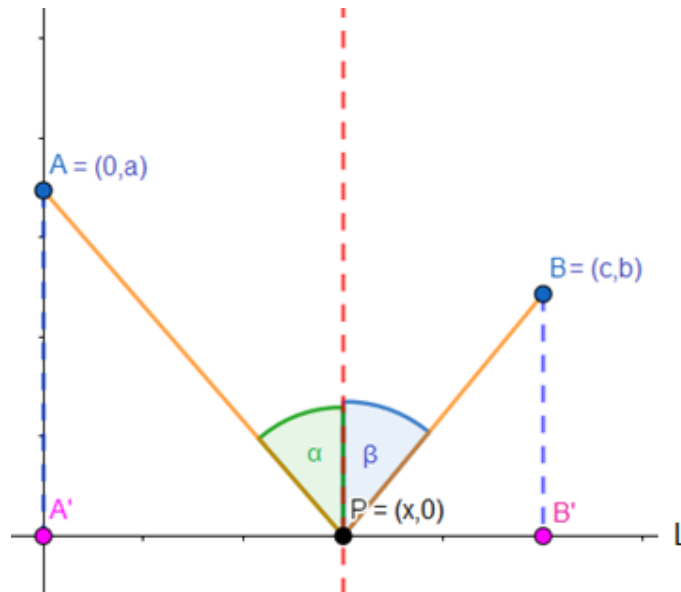
Questa funzione è massima quando è massimo il $\sin 2\alpha$, il che accade quando $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, quindi quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

4.3.2. La legge di riflessione della luce

Già secondo Erone “un raggio di luce proveniente da un punto A e incidente su uno specchio piano L in un punto P viene riflesso nella direzione di un punto B tale che \overline{AP} e \overline{PB} formano con L angoli uguali”.

Ai giorni nostri possiamo enunciare la legge di riflessione della luce dividendola in due parti:

- la prima legge della riflessione afferma che il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie riflettente giacciono nello stesso piano, detto anche piano di incidenza.
- la seconda legge della riflessione afferma che l'angolo di incidenza α e l'angolo di riflessione β sono uguali tra loro, dove l'angolo di incidenza α è l'angolo che il raggio incidente forma con la normale alla superficie, mentre β è l'angolo che la normale alla superficie forma con il raggio riflesso



Dimostrare la legge di riflessione della luce equivale a risolvere un problema di minimo. Mostriamo infatti che la luce riflessa, passando da A a B tramite il punto P, segue un percorso di tempo minimo.

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v} + \frac{s_2}{v} = \frac{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$$

Derivando la funzione tempo otteniamo:

$$t'(x) = \frac{1}{v} \left[\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \right]$$

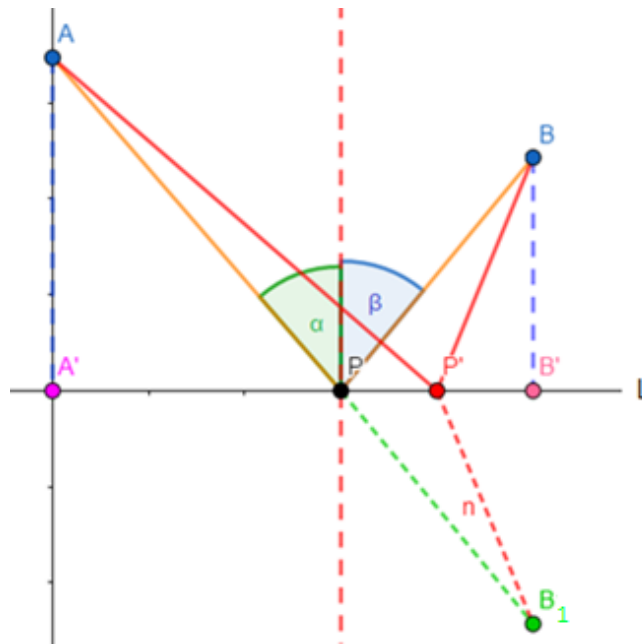
Imponendo la derivata nulla, per trovare appunto il punto di estremo (che sarà intuitivamente un minimo), otteniamo:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Quindi:

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{PB}} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Diamo uno sguardo alla soluzione di Erone:



Sia B_1 il punto simmetrico di B rispetto allo specchio L, coincidente con l'asse delle x. Il punto P che stiamo cercando è l'intersezione tra lo specchio L e il segmento $\overline{AB_1}$. Prendiamo infatti un altro punto P' diverso da P, allora, applicando le proprietà di simmetria e la disuguaglianza triangolare, sarà:

$$|\overline{AP'}| + |\overline{P'B}| = |\overline{AP'}| + |\overline{P'B_1}| > |\overline{AB_1}| = |\overline{AP}| + |\overline{PB}|$$

Si nota che il punto richiesto P ha la proprietà per cui l'angolo α sia uguale all'angolo β .

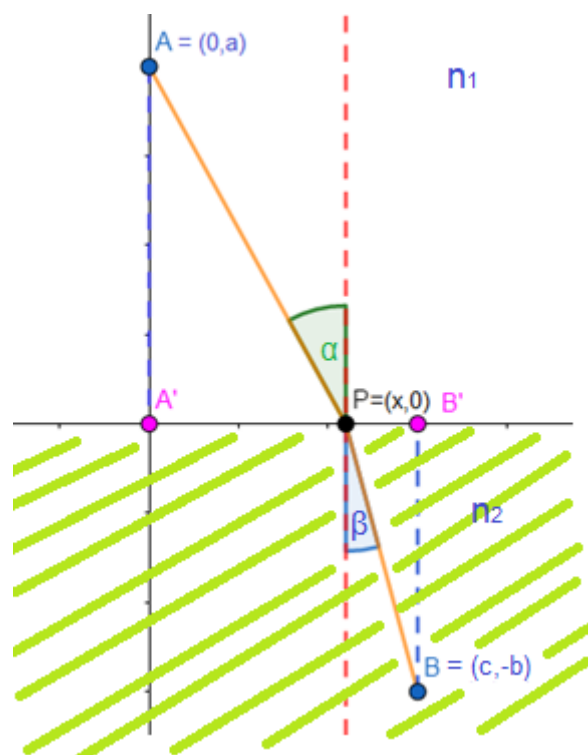
4.3.3. La legge di rifrazione della luce

Già Fermat deriva la legge di Snell di rifrazione della luce partendo dall'assunzione che essa si muova più lentamente in un mezzo più denso (indice di rifrazione n_2 maggiore) rispetto ad uno più rarefatto (indice di rifrazione n_1 minore). Fermat utilizza il principio estremale per dire che "in un mezzo non omogeneo la luce viaggia da un punto all'altro lungo il cammino che richiede il tempo minimo".

Ai giorni nostri possiamo enunciare la legge di riflessione della luce dividendola in due parti:

- la prima legge della rifrazione afferma che il raggio incidente, il raggio rifratto e la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi trasparenti giacciono nello stesso piano
- la seconda legge della rifrazione afferma che, variando l'angolo di incidenza, il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza α e il seno dell'angolo di rifrazione β è costante. Tale costante dipende dalle caratteristiche dei due mezzi, in particolare dal rapporto tra gli indici di rifrazione delle due sostanze. La legge si può scrivere in questo modo:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$



Dimostrare la legge di riflessione della luce equivale a risolvere un problema di minimo.

Mostriamo infatti che la luce rifratta, passando da A a B tramite il punto P, segue un percorso di tempo minimo. Consideriamo il tempo totale del percorso della luce da A a B:

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

Derivando la funzione tempo otteniamo:

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \frac{-2(c-x)}{2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Imponendo la derivata nulla, per trovare appunto il punto di estremo (che sarà intuitivamente un minimo), otteniamo:

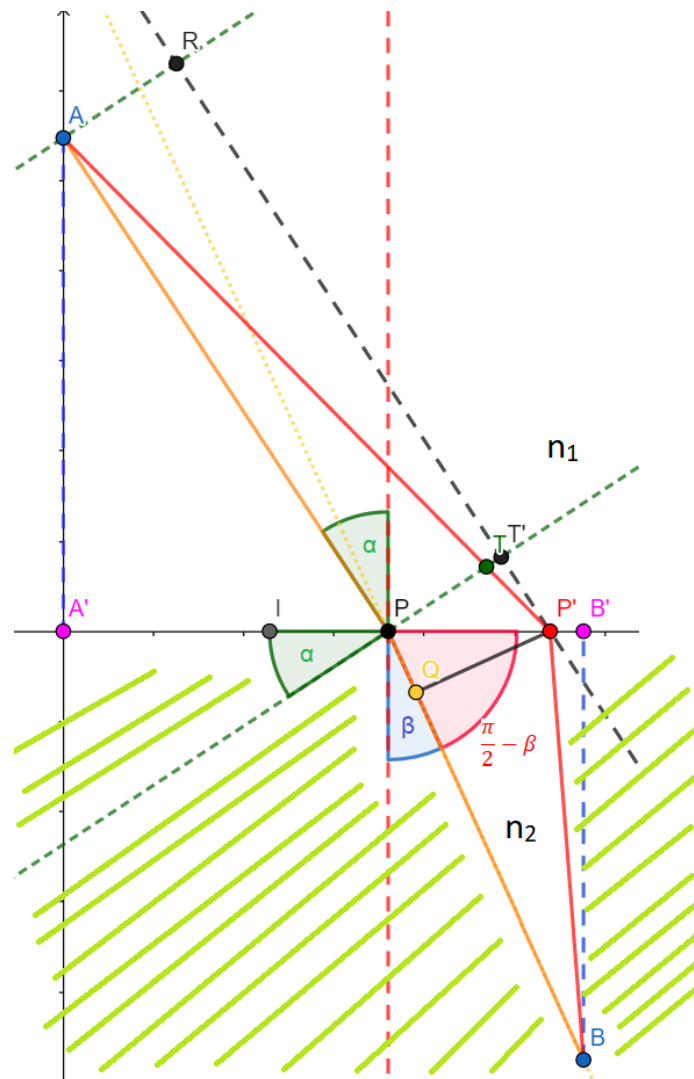
$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(c-x)}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Quindi:

$$\frac{\overline{A'P}}{v_1 \overline{AP}} = \frac{\overline{B'P}}{v_2 \overline{PB}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\frac{v}{n_1}} = \frac{\sin \beta}{\frac{v}{n_2}} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

con n_1 e n_2 indici di rifrazione dei due mezzi, e v velocità della luce nel vuoto.

Diamo uno sguardo alla soluzione di Fermat, che non utilizzava il suo algoritmo per trovare il cammino minimo della luce rifratta (del tutto simile a quello utilizzato sopra) perché era in grado di applicarlo solo a polinomi semplici, e non a funzioni con radicali.



Sia P un punto tale per cui $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$. Mostriamo che per qualsiasi altro punto P' diverso da P il tempo di "traversata" $AP'B$ è maggiore di quello APB .

Tracciamo due rette perpendicolari ad \overline{AP} rispettivamente in A e in P. Sia T il punto di intersezione tra $\overline{AP'}$ e la perpendicolare in P. Tracciamo una retta parallela ad \overline{AP} passante per P' e chiamiamo T' e R i punti di intersezione di questa retta con le perpendicolari ad \overline{AP} rispettivamente in P e A. Infine tracciamo la perpendicolare $\overline{P'Q}$ da P' fino a \overline{PB} .

Vediamo che gli angoli $\widehat{TPP'}$ e $\widehat{P'PQ}$ sono rispettivamente uguali ad α e $\frac{\pi}{2} - \beta$.

Si ottiene che:

$$|\overline{P'T'}| = |\overline{P'P}| \sin \alpha, \quad |\overline{PQ}| = |\overline{PP'}| \sin \beta$$

Ora consideriamo la disuguaglianza $|\overline{AT}| > |\overline{AP}|$ e $|\overline{P'T}| > |\overline{P'T'}|$ e $|\overline{P'B}| > |\overline{BQ}|$, dunque risulta che:

$$\frac{\overline{AP'}}{v_1} > \frac{\overline{AP} + \overline{T'P'}}{v_1} = \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PP'}}{v_1} \sin \alpha$$

$$\frac{\overline{BP'}}{v_2} > \frac{\overline{BQ}}{v_2} = \frac{\overline{PB} - \overline{PQ}}{v_2} = \frac{\overline{PB}}{v_2} - \frac{\overline{PP'}}{v_2} \sin \beta$$

Dunque, sommando membro a membro, e considerando le disuguaglianze triangolari e la proprietà del punto P risulta:

$$\frac{\overline{AP'}}{v_1} + \frac{\overline{BP'}}{v_2} > \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_2}$$

Il punto di rifrazione che minimizza il tempo di traversata dal punto A al punto B è caratterizzato dunque dal fatto che il rapporto tra i seni degli angoli di incidenza e rifrazione sia uguale al rapporto delle velocità della luce nel mezzo, e di conseguenza all'inverso del rapporto degli indici di rifrazione delle due sostanze.

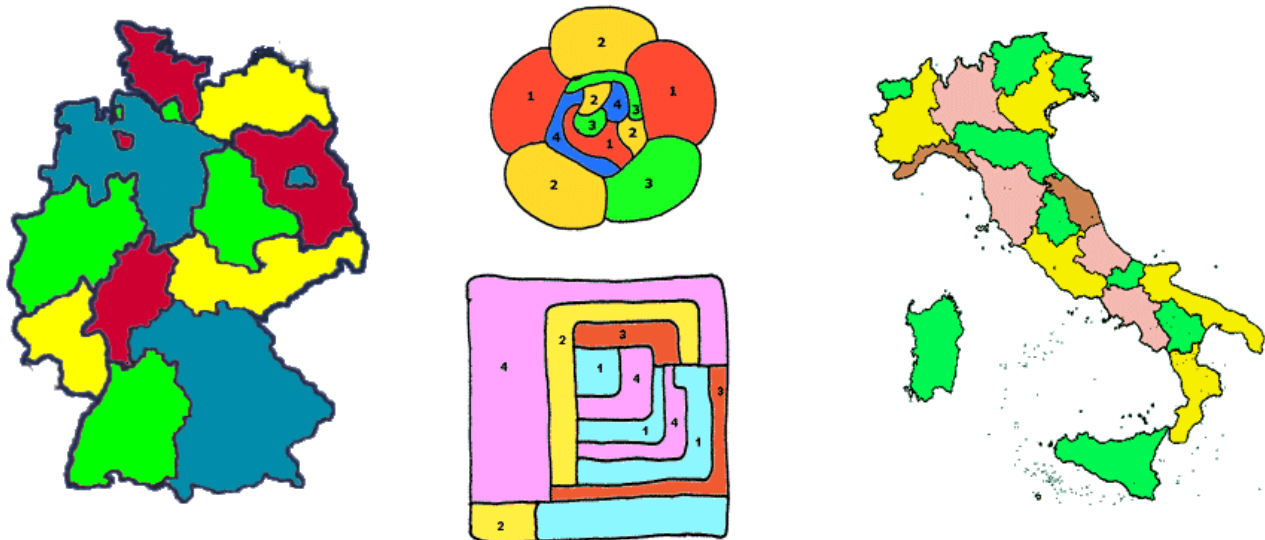
4.4. Un problema di minimo di natura discreta: il teorema dei quattro colori

Un problema di minimo di altra natura rispetto ai precedenti, poiché di natura discreta, che non ha a niente a che vedere col calcolo differenziale, è il problema dei quattro colori:

Qual è il numero minimo di colori che consentono di colorare una qualsiasi cartina geopolitica in modo che due stati adiacenti abbiano colori diversi?

Il teorema dei quattro colori afferma che data una superficie piana divisa in zone connesse (ovvero non deve essere formata da due o più parti sconnesse), come ad esempio una carta geopolitica, sono sufficienti quattro colori per colorare tutte le zone in modo che le regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore. Per essere adiacenti due regioni devono avere una linea di confine in comune, se hanno in comune un solo punto non sono considerate adiacenti.

È facilissimo trovare degli esempi di mappe per cui tre colori non sono sufficienti, e non è eccessivamente difficile dimostrare che ne bastano cinque, mentre è più difficile dimostrare che sono sufficienti quattro colori. La dimostrazione di questo teorema ha infatti richiesto, tra l'altro, un estensivo ricorso al computer, per una delle prime volte nella storia della matematica.



Il problema fu proposto a De Morgan nel 1852 da Francis Guthrie, il quale, mentre stava colorando una mappa delle 49 contee britanniche, si era reso conto di dover usare almeno quattro colori. La prima presunta dimostrazione fu formulata nel 1879 da Alfred Kempe, e l'anno successivo Peter

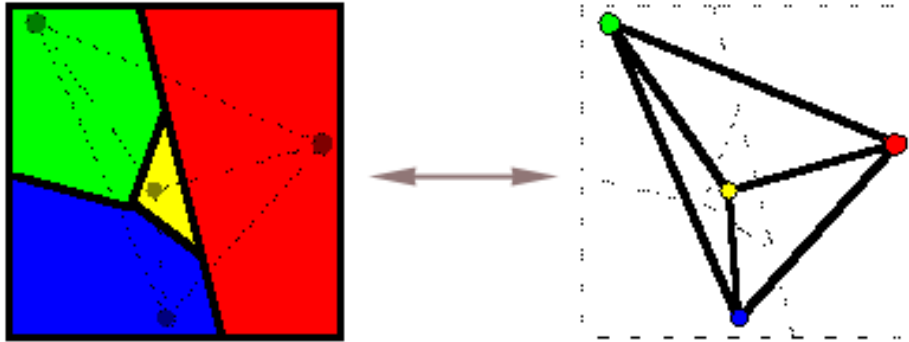
Tait disse di averne trovata un'altra. Undici anni dopo entrambe le dimostrazioni furono riconosciute errate.

Nel 1977 Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois, trovarono la dimostrazione definitiva utilizzando un complesso algoritmo informatico, che venne operato per 50 giorni senza interruzioni. Il programma venne eseguito su due macchine diverse con due algoritmi indipendenti, per ridurre al minimo la possibilità di errore. Servirono più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche effettuate dalle macchine. La dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1936 configurazioni (poi ulteriormente ridotte a 1476), per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso dal computer. Qualsiasi mappa può infatti essere ricondotta a un numero finito, sebbene molto elevato, di topologie "notevoli", tramite operazioni che modificano le posizioni relative delle regioni che la costituiscono, ma non le proprietà topologiche della mappa stessa. Il fatto che la dimostrazione fosse fatta "caso per caso" portò alcuni matematici a contestarne la validità. Ad ogni modo nell'algoritmo non è mai stato trovato alcun errore.

Nel 2000 Ashay Dharwadker propose una nuova dimostrazione del teorema che richiese l'utilizzo della teoria dei grafi. Con grafo si intende una struttura costituita da oggetti semplici, detti vertici o nodi, e da collegamenti tra i vertici. Questi collegamenti possono essere orientati (cioè dotati di direzione e verso) o non orientati (cioè dotati solo di direzione ma non di un verso). Nel primo caso si parla di un grafo orientato, nel secondo caso di grafo non orientato. Un grafo viene raffigurato sul piano generalmente da punti o cerchietti, che rappresentano i nodi, mentre i collegamenti tra i vertici sono rappresentati da segmenti o curve. Nel caso di un grafo orientato, il verso degli archi è rappresentato da una freccia. Il posizionamento dei vertici e la forma degli spigoli è irrilevante, dato che contano solo i vertici e le relazioni tra essi, quindi lo stesso grafo può essere disegnato in molti modi diversi senza modificarne le proprietà.

La rappresentazione per grafi associa ad ogni regione della mappa un vertice del grafo; due vertici sono connessi da uno spigolo se e solo se le due regioni corrispondenti sono adiacenti.

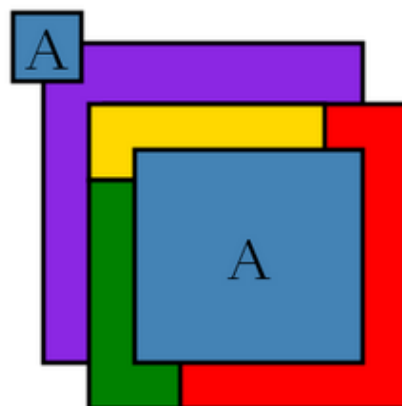
Dharwadker dimostra che i vertici di ciascun grafo planare possono essere colorati utilizzando al massimo quattro colori, in modo tale che due vertici adiacenti non ricevano mai lo stesso colore. Si può affermare dunque che "ogni grafo planare è 4-colorabile", quindi ogni cartina geopolitica può essere colorata come descritto all'inizio utilizzando solo quattro colori.



Il teorema si applica a mappe suddivise in regioni connesse. Nelle carte geografiche politiche esistono stati il cui territorio è costituito da un insieme di regioni non connesse, anche senza considerare le isole. Un esempio è la regione di Kaliningrad, appartenente alla Russia ma completamente circondata dalla Polonia e dalla Lituania.



In casi simili, imponendo la condizione che tutto il territorio di uno Stato debba necessariamente essere dello stesso colore, si modificano le premesse alla base del teorema, e quattro colori potrebbero non essere sufficienti. Consideriamo ad esempio una mappa semplificata:



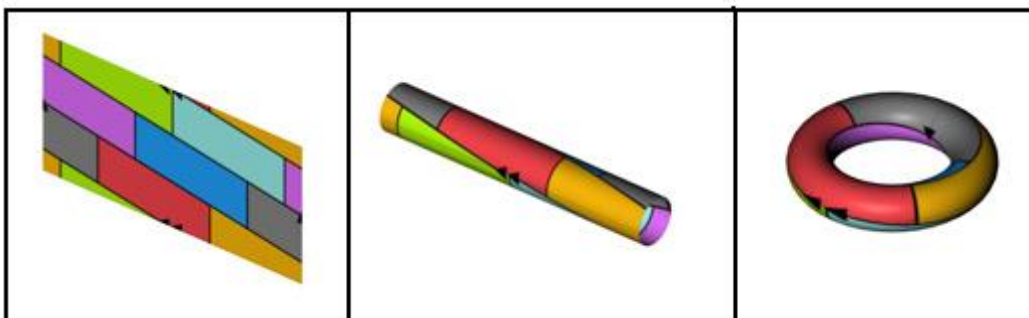
In questa mappa, le due regioni indicate con *A* fanno parte dello stesso stato e devono avere la stessa colorazione. Questa mappa necessita di cinque colori, dato che le due regioni *A* sono nel complesso contigue a quattro altre regioni, ciascuna delle quali è adiacente a tutte le altre. Se *A* consistesse di tre regioni, potrebbero essere necessari sei o più colori; sfruttando regioni non connesse è pertanto possibile costruire mappe che richiedono un numero arbitrariamente elevato di colori.

È possibile considerare il problema della colorazione su una superficie piuttosto che su un piano, ed è interessante notare che la soluzione del problema è legata alle proprietà topologiche del supporto. Per le superfici chiuse (orientate come il toro o non orientate come il nastro di Möbius) di genere positivo, il massimo numero di colori necessari dipende dalla caratteristica di Eulero *K* della superficie. La caratteristica di Eulero *K* è definita per i poliedri come: $K = V + F - S$, dove *V* è il numero di vertici del poliedro, *F* il numero di facce, e *S* il numero di spigoli, mentre quella di una superficie non poligonale può essere calcolata tramite una suddivisione in poligoni e poi tramite il conteggio del numero di vertici, spigoli, e poligoni in cui è suddivisa. A questo punto il numero di colori sufficienti per colorare la superficie chiusa con caratteristica di Eulero *K* è:

$$n = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24K}}{2} \right\rceil$$

dove le parentesi più esterne stanno a indicare la funzione parte intera.

Per esempio, il toro ha caratteristica di Eulero $K = 0$ e quindi $n = 7$: saranno pertanto necessari al massimo sette colori per colorare qualsiasi mappa su una superficie toroidale.



Tutti i poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro) hanno caratteristica di Eulero $K = 2$, così come la sfera, pertanto il numero minimo di colori su queste superfici è sempre quattro, come nel piano.



La sola eccezione alla formula sono la Bottiglia di Klein e il nastro di Möbius, la cui caratteristica di Eulero è $K = 0$, ma richiede sei colori (e non sette, come stabilirebbe la formula).



Questo particolare problema non viene solitamente affrontato nei programmi scolastici poiché la teoria dei grafi viene studiata solo in alcune facoltà universitarie scientifiche ed economiche, tuttavia può costituire un approccio divertente per riflettere sul fatto che i problemi di ottimizzazione abbraccino tutti gli aspetti della quotidianità.

5. Conclusioni

In seguito all'analisi svolta nel mio lavoro di tesi ritengo sia importante che i problemi di massimo e minimo vengano affrontati dove possibile con l'utilizzo di metodi alternativi all'uso delle derivate, poiché in taluni casi sono di più facile ed intuitiva applicazione e comprensione, e soprattutto in luce del fatto che le derivate vengono studiate solamente durante il quinto anno della scuola secondaria di secondo grado, oltre al fatto che le risoluzioni alternative al calcolo delle derivate sono meno meccaniche e più ragionate.

È quindi in alcuni casi preferibile utilizzare dimostrazioni di geometria sintetica o analitica, o sfruttare metodi che utilizzano le disuguaglianze, o ancora metodi che utilizzano le proprietà delle funzioni trigonometriche.

Ritengo sia utile, al fine di suscitare l'interesse degli alunni, proporre problemi legati alla fisica e alla quotidianità, stimolanti anche da un punto di vista creativo.

Come ultima considerazione, nelle illustrazioni da me create con Geogebra faccio largo uso del colore, poiché ritengo che sia necessario per la comprensione della geometria da parte dei giovani alunni, oltre che ad essere uno stimolo per il loro interesse e uno strumento per migliorare la qualità di una lezione. Come disse Kandinsky: "Il colore è un potere che influenza direttamente l'anima".

6. Bibliografia e sitografia

- 1)V.M. Tikhomirov, "Stories about maxima and minima", American Mathematical Society (1991)
- 2)E. Beckenbach, R. Bellman, "Introduzione alle disuguaglianze", Zanichelli (1970)
- 3)C. B. Boyer, "Storia della matematica", Mondadori (1990)
- 4)Nicholas D. Kazarinoff, "Disuguaglianze geometriche", Lampi di stampa (1999)
- 5)L. Sasso, "La matematica a colori-Edizione blu. Primo biennio", Petrini (2014)
- 6)L. Sasso, "La matematica a colori-Edizione blu. Secondo biennio e quinto anno", Petrini (2014)
- 7)U. Amaldi, "L'Amaldi per i licei scientifici.blu", Volume 1-Meccanica e termodinamica, Zanichelli (2015)
- 8)U. Amaldi, "L'Amaldi per i licei scientifici.blu", Volume 2-Onde, campo elettrico e magnetico, Zanichelli (2015)
- 9)https://digilander.libero.it/i.lamartina1/Fagnano/problema_fagnano.html
- 10)https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_dei_quattro_colori
- 11)http://www.matematicaescola.it/materiale/attivita_culturali/20170205_pls_parte3_ottimizzazione.pdf
- 12)https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Regiomontano