Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Analisi Comparata di Testi di Matematica per la Scuola Superiore. Uno studio sperimentale.

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Silvia Benvenuti

Presentata da:
Lucia Montanari

Sessione Unica
Anno Accademico 2018/2019

In cosa consiste una definizione soddisfacente? Per il filosofo e lo studioso, una definizione è soddisfacente se è pertinente alle cose che definisce e solo a quelle; ecco quanto richiede la logica. Ma nell'insegnamento non è così: una definizione è soddisfacente solo se lo studente la comprende.

HENRI POINCARÉ

Introduzione

I libri di testo sono una realtà molto presente nella carriera scolastica di tutti gli studenti, per tutti i gradi scolari. Abbiamo voluto indagare se per i ragazzi il prodotto che viene fornito loro sia realmente utile e autoconsistente o possa essere migliorato. Questo progetto di tesi, infatti, nasce da una domanda: i libri di testo sono effettivamente chiari e fruibili dagli studenti? Per trovare una risposta è stata pianificata e realizzata una sperimentazione in aula con ragazzi del secondo anno di una scuola secondaria di secondo grado, precisamente un Liceo scientifico. Infatti l'editoria scolastica vede nel settore matematica una netta divisione tra testi per il liceo scientifico e per altri indirizzi, le cui differenze sono talmente profonde da non renderli comparabili.
Questo progetto è stato articolato in quattro fasi. Inizialmente sono stati selezionati e confrontati a livello generale i libri per lo studio: a seguito di un'indagine svolta sui principali libri di testo adottati nei licei scientifici, sono stati individuati tre testi che, rispettando il target, fossero nettamente diversi l'uno dall'altro per struttura e approccio. Successivamente è stata pianificata l'attività di sperimentazione, decidendo il campione e le modalità, tenendo in considerazione le esigenze pratiche legate al calendario scolastico e cercando di ottimizzare il possibile profitto per gli studenti. A ciò è seguita un'analisi più strutturata e approfondita dei capitoli identificati come idonei per la sperimentazione (Sistemi Lineari e Cerchio/Circonferenza) e sono stati ipotizzati i possibili aspetti problematici di ogni testo. Infine è stata realizzata l'attività in aula, i cui risultati sono stati analizzati e confrontati

con le ipotesi iniziali.
Materialmente, ai ragazzi è stato chiesto di studiare in gruppo uno dei due argomenti, in base alla disponibilità data dal docente di cattedra della classe; a ogni gruppo è stato fornito tutto il materieale sull'argomento, estratto da uno specifico testo dei tre del progetto; lo studio dei ragazzi è stato completamente privo di spiegazioni in aula da parte del docente e l'organizzazione del lavoro è stata tutta a carico loro. L'attività si è conclusa con un compito in classe e un questionario somministrato come compito per casa.
Complessivamente il progetto ha incuriosito e stimolato sia i docenti sia gli studenti. Questi ultimi lo hanno accolto con un po' di titubanza iniziale, ma alla fine sono rimasti soddisfatti: molto inesperti a gestire lo studio autonomamente, si sono sentiti responsabilizzati e hanno avuto un riscontro positivo dei loro sforzi. Infatti, è stato molto impegnativo per loro concentrarsi e comprendere dal testo scritto, ma i risultati sono stati molto positivi.
Naturalmente uno studio come questo, che affronta una domanda estremamente complessa, non può essere esaustivo: la sperimentazione svolta si configura piuttosto come un primo passo nella direzione di capire quali elementi di un testo matematico scritto ne determinino la maggiore o minore efficacia per l'apprendimento dei ragazzi. Come ulteriori sviluppi del cammino intrapreso potremmo immaginare, per esempio, una volta individuato un testo che sembra "funzionare" per il campione degli studenti preso in esame, di testarlo su un campione più ampio; inoltre, sarebbe interessante estendere lo studio a tutti i volumi del testo in questione, senza limitarci a un solo anno di corso. Evidentemente una sperimentazione di questo tipo necessiterebbe un investimento, in termini di tempo, forze e disponibilità dei docenti e degli studenti coinvolti, non compatibile con la stesura di una tesi di laurea.
La nostra speranza è però che il lavoro qui descritto sia un primo passo a testimonianza dell'interesse di un'analisi di questo tipo.

Indice

Capitolo 1

Descrizione dei testi selezionati

L'editoria scolastica offre un'ampia varietà di libri di testo, differenziando il mercato dei volumi di matematica in due macro sezioni: libri per il liceo scientifico e libri per gli altri indirizzi. In questo studio l'attenzione è stata rivolta esclusivamente alla categoria licei scientifici e i testi presi in esame sono:

1. M. Bergamini, G.Barozzi, *Matematica multimediale.blu*, Zanichelli, 2014

2. L. Sasso, C. Zanone, *Colori della matematica. Edizione Blu*, De Agostini, 2016

3. N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Lineamenti di Matematica*, Ghisetti e Corvi, 2004

Nel corpo della tesi, per comodità di lettura, ci riferiamo sempre a 1 con Bergamini, a 2 con Sasso e a 3 con Dodero.
I tre testi sono stati scelti tenendo conto delle principali adozioni odierne nelle scuole, Bergamini e Sasso si dividono infatti la maggior parte del mercato italiano dei libri di testo di matematica per la scuola secondaria di secondo grado. Dodero, invece, era presente nel catalogo DeAgostini fino a pochi anni fa, ma a oggi la versione citata non è più in commercio, tuttavia ne sono rimaste alcune versioni per licei non scientifici. La decisione di inserire anche

questo testo nell'analisi e la sperimentazione è stata mossa proprio dalle differenze sostanziali che il volume presenta rispetto ai due leader di mercato, differenze che, probabilmente, lo hanno portato a scomparire.
L'approccio di Dodero, infatti, è molto più rigoroso e astratto, le spiegazioni sono più dettagliate, i paragrafi di teoria più ampi, fa spesso ricorso a simboli letterali, propri della convenzione matematica (tanto che all'inizio di ogni volume è riportato un glossario di simboli). Tuttavia, sono quasi del tutto assenti i collegamenti con altre discipline e con la realtà. Le uniche eccezioni sono le pagine di *Esercitazioni di laboratorio*, situate al termine della teoria di ogni capitolo, nelle quali si spiega come implementare in linguaggio Pascal l'argomento trattato, e *Nota storica*, brevi sezioni disseminate nel testo che riportano aneddoti di storia della matematica. Sasso, invece, pone molto l'accento sulla modellizzazione, ovvero approccia la matematica come modello del reale: ogni capitolo è introdotto da un problema dalla realtà che viene affrontato in modo da insinuare nel lettore la necessità di un modello formale. Presenta, inoltre, alcune pagine al termine di ogni unità, contrassegnate con *Problema svolto*, dove vengono proposte le soluzioni guidate di alcuni prolemi inerenti all'argomento trattato. Bergamini ha infine un approccio più pratico: spiega la teoria degli oggetti matematici in modo funzionale agli esercizi, tanto che alcuni procedimenti teorici vengono illustrati a partire da esempi numerici e al termine di ogni sezione sono presenti degli *Esercizi per cominciare.*
Altre differenze, forse più immediate, sono legate alle scelte grafiche e organizzative dei testi. Dodero ha una grafica molto essenziale e pulita, priva di riquadri, enfatizzazioni cromatiche e stilistiche, in netta contrapposizione con Bergamini, il quale ricorre molto all'uso di colori e immagini, con un'impaginazione ricca di elementi. Sasso, invece, è più equilibrato, utilizzando il colore, più di Dodero, ma con una specifica predominanza dei toni del blu. Spiccano, inoltre, le numerose classificazioni tramite tabelle e l'uso del margine laterale per isolare esempi e approfondimenti, caratteristica propria anche di Bergamini. Peculiarità di Sasso sono le pagine di *Sintesi* e *Percorso*

delle idee: sezioni poste al termine dell'esposizione teorica nelle quali viene organizzato in tabelle o schemi il contenuto appena trattato. Per quanto riguarda l'organizzazione dei contenuti, Sasso è il libro più strutturato: ogni volume è articolato in *Temi*, ciascuno dei quali racchiude delle *Unità* per ogni singolo argomento, di cui ogni aspetto è esposto in sottosezioni. Bergamini è più diretto nell'esposizione, i capitoli sono compatti, essendo divisi solo in sezioni, mentre Dodero frammenta ogni sezione di ogni capitolo in sottosezioni.

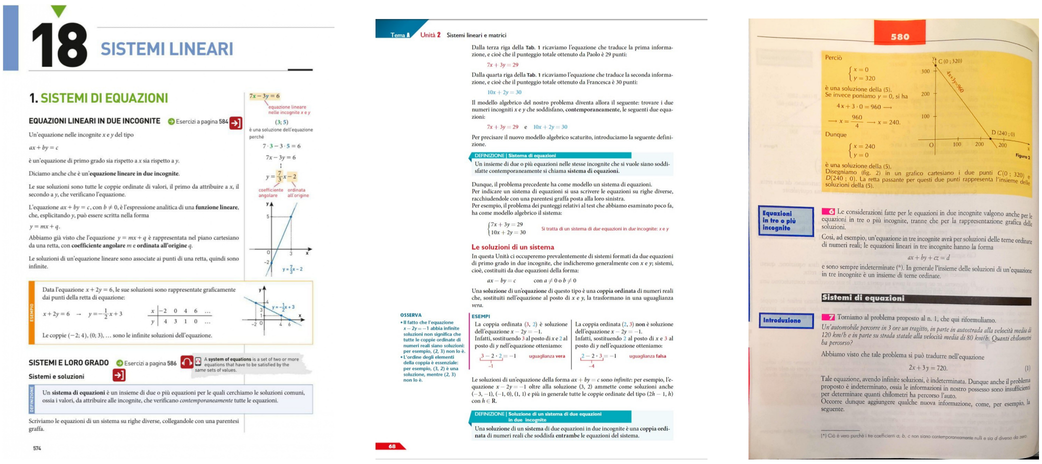


Figura 1.1: Estratti di Bergamini, Sasso e Dodero (in ordine da sinistra)

Un altro aspetto molto rilevante è il linguaggio adottato. Bergamini si contraddistingue per un linguaggio facilmente accessibile, formale dove strettamente necessario, ma tendenzialmente semplice e lineare. Sasso è più ricco nella scelta dei vocaboli ed essendo le parti scritte più articolate risulta complessivamente più eterogeneo. Dodero è estremamente rigoroso: fa ampiamente uso di lessico tecnico proveniente non solo dagli ambiti matematici dei singoli argomenti (algebra, analisi e geometria), ma anche di altri ambiti specifici quali logica e teoria degli insiemi.

Nei libri di matematica hanno un ruolo fondamentale le parti dedicate agli esercizi: per tutti i tre testi, terminato un argomento teorico, ci sono delle pagine dedicate, suddivise come la teoria di riferimento. Dodero è molto povero nella varietà di esercizi proposti: molto standard, in quantità buona, ma non eccessivamente abbondante, soprattutto in confronto agli altri. Una particolarità sono i *Quesiti*, domande aperte di carattere teorico, i *Vero/Falso*, presenti per ogni argomento, e la *Scheda di autovalutazione* posta a conclusione di ogni sezione. Anche in Bergamini è presente la *Verifica delle competenze* prima di un nuovo argomento: una selezione di esercizi ricapitolativi, ma non esclusivamente a risposta multipla come in Dodero. Inoltre, solo in Bergamini viene indicato il grado di difficoltà di ogni singolo esercizio, permettendo così di identificare a prima vista quali sono più facili o difficili. La varietà proposta è molto ampia e vi sono molte categorie differenti di esercizi (*al volo*, *fai un esempio*, *invalsi*, *intorno a noi...*). Caratteristica presente anche in Sasso dove, però, le categorie sono più legate alla modellizzazione (*realtà e modelli*, *a mente*, *collegamenti*, *zoom sull'enunciato*, *laboratorio*,...). Concludiamo riassumendo le caratteristiche di ogni testo (schematizzate poi nella tabella):

- Bergamini: testo molto lineare, asciutto, essenziale. Privilegia l'aspetto formale/tecnico della matematica, le parti legate alle applicazioni sono esigue e disseminate tra gli esercizi. Le spiegazioni sono chiare, lineari e non dispersive.

- Sasso: spiegazioni teoriche molto ampie, fanno uso di numerose tabelle di classificazione; la teoria è molto approfondita, talvolta ridondante e inutilmente prolissa. Correlazioni con la realtà e approfondimenti presenti e disseminati tra teoria e esercizi.

- Dodero: spiegazioni molto complete e rigorose, la grafica minimale del testo non lo rende immediato nella consultazione. Le applicazioni sono molto circoscritte e soprattutto legate alla fisica e all'informatica.

TITOLO	LINEAMENTI DI MATEMATICA	MATEMATICA MULTIMEDIALE.BLU	COLORI DELLA MATEMATICA
AUTORE	N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi	M. Bergamini, G. Barozzi	L. Sasso, C. Zanone
APPROCCIO	Rigoroso: presentazione della matematica teorico/formale (particolare attenzione al ragionamento astratto e logicamente rigoroso a discapito degli esercizi).	Strumentale: presentazione della matematica da un punto di vista formale con particolare attenzione rivolta alla parte pratica (la presentazione dei concetti è volta alla risoluzione degli esercizi).	Modellizzazione: presentazione della matematica formale come modello della realtà (equilibrio tra l'aspetto teorico/formale e pratico).
ORGANIZZAZIONE DEL LIBRO	Ogni capitolo è molto ampio, diviso in sezioni, ciascuna delle quali è divisa in sottosezioni.	A ogni argomento è dedicato un capitolo compatto, suddiviso in sezioni.	Il testo è diviso in temi, ogni tema raggruppa delle unità, in ciascuna delle quali è sviluppato un singolo argomento suddiviso in sottosezioni.
GRAFICA	Essenziale, pulita, molto scarna e monocromatica.	Molto colorata, ampio uso di riquadri e immagini, separazione del margine laterale per isolare esempi e approfondimenti.	Colorata, con forte predominanza dei toni del blu. Largo uso di tabelle e del margine laterale per esempi e approfondimenti.
STRUTTURA DELLE SEZIONI	• Ogni capitolo ha un paragrafo introduttivo in cui sono presentate le definizioni fondamentali; • Ogni sottosezione ha un titolo riportato nel margine al lato sinistro • Alla fine di ogni spiegazione sono presenti dei riquadri arancioni con gli esempi elencati e numerati; • ***Esercitazioni di laboratorio***: esempi di implementazioni in linguaggio Pascal degli argomenti studiati; • ***Nota storica***: aneddoti storici relativi all'argomento trattato; • Esercizi: non eccessivamente vari come tipologie, suddivisi per argomento e ogni capitolo ha una parte di Quesiti, con domande aperte e Vero/Falso; • ***Scheda di autovalutazione***: lista di esercizi a risposta multipla ricapitolativi.	• Ogni capitolo racchiude un argomento presentando definizioni e proprietà con esempi; • Ogni pagina ha un bordo destro in cui, affiancate al paragrafo, sono riportate le formule più importanti citate; • Al termine di ogni sezione ci sono gli ***esercizi per cominciare*** • ***Esercizi:*** suddivisi per le corrispondenti sezioni di teoria, amplia gamma di esercizi catalogati per tipologie (al volo, fai un esempio, invalsi, intorno a noi...); • Nelle sezioni di esercizi sono presenti inserti di **laboratorio**, di varia natura: matematica nella storia, nei giochi, nell'informatica; • ***Verifica delle competenze:*** sezione di esercizi ricapitolativi del capitolo.	• Ogni tema è introdotto da un paragrafo in cui viene presentato un problema reale risolto già formalmente; • *Che cos'è ...*: ogni unità comincia con un problema risolto formalmente e la definizione dell'argomento trattato; • Seguono spiegazioni e classificazioni approfondite correlate da esempi; • ***Sintesi*:** al termine dell'esposizione di alcuni procedimenti, sono presenti queste tabelle che sintetizzano i passaggi; • ***Problema svolto*:** sono dedicate delle pagine al termine dell'unità in cui alcuni problemi sono risolti con uno svolgimento molto guidato; • ***Metodo di studio***: non sempre presente, sono spiegazioni su come studiare la matematica; • ***Percorso delle idee****:* al termine delle unità, mappa di sintesi dei concetti; • ***Esercizi****:* su tutta l'unità, amplissima gamma di esercizi identificati in diverse categorie (*realtà e modelli, a mente, collegamenti, zoom sull'enunciato,laboratorio,...*).

LINGUAGGIO	Molto rigoroso, spazia tra il lessico tecnico delle discipline (algebra, geometria, analisi) e della logica e dell'insiemistica.	Formale, talvolta semplificato, facilmente accessibile.	Formale, soprattutto algebrico, molto ricco.
DIMOSTRAZIONI ALGEBRICHE	Spiegazione dettagliata e rigorosa dei passaggi, uso di lessico e impostazione formale.	Sono presenti giustificazioni dei procedimenti, senza essere dichiarate esplicitamente, tuttavia non vi è dato troppa rilevanza.	Sono presenti dimostrazioni sotto forma di giustificazioni\ spiegazione dei procedimenti, senza essere dichiarate esplicitamente, all'interno della teoria.
CONSIDERAZIONI	Le spiegazioni sono molto complete e rigorose, la grafica minimale del testo non lo rende immediato nella consultazione. Le applicazioni sono molto circoscritte e soprattutto legate alla fisica.	Il testo è molto lineare, asciutto, essenziale. Privilegia l'aspetto formale/tecnico della matematica, le parti legate alle applicazioni sono esigue e disseminate tra gli esercizi. Le spiegazioni sono chiare, lineari e non dispersive.	Le spiegazioni di teoria sono molto ampie, fanno uso di numerose tabelle di classificazione; la teoria è molto approfondita, talvolta ridondante e inutilmente prolissa. Correlazioni con la realtà e approfondimenti presenti e disseminati tra teoria e esercizi.

Capitolo 2

Confronto sugli argomenti selezionati

Per uno studio completo dei testi, dopo una panoramica globale, sono stati selezionati degli argomenti, per poter approfondire e confrontare nel dettaglio il linguaggio utilizzato, l'organizzazione dei concetti, l'impaginazione e l'approccio adottato dai diversi autori. I criteri di analisi adottati fanno riferimento alla struttura, alla formulazione e alla presentazione dell'argomento; inoltre dalle considerazioni che sono emerse da questi confronti in parallelo è stato possibile delineare le caratteristiche specifiche di approccio e impostazione proprie di ogni libro. Per ragioni legate all'organizzazione della sperimentazione è stato scelto come target il biennio del liceo scientifico, di conseguenza gli argomenti selezionati provengono dai volumi specifici per il primo e il secondo anno. Un'altra scelta significativa è legata alla natura degli argomenti: nell'ottica di considerare i testi in modo il più possibile ampio, si sono presi in esame argomenti di algebra, più tecnici e meccanici, e argomenti di geometria, più dimostrativi e di ragionamento. Per la medesima ragione la sperimentazione vede coinvolti due argomenti: Sistemi Lineari e Cerchio/Circonferenza.

2.1 Sistemi Lineari

Il capitolo selezionato per la sperimentazione è quello dei sistemi lineari. La prima differenza sostanziale tra i due testi leader di mercato, Bergamini e Sasso, e Dodero è la posizione del capitolo: nei primi due libri si trova come primo argomento trattato nel volume per la classe seconda, mentre nel terzo si trova nel volume dedicato alla classe prima. Questa scelta è probabilmente legata ai cambiamenti che ha subito la programmazione scolastica nell'arco degli anni, infatti oggi in molti licei scientifici i sistemi lineari vengono affrontati dopo le disequazioni e i sistemi di disequazioni. Tutti i libri aprono il capitolo con una sezione su *Equazioni lineari in due incognite* (Bergamini pag. 574), (Sasso pag. 67), (Dodero pag. 575). Nel testo di Zanichelli la presentazione dell'argomento è molto asciutta e formale: viene data immediatamente la definizione di equazione lineare in due incognite, a cui segue una breve spiegazione sul concetto e rappresentazione di retta, corredata di un esempio tecnico. La scelta di Sasso e di Dodero è, invece, introdurre l'argomento con problemi modellizzabili matematicamente tramite equazioni in due incognite e sistemi. Dodero presenta un problema di carattere fisico, avente linguaggio scolastico:
Un'automobile percorre in 3 ore un tragitto, in parte in autostrada, alla velocità media di 120 km/h e, in parte su strada statale, alla velocità media di 80 km/h.
Quanti chilometri ha percorso?
Sasso, invece, presenta due problemi dalla realtà, espressi in linguaggio naturale:

- *In un cinema, i biglietti vengono venduti al prezzo di 7 euro e quelli ridotti, destinati a bambini di età inferiore a otto anni, al prezzo di 5 euro. In una serata sono stati venduti complessivamente 156 biglietti e sono stati incassati 1044 euro. Quanti biglietti ordinari e quanti ridotti sono stati venduti?*

- *Un test è formato da domande e problemi: Paolo risponde esattamen-*

te a 7 domande, svolge correttamente 3 problemi e ottiene 29 punti. Francesca risponde correttamente a 10 domande, svolge correttamente 2 problemi e ottiene 30 punti. Quanti punti vale una domanda e quanti un problema?

Per quanto concerne le definizioni di sistema lineare e soluzione di sistema, Sasso risulta dal confronto il testo più equilibrato: la definizione di sistema (pag. 68) è asciutta e completa, viene sottolineato che le equazioni di un sistema sono *due o più*, tutte nelle stesse incognite, e devono essere risolte contemporaneamente; inoltre la soluzione è definita come *coppia ordinata di numeri che soddisfa entrambe le equazioni.* Dodero presenta una definizione di soluzione simile, ma specifica che la coppia ordinata è di numeri reali e ne spiega il significato, ovvero che *sostituendo tali valori alle corrispondenti incognite, entrambe le equazioni del sistema si trasformano in equivalenze vere* (pag. 582). Alla precisione di tale definizione si contrappone quella di sistema, estremamente essenziale, che pone l'accento esclusivamente sul fatto che le equazioni vengano considerate *contemporaneamente*, aspetto fortemente sottolineato anche nelle definizioni di Bergamini, dove la contemporaneità e ricerca di *soluzioni comuni* è ribadita in entrambe le definizioni (pag. 574), ma non viene esplicitato che si tratta di coppie ordinate. Gli aspetti di determinazione, indeterminazione, impossibilità, equivalenza e grado di sistema sono trattati in modo equivalente nei tre testi. L'unica differenza è nella presentazione: Bergamini e Sasso sono più schematici e ricorrono a elenchi puntati, mentre Dodero antepone alle definizioni spiegazioni articolate, e non sempre tali definizioni vengono messe in rilievo con riquadri o indentazioni particolari, ma si trovano nel corpo del testo. Un paragrafo trattato unicamente in Dodero è *I sistemi come congiunzione di predicati* (pag. 583). Solo in questo testo viene approfondito l'aspetto logico, in parte a discapito di quello geometrico: ad esempio nella sezione dedicata alla differenza tra sistemi determinati, indeterminati e impossibili, la spiegazione su come sono disposte le rette nel piano cartesiano e dei rispettivi punti di intersezione non è supportata da esempi grafici. Inoltre nello svolgimento dell'esempio intro-

duttivo alla sezione dei sistemi non è esplicitato il passaggio da spiegazione algebrico-insiemistica di soluzioni a risoluzione grafica.
Una parte consistente dei capitoli è dedicata ai metodi di risoluzione dei sistemi. Caratteristica che accomuna tutti i manuali è la suddivisione tra risoluzione grafica e algebrica. Tuttavia, Bergamini e Sasso denotano la risoluzione grafica con il titolo di *interpretazione grafica di un sistema* (Bergamini pag. 575, Sasso pag. 70), relegandola a una sottosezione della sezione iniziale e non attribuendo a questo strumento un effettivo metodo di risoluzione. Ciò nonostante in Bergamini, a conclusione della sezione, vi siano degli *esercizi per cominciare*, a suggerire che si tratti di un modo comunque valido per svolgere esercizi. Dodero è più chiaro, intitolando due sezioni indipendenti *Risoluzione grafica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite* (pag. 587 e seg.)e *Risoluzione algebrica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite* (pag. 587 e seg.). A questo parallelismo di notazione segue un parallelismo di trattazione: infatti, così come nella parte algebrica, anche in quella grafica viene spiegato il procedimento risolutivo a cui segue un esempio.
I metodi algebrici vengono presentati tutti con lo stesso ordine:

- metodo di sostituzione
- metodo del confronto
- metodo di riduzione (Bergamini), addizione e sottrazione (Sasso), eliminazione (Dodero)
- metodo di Cramer

In riferimento ai primi tre metodi, Bergamini presenta la struttura più asciutta e graficamente pulita. Per ciascun metodo vengono utilizzate poche righe di introduzione, nelle quali si richiamano i concetti fondamentali (ad esempio il principio di sostituzione e di eliminazione) a cui segue un esempio guidato e commentato. Inoltre si sente prepotentemente l'assenza di spiegazioni di

carattere generale. Anche Sasso propone una struttura simile (un'introduzione e un esempio commentato) ma aggiunge parti di spiegazione verbale nelle quali esplicita i casi in cui un determinato metodo può essere utilizzato, che il metodo del confronto è una variante di quello di sostituzione e che il metodo di addizione e sottrazione ha validità a partire dalle proprietà dei numeri reali. Inoltre propone delle tabelle che schematizzano *i passi* per la risoluzione di un sistema e organizzano i concetti trattati. Estremamente differente è l'approccio di Dodero: questi tratta ogni metodo inizialmente con una spiegazione di carattere puramente generale, chiarendo l'idea alla base del metodo. Successivamente presenta la spiegazione tramite i passi di risoluzione, i quali, pur sfruttando elenchi numerati, non sono sintetici e schematici, ma sono spiegazioni approfondite, nelle quali vengono esplicitati tutti i casi che possono verificarsi. Solo infine propone un esempio risolto e commentato, debitamente riquadrato e contrassegnato.
Per quanto riguarda il metodo di Cramer, Dodero e Sasso scelgono di partire dal metodo di riduzione nel caso generale per ricavare le espressioni delle incognite, mostrando casi che si possono verificare in base all'annullamento dei coefficienti. Sasso propone uno schema a cascata chiaro, che permette di seguire agilmente il ragionamento, mentre Dodero preferisce una formulazione più discorsiva. Entrambi arrivano al concetto di determinante e alla formulazione della regola di Cramer. Criticità di Dodero è che, a differenza di Sasso, non introduce la definizione di matrice, usandone comunque la notazione specifica. Bergamini, invece, propone immediatamente il teorema con la relativa dimostrazione, trattando solo il caso di sistemi a coefficienti tutti non nulli. Successivamente introduce le matrici due per due, definendone il determinante, così da arrivare a enunciare la Regola di Cramer.
Sasso e Bergamini concludono la sezione con un paragrafo su *confronto fra rapporti dei coefficienti*, ovvero una regola operativa che permette di stabilire se un sistema due per due è determinato, impossibile o indeterminato in base al rapporto tra i coefficienti delle incognite. Dodero tratta l'argomento nel paragrafo introduttivo ai sistemi: questo è possibile in quanto utilizza da

subito la scrittura generale di sistema e, come già evidenziato, a differenza degli altri testi pone l'attenzione più sull'idea alla base del ragionamento che non alla regola pratica, facendo uso del linguaggio logico. Bergamini conclude l'argomento presentando di seguito la sezione di esercizi, mentre Dodero e Sasso proseguono il capitolo con la teoria relativa ai sistemi letterali e a tre equazioni. Sasso conclude con uno schema riassuntivo dei concetti trattati nel capitolo (pag. 96-97) nel quale, in una trattazione molto schematica, richiama le definizioni fondamentali e i metodi risolutivi esposti. Tuttavia non vi sono riportati l'interpretazione grafica e il metodo del confronto.
Un aspetto fondamentale nell'analisi dei libri di testo di matematica riguarda gli esercizi che vengono proposti, dove le differenze strutturali tra i testi di ultima edizione e di Dodero appaiono evidenti. Innanzitutto la quantità di esercizi è sensibilmente differente: Dodero propone complessivamente 68 esercizi, a fronte dei 206 di Sasso e dei 244 di Bergamini. Inoltre Dodero classifica gli esercizi in:

- *QUESITI*: tre domande aperte di carattere generale.
- *RISOLUZIONE GRAFICA*: otto esercizi, ciascuno con due sistemi da risolvere graficamente.
- *RISOLUZIONE ALGEBRICA*: quaranta esercizi, di cui alcuni con due sistemi, alcuni interi e altri fratti da risolvere con i metodi algebrici.
- *COMPLETARE*: tre frasi teoriche da completare con i termini mancanti.
- *QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA*: due domande chiuse in cui scegliere l'alternativa corretta.

Sasso e Bergamini, invece, suddividono gli esercizi in sezioni, scandite come la teoria. Le tipologie di esercizio sono molto varie e spaziano tra esercizi tradizionali, domande chiuse e problemi di ragionamento. Entrambi i testi propongono numerosi esercizi svolti, i quali riprendono, in modo quasi identico, quelli presenti nelle relative sezioni teoriche.

Appare evidente come Dodero abbia una predilezione per esercizi che coinvolgono frazioni ed equazioni fratte, con testi molto pesanti alla vista e che necessitano di molti calcoli per essere semplificati. Sasso inserisce sistemi con radicali, oltre a quelli con numeri decimali e periodici. Bergamini non propone alcun tipo di domanda aperta, a differenza di Sasso, ma vi sono numerosi problemi tratti dalla realtà, dalla fisica e dalla chimica. Inoltre, è l'unico testo a classificare gli esercizi in base al livello di difficoltà.

BERGAMINI, BAROZZI	SASSO, ZANONE	DODERO, BARONCINI, MANFREDI
EQUAZIONI LINEARI IN DUE INCOGNITE		
ax+by=c è un'**equazione lineare in due incognite**. L'equazione ax+by=c, con $b \neq 0$, è l'espressione analitica di una **funzione lineare** Ripresa delle rette con esempio	Le equazioni ad una incognita possono risolvere dei problemi, ma non sempre sono modelli algebrici adeguati. DUE PROBLEMI: enunciati, spiegazione, formulazione algebrica	Due problemi, uno riducibile a una equazione in due incognite e l'altro con un sistema risolto per via grafica
Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni per le quali cerchiamo le soluzioni comuni, ossia i valori, da attribuire alle incognite, che verificano *contemporaneamente* tutte le equazioni.	Un insieme di due o più equazioni nelle stesse incognite che si vuole siano soddisfatte contemporaneamente si chiama **sistema di equazioni**.	Si dice **sistema di equazioni** un insieme di due o più equazioni considerate contemporaneamente.
Le **soluzioni** di un sistema sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni che lo compongono.	Una soluzione di un sistema di due incognite è una coppia ordinata di numeri che soddisfa entrambe le equazioni del sistema	Dato un sistema di due equazioni in due incognite, si dice che una coppia ordinata di numeri reali è **soluzione** del sistema, se, sostituendo tali valori alle corrispondenti incognite, entrambe le equazioni del sistema si trasformano in equivalenze vere (def non riquadrata e segue la generalizzazione)
Due sistemi sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni. Un sistema è: **determinato** se ha un numero finito di soluzioni; **impossibile** se non ha soluzioni; **indeterminato** se ha infinite soluzioni.	Un sistema si dice: **determinato** se ha un numero *finito* di soluzioni; **impossibile** se *non* ha soluzioni; **indeterminato** se ha *infinite* soluzioni. Due sistemi che hanno le stesse soluzioni si dicono **equivalenti**.	Si dice che un **sistema** è **impossibile** se non ha soluzioni, che è **determinato** se ha un numero finito di soluzioni, che è **indeterminato** se ha un numero infinito di soluzioni. **Due sistemi**, in cui figurano le stesse incognite, si dicono **equivalenti**, se essi

		hanno le stesse soluzioni, ossia lo stesso insieme di soluzioni.
Il **grado di un sistema** intero è il prodotto dei gradi delle sue equazioni. Un sistema di primo grado, costituito cioè da equazioni lineari, è detto **lineare**.	Si dice **grado** di un sistema *intero* il **prodotto** dei gradi delle sue equazioni. Un sistema di primo grado viene detto **lineare**.	Si dice **grado** di un sistema il prodotto dei gradi delle equazioni del sistema. I sistemi di primo grado devono essere costituiti da equazioni di primo grado. Essi sono anche detti **sistemi lineari**.
Forma normale e Interpretazione grafica (rette e intersezioni)	Interpretazione grafica e forma normale (rette e intersezioni)	interpretazione grafica E INSIEMISTICA senza grafici, ripresi successivamente. (forma normale citata sotto il grado)
Ci sono problemi che possono essere risolti mediante sistemi, perché le relazioni che esprimono possono essere tradotte in equazioni da verificare contemporaneamente		

METODO DI SOSTITUZIONE

enunciato principio di sostituzione esempi guidati	quando si può utilizzare esempio guidato passi di risoluzione esempio guidato con i passi	passi di risoluzione (esplicitando tutte le possibili dipendenze) principio di sostituzione esempio guidato

METODO DEL CONFRONTO

descrizione del metodo esempio guidato	Variante del metodo di sostituzione esempio guidato con i passi	Variante del metodo di sostituzione passi di risoluzione esempio guidato

METODO DI RIDUZIONE (/ADDIZIONE E SOTTRAZIONE/ ELIMINAZIONE)

enunciato del principio di riduzione	parte dalle prop dei numeri reali	spiegazione della logica alla base

esempio guidato	esempio commentato generalizzazione esempio (confronto tra sostituzione e ad-sot) sintesi	passi di risoluzione principio di riduzione esempio guidato

METODO DI CRAMER

teorema soluzioni di un sistema con dim		
Un insieme di quattro numeri ordinato in due righe e due colonne mediante uno schema del tipo $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ è una **matrice**;	Dati quattro numeri a_1, b_1, a_2, b_2 , disposti in una tabella del tipo $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, detta matrice	NON CI SONO LE MATRICI
Il determinante di una matrice con due righe e due colonne è il numero che si ottiene come differenza fra il prodotto degli elementi della diagonale principale e i prodotto di quelli della diagonale secondaria	si chiama determinante della matrice, e si indica con il simbolo $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ il numero $a_1b_2 - a_2b_1$	L'espressione $a_1b_2 - a_2b_1$, il cui valore ci permette di decidere se un sistema è determinato oppure no, si chiama determinante (dei coefficienti) del sistema e si indica con la lettera D o con il simbolo $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
Regola di Cramer con esempio	Teorema di Cramer con esempio	Regola di Cramer con esempio
confronto tra rapporti dei coefficienti esempio	il criterio dei rapporti tabella con problemi sintesi	paragrafo dedicato ma senza usare la definizione "confronto tra rapporti"

2.2 Cerchio e Circonferenza

Infine vediamo il confronto su un argomento meno tecnico, dove appaiono più evidenti le differenze tra i due testi leader di mercato e quello più desueto: in primo luogo Dodero presenta il capitolo *Circonferenza. Poligoni inscritti e circoscritti* (pag. 399), mentre gli altri testi dividono gli argomenti su due capitoli, ovvero il Sasso contiene i capitoli *Circonferenza e cerchio* (pagg. 588-633) e *Poligoni inscritti e circoscritti* (pagg. 635-670), similmente il Bergamini (pagg. G142-G185 e pagg. G186-G205); inoltre, la presenza solo in Bergamini e in Sasso troviamo una sezione iniziale del capitolo dedicata ai luoghi geometrici, dove vengono riprese le fondamentali definizioni di luogo geometrico, asse del segmento e bisettrice di un angolo. Ovviamente, l'analisi comparata che segue fa riferimento al corpo concettuale comune dei tre libri. È importante puntualizzare che il Dodero contiene una quantità non indifferente di teoremi, proprietà e osservazioni che non compaiono negli altri testi, ragion per cui nell'ambito della sperimentazione tali sezioni sono state contrassegnate e non è stato richiesto ai ragazzi di studiarle, lasciandole come approfondimento individuale, per non creare disomogeneità nelle classi.
Bergamini si rivela il testo più impreciso formalmente: nella definizione di circonferenza, per esempio, non solo non esplicita che il raggio deve essere un numero reale positivo (precisiamo che in tutti i testi è escluso il caso degenere di raggio nullo), come sottolinea il Sasso, ma soprattutto non esplicita che il luogo geometrico dei punti della circonferenza appartiene a un piano. La sua formulazione asciutta e concisa non gli permette neppure di sottolineare che la circonferenza è il contorno o la frontiera del cerchio corrispondente come, rispettivamente, viene fatto invece in Dodero e in Sasso. Infatti in Bergamini non si trova alcun riferimento alla sostanziale differenza tra circonferenza e cerchio, ovvero che la prima è una linea, mentre il secondo una superficie.
Lo stesso stile scarno si ripresenta in altre definizioni, quali quella di settore circolare, dove è assente la definizione di quadrante circolare. Inoltre, le definizioni di Dodero sono in assoluto le più complete e rigorose: utilizzano termini più corretti da un punto di vista matematico, tenendo comunque in

considerazione il livello dei lettori,come ad esempio *parte di piano* (def. pag. 401) invece di parte di cerchio (Bergamini pag. G147) (Sasso pag. 596). Portiamo a confronto come viene trattato il teorema relativo alla relazione tra corde congruenti di un circonferenza e archi corrispondenti. Bergamini presenta un unico enunciato con la formula *viceversa* esplicitata, a cui segue dimostrazione di entrambe le implicazioni con relativi disegni:

Corde e archi congruenti

In una circonferenza, corde congruenti sottendono archi congruenti e, viceversa, archi congruenti sono sottesi da corde congruenti. (pag. 146)

Sasso separa le due implicazioni, presentando due enunciati distinti, non dimostra né presenta disegni relativi a nessuno dei due, conclude, però, con uno schema di triplice coimplicazione che chiarisce le relazioni tra corde, archi e angoli al centro congruenti:

In una circonferenza, ad angoli al centro congruenti corrispondono corde e archi congruenti.

In una circonferenza, a corde o archi congruenti corrispondono angoli al centro congruenti. (pag.597)

Figura 2.1: Sasso pag. 597

Dodero presenta una sola implicazione (corde congruenti ⇒ archi congruenti) con dimostrazione e disegno. Si osservi che è l'unico enunciato in cui viene specificato che le corde possono appartenere alla stessa circonferenza o

a *circonferenze congruenti.* Segue un commento contrassegnato da *N.B.* nel quale è spiegato come invertendo l'enunciato si ottenga nuovamente un'affermazione vera: (pag. 405)
In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) le corde che sottendono archi congruenti sono congruenti.
Queste differenze si mantengono simili per molti teoremi nel capitolo: Bergamini presenta il teorema conciso, ma esplicito con dimostrazione, Sasso suddivide tutti i casi coinvolti in enunciati separati e non presenta tutte le dimostrazioni, Dodero è più formale e tecnico.
Per quanto riguarda le possibili posizioni reciproche tra una retta e una circonferenza, in ogni testo c'è una sezione dedicata (Bergamini pag. G151), (Sasso pag. 598), (Dodero pag. 406). I concetti fondamentali di questa sezione sono:

- definire una retta secante, esterna o tangente a una circonferenza in base ai punti di intersezione tra le due;
- definire una retta secante, esterna o tangente a una circonferenza in base al rapporto tra distanza della retta dal centro della circonferenza e lunghezza del raggio;
- una retta tangente a una circonferenza è sempre perpendicolare a uno dei raggi.

Bergamini definisce una retta secante, tangente o esterna in base al numero di punti di intersezione, porta un esempio grafico delle tre possibili configurazioni (*Rispetto a una circonferenza, una retta è: esterna se non ha punti in comune; tangente se ha in comune un punto; secante se ha due punti in comune.*). Segue il teorema con dimostrazione *Posizione reciproca tra una retta e una circonferenza*, in cui è dimostrata la relazione tra distanza della retta dal centro e lunghezza del raggio nei tre casi. Infine, viene spiegato che queste sono le uniche conformazioni possibili per i due oggetti geometrici e consegue il risultato di perpendicolarità nel caso di tangenza. Sasso ha una struttura simile, tuttavia, invece di introdurre subito la definizione riquadrata, dedica un paragrafo alla descrizione del ragionamento che porta alle tre conformazioni possibili. I successivi due teoremi, *Posizione reciproca tra retta e circonferenza* e *Retta tangente a un circonferenza*, hanno la medesima struttura di Bergamini. Dodero, invece, inizia dichiarando l'esclusività delle tre conformazioni, successivamente ne analizza una per volta, considerando prima il rapporto tra distanza della retta e centro e solo dopo dando la definizione in base alla quantità di punti di intersezione (*Una retta si dice esterna rispetto a una circonferenza se tutti i suoi punti sono esterni alla circonferenza; Una retta si dice tangente rispetto a una circonferenza se ha un solo punto in comune con essa e tutti gli altri suoi punti sono esterni alla circonferenza; Una retta si dice secante rispetto a una circonferenza se ha due punti in comune con la circonferenza*). Il teorema di perpendicolarità è enunciato, non dimostrato, ma viene anche invertito, asserendo che *viceversa, la perpendicolare a un raggio nel suo punto estremo (diverso dal centro della circonferenza) è tangente alla circonferenza* (pag.407). Le stesse strutture si ripetono nella presentazione delle conformazioni reciproche di due circonferenze: Bergamini estremamente schematico, racchiude tutti i concetti all'interno di una tabella strutturata, Sasso apre l'argomento con un paragrafo espositivo che sfrutta le immagini, seguito dalla presentazione delle casistiche con elenco puntato e Dodero approfondisce ogni caso in un paragrafo apposito con disegni e spiegazioni.

La sezione successiva è relativa ad angoli al centro e angoli alla circonferenza, i contenuti sono paragonabili tra i testi ma con leggere differenze. Sasso è l'unico ad avere una bella classificazione su gli angoli alla circonferenza con esempi e controesempi illustrati e tabulati (pag.603), dove viene utilizzato il colore rosso per gli esempi e il blu per i controesempi. Bergamini propone degli esempi illustrati un po' caotici (pag.155): la scelta di usare un unico disegno nel quale sono indicati più angoli contemporaneamente non giova alla chiarezza visiva. Dodero enfatizza con una definizione separata il concetto di *angolo al centro corrispondente a un angolo alla circonferenza dato* (pag. 410). Il teorema centrale del capitolo in tutti e tre i testi è : *Ogni ango-*

lo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro, espresso da Bergamini nella forma *Un angolo al centro è il doppio di un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.* Le dimostrazioni procedono tutte con la stessa struttura e vengono fatte seguire dalle due proposizioni:

- Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti
- Un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza se e solo se è retto.

Bergamini li classifica come teoremi, dando una dimostrazione della prima da cui deduce la seconda; Sasso, invece, li presenta come corollari al teorema lasciando al lettore le dimostrazioni, ma spiegando che la seconda proposizione se invertita rimane vera. Al contrario, Dodero li etichetta come proprietà, dandone una breve spiegazione che richiama la dimostrazione del teorema, alla quale fa seguire l'enunciato formale espresso con il *viceversa*: *Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo e viceversa ogni triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza avente l'ipotenusa come diametro* (pag.n 412). I capitoli si chiudono con il paragrafo che racchiude il teorema *Il luogo dei punti che vedono un segmento secondo un dato angolo* e la costruzione geometrica delle rette tangenti a un punto esterno a una circonferenza. Bergamini espone prima il teorema spiegandolo e poi la costruzione geometrica illustrata passaggio a passaggio (pagg. G156-157), mentre Sasso inverte l'ordine di presentazione, dando rilevanza a *Una costruzione con riga e compasso* e inquadrando il terema con *Approfondimento* (pagg. 606-607). Dodero inizia con la definizione di *arco capace di un dato angolo*, in modo da introdurre il problema: *Costruire in un piano l'arco capace di un dato angolo e avente gli estremi in due punti A, B assegnati*, al quale collegare il concetto di punto che vede un segmento sotto un angolo dato, formalizzato in teorema.
Passando alla parte di esercizi, anche per la geometria, Dodero ne presenta

una quantità nettamente inferiore rispetto agli altri due: 118 contro 203 di Bergamini e 215 di Sasso. Sicuramente la varietà di proposta dei due leader di mercato è evidente rispetto a Dodero, le tipologie di esercizio spaziano di più rispetto ai solo Vero/Falso, dimostrazioni a completamento e classici esercizi dimostrativi. Inoltre, in questi due testi gli esercizi prevedono figure più complesse, spesso già disegnate, mentre Dodero non propone nessun esercizio, al di fuori di quelli a completamento, con già l'immagine tracciata. Questa è una differenza sostanziale perchè richiede all'utente oltre allo sforzo strategico per affrontare la risoluzione anche quello di comprensione, dove non sempre è chiaro a una lettura superficiale come sia la figura di riferimento. Altra peculiarità di Dodero è che presenta all'inizio di ogni sezione di esercizi un blocco di *quesiti*, domande teoriche a risposta aperta, alle quali si potrebbe rispondere per iscritto esercitando, così, le competenze comunicative. Anche Sasso ha delle sezioni *giustifica e argomenta*, nelle quali sono racchiuse delle affermazioni teoriche che richiedono di essere giustificate e argomentate.
Bergamini e Sasso si caratterizzano per la presenza di problemi tratti da contesti reali, che propongono delle applicazioni dirette dell'argomento studiato, marcando sulla modellizzazione. Sasso ha delle sezioni dedicate contrassegnate dalla dicitura *Realtà e modelli*, mentre Bergamini li indica con *Intorno a noi* e aggiunge delle sezioni di *Laboratorio*, dove sono prensenti argomenti dove la matematica è presente in altre discipline (esempio *Matematica e arte* pag. G162). Un punto di forza di Bergamini è che di ogni esercizio è indicato il grado di difficoltà: questo, oltre alla suddivisione per sezioni tematiche, rende il testo facilmente fruibile. Sasso, invece, ha una struttura molto organizzata della parte di esercizio in cui sono chiaramente contrassegnati gli esercizi svolti e quelli guidati. Complessivamente la sua grafica risulta la più pulita, ciò lo rende di facile consultazione.

BERGAMINI, BAROZZI	SASSO, ZANONE	DODERO, BARONCINI, MANFREDI

LUOGHI GEOMETRICI

Il **luogo geometrico** della proprietà P è l'insieme di *tutti* e *soli* i punti del piano che godono della proprietà *P*. *P* è la **proprietà caratteristica** del luogo.	Si chiama **luogo geometrico** l' insieme costruito da **tutti e soli** i punti (del piano o dello spazio) che godono di una certa proprietà, detta **proprietà caratteristica** del luogo.	
L'asse del segmento è il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento. (teorema con dimostrazione)	L'**asse** del segmento è il luogo dei punti del piano **equidistanti** dagli **estremi** del segmento. (teorema con dimostrazione)	
La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. (teorema con dimostrazione)	La **bisettrice** di un angolo è il **luogo** dei punti dell'angolo **equidistanti** dai **lati** dell'angolo. (teorema con dimostrazione)	

esercizi su rette parallele e perpendicolari	esempio e controesempio di logo geometrico richiamo alla def. di asse di un segmento e bisettrice di un angolo	non presente nel manuale 2

CIRCONFERENZA E CERCHIO

Una **circonferenza** di centro O e di **raggio** r è il luogo geometrico dei punti che hanno distanza r da O. (con disegno)	Si chiama **circonferenza** di centro O e di **raggio** r, essendo r un numero reale positivo, il luogo dei punti del piano che hanno distanza r da O. (con disegno)	La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano che hanno da un punto dato distanza assegnata

definizioni di: **corda**: ogni segmento che ha per estremi due punti di circonferenza (con disegno) **diametro**: ogni corda che passa per il centro **punti interni** ed **esterni**	definizione di: punti interni ed esterni (con disegno)	definizioni di: centro/raggio (con disegno) diametro punti interni/punti esterni
Il segmento che ha per estremi un punto interno e un punto esterno a una circonferenza la interseca in *uno* e *un solo* punto (con disegno)	Se P è un punto interno a una circonferenza e Q un punto esterno, allora il segmento PQ ha uno e un solo punto in comune con la circonferenza (con disegno)	ASSENTE
Un **cerchio** è l'insieme dei punti di una circonferenza e di tutti quelli interni ad essa. (con disegno)	Si chiama **cerchio** di centro O e di raggio r la <u>figura costruita</u> dalla circonferenza di centro O e raggio r e da tutti i punti interni ad essa (con disegno)	La figura costituita da tutti i punti di una circonferenza e dai suoi punti interni si chiama **cerchio,** <u>di cui la circonferenza è il contorno.</u>
Esiste *una* e *una sola* circonferenza che passa per tre punti non allineati (teorema con disegno e dimostrazione)	Esiste **una e una sola** circonferenza passante per **tre** punti **non allineati**. (teorema con disegno e dimostrazione)	per tre punti non allineati passa una circonferenza e una sola. (teorema con disegno e dimostrazione, pg 404, non subito successivo)

NESSUN RIFERIMENTO ALLA DIFFERENZA TRA LINEA E SUPERFICIE	circonferenza definita come frontiera del cerchio approfondimento sulle isometrie usi specifici dei colori	distinzione tra linea e superficie tra circonferenza e cerchio congruenza tra circonferenze

ARCHI, ANGOLI AL CENTRO E SETTORI CIRCOLARI

Un **arco** di circonferenza è la parte della circonferenza compresa tra due suoi punti	Si chiama **arco** l'intersezione di una circonferenza con un suo angolo al centro.	Si definisce **arco** una parte di circonferenza delimitata da due suoi punti, detti estremi

		dell’arco.
Un **angolo al centro** è un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.	Si chiama **angolo al centro** ogni angolo che ha il vertice nel centro di una circonferenza (o di un cerchio) (con disegno)	Si chiama **angolo al centro** di una circonferenza ogni angolo avente il vertice nel centro.
In una circonferenza, corde congruenti sottendono archi congruenti e, viceversa, archi congruenti sono sottesi da corde congruenti. (teorema con disegno con dimostrazione)	2 teoremi senza dimostrazione con triplice coimplicazione: ● In una circonferenza, ad **angoli al centro congruenti** corrispondono **corde e archi congruenti**. ● In una circonferenza, ad **corde** o **archi congruenti** corrispondono **angoli al centro congruenti**.	In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) le corde che sottendono archi congruenti sono congruenti. (teorema con disegno con dimostrazione, e nel N.B. il viceversa)
Un **settore circolare** è la parte di cerchio compresa fra un arco e i due raggi che congiungono il centro con gli estremi dell’arco. (con disegno)	Si chiama **settore circolare** l’intersezione di un cerchio con un suo angolo al centro. L’angolo al centro si dice **corrispondente** al settore.	La parte di piano racchiusa da un arco di circonferenza e da due raggi che passano per i suoi estremi si chiama **settore circolare**. (con disegni)
● **Semicirconferenza** l’arco che corrisponde a un angolo al centro piatto; ● **Semicerchio** il settore circolare corrisponde a un angolo al centro piatto. (con disegno)	● **semicirconferenza** un arco i cui estremi sono due punti diametralmente opposti ● **semicerchio** settore circolare il cui corrispondente angolo al centro è piatto ● **quadrante circolare** un settore circolare il cui corrispondente angolo al centro è retto	● Ciascun arco in cui una circonferenza è divisa da un suo diametro si dice **semicirconferenza**. ● Ciascuna delle due parti in cui un cerchio è diviso da un suo diametro si dice **semicerchio**. ● Si chiama **quadrante circolare** un settore circolare il cui angolo al centro è retto.
Un **segmento circolare a una base** è la parte di cerchio compresa fra un arco e la corda che lo sottende. Un **segmento circolare a due basi** è la	Si chiama **segmento circolare a una base** l’intersezione di un cerchio con un semipiano la cui origine contiene una corda del cerchio. Si chiama **segmento circolare a due basi**	La parte di piano compresa tra un arco e la rispettiva corda si chiama **segmento di cerchio o segmento circolare a una base**. La parte di cerchio compresa tra due corde

parte di cerchio fra due corde parallele (con disegno)	l'intersezione di un cerchio con una striscia i cui lati contengono due corde parallele del cerchio**.** (con disegno)	parallele è detto **segmento circolare a due basi**.

	il capitolo è posticipato a uno interamente sulle corde paragrafo dedicato alla corrispondenza tra corde, archi e angoli al centro	il teorema si trova in una sezione successiva "proprietà delle circonferenze"

CORDE

In una circonferenza, un diametro è maggiore di ogni corda che non sia un diametro. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una circonferenza, ogni corda non passante per il centro è **minore** del **diametro**.	In ogni circonferenza il diametro è maggiore di qualsiasi altra corda. (teorema con disegno con dimostrazione)
In una circonferenza, se un diametro e una corda sono perpendicolari, il diametro divide a metà: ● la corda ● l'angolo al centro e l'arco che le corrisponde (teorema con disegno con dimostrazione)	in parte contenuto nel teorema sotto	La retta passante per il centro di una circonferenza e perpendicolare a una corda dimezza la corda, l'angolo al centro e l'arco corrispondente. (teorema con disegno con dimostrazione)
Se il diametro di una circonferenza passa per il punto medio di una corda, che non sia un diametro, allora la corda e il diametro sono perpendicolari. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una circonferenza: ● l'**asse** di una corda passa per il centro della circonferenza ● la **perpendicolare** a una corda condotta dal **centro** è l'**asse** della corda (teorema con disegno con dimostrazione)	La retta passante per il centro di una circonferenza e per il punto di mezzo di una corda è perpendicolare alla corda stessa (e perciò, per il teorema precedente, biseca l'angolo al centro e l'arco corrispondente) (teorema con disegno con dimostrazione)

In una circonferenza, corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una circonferenza (o in circonferenze congruenti) se due **corde** sono **congruenti** hanno la **stessa distanza** dal centro. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una circonferenza (o circonferenze congruenti) corde congruenti sono ugualmente distanti dal centro e viceversa (teorema con disegno con dimostrazione)
In una circonferenza, corde con la stessa distanza dal centro sono congruenti. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una circonferenza (o in circonferenze congruenti) se due **corde** hanno la **stessa distanza** dal centro, allora sono **congruenti**.	vedi teorema sopra
Se due corde di una circonferenza non sono congruenti, la corda maggiore ha distanza minore dal centro. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una circonferenza (o in circonferenze congruenti) se due corde **non** sono congruenti, la corda **minore** ha **distanza** dal centro **maggiore** dell'altra corda. (teorema con disegno con dimostrazione)	In una stessa circonferenza (o in circonferenze congruenti) due corde disuguali distano diversamente dal centro e precisamente quella maggiore ha dal centro distanza minore; viceversa due corde aventi dal centro distanze disuguali sono disuguali e la maggiore è quella che ha dal centro la distanza minore. (teorema con disegno con dimostrazione)

CIRCONFERENZE E RETTE

Rispetto a una circonferenza, una retta è: **esterna** se non ha punti in comune; **tangente** se ha in comune un punto; **secante** se ha due punti in comune. (disegni esplicativi)	Descrizione con disegni	Una retta si dice **esterna** rispetto a una circonferenza se tutti i suoi punti sono esterni alla circonferenza Una retta si dice **tangente** rispetto a una circonferenza se ha un solo punto in comune con essa e tutti gli altri suoi punti sono esterni alla circonferenza Una retta si dice **esterna** rispetto a una circonferenza se tutti i suoi punti sono esterni alla circonferenza

Se la distanza di una retta dal centro di una circonferenza è: maggiore del raggio, la retta è *esterna* alla circonferenza; uguale al raggio, la retta è *tangente* alla circonferenza; minore del raggio, la retta è *secante* la circonferenza. (teorema con disegno con dimostrazione)	Date una circonferenza e una retta: ● se la distanza della retta dal centro della circonferenza è **maggiore** del raggio, la retta è **estern**a alla circonferenza ● se la distanza della retta dal centro della circonferenza è **congruente** al raggio, la retta è **tangente** alla circonferenza ● se la distanza della retta dal centro della circonferenza è **minore** del raggio, la retta è **secante** alla circonferenza (teorema con disegno con dimostrazione)	tutte le situazioni sono trattate in blocco unico in cui vengono analizzati tutti gli aspetti dei casi
Rispetto a una circonferenza, una retta è: esterna *se e solo se* la distanza dal centro è maggiore del raggio tangente *se e solo se* la distanza dal centro è uguale al raggio secante *se e solo se* la distanza dal centro è minore del raggio	Date una circonferenza e una retta: la retta è **esterna** alla circonferenza **se e solo** *se* la sua distanza dal centro è **maggiore** del raggio la retta è **tangente** alla circonferenza **se e solo** *se* la sua distanza dal centro è **congruente** al raggio la retta è **secante** alla circonferenza **se e solo** *se* la sua distanza dal centro è **minore** del raggio	
In una circonferenza, la retta perpendicolare a un qualsiasi raggio OP e passante per P è tangente alla circonferenza. Viceversa, la retta tangente a una circonferenza nel punto P è perpendicolare al raggio OP.	Se una retta è **tangente** a una circonferenza, essa è **perpendicolare** al raggio che ha un estremo nel punto di tangenza; viceversa, la retta perpendicolare a un raggio nel suo punto estremo appartenente alla circonferenza è tangente ad essa.	**La tangente a una circonferenza è perpendicolare al raggio passante per il punto di contatto.** (osservazione con viceversa)
Tangenti da un punto esterno (teorema con disegno e dimostrazione)	Segmenti di tangente (teorema con disegno e dimostrazione)	

CIRCONFERENZE E CIRCONFERENZE

la posizione reciproca dipende dalla distanza tra i due centri	problema analogo alle posizioni reciproche tra una circonferenza e una retta	Due circonferenze situate nello stesso piano non possono avere più di due punti in comune
descrizione tabulata delle cinque possibili configurazioni con: ● nome ● esempio ● caratteristiche ● distanza tra i centri	teorema con descrizione affiancata da immagine	divisione nei cinque casi con disegno e descrizione

ANGOLI ALLA CIRCONFERENZA

Un **angolo alla circonferenza** è un angolo convesso che ha il vertice su una circonferenza e i lati o entrambi secanti o uno secante e uno tangente alla circonferenza.	Si chiama **angolo alla circonferenza** ogni angolo **convesso** che ha il vertice su una circonferenza e i due lati o entrambi secanti la circonferenza, oppure **uno secante** e l'altro tangente alla circonferenza. (seguono esempi e controesempi)	Si definisce **angolo alla circonferenza** un angolo convesso avente il vertice sulla circonferenza e i due lati secanti la circonferenza stessa, oppure un lato secante e l'altro tangente.
Un angolo al centro è il doppio di un angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco. (teorema con disegno e dimostrazione)	Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro (teorema con disegno e dimostrazione)	Ogni angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro. (teorema con dimostrazine)
Gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti	Tutti gli **angoli alla circonferenza** che insistono sullo stesso arco (o su archi congruenti) sono **congruenti**.	In una stessa circonferenza gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti
Un angolo alla circonferenza insiste su una	Ogni angolo alla circonferenza che insiste su	Ogni triangolo inscritto in una

semicirconferenza se e solo se è retto.	una semicirconferenza è retto. (dim lasciata per esercizio di seguito anche il viceversa)	semicirconferenza è rettangolo e viceversa ogni triangolo rettangolo si può inscrivere in una semicirconferenza avente l'ipotenusa come diametro
Il luogo dei punti da cui un dato segmento è visto sotto un angolo retto è la circonferenza che ha quel segmento come diametro.	APPROFONDIMENTO Il luogo dei punti che vedono un segmento secondo un dato angolo. Con teorema!	Il luogo geometrico dei punti di un piano, da cui si vede un segmento sotto un angolo dato, è la coppia di archi di una circonferenza che uniscono gli estremi del segmento e sono capaci dell'angolo dato.
costruzione delle rette tangenti da un punto esterno		

Capitolo 3

Sperimentazione

3.1 Struttura

Nell'ottica di indagare l'accessibilità e l'efficacia delle formulazioni e delle strutture dei libri è stata pensata una sperimentazione per rendere protagonisti gli studenti ed evincere da loro quali caratteristiche siano percepite come funzionali all'apprendimento e quali invece più critiche. Sono state scelte classi seconde di liceo scientifico quale target di riferimento, in base alla disponibilità fornita dai docenti delle scuole. Per ragioni di programmazione scolastica i due argomenti coinvolti sono stati i Sistemi Lineari, per l'algebra, e Cerchio/Circonferenza, per la geometria. Sono state selezionate quattro classi, con in media 25 studenti, per ciascun argomento. In particolare sono state sottoposte alla sperimentazione sui Sistemi Lineari le classi:

- 2E liceo scientifico Copernico, Bologna
- 2G liceo scientifico Copernico, Bologna
- 2H liceo scientifico E. Fermi, Bologna
- 2B liceo scientifico E. Fermi, Bologna

La sperimentazione su Cerchio/Circonferenza è stata, invece, somministrata alle classi:

- 2I liceo scientifico E. Fermi, Bologna

- 2F liceo scientifico Copernico, Bologna

- 2G liceo scientifico Sabin, Bologna

- 2C liceo scientifico Sabin, Bologna

Gli studenti di ogni classe sono stati suddivisi in sei gruppi di livello misto, a ognuno dei quali è stato somministrato uno dei tre libri esaminati, ciò significa che per ogni classe ci sono stati due gruppi di lavoro per ogni testo. A ciascun ragazzo è stato fornito il capitolo integrale relativo all'argomento da affrontare tratto dal libro di riferimento del gruppo, corredato di una scheda esplicativa del lavoro da portare a termine, completa di indicazione delle pagine da studiare e degli esercizi da svolgere. A ogni gruppo è stato chiesto di eleggere un rappresentante incaricato di tenere traccia di tutti i dubbi emersi durante l'attività in aula, sia di quelli risolti tramite discussioni tra pari, sia di quelli irrisolti. Il progetto è stato strutturato in modo che gli studenti risultassero quanto più possibile autonomi nello svolgimento del lavoro. Per tale attività in aula sono state pianificate sei ore, alle quali sono seguite due ore di compito in classe. Per concludere, alla consegna del compito è stato dato ai ragazzi un questionario, a cui rispondere a casa, composto di alcune domande volte a capire l'opinione degli studenti: è stato chiesto cosa pensassero del libro che hanno utilizzato per il progetto, se abitualmente utilizzassero il loro libro di testo per studiare, cosa vorrebbero migliorare del materiale su cui hanno studiato e se avessero sentito la necessità di ricorrere a spiegazioni esterne oppure se lo studio autonomo fosse stato sufficiente per apprendere l'argomento.

3.2 Materiali

3.2.1 Schede di lavoro

Durante la sperimentazione in classe, ai ragazzi sono state fornite delle schede di lavoro riportanti le indicazioni da seguire nell'arco dell'attività: non è stata fatta alcuna suddivisione in base alle ore in classe né sono state date indicazioni specifiche sul lavoro da svolgere a casa, ma sono stati riportati unicamente i capitoli da studiare con i relativi esercizi da svolgere. Questa scelta è stata adottata per promuovere l'autonomia degli studenti i quali, debitamente avvertiti che la responsabilità di programmarsi lo studio, a scuola e a casa, sarebbe stata unicamente loro, hanno dovuto organizzarsi in vista del compito scritto. Insieme alla scheda è stato fornito a ciascun gruppo un foglio protocollo a quadretti su cui riportare ogni annotazione riguardo dubbi, incomprensioni ed esercizi non svolti. Questo sarebbe stato poi raccolto al termine di ogni lezione in modo da monitorare i progressi, ma soprattutto le difficoltà, degli allievi, per avere un quadro più preciso dello svolgimento dell'attività.

3.2.2 Compiti in classe

I compiti in classe presentano tutti la stessa struttura: una parte di teoria, comune a tutta la classe, (composta di domande aperte, domande a risposta multipla e domande vero/falso) e una parte di esercizi, differenziata per libro (composta di esercizi tratti direttamente dal testo di riferimento). La scelta delle domande è legata alla formulazione dei testi, in particolare agli aspetti che non sono esplicitati in tutti i libri o che sono enfatizzati in modi differenti. Ogni domanda è stata pensata e formulata in modo da verificare la comprensione degli argomenti, sia superficiale che profonda, valutando il raggiungimento di obiettivi minimi di apprendimento e la possibile acquisizione del significato logico degli strumenti matematici.

3.2.3 Questionari

I questionari sono stati somministrati dopo il compito in classe, assegnati come compiti per casa, in modo da dar spazio ai ragazzi di potersi esprimere liberamente. Non è stato richiesto l'anonimato, in primis per la generalità delle domande, ma anche per avere la possibilità di ricollegare il giudizio diretto dello studente con le opinioni emerse durante l'attività (segnalate sui fogli dei dubbi). Questo permette di tracciare incongruenze e parallelismi, così da definire un quadro più ricco riguardante il libro e proveniente dai suoi fruitori. Al questionario sono state aggiunte due domande di teoria scartate dal compito, in quanto ritenute ambigue e suscettibili di fraintendimenti secondo i docenti delle classi, ma i cui risultati possono avere un interesse ai fini di questa tesi.

3.3 Considerazioni

In generale gli studenti hanno reagito bene alla sperimentazione, dimostrando interesse e lavorando seriamente. Sono stati molto accurati nel registrare i dubbi e hanno saputo organizzarsi lo studio in modo efficace, completando le consegne entro il giorno del compito in classe. Ci sono stati dei ragazzi che si sono lasciati scoraggiare o che hanno manifestato particolari difficoltà: in questi casi sono intervenuta cercando di motivarli, dando brevi spiegazioni e aiutando ad impostare i ragionamenti, soprattutto per quanto riguarda la geometria. Le classi si sono rivelate molto diverse tra loro, come approccio e stile, tuttavia il lavoro a gruppi ha fatto emergere dei comportamenti comuni. Tutti i gruppi erano costituiti da quattro o cinque studenti e durante il progetto molto spesso alcuni elementi dei gruppi si sono isolati, costituendo sottogruppi di due, tre o singoli. Questo atteggiamento era legato a metodi di studio differenti: infatti alcuni ragazzi hanno dichiarato di preferire lo studio individuale, in quanto hanno la necessità di trascrivere o schematizzare la teoria, ma anche per differenze caratteriali e asincronie di apprendimento. Ogni gruppo, infatti, presentava dei componenti più competenti in matematica rispetto agli altri, in quanto l'aspettativa era che si aiutassero a vicenda. In realtà in alcuni gruppi questi elementi hanno preferito isolarsi, ignorando i progressi o le discussioni del gruppo. Ciò ha provocato una disomogeneità nel lavoro del gruppo e nella comprensione dei singoli. Generalmente i gruppi che hanno studiato su Dodero si sono rivelati i più collaborativi e silenziosi, probabilmente a causa delle difficoltà riscontrate con il testo, descritto come *difficile* e *scomodo*. Questi, infatti, hanno dedicato la prima metà abbondante delle ore a uno studio praticamente individuale, di lettura personale o con un membro del gruppo che leggeva per tutti, soffermandosi spesso a causa del linguaggio a loro non consueto; successivamente, nell'affrontare gli esercizi, hanno dimostrato grande solidarietà reciproca, abbattendo anche barriere di giudizi personali e legate a questioni extra scolastiche. Probabilmente a causa del linguaggio algebrico formale e della struttura compatta di Dodero, questi gruppi faticavano a mantenere l'attenzione per tutta la durata dell'ora, perdendo in comprensione dopo la prima mezz'ora. L'incapacità di mantenere l'attenzione per un tempo prolungato ha accomunato tutte le classi sottoposte alla sperimentazione: in ciascuna erano presenti uno o due gruppi che, a prescindere dal testo di riferimento, hanno avuto bisogno di richiami continui e interventi da parte mia e del docente. Un altro aspetto largamente diffuso è l'incapacità di gestire e organizzare il materiale: molti ragazzi sono stati estremamente caotici nella gestione del materiale fornito loro, rischiando ripetutamente di perderne parti e impiegando moltissimo tempo ogni qual volta dovevano consultarlo, pur tuttavia non dimenticando mai di portarlo nei giorni fissati per il progetto. A questo si aggiunge una diffusa irresponsabilità nel portare a scuola tutti strumenti necessari per lo studio (compasso, righello, calcolatrice e fogli). I gruppi con Bergamini sono risultati i più frammentati: i componenti non hanno sentito la forte necessità di cooperare e coordinarsi.

I gruppi con il Sasso si sono rivelati in tutte le classi i primi a concludere le consegne proposte: mediamente per i sistemi lineari hanno completato tutta la teoria e gli esercizi con due ore di anticipo rispetto a quanto preventivato, mentre per cerchio/circonferenza hanno concluso con, in media, un'ora di anticipo. Questi sono seguiti dai gruppi con Bergamini e infine da quelli con Dodero, i quali alla conclusione delle sei ore non sempre avevano portato a termine tutti gli esercizi. Studiare autonomamente argomenti di matematica è risultata un'esperienza nuova per quasi tutti i ragazzi: alcuni tra loro l'hanno trovata più proficua rispetto alla spiegazione tradizionale, dichiarando di voler adottare questo metodo di studio anche in futuro, mentre per altri ha fatto emergere insicurezze e fragilità. Ci sono stati ragazzi che hanno comunque avuto costantemente bisogno di conferme, chiedendo se stavano capendo bene o se gli esercizi fossero giusti, dove nella quasi totalità delle volte i ragionamenti erano corretti.

Capitolo 4

Risultati

4.1 Fogli dei Dubbi

Al termine di ogni lezione sono stati raccolti i fogli su cui ogni gruppo ha segnato dubbi e incomprensioni emersi durante lo studio. Al termine dell'attività questi dati sono stati messi a confronto, osservando le annotazioni comuni per le quattro classi in esame per ciascun argomento.

4.1.1 Sistemi Lineari

Il principale ostacolo nello studio dei Sistemi Lineari per gli studenti di seconda superiore è stato la rappresentazione grafica di una retta. Molti di loro hanno dichiarato di non sapere come passare dalla forma di equazione analitica alla forma grafica sul piano cartesiano, anche in seguito allo studio dei paragrafi dedicati dai libri a questo tema specifico; inoltre alcuni hanno riconosciuto di essere riusciti ad affrontare l'argomento solo grazie alle spiegazioni ricevute in classe negli anni precedenti. Soprattutto i gruppi che hanno utilizzato Bergamini e Sasso hanno manifestato grande difficoltà nella ricerca delle coordinate dei punti appartenenti a una retta data e nella loro rappresentazione sul piano cartesiano. Gli studenti con Dodero hanno segnalato delle difficoltà relative al paragrafo *Rappresentazione grafica delle soluzioni* (pag. 578), in quanto non hanno compreso a fondo i passaggi algebrici for-

mali necessari per calcolare le coordinate dei punti appartenenti a una retta generica e le spiegazioni sulla natura delle soluzioni possibili per un sistema lineare (*determinato*, quindi un punto dato dall'intersezione delle rette, *indeterminato*, quindi infinite soluzioni rappresentate da due rette coincidenti, e *impossibile*, ovvero nessuna soluzione poichè le due rette rappresentate sono parallele). Tuttavia alcuni dubbi sono stati superati autonomamente in seguito allo studio del paragrafo *Risoluzione grafica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite* (pag. 586).
Analizzando i singoli testi sono emerse delle criticità particolari per ogni singola trattazione. Per Bergamini è stata sottolineata l'ambiguità dei concetti di *retta scritta in forma analitica* ($y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$), con conseguente incomprensione del concetto di *coefficiente angolare* e *retta scritta in forma normale* ($ax + by = c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$). Inoltre è stato segnalato l'esercizio 55 pag. 588 (Bergamini) a seguito del paragrafo *interpretazione grafica di un sistema*, nel quale è presente una retta verticale ($x - 4 = 0$) di cui tracciare il grafico: i ragazzi si sono sentiti incapaci di affrontare l'esercizio, in quanto non era spiegato come comportarsi in assenza di una delle due variabili. Generalmente questi gruppi hanno avuto notevoli problemi nel capire il significato di soluzione di un sistema lineare: *"Se un'equazione del sistema è indeterminata allora è indeterminato tutto il sistema?"* e *"come si disegna la retta* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ *?"*. Inoltre sono sorte delle domande riguardanti i metodi di risoluzione dei sistemi, in quanto nel testo non ci sono spiegazioni teoriche approfondite (metodo del confronto pag. 578) *"Come si trova la x?"*,(metodo di riduzione pag. 594) *"non viene specificato subito l'annullamento dell'incognita"*, (metodo di riduzione pag. 579) *"si può moltiplicare entrambe le equazioni per un coefficiente?"*.
Sasso presenta un errore nella scrittura dell'equazione risolvente del problema iniziale (pag. 67): l'equazione scritta nel testo è $7 + 5 + (156 - x) = 1044$, mentre l'equazione corretta relativa all'esercizio, che seguirebbe anche la spiegazione verbale data del problema, sarebbe $7 + 5 \cdot (156 - x) = 1044$. Alcuni

gruppi si sono accorti dell'errore, ma questo ha fatto perdere loro molto tempo, in quanto i discenti faticano a mettere in dubbio la correttezza del testo, ritenendolo indiscutible. Per questa ragione, o per superficialità, altri gruppi non se ne sono accorti. Per quanto riguarda il problema successivo (pag. 68) l'assenza della soluzione finale al termine della spiegazione di risoluzione ha creato difficoltà di comprensione (*"fin dall'inizio non spiega come viene trovata la soluzione negli esempi, ma la fornisce senza spiegare"*). Ciò nonostante, globalmente, Sasso è il testo per cui sono stati indicati il minor numero di incomprensioni e difficoltà: le puntualizzazioni dei ragazzi sono più delle critiche al testo, riproposte nei medesimi termini nei questionari, che non dei dubbi irrisolti.
Dodero è l'unico tra i tre a utilizzare il termine *identità*, il cui significato non è apparso chiaro ai ragazzi: *l'equazione* $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ *è un'identità* (pag. 577). Presentando un elenco puntato per classificare le equazioni in impossibili, determinate, indeterminate e identità, il testo ha suscitato molti dubbi sulla differenza tra identità ed equazioni indeterminate, nonostante venga specificata la stretta correlazione tra i due termini (*Si osservi che, avendo infinite soluzioni, può essere considerata, oltre che un'identità, anche un'equazione indeterminata* (Dodero pag 577)). Anche per Dodero sono stati registrati problemi di comprensione relativi all'esempio introduttivo all'argomento (Dodero pag 580): la scelta di presentazione di tale esempio vede prima una spiegazione insiemistica generale di soluzione di un sistema (ovvero soluzione del sistema definita come intersezione tra gli insiemi di soluzione delle singole equazioni costituenti il sistema), a cui segue direttamente la soluzione particolare dell'esempio (espressa come punto in coordinate cartesiano) affiancato dal grafico del sistema. I ragazzi non sono stati in grado di capire la connessione tra intersezione di insiemi soluzione, punto e grafico.
Un ulteriore aspetto che ha destabilizzato gli studenti è stato l'uso di definizioni e spiegazioni generali, ovvero la presenza di esempi parametrici, in cui i passaggi algebrici sono svolti mantenendo l'uso delle lettere e non ricorrendo a particolari casi numerici.

Tutto il campione, a prescindere dal testo adottato, ha segnalato le spiegazioni relative al metodo di Cramer. Ovviamente si tratta del metodo algebrico più complesso, richiedendo i concetti di matrice e determinante, totalmente nuovi per gli studenti. A questo si aggiunge la necessità di una spiegazione meno lineare rispetto agli altri metodi, in quanto il procedimento stesso è meno schematizzabile. Le osservazioni dei ragazzi sono estremamente generiche, a indicare che l'intero argomento è risultato ostico, presumibilmente per la sua natura più che per la formulazione: *"metodo di Cramer (teorema, ipotesi e dimostrazione")* (studenti con Bergamini), *"il metodo di Cramer non risulta molto chiaro"* (studenti con Sasso), *"il metodo di Cramer è molto intricato e non riusciamo a capire"* (studenti con Dodero).

4.1.2 Cerchio/Circonferenza

Il capitolo di geometria si è rivelato più difficoltoso per gli studenti, ai quali è mancata la spiegazione del docente, soprattutto per la correzione degli esercizi di natura dimostrativa. Particolarmente problematici sono stati i termini *sottendere* e *insistere*, riferiti alle relazioni tra archi e angoli. A prescindere dal testo utilizzato, i ragazzi hanno avuto difficoltà a comprendere il significato delle parole e le definizioni formali, per questa ragione alcuni hanno fatto ricorso all'uso del dizionario di lingua italiana. Altri due concetti matematici poco chiari, per motivi sostanziali più che formali, sono stati quelli di *corrispondenza biunivoca* (Bergamini pag. G146) e *complanarità* (Dodero pag. 407).

Per quanto riguarda la comparazione dei teoremi studiati quasi tutto il campione ha segnalato i seguenti teoremi:

- Corde non congruenti e distanze dal centro (Bergamini pag. G150), (Sasso pag. 594), (Dodero pag. 402);

- Luogo dei punti dai quali un segmento è visto sotto un angolo dato (Bergamini pag. G156), (Sasso pag. 607), (assente in Dodero).

Essendo espressi con formulazioni, impaginazioni e strutture leggermente diverse, ed essendo risultati poco chiari per tutti e tre i testi, pare ragionevole ipotizzare che la difficoltà sussista nel concetto matematico alla base dei teoremi, o più verosimilmente delle dimostrazioni. Si osservi che Bergamini e Sasso presentano separatamente il teorema *Corde congruenti e distanza dal centro* (Bergamini pag. G149, Sasso pag 594), di cui solo Bergamini è stato segnalato per incomprensione, mentre per Dodero, essendo espresso in un unico teorema utilizzando la formula *viceversa*, non abbiamo informazioni su quale parte del teorema o della dimostrazione non sia risultata chiara.
Per Bergamini, inoltre, viene detto che *"non piace come spiega, il testo è poco chiaro"*, in riferimento al teorema *Circonferenza per tre punti non allineati* (Bergamini pag. 145), mentre di Sasso non è risultato chiaro il teorema *Posizione reciproca tra retta e circonferenza* (Sasso pag. 599). Infine, per Dodero non sono emersi ulteriori teoremi critici per la comprensione, in quanto gran parte delle difficoltà riscontrate sono state relative al linguaggio formale delle definizioni.
Riportiamo gli esercizi, con i commenti più ricorrenti nei fogli dei dubbi:

BERGAMINI:

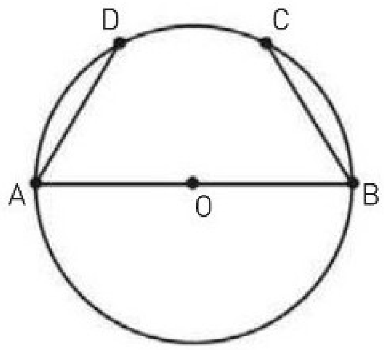
- Es. 33 b) e d) pag. 161:
  b. Per tre punti distinti passa sempre una e una sola circonferenza
  d. Se due circonferenze passano entrambe per tre punti distinti, allora coincidono.

"Per distinti intende allineati oppure non allineati?", *"Due circonferenze coincidenti"*

- Es. 43 pag. 163:
  Sono dati un triangolo isoscele ABC di base BC e una circonferenza di centro A che interseca i lati obliqui di ABC nei punti E e D. Dimostra che $DEBC$ è un trapezio isoscele.
  "Come dimostrare che $ED \parallel BC$", *"Soluzione non chiara"*.

- Es. 44 pag. 163:
  All'interno di un cerchio di centro O considera due punti P e Q non allineati con O. Detti rispettivamente A e B i punti di intersezione tra le semirette, di origine O, OP e OQ e la circonferenza, dimostra che:
  a. I segmenti AB e PQ sono paralleli;
  b. Il trapezio $ABQP$ è isoscele.
  "Disegno", "Soluzione non chiara"

- Es. 46 pag. 163:
  INVALSI 2012 La circonferenza in figura ha il diametro di 10 cm e le corde AD e BC uguali al raggio.
  a. Qual è il perimetro del quadrilatero $ABCD$?
  b. Giustifica la tua risposta.



  "Come dimostrare che la corda DC sia uguale alle corde CB e DA"

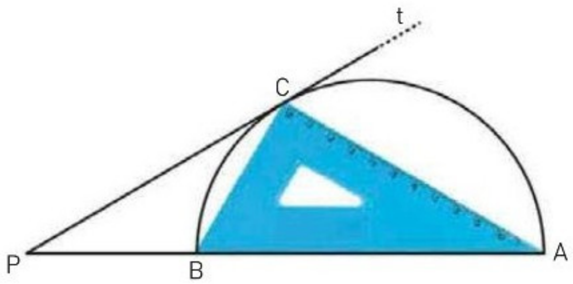
- Es. 100 pag. 168: Su una circonferenza di centro C e diametro AB considera un ulteriore punto P. Per i punti A, B e P traccia le rette tangenti alla circonferenza e indica con Q e R i loro punti di intersezione. Dimostra che il triangolo QCR è rettangolo.

- Es 111 pg 169:

Sapendo che t è tangente alla semicirconferenza e che $C\widehat{B}A$ è un terzo di angolo piatto, dimostra che:

a. t è parallela alla bisettrice di $A\widehat{B}C$;

b. il triangolo PBC è isoscele.



SASSO:

- Es. 53 pag. 615:
  In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde. Dimostra che, se la semiretta BO è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$, allora le due corde sono congruenti.

- Es. 64 pag. 617: Siano M e N i punti medi dei due archi sottesi a una corda AB di una circonferenza. Dimostrare che MN è un diametro.
  Interpretazione scorretta del testo

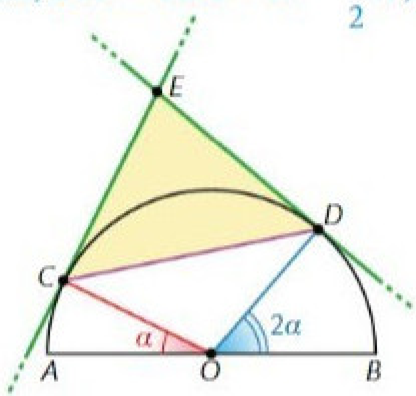
- Es. 74 pag. 618:

74 Nella figura, il punto E è l'intersezione delle tangenti alla semicirconferenza in C e D e α è l'ampiezza (in gradi) dell'angolo $A\widehat{O}C$. Inoltre $B\widehat{O}D = 2\alpha$.

a. Esprimi in funzione di α le ampiezze (in gradi) degli angoli del triangolo CDE.

b. Determina per quale valore di α risulta $C\widehat{E}D = 3E\widehat{C}D$.

$\left[\textbf{a. } C\widehat{E}D = 3\alpha,\ E\widehat{C}D = E\widehat{D}C = 90° - \frac{3}{2}\alpha\ ;\ \textbf{b. } \alpha = 36°\right]$

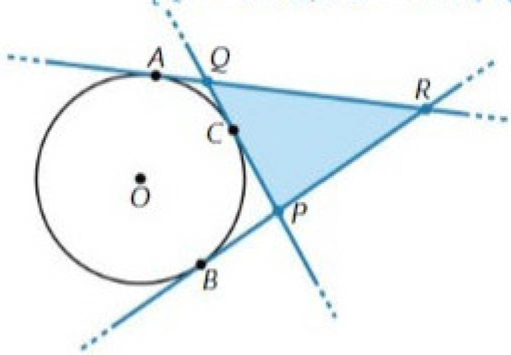


"Non abbiamo capito"

- Es. 75 pag. 618:

75 In riferimento alla figura, in cui le tre rette in blu sono tangenti alla circonferenza rispettivamente in A, B e C, è noto che: $\overline{PC} = 2\overline{QC}$, il perimetro del triangolo PQR è 24 cm e $PQ + 2QR + 3PR = 50$ cm. Determina le lunghezze dei lati del triangolo PQR.

[$QP = 6$ cm, $PR = 8$ cm, $QR = 10$ cm]



- Es. 83 pag. 619:
  In una circonferenza di diametro AB, prolunga AB, dalla parte di B, di un segmento BC congruente al raggio della circonferenza. Conduci da C una retta tangente alla circonferenza e indica con T il suo punto di contatto con la circonferenza. Dimostra che il triangolo TBC è isoscele.
  "Non capito"

DODERO:

- Es. 21 pag. 427:
  Dimostrare che, se da un punto di una circonferenza si conducono due corde congruenti, esse formano angoli congruenti con il diametro passante per il loro punto comune.
  "Interpretazione del testo"

- Es. 22 pag. 427:
  Una retta r incontra due circonferenze concentriche: dimostrare che i segmenti di r compresi tra le due circonferenze sono congruenti.
  "Circonferenze concentriche: r passa per il centro?"

- Es. 25 pag. 428:
  Dimostrare che due corde AB e CD, non parallele e formanti angoli congruenti con il diametro passante per il loro punto d'incontro, sono congruenti. Considerare i due casi:
  1. AB e CD si incontrano internamente al cerchio 2. le rette a cui appartengono AB e CD si incontrano in un punto esterno al cerchio.
  "Disegno"

- Es 37 pg 428: Dimostrare che le proiezioni degli estremi di un diametro di una circonferenza sulla retta di una corda qualunque sono equidistanti dal punto medio della corda.

- Es. 40 pag. 429:
  Si prolunghi una corda AB, in una circonferenza di centro O, di un

segmento BC congruente al raggio; si congiunga C con O e si prolunghi tale congiungente fino a incontrare in E la circonferenza. Dimostrare che l'angolo $\widehat{EOA}$ è il triplo dell' angolo $\widehat{BOC}$.
"Non capito"

- Es. 13 pag. 431: Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono due secanti che formino angoli congruenti con la secante passante per il centro, dimostrare:
  1. che le due secanti hanno distanze congruenti dal centro;
  2. che sono congruenti le corde intercettate dalla circonferenza sulle due secanti.

  "2 dimostrazione"

- Es. 13 pag. 434: Dimostrare che la circonferenza avente per diametro un lato di un triangolo incontra le rette degli altri due lati nei piedi delle altezze a essi relative.

4.2 Compiti in Classe

Al termine delle sei ore di attività in aula, gli studenti hanno affrontato un compito in classe della durata di due ore, strutturato in tre parti: domande aperte, domande chiuse a risposta multipla e vero/falso ed esercizi. In appendice sono riporatati i due prototipi di compito commentati e gli esercizi proposti a seconda del testo utilizzato. Le domande sono state pianificate in modo da verificare l'apprendimento dei contenuti e lo sviluppo delle capacità di ragionamento dei ragazzi. In totale sono stati raccolti 183 compiti in classe, di cui 94 per i Sistemi Lineari e 89 per Cerchio/Circonferenza.

4.2.1 Sistemi Lineari

La prima domanda aperta, *A cosa servono i sistemi di equazioni?*, aveva l'obbiettivo di vedere se fosse stato compreso che i sistemi lineari sono uno strumento algebrico utile a modellizzare e risolvere problemi. La maggior parte delle risposte ruota intorno alla definizione di sistema: *"i sistemi di equazioni servono per risolvere contemporaneamente due o più equazioni nelle stesse incognite"*, *"i sistemi di equazioni sono insiemi di equazioni con le stesse incognite che si chiede che siano soddisfatte contemporaneamente"*. La quasi totalità del capione manifesta pertanto di aver associato l'utilità dello strumento alla possibilità di calcolare algebricamente un risultato, così come ha compreso chiaramente la caratteristica di *simultaneità* propria dei sistemi. Uno studente per Bergamini e uno per Sasso hanno menzionato, quale scopo dei sistemi, la rappresentazione grafica di rette e punti sul piano cartesiano: *"i sistemi di equazioni servono per determinare le componenti x e y di un'equazione per poi rappresentare graficamente"* [studente con Bergamini], *"per determinare le componenti x e y di un'equazione per poi rappresentare graficamente"* [studente con Sasso]. Tra le risposte dei gruppi con Dodero ne spiccano alcune più articolate, che denotano una compessità di ragionamento maggiore (*"servono per confrontare due o più equazioni"*, *"servono per risolvere problemi che hanno più di un dato mancante"*). Inoltre molti studenti, indipendentemente dal testo adottato, hanno specificato che i sistemi sono composti da due equazioni, trascurando la possibilità di metterne a sistema un numero maggiore: ciò è facilmente riconducibile al fatto che, nonostante in tutte le definizioni si trovi la dicitura *due o più equazioni*, i ragazzi hanno fatto esercizio esclusivamente su sistemi due per due. Tuttavia, per una maggiore chiarezza in merito alla effettiva comprensione degli studenti, queste risposte sono state confrontate con le risposte alla domanda c. dei Vero/Falso (*Un sistema lineare ha sempre e solo due equazioni*). Le risposte contradditorie, ovvero risposta falso avendo scritto la risposta parziale (due) alla prima domanda oppure risposta vero avendo dato la definizione corretta (due o più) nella prima domanda, sono state quattro per Bergamini, cinque per Sasso e solo una per Dodero.

Alla seconda domanda, *Quali sono i metodi che hai studiato per risolvere i sistemi lineari?(enunciali e descrivili brevemente)*, i ragazzi hanno risposto in modo più o meno approfondito, ma globalmente completo. Un dato interessante è quanti di loro hanno menzionato il metodo grafico tra i metodi studiati. Riportiamo la percentuale sugli studenti per tipo di testo usato: 43% per Bergamini, 29% per Sasso e 46% per Dodero. L'esposizione scritta degli studenti è stata talvolta carente, in quanto per loro ammissione, confermata dai docenti responsabili, non erano abituati a esercitare la forma scritta per materie scientifiche. Presumibilmente per questa ragione, tre studenti per Sasso, uno per Bergamini, ma nessuno per Dodero, hanno solo enuncito i metodi senza spiegarli. Inoltre il 17% degli studenti con Bergamini e il 13% degli studenti con Sasso hanno fatto ricorso all'uso di esempi particolari per descrivere i metodi di risoluzione, mentre il 12% degli studenti con Dodero hanno utilizzato esempi generali per descrivere i processi algebrici. Apparentemente quindi gli studenti hanno assimalito l'approccio del testo: coloro che hanno utilizzato Bergamini sono più in difficoltà a formulare un discorso scritto, mentre quelli che hanno utilizzato Dodero hanno aumentato le loro competenze comunicative.

La terza domanda (*Cos'è il determinante e a cosa serve?*) è una domanda di controllo, per vedere quanto gli studenti hanno realmente appreso su matrici, determinanti e metodo di Cramer. Ci si aspettava venisse risposto come si calcola il determinante e che serve per applicare il metodo di Cramer. Il 61% del campione con Bergamini ha risposto correttamente, su questa percentuale il 37% ha scritto solo la definizione, senza specificare l'utilità del determinante. Mentre per Sasso, il 63% ha risposto correttamente, di cui il 30% indicando solo la definizione, e per Dodero ci sono l'82% di risposte giuste, di cui solo il 29% è incompleto. Tra le risposte incorrette, invece, si trovano spesso le definizioni: *"Un determinante è una matrice che determina un coefficiente che serve per trovare le incognite di un'equazione"* e *"Il determinante è un calcolo"*. Per Dodero si ritrovano delle risposte molto chiare e rigorose, ad esempio *"il determinante di un sistema è un valore che serve per capire se un sistema è determinato o indeterminato"*, *"Il determinante è una tecnica di risoluzione matematica che serve a svolgere un sistema lineare con il metodo di Cramer"*. Un fenomeno abbastanza diffuso è stato l'uso del

termine determinante al femminile (*"la determinante"*), dato che riportiamo perché ci sembra curioso che pur avendo letto e studiato da testi scritti ci siano stati ragazzi che non hanno assimilato o non si sono accorti che la parola per loro nuova è maschile: 38% per Bergamini, 44% per Sasso e 23% per Dodero.
L'ultima domanda aperta è relativa al grado di un sistema lineare (*Come si definisce il grado di un sistema lineare?*): è stato esplicitato volontariamente *lineare*, in quanto si voleva osservare se i ragazzi avrebbero dato la definizione di grado di un sistema, o avrebbero riconosciuto che un sistema lineare ha sempre grado uno, essendo composto di equazioni lineari, ovvero di primo grado. La maggior parte delle risposte concerne la definizione generale di grado di sistema, solo il 6% per Bergamini, il 29% per Sasso e il 18% per Dodero rispondono effettivamente alla domanda posta. Le risposte completamente scorrette si dividono tra definizioni concettualmente errate di grado di sistema (*"il grado di un sistema è il più piccolo dei gradi delle equazioni che lo compongono"*, *"è somma dei gradi delle due equazioni"*, *"grado massimo delle equazioni che lo compongono"*) e uso di terminologia scorretta validata da esempi corretti (*"il grado di un sistema lineare è il prodotto tra le equazioni che compongono il sistema"*, *"prodotto degli esponenti delle varie incognite"*, *"si fa il prodotto dei coefficienti"*). Questi risultati sono stati messi a confronto con le risposte alla domanda b. dei Vero/Falso (*Il grado di un sistema intero è il massimo grado delle eqazioni che lo costituiscono*) per verificare eventuali incoerenze. Complessivamente ci sono stati quattro studenti per Bergamini, tre per Sasso e nove per Dodero a dare risposte discordanti alle due domande. Quindi si può dedurre che gli studenti con Dodero siano stati meno sicuri della nozione acquisita.
Per quanto riguarda le domande a risposta multipla, i risultati sono stati molto omogenei tra i gruppi. Tutto il campione ha risposto correttamente alla domanda 2 (*Un sistema è indeterminato se: A. ha un numero finito di soluzioni B. se non ha soluzioni C. ha infinite soluzioni*) e 3 (*Graficamente un sistema due per due impossibile è rappresentato da: A. rette parallele B. rette*

incidenti C. rette coincidenti). Un totale di cinque studenti, distribuito in modo non significativo, ha risposto scorrettamente (risposta C) alla domanda quattro (*"Due sistemi sono equivalenti se: A. hanno un numero finito di soluzioni B. hanno le stesse soluzioni C. l'insieme di soluzioni di uno è strettamente contenuto nell'insieme di soluzioni dell'altro"*). Ciò porta a concludere che tutti gli studenti hanno raggiunto una buona comprensione superficiale degli aspetti algebrici e grafici legati alle soluzione di un sistema. La quinta domanda (*Il metodo di addizione e sottrazione/eliminazione/riduzione è basato sull'idea: A. si cerca di eliminare dal sistema un'incognita per volta B. si interpreta graficamente il sistema per determinarne le soluzioni C. si ricava l'equazione risolvente, risolvendo le equazioni del sistema nella stessa incognita*), voleva indagare se i gruppi con Dodero fossero agevolati, dato che la risposta corretta (A) è tratta da Dodero stesso. Effettivamente, per questo testo, le risposte scorrette (C) sono meno: il 18% contro il 30% di Sasso e il 31% di Bergamini. Particolarmente problematica è stata la prima domanda (*"Una soluzione di un'equazione di primo grado nelle incognite x e y è: A. un numero reale B. una coppia ordinata C. una retta"*). Quasi tutti gli studenti hanno risposto *B*. Il campione che ha utilizzato Sasso non ha presentato risposte differenti, probabilmente perchè è l'unico testo in cui l'espressione *coppia ordinata* è utilizzata esplicitamente per indicare la soluzione di sistema lineare. Il campione con Bergamini complessivamente ha dato il maggior numero di risposte corrette, tuttavia le otto risposte corrette provengono da due gruppi da quattro che hanno lavorato insieme, per cui è lecito pensare che nei due gruppi sia stato compreso correttamente il concetto da dei singoli e trasmesso a tutti i componenti.

Di maggior interesse sono le risposte ai Vero/Falso, tabulate di seguito:

Domanda	Bergamini	Sasso	Dodero
a.	77%(G) 13%(S) 10%(A)	81%(G) 13%(S) 6%(A)	82%(G) 18%(S) 0(A)
b.	67%(G) 23%(S) 10%(A)	81%(G) 16%(S) 3%(A)	73%(G) 24%(S) 3%(A)
c.	77%(G) 17%(S) 7%(A)	84%(G) 13%(S) 3%(A)	70%(G) 30%(S) 0(A)
d.	53%(G) 40%(S) 7%(A)	29%(G) 52%(S) 23% (A)	58%(G) 39%(S) 3%(A)

* (G): giuste; (S): sbagliate; (A): assenti

Alla domanda a. (*I sistemi si possono classificare in base alnumero di soluzioni che presentano?*) è stato risposto correttamente in generale; il numero di risposte scorrette leggermente maggiore per il campione con Dodero è giustificato dallo stile privo delle stesse classificazioni grafiche evidenti degli altri testi. La domanda c. (*Un sistema lineare ha sempre e solo due equazioni*) ha fatto emergere, oltre alle incoerenze già trattate, le incomprensioni legate all'errata associazione del termine *lineare* con la quantità di equazioni coinvolte e dimensione di sistema. La linearità è un concetto legato al grado, non alla quantità di equazioni o incognite presenti, tuttavia alcuni studenti hanno associato questi concetti (*"Se si aggiungesse la terza (equazione), il sistema diventerebbe tridimensionale"*, *"Se no non sarebbe lineare"*).
L'ultima domanda (*Un sistema che risolto dà un'identità è un sistema impossibile*) è stata in assoluto quella che ha avuto più risposte scorrette. Questo a causa del termine *identità*: come già osservato solo Dodero presenta questa terminologia, il che, pur avendo creato problemi durante lo studio, ha agevolato questi gruppi di studenti. Molti, indistintamente per tipo di testo, hanno corretto l'affermazione scrivendo che un'identità è il risultato di un sistema determinato. Infine, alcune risposte aggirano il concetto di identità focalizzandosi su *sistema impossibile*: in questi casi, tutti relativi ai campioni con Sasso e Bergamini, non è possibile stabilire se i ragazzi abbiano compreso correttamente o abbiano fatto un ragionamento per esclusione (*"un sistema impossibile non dà mai un'identità in quanto impossibile"*, *"un sistema è impossibile quando non ha soluzioni"*).
L'ultima sezione del compito presenta cinque esercizi da risolvere, essi sono

stati scelti dai testi di riferimento e le consegne sono state formulate per indagare diversi aspetti dell'apprendimento. Il primo è un esercizio di controllo da risolvere con metodo vincolato (riduzione), per stabilire se il campione ha raggiunto un livello di comprensione sufficiente. Il risultato è stato molto positivo:
ESERCIZIO 1

TESTO	Giusto	Errori calcolo	Errori Procedimento	Mancanti
BERGAMINI	77%	10%	7%	7%
SASSO	71%	19%	3%	6%
DODERO	79%	21%	0	0

Il secondo esercizio è specifico per valutare la capacità di rappresentazione e individuazione di una soluzione grafica: sono state tenute in considerazione la capacità di identificare le coordinate cartesiane di almeno due punti appartenenti a ciascuna retta del sistema, la capacità di rappresentare le rette sul piano cartesiano e la capacità di individuare il punto di intersezione e indicarne le coordinate. Escludendo coloro che hanno commesso errori di calcolo nel trovare i punti di appartenenza delle rette, ci sono stati casi di studenti che sono ricorsi a un metodo algebrico per risolvere l'esercizio (uno per Bergamini, due per Sasso, tre per Dodero), ma soprattutto è non indifferente la quantità di grafici sbagliati presentati. Tra questi sono presenti piani cartesiani dove è rappresentata un'unica retta (uno per Bergamini, uno per Sasso e due per Dodero) e risoluzioni in cui lo studente ha correttamente calcolato due punti appartenenti alla retta di equazione data, li ha rappresentati nel piano cartesiano per poi congiungerli senza proseguire oltre il tratto dai due estremi identificati (quattro per Sasso e uno per Dodero). È interessante osservare anche il numero di risposte non date: il campione con Bergamini ha la minor quantità di errori di procedimento, ma il più alto tasso di rinuncia all'esercizio.
ESERCIZIO 2

TESTO	Giusto	No punto	Errori calcolo	Errori Procedimento	Mancanti
BERGAMINI	67%	7%	0	13%	13%
SASSO	58%	6%	3%	29%	4%
DODERO	73%	0	9%	18%	0

Gli esercizi 3 e 4 sono stati selezionati dalle schede conclusive dei capitoli per i testi che le presentano, dove non viene indicato il metodo di risoluzione da adottare, ma solo la difficoltà. La consegna ha permesso agli studenti di scegliere il metodo che ritenessero più efficace, ciò ha permesso di dare una panoramica dei metodi prediletti, quindi meglio compresi, dagli studenti. Si osservi che il metodo di Cramer, nonostante sia risultato il meno chiaro per ciascun testo, è stato utilizzato da una parte non indifferente di studenti per entrambi gli esercizi. Inoltre, è interessante porre l'attenzione sulla distribuzione dei metodi utilizzati: il campione con Bergamini è stato uniforme nella scelta del metodo da adottare, quello con Sasso, ma soprattutto quello con Dodero, è stato fortemente indirizzato a preferire il metodo di sostituzione per l'eserczio 3 e il metodo di riduzione per l'esercizio 4. Questo dato può essere giustificato dalle differenze legate al testo degli esercizi dei tre libri, o in alternativa si può ipotizzare che lo studio da Dodero e Sasso abbia favorito le capacità critiche dello studente, mettendolo nella condizione di scegliere agevolmente il metodo più consono all'esercizio proposto invece che al proprio gusto personale.
ESERCIZIO 3

TESTO	Sostituzione	Confronto	Riduzione	Cramer	Grafico	Mancanti
BERGAMINI	40%	13%	10%	30%	0	7%
SASSO	52%	29%	13%	6%	0	0
DODERO	61%	15%	3%	18%	3%	0

ESERCIZIO 4

TESTO	Sostituzione	Confronto	Riduzione	Cramer	Grafico	Mancanti
BERGAMINI	17%	23%	17%	27%	0	17%
SASSO	13%	16%	39%	24%	0	9%
DODERO	27%	15%	36%	21%	0	0

L'ultimo esercizio consiste in un problema da modellizzare tramite un sistema lineare tre per tre. I testi degli esercizi sono tratti dai testi, tuttavia non è stato indicato ai ragazzi di studiare la sezione relativa ai sistemi con più di due equazioni, qualora presente, e non è mai stato proposto loro di esercitarsi nella risoluzione di problemi. Ciascuno studente aveva a disposizione il materiale su cui poter studiare queste parte, addirittura per Sasso è stato preso il testo di un esercizio svolto, per il quale era a disposizione tutta la risoluzione spiegata. L'obbiettivo era quello di indagare il comportamento dei singoli davanti a una situazione potenzialmente nuova e le strategie di risoluzione. La percentuale di ragazzi che ha identificato correttamente le tre incognite e le relative tre equazioni è bassa: solo il 19% complessivo di tutto il campione. Le due strategie maggiormente adottate sono state: identificare due incognite e due equazioni, risolvere il sistema due per due ottenuto e ricavare il terzo dato tramite una relazione non formalizzata e impostare un ragionamento deduttivo, senza l'uso di un sistema, individuando le equazioni da risolere e procedendo con successive sostituzioni. Il principio, in entrambi i casi, è quello del sistema, ma il modello utilizzato risulta grossolano. Un dato estremamente sensibile è la percentuale di studenti che non hanno impostato alcun tentativo di risoluzione: 30% per Bergamini, 26% per Sasso e solo il 9% per Dodero. Di fatto, dai dati risulta che questa situazione è analoga per tutti gli esercizi: ciò può forse suggerire che studiare su un testo più complesso, che ha richiesto maggior sforzo per essere compreso, abbia indotto i ragazzi a sviluppare maggior intraprendenza nell'affrontare gli esercizi.
ESERCIZIO 5

TESTO	sistema a 3 eqazioni	sistema a 2 equazioni	no sistema	Mancanti
BERGAMINI	13%	40%	17%	30%
SASSO	23%	45%	13%	19%
DODERO	21%	45%	25%	9%

4.2.2 Cerchio/Circonferenza

Le prime tre domande aperte del compito in classe sulla geometria sono generali e volte a verificare la corretta comprensione delle definizioni fondamentali del capitolo. Complessivamente le risposte scorrette alla prima domanda (*Scrivi la definizione di cerchio e quella di circonferenza*) sono state una quantità esigua, equidistribuita per tipo di testo utilizzato. Per quanto riguarda la definizione di circonferenza le risposte sbagliate si suddividono tra risposte con errata formulazione (*"La circonferenza è una linea chiusa composta dagli estremi dei raggi diversi dal centro di una circonferenza"*, *"La circonferenza è un luogo geometrico dove tutti i punti della circonferenza hanno distanza r da O"*, *"In una circonferenza di centro O e raggio r, la distanza da O è r"*) e concettualmente carenti (*"La circonferenza è il luogo geometrico che unisce massimo tre punti esterni, ed è una linea"*, *"La circonferenza è linea chiusa che divide il piano in due parti: una limitata e i punti sono interni e un'altra illimitata e i punti sono esterni"*, *"La circonferenza è il contorno del cerchio"*, *"La circonferenza è la linea che delimita il cerchio"*,*"Si dice circonferenza di centro O e raggio r, l'insieme dei punti congruenti al raggio"*, *"Al contrario del cerchio, che è una superficie, la circonferenza è una linea chiusa che separa i punti del piano in una parte che ne contiene limitati e l'altra che ne contiene illimitati"*). Gli studenti che hanno studiato su Dodero hanno manifestato una cerca confusione relativa al concetto di separazione di piano in punti interni ed esterni, tuttavia hanno assimilato i termini *linea chiusa*, *superficie* e *punti del piano*, dando definizioni molto precise e complete. Per la definizione di cerchio, invece, nonostante siano comunque presenti risposte concettualmente errate (*"il cerchio è la parte di piano di tutti i punti equidistanti dal centro"*, *"cerchio è considerato ciò che*

contiene la circonferenza"), molti studenti hanno omesso che un cerchio, in base alle definizioni da loro studiate, comprende non solo i punti interni a una data circonferenza, ma anche i punti della circonferenza stessa: il 7% degli studenti con Bergamini, il 10% di quelli con Sasso e il 35% di quelli con Dodero.
La seconda domanda (*Quando una retta è tangente a una circonferenza?*) aveva tre possibili risposte deducibili da ogni testo:

1. Una retta è tangente a una circonferenza se ha con essa uno e un solo punto in comune;

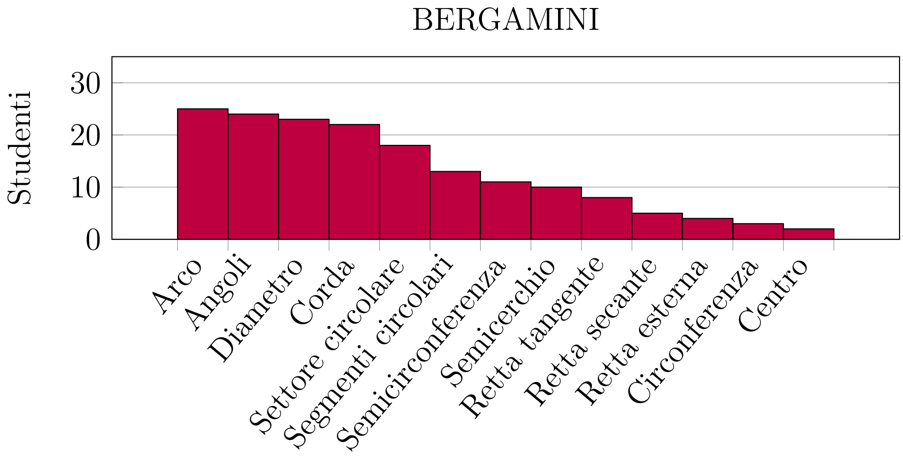
2. Una retta è tangente a una circonferenza se la sua distanza dal centro è pari al raggio della circonferenza;

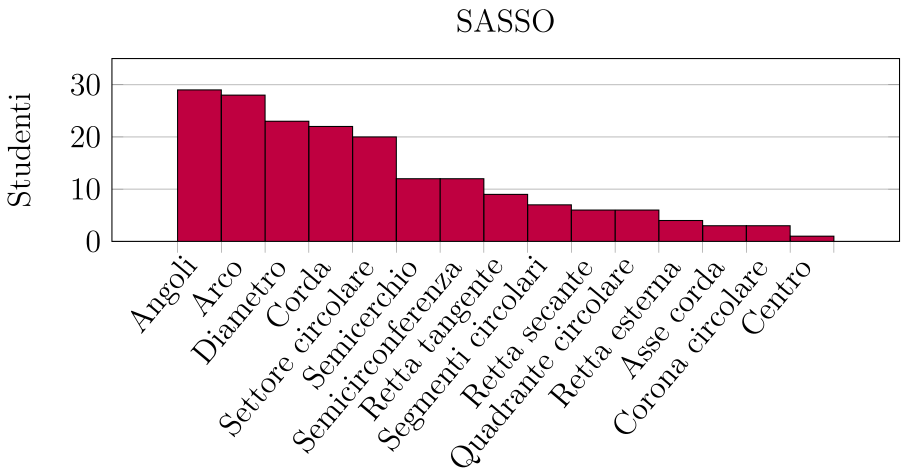
3. Una retta è tangente a una circonferenza se è perpendicolare a un suo raggio, e lo interseca sulla circonferenza.

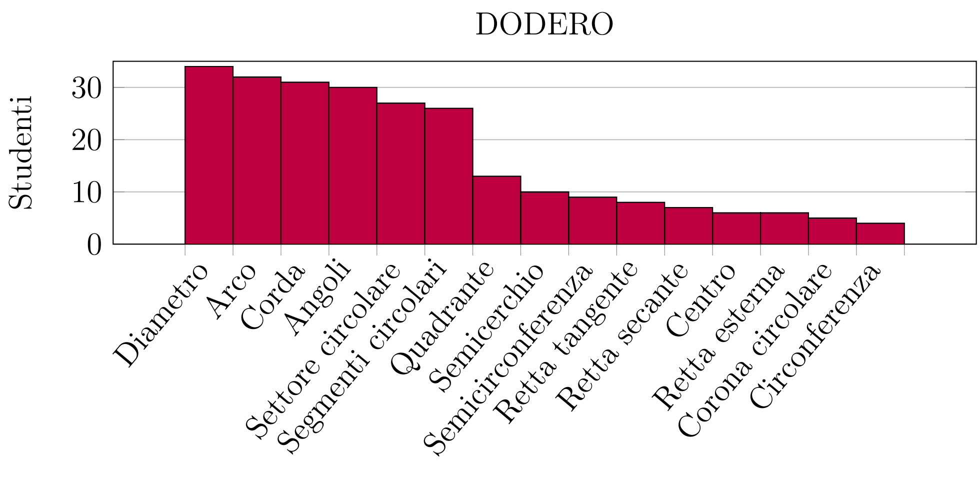
Riportiamo la distribuzione percentuale delle risposte:
DOMANDA 2

TESTO	def. 1	def. 2	def. 1 e 2	def. 3	sbagliate
BERGAMINI	54%	15%	31%	0	0
SASSO	55%	10%	21%	7%	7%
DODERO	91%	3%	0	6%	0

Dunque, sicuramente la definizione con i punti di intersezione è la più presente, è interessante che da Dodero sia quasi esclusiva.
La terza domanda chiede di indicare su un disegno tutti gli elementi studiati per cerchio e circonferenza, nell'intento di capire quali aspetti siano ritenuti più significativi e quali vengano trascurati. Per tutti i testi gli elementi più significativi menzionati sono: diametro, corda, archi e angoli al centro e alla circonferenza. Per Bergamini non sono stati indicati il quadrante e la corona circolare (effettivamenti assenti sul testo) e solo per Sasso è stato indicato l'asse di un segmento. Di seguito i grafici riportanti gli indici di presenza di ogni ente geometrico:







Le domande 4 e 5 richiedono di enunciare e dimostrare dei teoremi studiati, uno specifico (4.*Enuncia e dimostra il teorema su corde congruenti loro*

distanza dal centro.) e uno a scelta (5.*Tra i teoremi che hai studiato enuncia e dimostrane uno sulle corde*). Gli studenti con Sasso hanno fatto più fatica a identificare ed enunciare il teorema richiesto nella domanda 4, mentre quelli con Dodero sono quelli che hanno riportato la maggior quantità di dimostrazioni corrette. Ovviamente sono presenti compiti in cui ci sono solo l'enunciato o solo la dimostrazione, ma questo è un fenomeno tipico nei compiti in classe in cui i ragazzi o leggono male le consegne o non ricordano l'uno o l'altra. Interessante osservare nell'esercizio 4, ma analogo per il 5, che tra gli enunciati del teorema corretto talvolta manca la dicitura *in una circonferenza (o in circonferenze congruenti)*, il che rende l'enunciato di per sé falso. Infatti due corde congruenti, ma appartenenti a circonferenze non congruenti, non hanno la stessa distanza dal centro. È importante tenere in considerazione questa percentuale di enunciati incompleti sul totale degli enunciati presentati: a nostro parere aver riportato l'intero enunciato può indicare la raggiunta consapevolezza della differenza tra lavorare su circonferenze congruenti o meno.
DOMANDA 4

TESTO	Enunciato	Dimostrazione	Enunciati incompleti*
BERGAMINI	96%	58%	56%
SASSO	72%	57%	41%
DODERO	82%	73%	32%

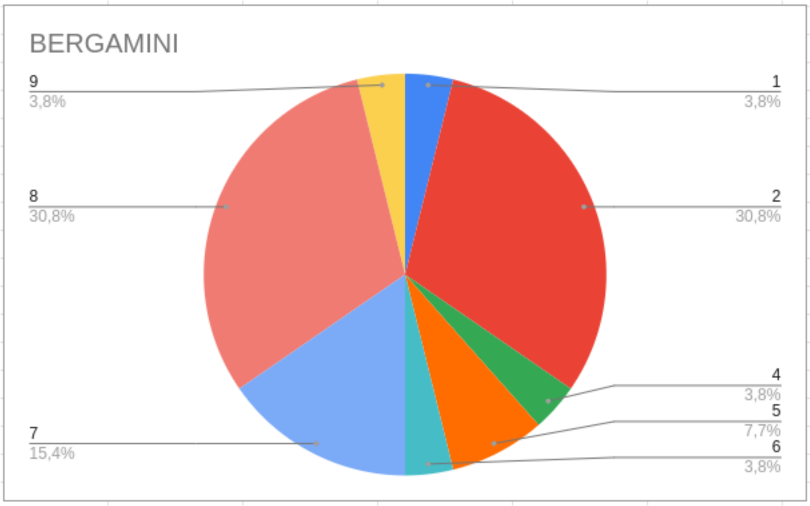
*(questa percentuale è stata calcolata sul totale dei soli compiti in cui era presente l'enunciato)

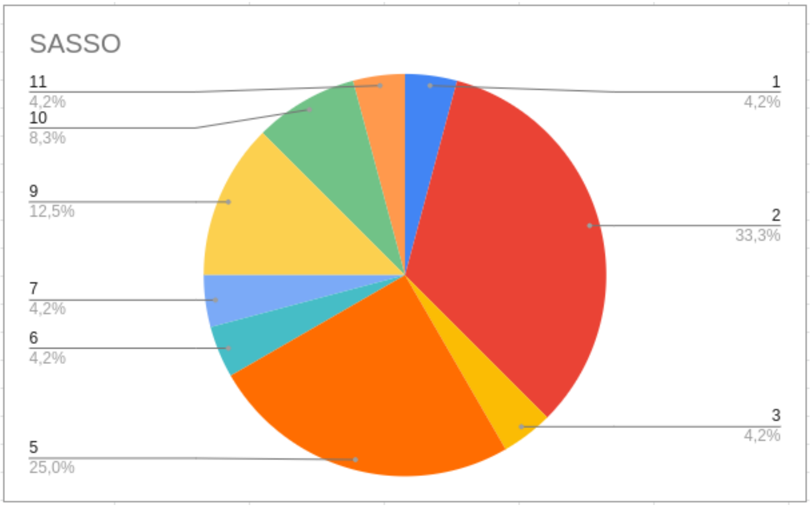
Riportiamo una tabulazione analoga delle percentuali relative alla domanda 5 e di seguito la lista di teoremi scelti dagli studenti, nelle relative percentuali per libro:
DOMANDA 5

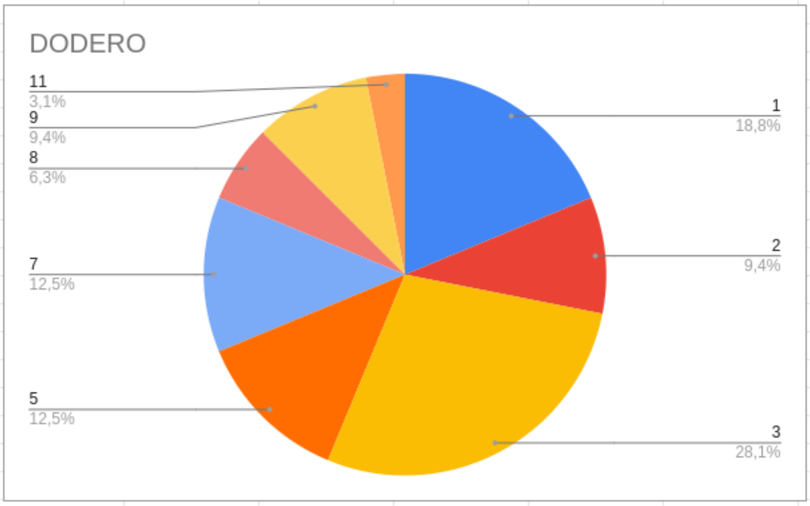
TESTO	Enunciato	Dimostrazione	Enunciati incompleti*
BERGAMINI	100%	61%	42%
SASSO	86%	45%	40%
DODERO	97%	76%	45%

*(questa percentuale è stata calcolata solo sul totale dei soli compiti in cui era presente l'enunciato)

1. In una circonferenza ogni corda che non passa per il centro è minore del diametro;
2. In una circonferenza a corde congruenti corrispondono angoli al centro e archi congruenti;
3. In una circonferenza ad archi congruenti corrispondono corde congruenti;
4. In una circonferenza a corde congruenti corrispondono settori circolari congruenti;
5. In una circonferenza se due corde non sono congruenti la corda con maggiore distanza dal centro è minore rispetto alla corda con minor distanza dal centro;
6. In una circonferenza se due corde hanno la stessa distanza dal centro allora sono congruenti;
7. In una circonferenza se un diametro ed una corda sono perpendicolari tra loro, allora il diametro taglia a metà la corda, l'angolo al centro che insiste sulla corda e l'arco sotteso dalla corda;
8. In una circonferenza un angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco;
9. In una circonferenza l'angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro se insistono sullo stesso arco;
10. L'asse di una corda passa per il centro della circonferenza;
11. In una circonferenza se due angoli alla circonferenza si iscrivono sullo stesso arco allora sono congruenti.


BERGAMINI
9
3,8%
8
30,8%
7
15,4%
1
3,8%
2
30,8%
4
3,8%
5
7,7%
6
3,8%


SASSO
11
4,2%
10
8,3%
9
12,5%
7
4,2%
6
4,2%
5
25,0%
1
4,2%
2
33,3%
3
4,2%


DODERO
11
3,1%
9
9,4%
8
6,3%
7
12,5%
5
12,5%
1
18,8%
2
9,4%
3
28,1%

Per quanto riguarda le domande chiuse, i quesiti a risposta multipla non hanno presentato problemi. Il tasso di risposte scorrette è talmente basso da non essere indicativo. Lo stesso vale per le prime due domande dei Vero/Falso (a. *In circonferenze congruenti corde disuguali distano diversamente dal centro* b. *Corde con la stessa distanza dal centro sono congruenti.*), mentre è interessante osservare i risultati delle successive tre domande:

Domanda	Bergamini	Sasso	Dodero
c.	71%(G) 29%(S)	90%(G) 10%(S)	65%(G) 35%(S)
d.	69%(G) 31%(S)	79%(G) 21%(S)	44%(G) 56%(S)
e.	31%(G) 69%(S)	45%(G) 55%(S)	79%(G) 21%(S)

* (G): giuste; (S): sbagliate

Il quesito c. (*La posizione reciproca di due circonferenze può dipendere anche dalla distanza tra i due centri*) presentava una forte criticità nel *può dipendere*, infatti si tratta di un'affermazione corretta, ma non completa. La distanza tra due circonferenze complanari dipende dalla distanza dei centri, dalla lunghezza dei raggi o dai punti di intersezione.
La domanda d. presenta un'immagine tratta dai controesempi di Sasso e chiede se *è un angolo alla circonferenza*: il fatto che la percentuale di risposte corrette sia maggiore per gli studenti che hanno usato Sasso potrebbe essere giustificato proprio dalla familiarità dell'immagine e dello stile.

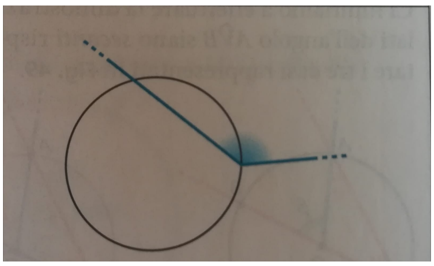


Figura 4.1: Figura usata nella domanda d. Originale in Sasso pag. 603

La situazione è più allarmante per gli studenti con Dodero, di cui più della metà non sono stati in grado di riconoscere la falsità dell'affermazione. Ciò potrebbe essere dovuto all'assenza di esempi e controesempi grafici nel loro

testo. Tuttavia, moltissimi ragazzi che hanno studiato su Bergamini e Sasso hanno corretto la frase in modo molto poco rigoroso, non motivando che un angolo alla circonferenza deve avere o due lati tangenti o uno tangente e uno secante alla circonferenza, ma limitandosi a scrivere che *un angolo alla circonferenza deve avere il vertice alla circonferenza ma che sia tutto all'interno di essa* o che dovrebbe essere un *angolo convesso.*
Il quesito e. gioca con il termine *viceversa*: *Ogni triangolo inscrivibile in una semicirconferenza è rettangolo, ma non viceversa.* In questo caso Dodero, a differenza degli altri, ha fornito una preparazione più adeguata perchè utilizza spesso questa dicitura, abituando gli studenti a invertire le frasi, identificando ipotesi e tesi in ogni contesto. Oltre alla difficoltà di inversione, che ha prodotto diversi fraintendimenti nei ragazzi, alcuni hanno stravolto l'affermazione: *ogni triangolo può essere iscritto in una circonferenza e ogni circonferenza può essere iscritta in un triangolo, che non supera la grandezza del triangolo.* Soprattutto i ragazzi con Sasso hanno fatto ricorso a questa proposizione nel compito, supportandola con esempi.
Anche per la geometria gli esercizi sono stati scelti dai libri di riferimento: si tratta di due esercizi dimostrativi per compito, uno su circonferenze tangenti e uno su triangoli costruiti a partire da circonferenze, risolvibile in quasi tutti i casi a partire dal teorema delle tangenti. Le difficoltà legate agli esercizi sono state molteplici, a partire dalla corretta comprensione del testo, il disegno della figura e l'individuazione di una stategia logicamente stabile per la dimostrazione. Riportiamo la percentuale per testo di studenti che hanno individuato correttamente ipotesi e tesi, hanno realizzato il disegno, impostato la dimostrazione correttamente e risolto un caso particolare dell'esercizio introducendo un'ipotesi non presente nel testo.
ESERCIZIO 1

testo	ipotesi/tesi	disegno	dimostrazione	casi particolari
Bergamini	73%	81%	35%	8%
Sasso	59%	83%	21%	3%
Dodero	76%	79%	18%	18%

ESERCIZIO 2

testo	ipotesi/tesi	disegno	dimostrazione	casi particolari
Bergamini	65%	85%	46%	11%
Sasso	86%	86%	21%	7%
Dodero	82%	91%	18%	0

In ogni compito uno dei due problemi presenta una domanda aggiuntiva, per dare una possibilità in più ai ragazzi di ragionare sulla figura e per valutare se, conclusa la dimostrazione, si accorgono e ricordano di rispondere alla domanda. Il 19% per Bergamini, il 14% per Sasso e il 26% per Dodero del capione ha risposto alla domanda aggiuntiva.

4.3 Questionari

Sono stati raccolti un totale di 182 questionari, 91 per i Sistemi Lineari e 91 per Circonferenza/Cerchio. Agli studenti è stato chiesto di esprimere la propria opinione in merito al libro che hanno utilizzato, all'efficacia dello studio che hanno condotto e al proprio utilizzo abituale del libro di testo. Sono state poi aggiunte due domande teoriche chiuse, estromesse dal compito in classe, per rilevare ulteriori informazioni in merito alla comprensione del singolo ragazzo. È tuttavia necessario tenere in considerazione che tali questionari sono stati svolti come compito per casa, quindi senza alcun controllo sullo studente, che potrebbe quindi non aver risposto in maniera autonoma. La scheda del questionario è riportata in appendice, le risposte relative al libro e all'attività vengono analizzate separatamente per i due argomenti, mentre possiamo trarre delle conclusioni complessive riguardo alla domanda 2: *Sei abituato a studiare dal libro di matematica o lo usi per lo più per gli esercizi?* Solo 59 ragazzi hanno dichiarato di utilizzare il testo per lo studio; tra loro, una decina ha specificato di utilizzarlo esclusivamente per studiare gli argomenti di geometria, mentre per algebra funge da eserciziario. In altri termini, la maggior parte degli studenti riconosce che abitualmente il libro di testo serve unicamente per gli esercizi, al massimo aiuta a recuperare definizioni o spiegazioni che non sono state apprese completamente durante la lezione.

4.3.1 Sistemi Lineari

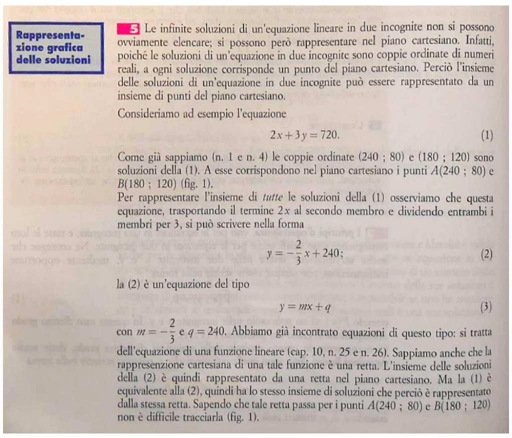
Il 79% dei ragazzi ha dichiarato che lo studio in gruppo, in assenza di spiegazione, è risultato sufficiente per comprendere l'argomento. Tra coloro che non sono stati d'accordo con questa affermazione, la maggior parte sottolinea che, sebbene siano riusciti a farsi un'idea generale del contenuto, sarebbe stata necessaria una spiegazione del docente per approfondire, sanare i dubbi residui e acquisire sicurezza. Quattro studenti, sui 91 totali, hanno dichiarato di aver chiesto spiegazioni extrascolastiche a parenti e persone competenti in materia. Per quanto riguarda il gradimento generale del libro la maggior parte degli studenti ha scritto di essersi trovata bene o abbastanza bene con Bergamini e Sasso, mentre l'indice di gradimento degli studenti con Dodero è stato abbastanza basso (*"avrei capito meglio con un'insegnante che spiega"*):
Come ti sei trovato a studiare sul libro?

Testo	Bene	Abbastanza bene	Male	Inizialmente male poi è migliorato
Bergamini	43%	38%	9%	9%
Sasso	41%	45%	9%	4%
Dodero	12%	29%	42%	17%

Questi dati di apprezzamento si rispecchiano nelle risposte alla domanda 4 (*Se potessi migliorare qualcosa del materiale da cui hai studiato, cosa cambieresti?*): cinque studenti hanno risposto di non aver nulla da modificare nel testo per Bergamini, otto per Sasso e solo due per Dodero.
Per quanto concerne Bergamini, gli studenti hanno apprezzato il linguaggio, specificando spesso che *"la scrittura è semplice"*, *"il linguaggio è non complicato, quindi non difficile da comprendere"*, e la struttura del capitolo,

"gli argomenti sono ben suddivisi", *"molto schematico"*, *"è organizzato bene (i metodi sono nel giusto ordine)"*. Tuttavia emerge chiaramente che i ragazzi trovano l'esposizione teorica *"poco approfondita"*, carente (*"la spiegazione di teoria sarebbe inutile senza gli esempi"*), lamentando la mancanza di una spiegazione generale e di una più dettagliata dei passaggi all'interno degli esempi. Infatti, suggeriscono di aggiungere un'introduzione generale all'argomento e di approfondire le spiegazioni, integrandole con più dettagli e definizioni, alle quali far seguire degli esempi esplicativi.
La presenza di numerosi esempi è un punto di forza molto sentito dagli studenti, i quali hanno gradito l'abbondanza dell'esposizione di Bergamini, ma avrebbero voluto la presenza di problemi svolti che mettessero in evidenza come utilizzare i sistemi al di fuori dell'esercizio aritmetico. Infine, la grande varietà e ricchezza degli esercizi proposti è stata classificata in modo molto positivo, anche se un paio di ragazzi ha suggerito di aggiungere i risultati laddove non sono indicati e integrare con esercizi che coinvolgano diverse competenze oltre a quella di calcolo (*"Metterei esercizi più difficili, non solo in ordine crescente, richiedendo le stesse capacità; ma diversi esercizi che richiedono più capacità"*).
Per quanto riguarda Sasso i commenti positivi sono stati abbastanza generici: gli studenti hanno descritto il testo come chiaro, quindi semplice da capire, e completo (*"teoria chiara e semplice", "tanti esempi chiari e spiegati bene", "spiegazioni esaustive"*). Viene tuttavia sottolineato che nelle spiegazioni alcuni concetti *"sono dati per scontati"*, senza essere approfonditi (in particolare la rappresentazione grafica di una retta sul piano cartesiano): nei suggerimenti è abbastanza ricorrente la richiesta di integrare questa parte di teoria. È stato molto apprezzato lo schema riassuntivo a fine capitolo, nonostante fosse incompleto (ovviamente i ragazzi hanno suggerito di aggiungere le informazioni mancanti). Sono presenti commenti negativi riguardanti impaginazione e organizzazione dei contenuti, in merito alla scelta dell'uso di schemi e tabelle: *"risultano però poco decifrabili alcuni schemi o tabelle poichè si concentrano troppo sul testo scritto a parole che quello matematico"*,

"troppe schede creano confusione". La maggior parte degli aspetti negativi e dei suggerimenti scritti dai ragazzi si concentrano su due aspetti: la prolissità del testo scritto e l'assenza di varietà degli esercizi. Si richiede un testo più sintetico, più diretto, meno ripetitivo e dispersivo (*"utilizzerei spiegazioni più dirette e concise ma sempre con esempi collegati"*). Gli esercizi sono risultati troppo facili e gli esempi troppo pochi: *"differenzierei gli esercizi, che sembrano tutti uguali e sistemerei gli errori negli esempi"*. Un'ultima richiesta espressa è quella di aggiungere problemi, esempi ed esercizi svolti per agevolare ulteriormente la comprensione (*"più esercizi svolti per poter controllare e correggere i propri errori"*).
Gli studenti hanno classificato Dodero come *"testo difficile"*, per due macro ragioni: il linguaggio e la struttura. Il linguaggio si è rivelato *"complesso"* e non immediato (*"eccessivamente ricco e formale"*), le spiegazioni *"sono lunghe"* e il testo *"si perde in chiacchiere facendo risultare argomenti facili come argomenti difficili"*. Il problema di impostazione che lo ha reso ostico agli alunni è che i paragrafi non sono strutturati, i concetti-chiave non sono evidenziati in maniera netta tramite colori e riquadri, ma soprattutto ci sono numerosi richiami nel testo a esempi e spiegazioni tramite numerazione: il testo quando presenta una qualsiasi espressione matematica (equazione, teorema, proposizione...) la numera così da poterla richiamare nel corpo del testo solo tramite il numero.



Rappresentazione grafica delle soluzioni

5 Le infinite soluzioni di un'equazione lineare in due incognite non si possono ovviamente elencare; si possono però rappresentare nel piano cartesiano. Infatti, poiché le soluzioni di un'equazione in due incognite sono coppie ordinate di numeri reali, a ogni soluzione corrisponde un punto del piano cartesiano. Perciò l'insieme delle soluzioni di un'equazione in due incognite può essere rappresentato da un insieme di punti del piano cartesiano.
Consideriamo ad esempio l'equazione

$$2x + 3y = 720. \qquad (1)$$

Come già sappiamo (n. 1 e n. 4) le coppie ordinate (240 ; 80) e (180 ; 120) sono soluzioni della (1). A esse corrispondono nel piano cartesiano i punti $A(240\,;\,80)$ e $B(180\,;\,120)$ (fig. 1).
Per rappresentare l'insieme di *tutte* le soluzioni della (1) osserviamo che questa equazione, trasportando il termine $2x$ al secondo membro e dividendo entrambi i membri per 3, si può scrivere nella forma

$$y = -\frac{2}{3}x + 240; \qquad (2)$$

la (2) è un'equazione del tipo

$$y = mx + q \qquad (3)$$

con $m = -\frac{2}{3}$ e $q = 240$. Abbiamo già incontrato equazioni di questo tipo: si tratta dell'equazione di una funzione lineare (cap. 10, n. 25 e n. 26). Sappiamo anche che la rappresenzione cartesiana di una tale funzione è una retta. L'insieme delle soluzioni della (2) è quindi rappresentato da una retta nel piano cartesiano. Ma la (1) è equivalente alla (2), quindi ha lo stesso insieme di soluzioni che perciò è rappresentato dalla stessa retta. Sapendo che tale retta passa per i punti $A(240\,;\,80)$ e $B(180\,;\,120)$ non è difficile tracciarla (fig. 1).

Figura 4.2: Dodero pag. 578. Esempio di richiami tramite numerazione.

Questo approccio ha messo in difficoltà i ragazzi essendo a loro totalmente ignoto: questi ultimi si sono espressi dicendo che *"la teoria è contorta"* e *"poco chiara"*. Un ragazzo scrive: *"(il libro) illustra in prima battuta il corollario algebrico intorno a una regola e poi la spiega"*; questo commento esplica il pensiero di molti in merito alle difficoltà di comprensione riscontrate durante lo studio. Eppure, a differenza degli altri testi, molti ragazzi apprezzano la struttura *"ordinata"* dell'esposizione, che fa seguire alla teoria ricca di tutte le definizioni necessarie gli esempi chiari, in gran quantità, non banali e differenziati tra loro.
In generale, dai questionari emergono le notevoli difficoltà avute dagli studenti al primo impatto con Dodero ma anche, allo stesso modo, la loro capacità di apprezzare il testo per la completezza e la chiarezza, una volta capita la logica espositiva. Le proposte di miglioramento ruotano attorno a questi due ambiti: semplificare il linguaggio, rendendolo *"più accessibile"*, e strutturare maggiormente i paragrafi (*"evidenzierei le parole chiave"* e *"renderei la spiegazione più diretta affinchè lo studente non si perda intorno a cose di importanza minore"*). Inoltre per aumentare la chiarezza e la scorrevolezza, suggeriscono l'eliminazione di richiami e ridondanze. A tal proposito però uno studente scrive: *"le nozioni vengono ripetute molte volte perciò tendi a ricordare più facilmente dopo una lettura"*.
Alcuni ragazzi si esprimono anche in merito agli esempi, ritenuti *"molti"* e *"chiari"*, avanzando la richiesta di sostituire quelli generali che utilizzano variabili letterali con esempi numerici e inserire *"esempi per chi è completamente estraneo all'argomento"*.
Per quanto concerne le domande chiuse teoriche, riportiamo i dati relativi alle risposte:
DOMANDA 1: *Un sistema lineare è costituito da: equazioni lineari, equazioni di primo grado o entrambe le precedenti sono corrette?*

Testo	GIUSTE	SBAGLIATE	ASSENTI
Bergamini	77%	13%(A) 6%(B)	3%
Sasso	70%	7%(A) 15%(B)	7%
Dodero	87%	10%(A)	3%

Nonostante Bergamini sia l'unico dei tre testi a esplicitare che i termini *equazione di primo grado* e *equazione lineare* sono sinonimi, il numero di risposte scorrette per i gruppi che l'hanno adottato è superiore rispetto agli altri. Nelle motivazioni che i ragazzi hanno fornito per la scelta della risposta non c'è nulla di significativo che permetta di capire perchè sono stati tratti in errore, solo un ragazzo scrive: *"la (A) perchè un'equazione può essere anche di grado più alto"*. Una spiegazione plausibile potrebbe essere che alcuni ragazzi non abbiano letto tutte le alternative fermandosi alla prima, questa è tra l'altro la ragione per cui questa domanda è stata estromessa dal compito in classe.
DOMANDA 2: *Il metodo del confronto è una variante del metodo di sostituzione: vero o falso?*

Testo	GIUSTE	SBAGLIATE	ASSENTI	AMBIGUE
Bergamini	81%	16%	3%	0
Sasso	93%	0	4%	4%
Dodero	81%	3%	3%	13%

Quasi la totalità del campione ha dimostrato di aver compreso che i due metodi trattati hanno un procedimento molto simile, fondato sulla stessa idea di base (ricavare l'espressione di un'incognita in funzione dell'altra). Non stupisce che i gruppi che hanno studiato su Sasso e Dodero abbiano commesso meno errori, in quanto su questi due testi è specificato che si tratta di due varianti dello stesso metodo. Le motivazioni riportate dagli studenti ruotano tutte attorno alle definizioni di metodo del confronto e metodo di sostituzione, specificando che *"l'idea che sta alla base dei due metodi è la stessa"*.

4.3.2 Cerchio/Circonferenza

Il capitolo di geometria è risultato complessivamente più problematico rispetto a quello sui Sistemi Lineari. Gli studenti hanno manifestato maggiori livelli di frustrazione e difficoltà di comprensione, complice il fatto che gli esercizi di geometria euclidea sono tutti di natura dimostrativa, per cui non sono presenti le *"soluzioni"* tanto richieste dai ragazzi. Inoltre, per quanto non fosse il primo argomento di geometria euclidea formale affrontato nel loro percorso di studi, quasi tutti i ragazzi non avevano confidenza con la logica dimostrativa di un teorema. Solo il 54% del campione ha ritenuto sufficiente lo studio compiuto per apprendere l'argomento, ben sette studenti hanno riconosciuto di aver chiesto spiegazioni supplementari, in gran parte tramite a lezioni private. L'insoddisfazione è equidistribuita tra i gruppi, per cui non si ritiene sia strettamente legata al tipo di testo utilizzato: emerge il desiderio di ricevere una spiegazione dal professore, non solo per acquisire sicurezza, ma anche per comprendere molti ragionamenti *"non chiari"* (*"sufficiente non al punto da eseguire esercizi"*). Analizzando l'indice di gradimento degli studenti, si riconferma la situazione delineata per i Sistemi Lineari: Bergamini particolarmente apprezzato, subito seguito da Sasso, contro Dodero aspramente criticato.

Testo	Bene	Abbastanza bene	Male
Bergamini	52%	19%	29%
Sasso	25%	30%	45%
Dodero	12%	35%	53%

Per "quantificare" questa sensazione, si pensi che sei studenti hanno affermato che non ritenevano necessario apportare alcuna modifica a Bergamini, mentre la stessa affermazione è stata fatta da un solo studente per Sasso e da nessuno per Dodero. È necessario sottolineare che alcuni commenti sono stati estromessi dall'analisi perchè non rilevanti: molti ragazzi, probabilmente a fronte delle difficoltà riscontrate nello studio, hanno richiesto di ridurre la quantità di teoremi e semplificare sia le dimostrazioni proposte sia i termini tecnici matematici, ritenuti troppo difficili da memorizzare; ancora una

volta, inoltre, la richiesta di avere a disposizione le soluzioni degli esercizi è stata presente. Inoltre, specialmente per Dodero, ma in generale per tutti e tre i testi, sono presenti commenti negativi riguardo all'assenza "nomi" identificativi per i teoremi.
Di Bergamini è stata apprezzata la chiarezza in termini di impaginazione (*"i postulati, definizioni e teoremi messi in evidenza"*, *"molto colorato"*), presenza di disegni esplicativi (*"disegni spiegati passo passo"*) e linguaggio (*"definizioni comprensibili"*, *"teoremi ben scritti e comprensibili"*). L'eccessiva sintesi fatta nella presentazione dei concetti è stata considerata ripetutamente come aspetto negativo del testo, seguito dal suggerimento di aggiungere *"dimostrazioni più chiare e dettagliate"* e *"più esercizi guidati o svolti per capire meglio come impostare i problemi"*. Alcune lamentele sono legate all'impaginazione *"dispersiva"* e alla posizione degli esercizi ritenuta *"strana"*.
Per completezza riportiamo il commento di una studentessa che preferirebbe l'uso di lettere distinte all'interno delle figure: *"avrei preferito l'uso di lettere completamente diverse per i punti del disegno (T e R anzichè T',T")"*.
Anche per Sasso la chiarezza complessiva è stata attribuita al linguaggio *"comprensibile"* e alla presenza di numerosi disegni commentati: è stato sottolineato che *"sono presenti esempi e controesempi per ogni teorema"*. Tuttavia è stato etichettato come *"testo confusionario"*: *"c'erano troppe definizioni che giravano intorno all'argomento principale"*, *"si dilunga molto sulle cose semplici e non su quelle più complicate"*, *"tende a spiegare molto le stesse cose che può essere una cosa positiva in quanto può togliere eventuali dubbi, ma allo stesso tempo potrebbe far perdere il filo del discorso"*. Pertanto sono molte le richieste di spiegazioni più dirette e di eliminazione di *"informazioni inutili"*. Per quanto riguarda la struttura, i ragazzi lamentano l'assenza di uno schema riassuntivo a fine capitolo, richiedono più esercizi guidati e suggeriscono di aggiungere *"dei brevi esercizi in mezzo ai vari teoremi"* e *"aiuti negli esercizi più complicati"*.
Dodero risulta, anche in questo caso, il testo più ostico per gli studenti. Una ragazza, in risposta alla prima domanda del questionario, scrive: *"A studiare*

dal libro non mi sono trovata particolarmente bene perchè mi è sembrato molto dispersivo e per questo ho deciso di schematizzare tutta la teoria sul mio quaderno come sono abituata a fare. Altri due aspetti negativi sono il fatto che alcuni termini non sono riuscita subito a comprenderli ma ho dovuto ragionarci a lungo per capire il loro significato e spesso per la dimostrazione di alcuni teoremi viene riportata la dimostrazione in una pagina mentre la figura nella pagina dietro. In questo modo dovevi in continuazione girare pagina e tornare indietro e spesso non mi ha reso facile la comprensione del teorema".
Questo commento riassume due aspetti molto presenti nelle critiche al libro: il linguaggio e la disposizione su più pagine di dimostrazione e disegno relativo. Alcuni ragazzi sottolineano la presenza in alcune definizioni di termini il cui significato non viene dato, però la maggior parte dei commenti positivi definisce il testo *"chiaro"*. Note di merito per la trattazione sono il livello di approfondimento degli argomenti e l'ordine con cui sono presentati. Tuttavia, fonte di forte disappunto è la struttura del testo: la quantità di titoli dei paragrafi è risultata esigua (*"migliorerei la suddivisione degli argomenti"*) e si richiede che le informazioni siano disposte in modo più strutturato (*"spesso i concetti sono attaccati tra loro"*), aggiungendo *"specchietti"* riassuntivi che presentino in forma sintetica le informazioni principali. I ragazzi hanno trovato *"inutili"* i numeri di identificazione dei teoremi e hanno richiesto di *"avere i colori nei disegni"*. Un altro aspetto che si è rivelato particolarmente critico è quello degli esercizi: *"migliorare la leggibilità dei testi degli esercizi"* e *"gli esercizi non sono suddivisi per argomento rendendo difficile capire quando cominciare a farli senza incappare in cose non ancora studiate"*.
Analizziamo ora le risposte alle due domande teoriche a risposta multipla:

DOMANDA 1: *Cosa differenzia un cerchio da una circonferenza?*

Testo	GIUSTE	SBAGLIATE	ASSENTI
Bergamini	59%	26%(B)	15%
Sasso	78%	9%(A) 12%(B)	0
Dodero	81%	19%(B)	0

La domanda è stata pensata in modo da mettere come prima opzione (A) un estratto di Sasso (*la circonferenza è la frontiera del cerchio*), come seconda (B) la spiegazione di Dodero (*la circonferenza è una linea, il cerchio una superficie*) e come risposta corretta (C) (*entrambe le alternative sono corrette*). Questa scelta mira a indagare se gli studenti hanno compreso a un livello sufficientemente profondo i concetti di circonferenza, cerchio, superficie e linea chiusa, in modo tale da capire che le prime due risposte sono una riformulazione del medesimo concetto. È interessante notare che le risposte sbagliate sono per lo più (B): dato che la domanda chiedeva di motivare la risposta dopo averla segnata, sappiamo che alcuni ragazzi dei gruppi con Bergamini e Sasso hanno scartato la risposta (A) perchè non hanno capito il significato di "frontiera" (*"non so cos'è la frontiera"*, *"il concetto di frontiera non chiaro, di conseguenza nè la A nè la C possono essere vere"*). Tuttavia, dalle risposte di altri ragazzi dei medesimi gruppi in analisi, si dimostra la comprensione corretta del significato di frontiera, seguita dall'identificazione della risposta corretta. Le motivazioni espresse dai gruppi con Dodero sono in assoluto le più articolate e precise, non sono riconducibili alla mera esposizione delle definizioni di circonferenza e cerchio, ma presentano una descrizione di ragionamento, ovvero: *"la circonferenza è un perimetro, quindi una linea, mentre il cerchio è una superficie, inoltre la circonferenza è una frontiera del cerchio perchè è l'insieme di tutti i punti che costituiscono il bordo del cerchio"*.
DOMANDA 2: *Il raggio è un numero: intero, reale o reale positivo?*

Testo	GIUSTE	SBAGLIATE	ASSENTI
Bergamini	89%	0	11%
Sasso	97%	0	3%
Dodero	97%	0	3%

In questo caso solo Sasso specifica che il raggio deve essere un valore reale positivo, formalmente scartando il caso degenere (raggio nullo). Infatti un ragazzo ha motivato la scelta della risposta con *"perchè è scritto sul libro"*, denotando uno studio totalmente acritico. Quasi tutte le motivazioni fanno riferimento al fatto che il raggio *"non sia per forza intero"*, potendo essere espresso anche tramite frazione o *"numero con la virgola"*. La positività viene, correttamente, attribuita alla natura di lunghezza del raggio, per cui *"deve essere* > 0*"* per *"permettere l'esistenza"*. Tre studenti (due per Bergamini, uno per Sasso) riconducono la motivazione alla formula per calcolare il raggio; i due studenti con Bergamini denotano una certa confusione tra la caratterizzazione del raggio e l'irrazionalità di π: *"non è intero perchè è decimale e positivo perchè è fisso e non varrà mai meno di 3,14..."*, *"perchè il raggio si calcola* $\frac{c}{2\pi}$(c= lunghezza della circonferenza)*; questo significa che è un numero reale perchè* π *è irrazionale, e è positivo perchè se c non è positivo, non esiste la circonferenza"*.

4.3.3 Osservazioni sull'attività

Alcuni studenti hanno risposto alla prima domanda del questionario riportando la propria opinione in merito all'attività, invece che al materiale utilizzato. Pertanto abbiamo a disposizione alcuni commenti su come è stato percepito questo stile di studio. Studiare direttamente dal testo non è abitudine dei ragazzi: *"non ho mai studiato dal libro di matematica quindi farlo per la prima volta è stato strano"*. Ciò si ripercuote sulla percezione di difficoltà dello studio: *"è facile perdere la concentrazione nel leggere tante definizioni e parole, più che ascoltarle"*. L'assenza di spiegazione da parte del docente è stata considerata negativamente, in quanto è mancato il contributo di una persona ritenuta competente che sciogliesse i dubbi e mettesse ordine tra le informazioni (*"se non capivamo qualcosa dovevamo ragionare da soli"*). Tuttavia è stato molto apprezzato il lavoro in gruppo, che ha dato supporto ai singoli componenti, i quali nel momento della difficoltà hanno potuto confrontarsi e supportarsi (*"ci si può confrontare tutti assieme sui problemi individuati"*, *"ci si può incoraggiare a vicenda e aiutarsi"*, *"è bello studiare in gruppo ti senti più coinvolto"*). Naturalmente, non per tutti gruppi c'è stato questo tipo di collaborazione, per cui alcuni ragazzi hanno accusato la situazione (*"talvolta si può incombere in distrazioni"*, *"avrei voluto più collaborazione nel gruppo"*). Inoltre l'impatto iniziale con il testo

scritto ha richiesto di capire la stuttura della spiegazione, adeguandosi alla logica espositiva e al linguaggio adottato: *"mi sono trovata abbastanza bene anche se all'inizio non capivo un granchè. Mi serviva del tempo per adattarmi alle spiegazioni del libro e prima mi sembrava che spiegasse con gli esempi. Dopo un po' ho capito com'è fatto e mi sono adattata alle spiegazioni"*, *"la spiegazione e gli esempi non possono essere posti in altro modo da chi te lo spiega (il libro)"*.
Lo studio tra pari ha promosso l'autonomia del singolo studente (*"lo studio autonomo mi ha spinto a cercare le risposte ai problemi che riscontravo da me stessa"*) e ha permesso a ciascuno di seguire i propri tempi di apprendimento (*"l'aspetto positivo sicuramente è avere più tempo per studiare e comprendere meglio l'argomento rispetto all'ora di spiegazione del prof"*, *"non c'è fretta di capire, si possono riguardare più volte esempi e spiegazioni"*). Ha anche spinto i ragazzi a utilizzare i mezzi in loro possesso per affrontare la situazione: *"a casa spesso facevo videochiamate con i miei compagni per dei chiarimenti"*; oltre a ciò è stata molto apprezzata la possibilità di organizzarsi autonomamente il lavoro tra ore in classe e a casa.
Dai commenti emerge chiaramente la fatica accusata nello studio (*"studiare da solo dal libro ti costringe a metterci più impegno e a ragionare di più"*) la quale però ha permesso di raggiungere *"maggior soddisfazione personale"*: *"lo studio individuale rende più difficile la comprensione degli esercizi (per geometria), ma premia la logica e l'impegno personale"*. Questa esperienza ha arricchito gli studenti, insegnando loro a ricorrere anche al libro di testo (*"mi sono fatto un'idea di come potrebbe essere studiare dal libro di matematica"*).

Conclusioni

In questo paragrafo riassumiamo alcune delle conclusioni che ci sembra possibile trarre dai risultati della sperimentazione condotta. Questa, tuttavia, è stata così densa di osservazioni interessanti e per certi versi inaspettate, che richiede di approfondire lo studio già svolto con ulteriori sperimentazioni in cui testare le ipotesi interpretative suscitate, in un lavoro di ricerca futuro. Per il momento, ci sembra di poter classificare le nostre osservazioni in questi termini: in primo luogo, ci sono le considerazioni relative al gradimento dei vari testi da parte degli studenti e alle caratteristiche da loro ritenute positive o negative; in secondo luogo, possiamo tentare di trarre delle conclusioni a proposito della maggiore o minore efficacia effettiva dello studio dei diversi testi ai fini della comprensione degli argomenti proposti, alla luce di una valutazione comparativa dei risultati ottenuti da gruppi che hanno utilizzato materiali diversi; infine, riteniamo di poter trarre qualche conclusione a proposito dell'efficacia dello studio tra pari, delle problematiche emerse con questa modalità e del ruolo del docente come emerge dai commenti che i ragazzi fanno nel momento in cui devono rinunciare a farvi riferimento.
Il primo dato che emerge con chiarezza è che, nonostante una difficoltà iniziale data dalla novità, gli studenti sono stati in grado di studiare autonomamente raggiungendo un buon livello di apprendimento. Specificatamente per i testi in analisi possiamo concludere che:

- Bergamini non ha prodotto ostacoli nella comprensione, risultando chiaro e immediato, ma poco approfondito. Gli studenti hanno apprezzato la gran varietà di esempi ed esercizi, ma il lessico semplicistico e l'impostazione asciutta non li hanno aiutati a sviluppare senso critico e competenze comunicative;

- Sasso risulta scorrevole e completo, anche se talvolta ridondante. Gli studenti hanno valutato con favore l'impostazione schematico/tabulare la quale, tuttavia, potrebbe essere più sintetica e riassuntiva; ritengono inoltre sia da migliorare la parte di esercizi che, sebbene abbondanti, dovrebbero esser più disomogenei per difficoltà.

- Dodero è stato aspramente criticato e non apprezzato, in quanto il lessico formale e l'approccio rigoroso hanno richiesto un maggior impegno per la comprensione da parte degli studenti. Tuttavia, visti i risultati, sembra evidente che le stesse caratteristiche che hanno reso il libro ostico ai ragazzi, abbiano al contempo favorito lo sviluppo delle loro competenze critiche e comunicative. Gran parte delle critiche riguarda l'impaginazione troppo "piatta" e il numero di esercizi giudicato insufficiente.

Dall'analisi dei testi, dalle testimonianze dei quasi 200 ragazzi coinvolti nella sperimentazione e soprattutto dai risultati da loro raggiunti nelle verifiche in classe sembra ragionevole ipotizzare che l'utilizzo di un testo più immediato come Bergamini, rispetto a uno più complesso, in termini di linguaggio e struttura come Dodero, non abbia giovato allo sviluppo, negli studenti, di quella determinazione e tenacia che è una delle condizioni necessarie per un apprendimento significativo: non abituati ad affrontare la fatica e la frustrazione derivanti dalla difficoltà intrinseca nell'atto dell'apprendimento, quando sono stati sottoposti, in sede di compito in classe, a esercizi meno standard, gli studenti che si erano preparati sul testo apparentemente più "immediato" hanno spesso preferito rinunciare, lasciando in bianco.
Lo scarso apprezzamento che i ragazzi hanno tributato a Dodero può forse in parte spiegare il fatto che sia andato progressivamente scomparendo dalle adozioni e, di conseguenza, dal catalogo della casa editrice. Fortemente criticato l'utilizzo di richiami tramite numerazione e l'organizzazione fram-

mentata dei contenuti. Sasso si è rivelato un testo molto equilibrato, sia per il linguaggio sia per la struttura delle spiegazioni. L'uso dei colori e l'impaginazione sono risultati meno dispersivi di quelli di Bergamini, ma più gradevoli e funzionali di quelli di Dodero.

Lo studio tra pari ha fatto emergere numerosi aspetti legati alle abitudini degli studenti. In primo luogo, dovendosi scontrare con l'assenza di rielaborazioni dei contenuti del docente, hanno sperimentato prendendo coscienza della propria competenza nello studio: ciò li ha portati a essere più soddisfatti dei risultati ottenuti. Tuttavia, sono mancati loro tutti gli aspetti emotivi del rapporto docente-studente: in particolare l'assenza di rassicurazioni e indicazioni ha prodotto spaesamento e rassegnazione in alcuni ragazzi. Potersi organizzare autonomamente lo studio ha responsabilizzato i ragazzi, contribuendo al contempo a rispettare i tempi di apprendimento individuali di ciascuno.

In sintesi, ci sembra di poter configurare questo studio più che come un punto di arrivo, come un punto di partenza per future sperimentazioni, soprattutto per livelli scolari e istituti differenti, col fine ultimo di capire come migliorare i testi destinati agli studenti. Ovviamente questo tipo di studio richiederà un sostanzioso investimento di tempo e risorse, necessitando di un'analisi ancor più raffinata che tenga in considerazione i diversi aspetti che costituiscono l'apprendimento della matematica.

Appendice

Di seguito sono riportati:

- il programma della sperimentazione
- le schede di lavoro per Sistemi Lineari
- le schede di lavoro per Cerchio/Circonferenza
- il questionario per Sistemi Lineari
- il questionario per Cerchio/Circonferenza
- il compito in classe commentato su Sistemi Lineari
- il compito in classe con le soluzioni sui Sistemi Lineari
- il compito in classe commentato su Cerchio/Circonferenza
- il compito in classe con le soluzioni su Cerchio/Circonferenza

SPERIMENTAZIONE SU CLASSI SECONDE LICEO SCIENTIFICO

TESTI:
Massimo Bergamini, Graziella Barozzi
Leonardo Sasso, Claudio Zanone
Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi

ARGOMENTI:
Sistemi lineari
Cerchio/Circonferenza

OBIETTIVO:
L'obiettivo di questa sperimentazione è valutare se i testi presi in analisi sono effettivamente fruibili a pieno dagli studenti e se la loro struttura e formulazione non ostacolano l'apprendimento, in particolare sottolineando se presentano particolari criticità e punti di forza.

STRUTTURA:
La classe viene suddivisa in sei gruppi di livello misto, ci sono due gruppi per ciascun testo, ogni gruppo segue una scheda di lavoro in cui sono riportate le pagine di teoria da studiare e gli esercizi da svolgere. Dovrà venire eletto un rappresentante per ciascun gruppo incaricato di scrivere su un foglio apposito qualsiasi dubbio emerga durante l'attività, sia per quanto riguarda la forma che il contenuto, riportando sia i dubbi chiariti dal confronto tra compagni che quelli insoluti. Al termine delle ore dedicate allo studio è previsto un compito per valutare se sono stati appresi i concetti di base e se sono stati raggiunti gli obiettivi specifici dei libri.

TEMPI:
6 ore per teoria ed esercizi
2 ore per la valutazione scritta

MATERIALI per ciascun gruppo:
il testo di riferimento e le fotocopie per ogni studente
la scheda di lavoro e la scheda di raccolta dei dubbi

VALUTAZIONE:
Il compito scritto sarà strutturato in due parti: la prima, comune a tutta la classe, il cui obiettivo è valutare la comprensione minima dell'argomento, composta di domande aperte, a risposta multipla e vero/falso, le domande sono di carattere generale, ma tengono conto delle sfumature di trattazione dei diversi testi, la seconda differenziata a seconda dei testi, composta di esercizi tratti direttamente dal libro per verificare la comprensione profonda dell'argomento. Ne seguirà un questionario composto di tre domande aperte, non valutato, che indaga il gradimento degli studenti riguardo ai test e pone due domande chiuse con richiesta di motivazione per appurare la comprensione profonda di alcuni aspetti degli argomenti. Infine seguirà l'analisi comparata delle risposte aperte del compito, dei questionari e dei dubbi raccolti durante lo studio.

Sistemi Lineari

M. Bergamini e G. Barozzi

L'attività che vi viene proposta è uno studio individuale dell'argomento Sistemi Lineari.
Innanzittutto elegette un membro del gruppo che avrà il compito di segnare **SU UN FOGLIO A PARTE** tutti i dubbi che emergono nel gruppo, infatti durante questo tempo NON potrete chiedere chiarimenti o spiegazioni al docente.
Questo foglio deve essere diviso in due parti:

- Dubbi emersi, discussi e risolti all'interno del gruppo
- Dubbi non risolti

Il responsabile eletto dal gruppo avrà il compito di segnare tutte le domande che emergono durante lo studio della teoria e degli esercizi.
Di seguito verranno riportate le pagine che dovrete studiare con i relativi esercizi, ciò che non completate in aula dovrete finirlo a casa, vi raccomando, durante lo studio, di porre attenzione A TUTTI gli elementi della pagina.
N.B Al termine delle spiegazioni sono presenti degli esercizi (ESERCIZI PER COMINCIARE), anche tutti questi esercizi VANNO SVOLTI.

Unità 18 Sistemi Lineari

Sistemi di equazioni, studiare pagine da 574 a 576, **es 52,53,55,56 pg 588**
Metodo di sostituzione: studiare pagina 577, **es 73,74,75,76,90,91,92,93 pg 591**
Metodo del confronto: studiare pagina 578, **es 110,111,122,123 pg 593-594**
Metodo di riduzione: studiare pagina 579, **es 132,139,140,141 pg 594** e **es 145,146,154 pg 596**
Metodo di Cramer: studiare da pagina 580 a 582, **es 161,163,167 pg 597** e **168,169 pg 598**

Sistemi Lineari

L. Sasso e C.Zanone

L'attività che vi viene proposta è uno studio individuale dell'argomento Sistemi Lineari.
Innanzittutto elegette un membro del gruppo che avrà il compito di segnare **SU UN FOGLIO A PARTE** tutti i dubbi che emergono nel gruppo, infatti durante questo tempo NON potrete chiedere chiarimenti o spiegazioni al docente.
Questo foglio deve essere diviso in due parti:

- Dubbi emersi, discussi e risolti all'interno del gruppo
- Dubbi non risolti

Il responsabile eletto dal gruppo avrà il compito di segnare tutte le domande che emergono durante lo studio della teoria e degli esercizi.
Di seguito verranno riportate le pagine che dovrete studiare con i relativi esercizi, ciò che non completate in aula dovrete finirlo a casa, vi raccomando, durante lo studio, di porre attenzione A TUTTI gli elementi della pagina.

Unità 2 Sistemi lineari e matrici

Introduzione ai sistemi lineari: studiare pagine da 67 a 71, **es 40,41,44,45 pg 102**
Metodo di sostituzione: studiare da pagina 71 a 73, **es 54,55,56,57,70,72,73,79 pg 103**
Metodo del confronto: studiare pagina 74, **es 88,102,104 pg 105**
Metodo di addizione-sottrazione: studiare da pagina 74 a 76, **es 116,122,123 pg 106** e **126,135,146,147 pg 107**
Metodo di Cramer: studiare da pagina 76 a 80, **es 156,157,160,166,167 pg 109**

Sistemi Lineari

N. Dodero, P.Baroncini e R. Manfredi

L'attività che vi viene proposta è uno studio individuale dell'argomento Sistemi Lineari.
Innanzitutto elegette un membro del gruppo che avrà il compito di segnare **SU UN FOGLIO A PARTE** tutti i dubbi che emergono nel gruppo, infatti durante questo tempo NON potrete chiedere chiarimenti o spiegazioni al docente. Questo foglio deve essere diviso in due parti:

- Dubbi emersi, discussi e risolti all'interno del gruppo
- Dubbi non risolti

Il responsabile eletto dal gruppo avrà il compito di segnare tutte le domande che emergono durante lo studio della teoria e degli esercizi.
Di seguito verranno riportate le pagine che dovrete studiare con i relativi esercizi, ciò che non completate in aula dovrete finirlo a casa, vi raccomando, durante lo studio, di porre attenzione A TUTTI gli elementi della pagina.

Unità

Sistemi di equazioni: studiare pagine da 580 a 587
Metodo di sostituzione: studiare da pagina 588 a 589
es 2,3,4,5,6 pg 615/616
Metodo del confronto: studiare pagina 589 e 590
Metodo di riduzione: studiare pagina 590 e 591
Metodo di Cramer: studiare da pagina 593 a 596
es da 10 a 26 pg 617/618

Circonferenza e Cerchio

M. Bergamini e G. Barozzi

L'attività che vi viene proposta è uno studio individuale dell'argomento Circonferenza e Cerchio.
Innanzitutto elegette un membro del gruppo che avrà il compito di segnare SU UN FOGLIO A PARTE tutti i dubbi che emergono nel gruppo, infatti durante questo tempo NON potrete chiedere chiarimenti o spiegazioni al docente.
Questo foglio deve essere diviso in due parti:

- Dubbi emersi, discussi e risolti all'interno del gruppo
- Dubbi non risolti

Il responsabile eletto dal gruppo avrà il compito di segnare tutte le domande che emergono durante lo studio della teoria e degli esercizi.
Di seguito verranno riportate le pagine che dovrete studiare con i relativi esercizi, ciò che non completate in aula dovrete finirlo a casa, vi raccomando, durante lo studio, di porre attenzione A TUTTI gli elementi della pagina.

Unità G5 Circonferenze
Studiare sezione 2, pagine da G144 a G147, **es 33,40 pg G161-162** e **43,44,45,46 pg G163**
Studiare sezione 3, pagine da G148 a G150, **es 62,63,64 pg G615** e **74,75 pg G166**
Studiare sezione 4, pagine da G151 a G153, **es 95,100 pg G168** e **111,113,114 pg G169**
Studiare sezione 5, pagina G154, **es 132 pg G171** e **144,148 pg G173**
Studiare sezione 6, pagine da G155 a G157, **es 165,177 pg G176**

Circonferenza e Cerchio

L. Sasso e C.Zanone

L'attività che vi viene proposta è uno studio individuale dell'argomento Circonferenza e Cerchio.
Innanzitutto elegette un membro del gruppo che avrà il compito di segnare SU UN FOGLIO A PARTE tutti i dubbi che emergono nel gruppo, infatti durante questo tempo NON potrete chiedere chiarimenti o spiegazioni al docente. Questo foglio deve essere diviso in due parti:

- Dubbi emersi, discussi e risolti all'interno del gruppo
- Dubbi non risolti

Il responsabile eletto dal gruppo avrà il compito di segnare tutte le domande che emergono durante lo studio della teoria e degli esercizi.
Di seguito verranno riportate le pagine che dovrete studiare con i relativi esercizi, ciò che non completate in aula dovrete finirlo a casa, vi raccomando, durante lo studio, di porre attenzione A TUTTI gli elementi della pagina.

Unità 11 Circonferenza e cerchio
Studiare sezione 2, pagine da 590 a 591
Studiare sezione 3, pagine da 593 a 595, **es 40,41 pg 614** e **51,52,53,54 pg 615**
Studiare sezione 4, pagine da 595 a 598, **es 63,64,65 pg 617**
Studiare sezione 5, pagine da 598 a 601,(della parte "Tangenti a una circonferenza per un punto" studiare solo teorema 18 con dimostrazione), **es 70,74,75 pg 618**
Studiare sezione 6, pagine da 601 a 602, **es 83,84,88,90 pg 619-620**
Studiare sezione 7, pagine da 602 a 607, **es 95 pg 621** e **es 114,115 pg 623**

Circonferenza e Cerchio

N.Dodero, P.Baroncini, R.Manfredi

L'attività che vi viene proposta è uno studio individuale dell'argomento Circonferenza e Cerchio.
Innanzitutto elegete un membro del gruppo che avrà il compito di segnare SU UN FOGLIO A PARTE tutti i dubbi che emergono nel gruppo, infatti durante questo tempo NON potrete chiedere chiarimenti o spiegazioni al docente.
Questo foglio deve essere diviso in due parti:

- Dubbi emersi, discussi e risolti all'interno del gruppo
- Dubbi non risolti

Il responsabile eletto dal gruppo avrà il compito di segnare tutte le domande che emergono durante lo studio della teoria e degli esercizi.
Di seguito verranno riportate le pagine che dovrete studiare con i relativi esercizi, ciò che non completate in aula dovrete finirlo a casa, vi raccomando, durante lo studio, di porre attenzione A TUTTI gli elementi della pagina.
Unità 7 Circonferenza.
Studiare da pagina 399 a pagina 402 ,escluse le parti barrate.
Studiare pagine da 403 a 406 Studiare pagine 406 e 407, **es da 1 a 11 pg 425**, **es 16, 20,21,22 pg 427**, **es 25,37,40 pg 428-429**
Studiare pagine da 407 a 409, **es 10,13,14 pg 430-431**
Studiare da pagina 409 a 414, **es 1,2,3,4,5 pg 432-433**,, **es 13,15 pg 434**,**es 5,6,7,8 pg 436**

Questionario su Sistemi Lineari

Studente: ____________________

Classe e sezione: ____________________

Libro: ____________________

Rispondi alle seguenti domande:

1. Come ti sei trovato a studiare sul libro?
   Dai una breve spiegazione individuando due aspetti positivi e due negativi del testo su cui hai lavorato
2. Sei abituato a studiare dal libro di matematica o lo usi per lo più per gli esercizi?
3. Pensi ti sia stato sufficiente questo tipo di studio per farti un'idea dell'argomento? Sei ricorso a lezioni private/ spiegazioni di altri?
4. Se potessi migliorare qualcosa del materiale da cui hai studiato, cosa cambieresti?

Rispondi motivando le tue scelte:

1. Un sistema lineare è costituito da:

   A. equazioni lineari

   B. equazioni di primo grado

   C. entrambe le precedenti sono corrette

	V	F
1. Il metodo del confronto è una variante del metodo di sostituzione.	☐	☐

Questionario su Circonferenza e Cerchio

Studente: ____________________

Classe e sezione: ____________________

Libro: ____________________

Rispondi alle seguenti domande:

1. Come ti sei trovato a studiare sul libro?
   Dai una breve spiegazione individuando due aspetti positivi e due negativi del testo su cui hai lavorato
2. Sei abituato a studiare dal libro di matematica o lo usi per lo più per gli esercizi?
3. Pensi ti sia stato sufficiente questo tipo di studio per farti un'idea dell'argomento? Sei ricorso a lezioni private/ spiegazioni di altri?
4. Se potessi migliorare qualcosa del materiale da cui hai studiato, cosa cambieresti?

Rispondi motivando le tue scelte:

1. Cosa differenzia un cerchio da una circonferenza?
   - A. la circonferenza è la frontiera del cerchio.
   - B. la circonferenza è una linea, il cerchio una superficie.
   - C. entrambe le alternative sono corrette.
2. Il raggio è un numero:
   - A. reale
   - B. intero
   - C. reale positivo

Sistemi Lineari

Studente: ____________________

Data: ____________________

DOMANDE APERTE

1. A cosa servono i sistemi di equazioni?

   Commento: Sasso e Dodero introducono il capitolo con applicazioni a problemi, dimostrando che con le sole equazioni alcuni problemi non si possono risolvere, Bergamini vi fa rifermineto al termine della prima sezione

2. Quali sono i metodi che hai studiato per risolvere i sistemi lineari? (enunciali e descrivili brevemente)

   Commento: Bergamini punta sugli esempi svolti, mentre gli altri due sono più schematici e organici nelle spiegazioni

3. Cos'è il determinante e a cosa serve?

   Commento: Dodero non introduce le matrici, lo chiama determinante dei coefficenti del sistema

4. Come si definisce il grado di un sistema lineare?

DOMANDE CHIUSE

1. Una soluzione di un'equazione di primo grado nelle incognite x e y è:

    A. un numero reale

    B. una coppia ordinata

    C. una retta

    Commento: Bergamini parla di coppia ordinata

2. Un sistema è indeterminato se:

    A. ha un numero finito di soluzioni

    B. se non ha soluzioni

    C. ha infinite soluzioni

3. Graficamente un sistema due per due impossibile è rappresentato da:

    A. rette parallele

    B. rette incidenti

    C. rette coincidenti

    Commento: Dodero non enfatizza l'aspetto grafico

4. Due sistemi sono equivalenti se:

    A. hanno un numero finito di soluzioni

    B. hanno le stesse soluzioni

    C. l'insieme di soluzioni di uno è strettamente contenuto nell'insieme di soluzioni dell'altro

Commento: Dodero parla di insieme di soluzioni, ovviamente la prima e la seconda giocano sulla comprensione di sistema equivalente e determinato. Le due definizioni sono date insieme nei libri.

5. Il metodo di addizione e sottrazione/eliminazione/riduzione è basato sull'idea:
   A. si cerca di eliminare dal sistema un'incognita per volta
   B. si interpreta graficamente il sistema per determinarne le soluzioni
   C. si ricava l'equazione risolvente, risolvendo le equazioni del sistema nella stessa incognita

Commento: Dodero esplicita quest'idea (la prima alternativa è presa da Dodero stesso), l'ultima è presa da Sasso nella spiegazione del metodo del confronto.

VERO/FALSO

1. Rispondi ai Vero/Falso, correggendo le risposte false (sul foglio protocollo riportando la lettera della domanda)

	V	F
a. I sistemi si possono classificare in base al numero di soluzioni che presentano?	☐	☐
b. Il grado di un sistema intero è il massimo grado delle equazioni che lo costituiscono.	☐	☐
c. Un sistema lineare ha sempre e solo due equazioni.	☐	☐
d. Un sistema che risolto dà un'identità è un sistema impossibile.	☐	☐

Commento:

- Esplicitato in Sasso, ma la classificazione è presente in tutti.
- Domanda di controllo, definizione spesso sbagliata dagli studenti.
- Dodero insiste sulla generalizzazione, ma tutte le definizioni fanno riferimento a più equazioni.
- Domanda di controllo, definizione uguale in tutti i libri.

ESERCIZI

1. Esercizio preso dalla sezione Metodo Di Sostituizione
2. Esercizio preso dalla sezione Metodo Di Cramer
3. Esercizio preso dalle schede conclusive (facile)
4. Esercizio preso dalle schede conclusive (difficile)

Commento: Le classificazioni 1-4 valgono per Sasso e Bergamini, Dodero non ha una suddivisione per gli esercizi quindi sono stati selezionati per somiglianza(in difficoltà) con quelli di Bergamnini.

5. Problema da risolvere con sistema a tre equazioni

Commento:

- Sasso tratta il problema selezionato al termine della teoria.
- Bergamini presenta l'esercizio nelle schede conclusive del capitolo.

Sistemi Lineari

Studente: ______________________________

Data: ______________________________

DOMANDE APERTE

1. A cosa servono i sistemi di equazioni?

   Soluzione: I sistemi servono a mettere in relazione tra loro più equazioni contemporaneamente. Sono uno strumento algebrico utile per modellizare problemi con più incognite.

2. Quali sono i metodi che hai studiato per risolvere i sistemi lineari? (enunciali e descrivili brevemente)

   Soluzione:

   - Metodo grafico
   - Metodo di sostituzione
   - Metodo del confronto
   - Metodo di riduzione
   - Metodo di Cramer

3. Cos'è il determinante e a cosa serve?

   Soluzione: Il determinante è un valore calcolato a partire dalla matrice dei coefficienti del sistema, serve per determinare i valori delle incognite tramite il metodo di Cramer.

4. Come si definisce il grado di un sistema lineare?

   Soluzione: Il grado di un sistema lineare è uno, poichè è un sistema costituito da equazioni lineari, ovvero di primo grado e il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

DOMANDE CHIUSE

1. Una soluzione di un'equazione di primo grado nelle incognite x e y è:
   - A. un numero reale
   - B. una coppia ordinata
   - C. **una retta**
2. Un sistema è indeterminato se:
   - A. ha un numero finito di soluzioni
   - B. se non ha soluzioni
   - C. **ha infinite soluzioni**
3. Graficamente un sistema due per due impossibile è rappresentato da:
   - A. **rette parallele**
   - B. rette incidenti
   - C. rette coincidenti
4. Due sistemi sono equivalenti se:
   - A. hanno un numero finito di soluzioni
   - B. **hanno le stesse soluzioni**
   - C. l'insieme di soluzioni di uno è strettamente contenuto nell'insieme di soluzioni dell'altro

Soluzione: Dodero parla di insieme di soluzioni, ovviamente la prima e la seconda giocano sulla comprensione di sistema equivalente e determinato. Le due definizioni sono date insieme nei libri.

5. Il metodo di addizione e sottrazione/eliminazione/riduzione è basato sull'idea:
   A. **si cerca di eliminare dal sistema un'incognita per volta**
   B. si interpreta graficamente il sistema per determinarne le soluzioni
   C. si ricava l'equazione risolvente, risolvendo le equazioni del sistema nella stessa incognita

VERO/FALSO

1. Rispondi ai Vero/Falso, correggendo le risposte false (sul foglio protocollo riportando la lettera della domanda)

		V	F
a.	I sistemi si possono classificare in base al numero di soluzioni che presentano?	$\boxed{X}$	$\boxed{}$
b.	Il grado di un sistema intero è il massimo grado delle equazioni che lo costituiscono.	$\boxed{}$	$\boxed{X}$
c.	Un sistema lineare ha sempre e solo due equazioni.	$\boxed{}$	$\boxed{X}$
d.	Un sistema che risolto dà un'identità è un sistema impossibile.	$\boxed{}$	$\boxed{X}$

ESERCIZI BERGAMINI BAROZZI

1. Risolvi il sistema con il METODO DI RIDUZIONE:
$$\begin{cases} y+1=2(y-x) \\ (x+y+2)^2-6x=(x+y)^2 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema GRAFICAMENTE:
$$\begin{cases} y-3(1-x)=0 \\ 2(y+2)+x=0 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema con il metodo che preferisci:
$$\begin{cases} -x-y+8=0 \\ 6x-2y=9 \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema con il metodo che preferisci:
$$\begin{cases} \frac{x+3}{2}-\frac{y-1}{6}=\frac{x+4}{3} \\ 2(x+3)-4(y-2)=-5-7y \end{cases}$$

5. Risolvi il seguente problema:
   Nel 2014 il record mondiale del salto con l'asta maschile ha superato di 2 cm il record precedente, imbattuto dal 1994. Un record ancora precedente a quello del 1994 era stato stabilito dallo stesso atleta nel 1984, ed era di 20 cm inferiore a quello del '94. Sapendo che la media fra i tre record è 6,08 m, qual è il record del 2014? **(per calcolare la media bisogna sommare tutti i termini e dividere per il numero degli addendi)**

ESERCIZI SASSO

1. Risolvi il sistema con il METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:
$$\begin{cases}(3x-2)(x+2)+y=3x^2\\(x+y+1)^2=(x+y)^2\end{cases}$$
2. Risolvi il sistema GRAFICAMENTE:
$$\begin{cases}x=y-2\\y-2x=-3\end{cases}$$
3. Risolvi il sistema con il metodo che preferisci:
$$\begin{cases}2x+y+3=0\\y=x+3\end{cases}$$
4. Risolvi il sistema con il metodo che preferisci:
$$\begin{cases}x-y-1-(2x-3y+1)=1\\\frac{x-y}{5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}(x-10)\end{cases}$$
5. Risolvi il seguente problema:
Il campionato di calcio di serie B della stagione 2014/2015 è stato vinto dal Carpi, che ha ottenuto 80 punti nelle 42 partite disputate. Sapendo che il numero delle partite perse o pareggiate è stato di due unità inferiore a quello delle partite vinte, stabilisci il numero delle partite perse, pareggiate e vinte. (sapendo che ad ogni partita vinta vengono assegnati 3 punti, 1 punto a partita pareggiata e 0 a partita persa)

ESERCIZI DODERO

1. Risolvi il sistema con il METODO DI ELIMINAZIONE:
$$\begin{cases} (x+1)^2 - (y+2)^2 = (x+y)(x-y) + 2(x-2y+1) \\ x+y+3=0 \end{cases}$$

2. Risolvi il sistema GRAFICAMENTE:
$$\begin{cases} 3x - 2y = -24 \\ x+y=2 \end{cases}$$

3. Risolvi il sistema con il metodo che preferisci:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 3 \\ x + \frac{1}{3}y = \frac{11}{3} \end{cases}$$

4. Risolvi il sistema con il metodo che preferisci:
$$\begin{cases} \frac{12x-7}{2} - \frac{3(2x+y)}{10} = \frac{7}{10} \\ \frac{2x+y}{3} = \frac{4}{9} + \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

5. Risolvi il seguente problema:
In uno scafale di un supermercato vi sono 54 scatole: alcune di fagioli, altre di piselli, altre ancora di lenticchie. Si sa che le scatole di lenticchie sono due più di quelle di fagioli e che, se si somma il numero delle scatole di fagioli con metà di quello delle scatole di piselli e con un terzo di quello delle scatole di lenticchie, si ottiene 32. Quante scatole di fagioli, di piselli, di lenticchie vi sono?

Compito su Circonferenza e Cerchio

Studente: ____________________

Classe e sezione: ____________________

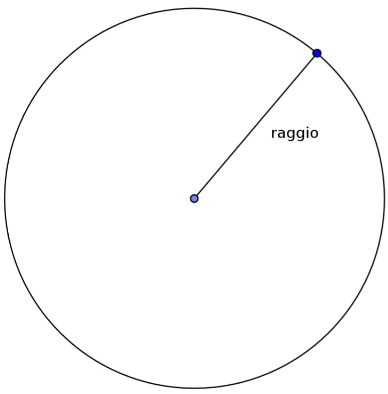
Data: ____________________

DOMANDE APERTE

1. Scrivi la definizione di cerchio e quella di circonferenza.
2. Quando una retta è tangente a una circonferenza?

   Commento: punti in comune, distanza con il raggio o teoremi, cosa è rimasto di più?

3. Disegna TUTTI gli elementi che conosci riguardo cerchio e circonferenza, riportandone il nome:



4. Enuncia e dimostra il teorema su corde congruenti loro distanza dal centro.
5. Tra i teoremi che hai studiato enuncia e dimostrane uno sulle corde.

DOMANDE CHIUSE

1. Due circonferenze possono avere AL PIÙ quanti punti in comune?

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   Commento: Lo specifica solo Dodero, ma tutti hanno la classificazione delle posizioni di due circonferenze.

2. Un semicerchio è:

   A. un settore circolare il cui corrispondente angolo al centro è piatto

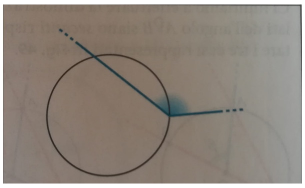
   B. l'arco che corrisponde a un angolo al centro piatto

   C. un settore circolare il cui angolo al centro è retto

   Commento: Dodero non dà la definizione di semicerchio, la domanda mira a vedere se gli studenti hanno compreso la differenza tra cerchio e circonferenza

VERO/FALSO

1. Rispondi ai Vero/Falso, correggendo le risposte false (sul foglio protocollo riportando la lettera della domanda)

		V	F
a.	In circonferenze congruenti corde disuguali distano diversamente dal centro.	☐	☐
b.	Corde con la stessa distanza dal centro sono congruenti.	☐	☐
c.	La posizione reciproca di due circonferenze può dipendere anche dalla distanza tra i due centri.	☐	☐
d.	 è un angolo alla circonferenza.	☐	☐
e.	Ogni triangolo inscrivibile in una semicirconferenza è rettangolo, ma non viceversa.	☐	☐

Commento:

- Linguaggio del Dodero, Bergamini non specifica che la prop valga in circonferenze conruenti.
- Dodero usa un viceversa mentre gli altri due sono espliciti.
- Solo Bergamini lo sottolinea.
- Immagine di Sasso, il solo a fare controesempi.
- Bergamini usa se e solo se nella prop, Sasso nel commento spiega che vale il viceversa, Dodero lo esplicita.

ESERCIZI

1. Dimostrazione con due circonferenze tangenti
2. Dimostrazione sulla costruzione di un triangolo a partire da una circonferenza

Commento: I testi degli esercizi sono presi direttamente dai testi

- In Sasso sono presi dagli esercizi misti a conclusione del capitolo
- In Bergamini sono presi dalle diverse sezioni di esercizi
- In Dodero sono presi dagli esercizi di ricapitolazione a fine capitolo

Compito su Circonferenza e Cerchio

DOMANDE APERTE

1. Scrivi la definizione di cerchio e quella di circonferenza.

Soluzione:

- (B):Una circonferenza di centro O e di raggio r è il luogo geometrico dei punti che hanno distanza r da O. Un cerchio è l'insieme dei punti di una circonferenza e di tutti quelli interni ad essa.
- (S): Si chiama circonferenza di centro O e di raggio r, essendo r un numero reale positivo, il luogo dei punti del piano che hanno distanza r da O. Si chiama cerchio di centro O e di raggio r la figura costruita dalla circonferenza di centro O e raggio r e da tutti i punti interni ad essa.
- (D): La circonferenza è il luogo dei punti del piano che hanno da un punto dato distanza assegnata. La figura costituita da tutti i punti di una circonferenza e dai suoi punti interni si chiama cerchio, di cui la circonferenza è il contorno.

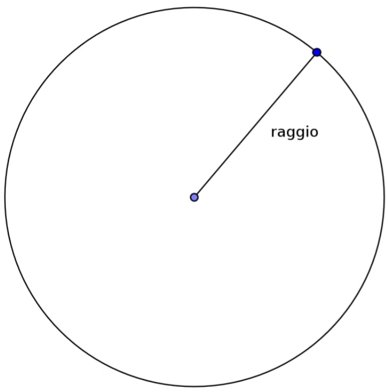
2. Quando una retta è tangente a una circonferenza?

Soluzione:

- (B): Rispetto a una circonferenza, una retta è tangente se ha in comune un punto. Se la distanza di una retta dal centro di una circonferenza è uguale al raggio, la retta è tangente alla circonferenza.

- (S): se la retta ha un solo punto in comune con la circonferenza. La retta è tangente alla circonferenza se e solo se la sua distanza dal centro è congruente al raggio.
- (D): Una retta si dice tangente rispetto a una circonferenza se ha un solo punto in comune con essa e tutti gli altri suoi punti sono esterni alla circonferenza.

3. Disegna TUTTI gli elementi che conosci riguardo cerchio e circonferenza, riportandone il nome:



Soluzione:

- diametro
- punti interni ed esterni
- arco
- corda
- settore circolare-segmento circolare
- semicirconferenza-semicerchio-quadrante
- tangente-secante-esterna
- angoli al centro-alla circonferenza

4. Enuncia e dimostra il teorema su corde congruenti loro distanza dal centro.

Soluzione:

- (B):In una circonferenza, corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro.
- (S): In una circonferenza (o in circonferenze congruenti) se due corde sono congruenti hanno la stessa distanza dal centro.
- (D): In una circonferenza (o circonferenze congruenti) corde congruenti sono ugualmente distanti dal centro e viceversa

5. Tra i teoremi che hai studiato enuncia e dimostrane uno sulle corde.

DOMANDE CHIUSE

1. Due circonferenze distinte possono avere AL PIÙ quanti punti in comune?

   A. 1

   B. **2**

   C. 3

2. Un semicerchio è:

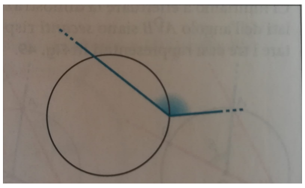
   A. **un settore circolare il cui corrispondente angolo al centro è piatto**

   B. l'arco che corrisponde a un angolo al centro piatto

   C. un settore circolare il cui angolo al centro è retto

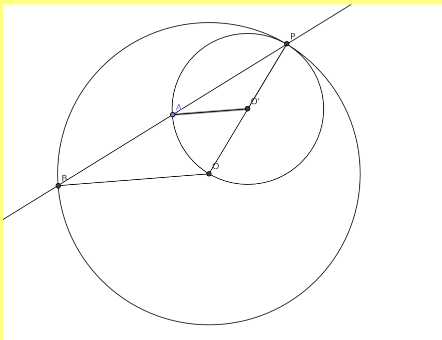
VERO/FALSO

1. Rispondi ai Vero/Falso, correggendo le risposte false (sul foglio protocollo riportando la lettera della domanda)

		V	F
a.	In circonferenze congruenti corde disuguali distano diversamente dal centro.	$\boxed{X}$	$\boxed{}$
b.	Corde con la stessa distanza dal centro sono congruenti.	$\boxed{X}$	$\boxed{}$
c.	La posizione reciproca di due circonferenze può dipendere anche dalla distanza tra i due centri.	$\boxed{X}$	$\boxed{}$
d.	 è un angolo alla circonferenza.	$\boxed{}$	$\boxed{X}$
e.	Ogni triangolo inscrivibile in una semicirconferenza è rettangolo, ma non viceversa.	$\boxed{}$	$\boxed{X}$

1. C e C' sono circonferenze rispettivamente di centro O e O', tangenti internamente nel punto P e tali che $O \in C$'. Conduci da P una retta che interseca C' in A e C in B. Dimostra che $PA \simeq \frac{1}{2}PB$

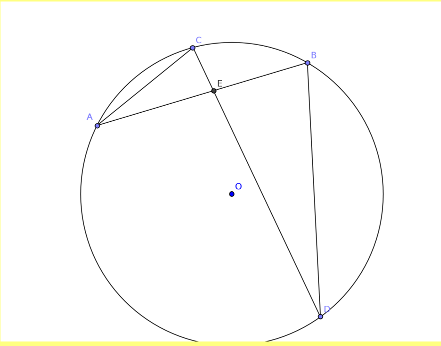
   Soluzione:

   Dalla costruzione della figura risulta $r' = \frac{1}{2} \cdot r$, quindi $O'P = \frac{1}{2} \cdot OP$ e $O'A = \frac{1}{2} \cdot OB$.
   I triangoli AOP e BOP sono isosceli perchè ciascuno ha due lati pari rispettivamente r' e r.
   L'angolo $\widehat{O'PA}$ coincide con l'angolo $\widehat{OPB}$, si può dunque concludere che $\widehat{O'PA} \simeq \widehat{O'AP} \simeq \widehat{OBP}$, da cui segue che anche gli angoli $\widehat{AO'P}$ e $\widehat{BOP}$ sono congruenti, in quanto la somma degli angoli di un triangolo è 180°.
   Quindi OAP e OBP sono due triangoli simili, per il secondo teorema di similitudine. Dunque PA è proporzionale a PB di un fattore $\frac{1}{2}$.

2. AB e CD sono due corde di una circonferenza di centro O che si intersecano nel punto E. Dimostrare che i triangoli AEC e BED hanno gli angoli congruenti. Cosa puoi dire dei due triangoli se $AB \simeq CD$?

Soluzione:

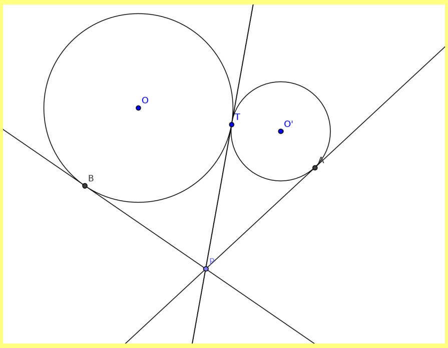


Sfruttando il teorema: tutti gli angoli che insistono sullo stesso arco sono congruenti. Si ha:
$\widehat{ACD} \simeq \widehat{ABD}$ perchè insistono sull'arco AD
$\widehat{CAD} \simeq \widehat{CDB}$ perchè insistono sull'arco CD
$\widehat{AEC} \simeq \widehat{DEB}$ perchè dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, i due angoli risultano come la differenza tra 180° e una quantità uguale.
Se $AB \simeq CD$ i due triangoli sono congruenti.

ESERCIZI SASSO

1. Considera due circonferenze tangenti esternamente nel punto T. Traccia la tangente comune alle due circonferenze in T e considera su di essa un punto P. Traccia le ulteriori rette tangenti alle due circonferenze passanti per P (oltre alla tangente comune), indicando con A e B i punti di contatto con le circonferenze stesse. Dimostra che $PA \simeq PB$.

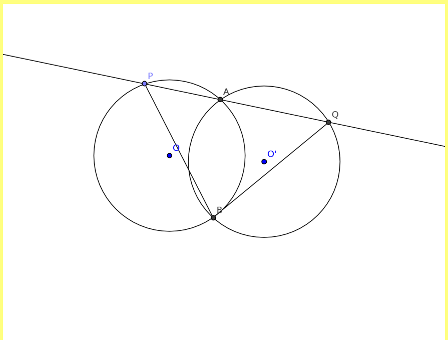
Soluzione:



Sfruttando il teorema delle tangenti: condotte da un punto P esterno a una circonferenza le due rette tangenti, i segmenti di tangente sono congruenti.
Si ha $PB \simeq PT$ e $PT \simeq PA$ da cui segue $PB \simeq PT \simeq PA$ da cui la tesi.

2. Due circonferenze congruenti, di centro O e O', si intersecano nei punti A e B. Traccia per il punto A una secante che interseca ulteriormente le circonferenze in P e Q. Dimostra che il triangolo PBQ è isoscele. Come devono essere le due circonferenze perchè il triangolo PBQ sia equilatero?

Soluzione:



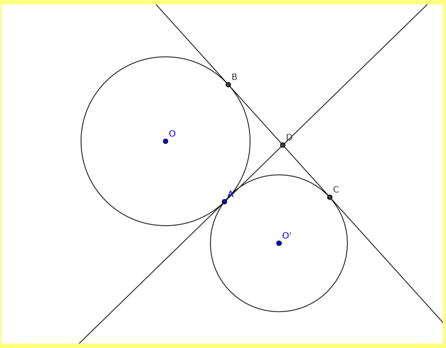
Trattandosi di circonferenze congruenti i due archi di estremi A e B sono congruenti, di conseguenza i corrispondenti angoli alla circonferenza $\widehat{BPA}$ e $\widehat{BAQ}$ sono congruendi. Essendo questi due angoli del triangolo, esso è isoscele.

Affinchè il triangolo sia equilatero O' deve apartenere alla circonfereneza di centro O.

ESERCIZI DODERO

1. Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente nel punto A. Si conducono la tangente in A e una retta tangente alle due circonferenze rispettivamente in B e in C. Sia D l'intersezione delle due tangenti. Dimostrare che $AD \simeq \frac{1}{2}BC$, che D è il punto medio di BC e dedurre che $\widehat{BAC}$ è retto.

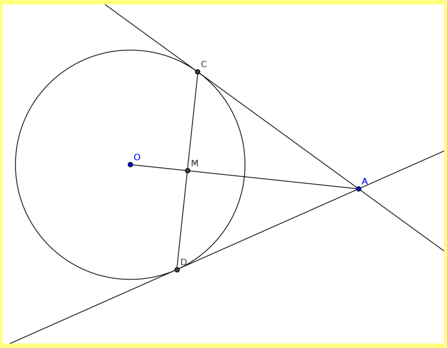
Soluzione:



Sfruttando il teorema delle tangenti: condotte da un punto P esterno a una circonferenza le due rette tangenti, i segmenti di tangente sono congruenti.
Si ha: $DA \simeq DC$ e $DA \simeq DB$, quindi $DB \simeq DC$ ed essendo $BC = BD + DC$ segue che $BC \simeq 2DA$ quindi $DA \simeq \frac{1}{2}BC$. D è il punto medio di BC perchè come detto sopra $DA \simeq DC$ e $DA \simeq DB$.
Con i risultati già ottenuti abbiamo che i triangoli DAC e BDA sono isosceli e l'angolo in D è retto, quindi DAC e BDA valgono 45° (dato che la somma degli angoli di un triangolo è 180°), quindi l'angolo $BAC = BAD + DAC$ è retto.

2. È data una circonferenza di centro O e di raggio r. Da un punto A tale che $AO \simeq 2r$ si conducono le tangenti AB e AC. Dimostrare che il triangolo ABC è equilatero.

Soluzione:



$AC \simeq AB$ per il teorema delle tangenti. Traccio il segmento OA, chiamando M il punto di intersezione tra OA e CB, e considero i triangoli OCA e OBC, i quali sappiamo essere due triangoli rettangoli, perchè il raggio cade perpendicolare alla tangente e sappiamo che $OA = 2r$ e $OC \simeq OB \simeq r$. Quindi per il teorema di pitagora $CA \simeq \sqrt{2}r \simeq AB$.
L'area di OCA è pari a $\frac{CA \cdot OC}{2} = \frac{\sqrt{2}r \cdot r}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot r^2}{2} = \frac{CM \cdot OA}{2}$.
Da cui segue che $CM = \frac{\sqrt{2}r}{2}$. Quindi $CB = CM + MB = 2CM = \sqrt{2}r$ (CM=MB segue dal teorema delle tangenti).
Quindi CMA è un triangolo equilatero in cui tutti i lati misurano $\sqrt{2}r$

Bibliografia

[1] M.Bergamini, G.Barozzi, Matematica multimediale.blu, Zanichelli, 2014.

[2] L.Sasso, C.Zanone, Colori della matematica. Edizione Blu, De Agostini, 2016.

[3] N.Dodero, P.Baroncini, R.Manfredi, Lineamenti di Matematica, Ghisetti e Corvi, 2004.

[4] G.Bolondi, M.I.Fandiño Pinilla, Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, 2013.

[5] B. D'Amore, Elementi di didattica della matematica, 1999.

[6] A. Baccaglini Frank, P. Di Martino, R. Natalini, Didattica della matematica, 2017.

[7] A. Oliviero, Il cervello che impara. Neuropedagogia dall'infanzia alla vecchiaia, 2017.

[8] G.Bolondi ,M.I.Fandiño Pinilla, Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. In D'Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2008). Didattica della matematica e azioni d'aula, 2008.

[9] R. E. Slavin, Co-operative Learning: What Makes Group Work Work?, University of York and Johns Hopkins University, 2010.

[10] B.D'Amore , H.Maier, Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. La matematica e la sua didattica, 2002.

[11] Cavalli Bertolucci C., Lo sviluppo delle competenze di modellizzazione matematica nella scuola secondaria di secondo grado. Concezioni iniziali e processi di intervento didattico. Università degli Studi di Padova, 2015.

[12] D.W.Johnson, R.T.Johnson e E.J.Holubec, Apprendimento cooperativo in classe,2015.

Ringraziamenti

Realizzare questo progetto è stato possibile solo grazie al contributo di tutti coloro che vi hanno preso parte, volontariamente e involontariamente; le difficoltà che ho riscontrato mi hanno reso consapevole di quanto questa collaborazione non fosse per nulla scontata, desidero, dunque, ricordare e ringraziare ciascuno di loro. Partendo dalla mia relatrice, professoressa Silvia Benvenuti, che ha creduto in questo progetto e ha messo a disposizione la sua competenza e le sue risorse. Solo grazie al suo aiuto ed entusiasmo mi è stato possibile progettare e realizzare questa tesi.

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno partecipato alla sperimentazione, senza i quali l'intera struttura del progetto non sarebbe mai esistita. Innanzitutto ricordo i dirigenti scolastici degli istituti Copernico, Fermi e Sabin di Bologna, i quali hanno accolto la mia richiesta e mi hanno aperto le porte dei lori istituti. Ringrazio poi i professori Civili, Formisano, Pardo, Chiarini, Silvestris e Rioli, per aver accettato di far partecipare le loro classi all'attività da me proposta, ma li ringrazio soprattutto per tutti i consigli, i racconti e le chiacchiere fatte, hanno arricchito questa esperienza rendendola per me e per la mia formazione estremamente preziosa. Infine, ringrazio tutti i ragazzi che, nonostante non sia mai stato chiesto loro alcun consenso, hanno lavorato con serietà, diligenza e impegno: mi hanno regalato grandi soddisfazioni e ricordi bellissimi che conserverò con gioia.

Questo traguardo accademico si inserisce su un percorso personale, di crescita, durato cinque anni all'interno dell'università, durante i quali ho conosciuto nuovi amici e ho capito il valore di chi mi è sempre stato a fianco, cose che oggi mi rendono profondamente grata. Il mio primo pensiero va ai miei mentori: in primis i miei genitori, che mi sostengono e incoraggiano da sempre, senza di loro non avrei mai potuto affrontare gli studi, sono il mio faro quando non so cosa fare e il mio porto sicuro quando non so dove andare. Sempre presenti quando ho bisogno di loro, pur lasciandomi libera di crescere e conoscere la vita. Ringrazio poi, due insegnanti che hanno segnato il mio percorso: il mio professore di matematica del liceo, prof. Widesott, e la mia professoressa di tirocinio, prof.ssa Piumi. Entrambi mi hanno insegnato molto, consigliato, ascoltato e appoggiato, ognuno a modo suo, ognuno indispensabile.

Ringrazio tutti i miei amici, quelli conosciuti in questi anni e quelli di sempre. A Marta, compagna di banco dal primo giorno di triennale all'ultimo di magistrale: compagna leale di studio, svago e chiacchiere: un'amicizia davvero preziosa. A Irene che con le sua simpatia e premura è stata presente nei momenti difficili in questi anni: i pomeriggi a casa passati a parlare di tutto e niente saranno per sempre impressi tra i miei ricordi più felici. La casa dei mitici tre, Alessandro, Matteo e Daniele, rifugio sicuro e accogliente, grazie ragazzi per le mille cene a cui mi sono autoinvitata e del materasso per terra in sala su cui ho dormito per quasi un anno, grazie per aver ascoltato le mie lamentele e aver placato le mie crisi. A tutti voi spero che la chiusura di questo capitolo apra occasioni per realizzarvi nella vostra vita.

Grazie a Fabio, correttore ufficioso di questa tesi, grazie per le dritte, le lezioni di grammatica e punteggiatura e grazie per essere una bella persona che posso chiamare amico. A Sofia che, nonostante la distanza, ha saputo come farsi vicina in questi due anni.

Ricordo tutti i colleghi, triennali e magistrali, conosciuti in questo percorso che mi hanno affiancato nello studio e nella vita qui a Bologna. Sicuramente non avrebbe mai potuto essere lo stesso dipartimento senza Elisa, Natalia, Federico ed Eleonora che hanno reso quest'avventura più piacevole da affrontare e hanno colorato le mie giornate di allegria.

Infine, menzione onorevole per chi mi sopporta dai tempi del liceo. Mauro

e Francesca, amici di sempre sui quali so di poter sempre contare, ovunque voi siate. A Emilia, presenza costante, grazie per gli anni di bella amicizia vissuti insieme, dai gelati mangiati preparando la maturità alle lunghe chiamate raccontandosi tutto. Pensando a tutti voi vedo tanti traguardi vissuti insieme e tanti che ancora ci aspettano.
Ringrazio mia mamma perchè per me non è solo il mio *capo*, ma anche la mia ispirazione: la donna tanto forte e sicura quanto amorevole ed emotiva, modello di vita che spero di diventare anche io un giorno. Un grazie speciale ai miei Giacomo: la mia famiglia, di sangue e acquisita. A mio fratello, compagno da tutta la vita, spalla e supporto amorevole, che non mi ha mai giudicato, ma solo sostenuto e accudito, malgrado il mio caratteraccio. Al mio ragazzo, entrato per caso nella mia vita, mi ha accompagnato in quest'avventura con pazienza e premura. Mi ha accettato per ciò che sono, dandomi amore e appoggio incondizionati. Grazie ad entrambi, unici e insostituibili, senza di voi sarei persa e davanti a questa nuova avventura sono fiera e orgogliosa di avervi nella mia vita.
Un caloroso ringraziamento all'Università di Bologna: a tutte le persone che permettono il suo funzionamento con diligenza e serietà. Al nostro magnifico rettore F. Ubertini, che in questo periodo di difficoltà si è fatto vicino alle nostre esigenze gestendo la situazione, confortandoci attuando strategie solide ed efficaci.