

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Tomografia quantistica: applicabilità e limiti

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Alessandra Accettola

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Meccanica quantistica nello spazio delle fasi	4
1.1	Cenni di meccanica quantistica	5
1.2	Stati coerenti	8
1.3	Associazione di Weyl	11
2	Studio tomografico convenzionale	14
2.1	Tomografia classica	15
2.2	Funzione di Wigner	17
2.3	Rilevamenti di ottica quantistica	22
2.4	Tomografia Quantistica	26

Introduzione

All'inizio del Novecento la necessità di una nuova epistemologia si impose all'ambiente scientifico e la crisi della meccanica classica portò con sé l'intuizione della distinzione gnoseologica tra conoscenza e previsione fenomenica. In fisica classica le grandezze fisiche risultano legate intrinsecamente agli oggetti osservati consentendo una valutazione certa di un fenomeno, a meno di errori sperimentali idealmente eliminabili. Un nuovo approccio ai fenomeni permise un ridimensionamento della conoscenza fisica come collegamento possibile con la realtà osservabile e non più come spiegazione predittiva. Questo rende comprensibile la nascita di una teoria quale quella quantistica e la sua interpretazione tomografica, tema di questa tesi. Ai fini della comprensione dell'humus culturale in cui si è sviluppata la teoria quantistica si presenterà la visione di alcuni dei fisici di maggior spicco del secolo scorso. Secondo Mach, fisico ed epistemologo di rilievo, dal momento che ogni testimonianza sul cosiddetto mondo esterno si affida soltanto alle sensazioni, o meglio *elementi*, aggiungere una realtà che si celi dietro le sensazioni, risulta essere superfluo. Di conseguenza, la conoscenza scientifica del mondo consiste, a suo avviso, unicamente nella descrizione della connessione tra elementi. D'altro canto, emerge un'evidente diffidenza verso il "dogmatismo" delle teorie ritenute certe senza riesamina costante. Si riesce dunque a far luce su quello che è l'apporto di Mach all'ambiente scientifico di fine Ottocento ed inizio Novecento: il dubbio innescato nell'approccio alla realtà, soprattutto sul piano gnoseologico. In seconda analisi si consideri Einstein, figura emblematica della nuova generazione di scienziati. Il padre della Relatività Generale si espresse sul ruolo della fisica sostenendo che: "La fisica deve presentare esattamente le relazioni empiriche a cui siamo soggetti; ma soltanto in questo modo è connessa ad esse. In breve, non tollero la separazione (non netta) tra Realtà dell'Esperienza e Realtà dell'Essere". Si pongono così le basi per una possibile conoscenza che agisce su rappresentazioni della realtà, ammettendo che quest'ultime non coincidano con la realtà stessa. Infine, attraverso la visione gnoseologica di uno dei fondatori della meccanica quantistica, Max Planck, si giustifica l'esistenza del nuovo approccio al reale. Egli afferma che: "Le due proposizioni: 1) *c'è un mondo esterno reale che esiste indipendentemente dal nostro atto conoscitivo*; 2) *il mondo esterno reale non è direttamente conoscibile* formano il punto cardinale su cui ruota l'intera struttura della scienza fisica. E tuttavia queste affermazioni in una certa misura si contraddicono." La conclusione che Planck trae da questa contraddizione è la presenza di un elemento irrazionale nella scienza, sintomo dell'incompletezza delle teorie fisiche impossibilitate a raggiungere la natura, di per sé stessa irraggiungibile. In questo contesto la meccanica quantistica

trova le radici di sviluppo. Essa è legata indissolubilmente ad una incertezza ineliminabile dovuta al principio di indeterminazione di Heisenberg. Inoltre, la rilevabilità assoluta dei fenomeni è minata dal *teorema di no cloning quantistico*, che impedisce la duplicazione di uno stato quantistico sconosciuto a priori e conseguentemente la reiterazione di una misura, nondimeno si deve considerare l'interazione tra strumenti di misura ed oggetto di studio. Il paradigma conoscitivo della Scienza si sposta, come anticipato, dalla predizione dei fenomeni in meccanica classica, ad una conoscenza probabilistica, unico ponte con la fenomenologia quantistica. Richard Feynmann identifica tale differenza tra meccanica classica e quantistica e commenta il tramonto dell'ideale della predittività nel modo seguente: “Si deve riconoscere che questo è un ripiegamento rispetto al nostro antico ideale di comprensione della natura. Può darsi che sia un passo indietro, ma nessuno ha trovato il modo di evitarlo”.

Risulta innegabile che il mondo classico sia più vicino alla nostra logica e sperimentazione diretta ed è per questo motivo che la scelta di procedere nel regno quantistico per similitudine con quello classico risulta particolarmente funzionale alla comprensione. Per tale scopo si presenterà in questo scritto l'interpretazione della meccanica quantistica nello spazio delle fasi. Tale impostazione teorica sarà successivamente utilizzata al fine di ricostruire lo stato di un sistema, ovvero la trattazione matematica dell'insieme di informazioni che descrive completamente un sistema. Nel caso di uno stato quantistico sconosciuto tale operazione non è scontata. Difatti, la conoscenza di uno stato quantistico è raggiungibile solamente attraverso molteplici misurazioni su copie identiche del sistema. Questa è la procedura alla base della tomografia quantistica. Fino a circa vent'anni fa, la tecnica tomografica poteva essere considerata al pari di una qualsiasi speculazione teorica finché il progresso tecnologico permise l'indagine sperimentale, con conseguente interesse in accrescimento per il soggetto d'indagine. In particolare, Raymer con un gruppo di ricerca andò oltre la teoria autoreferenziale attraverso rivoluzionari esperimenti di ottica quantistica [12]. L'interesse di tale sperimentazione, effettuata con la rilevazione omodina bilanciata, fu la ricostruzione dello stato di un modo singolo del campo elettromagnetico attraverso la misurazione sperimentale di tutte le possibili combinazioni lineari delle quadrature dell'oscillatore armonico[3]. Successivamente Vogel e Riskel identificarono la distribuzione di probabilità delle rilevazioni effettuate con l'omodina con la trasformata di Radon, algoritmo già utilizzato nell'*imaging* medico, applicata alla funzione di Wigner [13] e diedero così inizio alla “*homodyne tomography*” [3]. La metodologia di ricostruzione dello stato di un sistema, partendo dai presupposti appena citati, è tema di questo scritto. Gli errori insiti in questa procedura sono il motivo per cui è stato adottato un

metodo generale che ricompona la matrice densità di uno stato semplicemente effettuando una media sui dati empirici. L'utilizzo del metodo tomografico generale ha permesso, ad esempio, la ricostruzione dello stato di un fotone in un semiconduttore [7] oppure la matrice densità di *squeezed vacuum*[8]. L'efficacia della cosiddetta "*quantum homodyne tomography*" è dimostrata anche dall'ampiamiento del range di applicabilità: ne fu generalizzato l'utilizzo per un oscillatore ad un numero qualsiasi di modi[3] oltre che per un generico osservabile dell'oscillatore a modo singolo. Successivamente, un'ulteriore generalizzazione compiuta attraverso la teoria dei gruppi ha permesso di ampliare l'utilità della metodologia tomografica ad un sistema quantistico arbitrario [2,4,5].

La tesi sarà strutturata nel modo seguente:

Nel primo capitolo saranno presentate le nozioni teoriche necessarie alla strutturazione della visione della meccanica quantistica nello spazio delle fasi, e quindi della picture tomografica. In primo luogo, verrà fatto un excursus sui principi fondamentali della meccanica quantistica. Dopodiché si prenderanno in considerazione gli stati coerenti, particolarmente utili nell'ottica quantistica. Quest'ultimi saranno il punto di partenza per delineare la meccanica quantistica nello spazio delle fasi attraverso le loro proprietà quasi-classiche. Inoltre gli stessi mostreranno la possibilità di definizione, in nome della completezza dell'insieme di stati, di una rappresentazione attraverso gli operatori sono esprimibili in forma integrale: la rappresentazione di Bargmann-Fock. Partendo da questi presupposti, verrà applicata l'associazione di Weyl al fine di agire su operatori limitati.

Nel secondo capitolo verrà discusso il metodo tomografico convenzionale, che prende il nome di *homodyne tomography*. Innanzitutto si presenterà lo studio algoritmico che si effettua nell'*imaging* classico, il quale mostra molte analogie con il caso quantistico. Nel caso classico, si ricostruisce la distribuzione di massa di un oggetto lungo le diverse direzioni nello spazio; per quanto riguarda la tomografia quantistica, il processo si applica alla funzione di Wigner. Quindi si delineano le proprietà della funzione di Wigner standard ed anche della sua versione generalizzata, ovvero la quasi-distribuzione di probabilità associata ad uno stato. Successivamente, verrà presentata la modalità di rilevamento sperimentale dei fenomeni attraverso la teoria discussa, in particolare riportando l'esempio del *balanced homodyne*. Infine, si effettuerà il percorso a ritroso verso lo stato di un sistema attraverso la tomografia quantistica, partendo dalla funzione di Wigner ricostruita dai dati sperimentali[3].

Capitolo 1

Meccanica quantistica nello spazio delle fasi

Lo studio di oggetti quantistici ci pone di fronte ad una fenomenologia non interpretabile in modo intuitivo e non direttamente riconducibile a corrispondenti classici. Difatti, la formulazione teorica, sebbene possa essere sviluppata su modello classico, si discosta da quest'ultimo a causa della stessa natura non deterministica. Lo scopo sotteso a questo capitolo è quello presentare la conoscenza di base necessaria alla comprensione del regno quantistico; nondimeno la presentazione degli stati coerenti, quindi della rappresentazione di Bargmann-Fock affinché si possa aprire la strada ad una formulazione diversa dei fenomeni quantistici nel nome della similitudine con la classicità. Infine attraverso la quantizzazione di Weyl si definirà un'associazione univoca della meccanica quantistica operatoriale con quella definita sullo spazio delle fasi. Viene offerta nella sede di apertura della sezione solamente la definizione geometrica dello spazio delle fasi al fine di offrire una prima idea dello spazio formale su cui si vuole ridefinire la meccanica quantistica. Si ricorda la definizione di forma simplettica.

Forma simplettica: 2-forma chiusa ω tale che:

$$d\omega = 0;$$

$$\omega(x, y) = 0, \forall y \implies x = 0$$

Solitamente x è identificato con la variabile posizione q , che determina lo spazio delle configurazioni; y è il suo duale associato alla variabile momento p . Tali variabili sono appartenenti alla varietà M , definita come lo spazio delle fasi. Le funzioni agenti su tali variabili consistono nelle quantità fisiche che possono essere misurate, dette osservabili. In secondo luogo, si definisce la rappresentazione di un gruppo. Difatti, gli osservabili nella meccanica

quantistica sono rappresentati da operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert[16], per cui è interessante capire in che modo associare le funzioni su uno spazio vettoriale ad operatori su uno spazio di Hilbert. E' possibile agire con una mappatura continua tra gli elementi di gruppo G ed un operatore agente su uno spazio vettoriale V per mezzo della rappresentazione di un gruppo.

Rappresentazione di un gruppo: Sia V uno spazio vettoriale, una rappresentazione del gruppo G è un omomorfismo nel gruppo $GL(V)$ delle applicazioni invertibili di V in sé. In particolare l'associazione di Weyl permette una mappatura tra funzioni definite su un intero spazio vettoriale ed un gruppo di operatori unitari[14]. L'implicazione maggiore ricade su una rappresentazione agente sulla forma simplettica associata alla varietà coincidente con spazio delle fasi, cosicché si possa definire un isomorfismo tra la meccanica quantistica definita operatorialmente e la meccanica classica di funzioni definite sullo spazio delle fasi.

1.1 Cenni di meccanica quantistica

Lo stato di un sistema, ovvero l'insieme delle condizioni fisiche del sistema, è quantificabile numericamente attraverso le diverse proprietà espresse dagli osservabili; la conoscenza dello stato passa quindi attraverso la misurazione effettuata sull'osservabile. Il concetto di valore di un osservabile in meccanica classica prevede, fissato uno stato, l'esistenza di un risultato univoco e tale associazione univoca è vera per qualsiasi stato del sistema. In altri termini, sia x il valore dell'osservabile O associato ad uno stato s fissato, allora:

$$s \rightarrow x(s, O), \forall s \tag{1.1}$$

A questo concetto si sostituisce una previsione probabile del valore degli osservabili nello stato del sistema, ciò derivante dal fatto che non tutti gli stati permettono la definizione della totalità dei valori di un osservabile. Esiste un sottoinsieme degli stati possibili, dipendenti dall'osservabile, per cui il valore è definito: gli autostati dell'osservabile per cui è vera la (1.1). Si potrebbe dedurre da tali affermazioni l'impossibilità di previsione sul valore di un osservabile in alcuni stati, in completa contrapposizione con il caso classico, ma fortunatamente alla ripetizione di una misura, si rileva le probabilità $p(s, O, I)$ che il valore ottenuto sia in un range I . Inoltre, durante la misurazione avviene un cambiamento dello stato del sistema, sia per modifiche indotte dalla misura sia per modifiche intrinseche, le quali portano ad una riduzione dello stato agli autostati dell'osservabile. Per questo motivo si è indotti a pensare che, preso uno stato qualsiasi s , esso sia sovrapposizione di

un insieme di stati con un determinato peso. Si è appena enunciato il *principio di sovrapposizione*. E' naturale modellizzare la sovrapposizione degli stati come combinazione lineare ed allo stesso modo considerare che un insieme completo di stati indipendenti s_i esprima tutti gli stati possibili. Infine, la misurazione contemporanea di due osservabili non è sempre ugualmente consistente: esistono osservabili, detti compatibili, per cui una rilevazione non influenza l'altra; in altri casi la doppia misurazione è soggetta ad una incertezza ineliminabile. Nel caso di osservabili incompatibili, ovvero che non hanno autostati comuni, l'incertezza della misurazione simultanea è definita dal *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

Si delinea così la sostanziale differenza tra il mondo classico e quello quantistico. Nel primo caso il valore di un osservabile è una proprietà intrinseca del sistema, nel secondo lo stato del sistema determina solamente la probabilità del valore di un osservabile, che risulta perciò una caratteristica apportata dalla misurazione al sistema. In sostanza la chiave di conoscenza di un sistema quantistico è probabilistica, il risultato di una misurazione diviene la probabilità che un valore, tra l'insieme di quelli possibili si verifichi. A questo punto ha senso definire lo spettro di un osservabile, per esplicitarne formalmente le caratteristiche.

Lo spettro di un osservabile O consiste nell'insieme $\sigma(O)$ di tutti i valori x , tali che $x=x(s,O)$ per un dato autostato s di O .

Definizione che tiene conto anche del *principio di completezza*, per cui ogni osservabile è scomponibile in un'insieme completo di stati indipendenti, che ne costituiscono gli autostati[16]. Delineate le peculiarità di un sistema quantistico, è lecito presentarne il formalismo. Si definisce un autostato o stato puro come un sottoinsieme unidimensionale di uno spazio di Hilbert, ovvero un vettore $|\phi\rangle$ ¹, detto raggio, classe di vettori unitari esprimibili univocamente attraverso il proiettore di rango uno.

Proiettore di rango 1: Proiettore ortogonale $P : H \mapsto H$ che proietta su uno spazio di Hilbert di dimensione uno

$$\rho_\phi = |\phi\rangle\langle\phi| \tag{1.2}$$

Nel caso di uno stato misto, esso è sovrapposizione di stati puri ϕ_i con diverse probabilità p_i , tali che

$$p_i \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

¹si impiegherà la notazione di Dirac

La rappresentazione di uno stato misto è data da un operatore densità quale

$$\rho = \sum_1^n p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| \quad (1.3)$$

Ogni osservabile trova una descrizione matematica adeguata in un operatore autoaggiunto²[7], scomponibile spettralmente con una base ortonormale e autovalori reali, proprietà assicurata ad un operatore in quanto autoaggiunto[11]. Si considererà, in questa breve trattazione, uno spettro discreto.

$$\hat{O} = \sum_\lambda \lambda |\phi_\lambda\rangle \langle \phi_\lambda| \quad (1.4)$$

Cosicché il valore di aspettazione di un osservabile applicato ad uno stato è rispettivamente per gli stati puri e per quelli misti:

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \phi | \hat{O} | \phi \rangle = Tr[\rho_\phi \hat{O}]; \quad (1.5)$$

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_1^N p_j Tr[p_\phi \hat{O}] = Tr[\rho \hat{O}]$$

Per ottenere un sistema di coordinate ottimale è necessario scegliere una base ortonormale³ adeguata sullo spazio di Hilbert. Essa è determinata operativamente dalla scomposizione dell'identità, la quale fornisce un insieme completo di vettori normalizzati ortonormali.

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = I \quad (1.6)$$

Ogni possibile scomposizione dell'identità fornisce quindi una base ortonormale dello spazio di Hilbert, corrispondente agli autovettori di un operatore autoaggiunto eq.(1.4). Tale affermazione è valida anche per un insieme di operatori commutanti⁴, associati ad una famiglia di osservabili compatibili. Nel caso in cui l'insieme di operatori sia completo, la base ortonormale è unica, per definizione[16]. Una base ortonormale, associata ad un insieme completo di operatori autoaggiunti, costituisce una *rappresentazione*. Solitamente si prendono in considerazione le rappresentazioni del momento e della posizione.

$$(\hat{Q}\phi)(\vec{x}) = \vec{x}\phi(x); \quad (\hat{P}\phi)(\vec{x}) = i\hbar\nabla\phi(\vec{x}) \quad (1.7)$$

$$(\hat{Q}\phi)(\vec{p}) = i\hbar\nabla\phi(\vec{p}); \quad (\hat{P}\phi)(\vec{p}) = \vec{p}\phi(\vec{p}) \quad (1.8)$$

²Operatore tale che $\hat{O}^* = \hat{O}$.

³Nella notazione di Dirac, una base ortonormale è espressa da bra o ket tali che $\langle k|d\rangle = \delta_{k,d}$

⁴ \hat{A}_i tali che $[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = 0$

Si può verificare che gli osservabili momento e posizione producono autovettori associati a funzioni solo localmente quadrato sommabili [7]. D'altra parte, si possono costruire basi di autovettori tali che le funzioni d'onda siano definite sullo spazio delle fasi e tali da saturare le incertezze: gli stati coerenti. Segue una trattazione più esaustiva di questi particolari stati.

1.2 Stati coerenti

Gli stati coerenti hanno delle proprietà particolari che li rendono molto utili al fine di associare il comportamento quantistico a quello classico, oltre che nella descrizione di molti fenomeni fisici come la teoria quantistica della luce [7]. Si definisca la base di Fock, ovvero definito un operatore numero \hat{N} , l'insieme dei vettori tali che

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.9)$$

Si prendano in considerazione gli operatori annichilazione e creazione, rispettivamente \hat{a} e \hat{a}^+ per cui

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = I \quad (1.10)$$

Essi vengono associati all'operatore numero attraverso

$$\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad (1.11)$$

Si può dimostrare che \hat{N} ha uno spettro reale di numeri interi non negativi [16] e che gli operatori annichilazione risultano agire sugli autostati di Fock nel modo seguente

$$a|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle \quad (1.12)$$

$$a^+|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle \quad (1.13)$$

Ciò implica che è possibile esprimere lo stato di un sistema rispetto allo stato di autovalore minimo, quindi $|n\rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}}(a^+)^n|0\rangle$. Si presenta di seguito l'esempio di un oscillatore armonico unidimensionale a titolo esplicativo. Sia H l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico di massa m e frequenza ω :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q \quad (1.14)$$

Definendo un operatore e il suo aggiunto nel modo seguente

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \left(\frac{2\pi}{2m\hbar\omega}\right)^{1/2}(\hat{p} - im\omega\hat{q}) \\ \hat{a}^+ &= \left(\frac{2\pi}{2m\hbar\omega}\right)^{1/2}(\hat{p} + im\omega\hat{q}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si trova che $[a, a^+] = I$, come richiesto per gli operatori annichilazione e creazione, posso quindi definire attraverso il loro prodotto l'operatore numero e gli autostati associati. Sia dunque $\hat{N} = a^+ a = \frac{2\pi}{h\omega} (\frac{\hat{p}^2}{2m} + 1/2 m\omega^2 \hat{q}) - 1/2$ allora l'hamiltoniana associata all'oscillatore armonico quantistico unidimensionale risulta essere

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2 = \hbar(\hat{N} + \frac{1}{2}) \quad (1.16)$$

Quindi applicando l'operatore hamiltoniano agli autostati dell'operatore numero (o dell'energia) vengono ottenuti degli autovalori del tipo

$$w_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad (1.17)$$

Suddetto risultato è soddisfacente poiché coerente con la meccanica quantistica, la quale sostiene che nell'oscillatore armonico ogni quanto di energia contribuisce con un valore pari a $\frac{h\omega}{2\pi}$. Viene chiarificato anche il nome dell'operatore a e del suo aggiunto in quanto il primo elimina un quanto di energia ed il secondo lo aggiunge. Inoltre si possono esprimere gli operatori \hat{p} e \hat{q} attraverso gli operatori annichilazione e creazione, $\hat{p} = (\frac{m\hbar\omega}{2\pi})^{1/2}(a + a^+)$ e $\hat{q} = -i(\frac{m\hbar\omega}{2\pi})^{1/2}(a - a^+)$ le quali espressioni soddisfano la relazione di commutazione canonica [7]

$$[\hat{p}, \hat{q}] = \frac{i\hbar}{2\pi} I \quad (1.18)$$

Infine l'equazione del moto in questa picture, detta di Heisenberg, è data da

$$\frac{d}{dt} a = \frac{2\pi i}{h} [\hat{H}, \hat{a}] = -i\omega \hat{a} \quad (1.19)$$

Il che implica

$$a(t) = e^{-i\omega t} a_0 \quad (1.20)$$

Poiché la forma di queste equazioni è completamente analoga al caso classico con coordinate complesse, si può dire che gli autostati dell'operatore \hat{a} sono tali per cui gli osservabili seguono le stesse leggi dinamiche della meccanica classica. Codesti stati sono detti coerenti, di cui viene riportata di seguito l'equazione esplicita

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.21)$$

Risulta interessante compiere un calcolo dell'incertezza degli osservabili posizione e movimento per gli stati coerenti; definita

$$\Delta\hat{O} = (\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2)^{1/2} \quad (1.22)$$

Si nota che la relazione di indeterminazione di Heisenberg: $\Delta Q \Delta P \geq \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ viene saturata in quanto

$$\Delta \hat{Q} = \Delta \hat{P} = \left[\frac{1}{2} \hbar \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.23)$$

Da cui segue

$$\Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} = \frac{1}{2} \hbar \quad (1.24)$$

La rappresentazione derivante dalla base ortonormale formata dagli stati coerenti è detta *rappresentazione di Fock* e sarà presentata brevemente di seguito. Gli autovettori dell'operatore annichilazione, gli stati coerenti, non sono ortogonali ma formano un insieme completo[16], cosicché può essere definita una scomposizione dell'identità attraverso di essi⁵.

$$I = \int \frac{dRe\alpha dIm\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (1.25)$$

A loro volta gli stati coerenti sono esprimibili attraverso la base ortonormale dell'operatore numero in quanto definiti propriamente come sovrapposizione di questi. Sia $|\alpha\rangle = \sum_0^\infty a_n |n\rangle$ allora

$$|\alpha\rangle = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle = \sum \frac{\alpha^n}{n!} (a^+)^n |0\rangle = e^{\alpha a^+} |0\rangle \quad (1.26)$$

Attraverso la precedente equazione si può associare lo stato ad una funzione analitica su tutto il piano complesso. Sia $f = c_n(\phi) \frac{a^+(n)}{(n!)^{1/2}}$, per opportuni valori di c_n , essa è sovrapposizione di una base ortonormale $u_n = \frac{a^+(n)}{(n!)^{1/2}}$ tale che esiste[6]

$$f_n \longleftrightarrow |\phi_n\rangle \quad (1.27)$$

Inoltre dall'ultima uguaglianza della (1.26) si può definire, previa conoscenza della relazione $|0\rangle = e^{\alpha^* a} |0\rangle$, come

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a} |0\rangle \equiv D(\alpha) |0\rangle \quad (1.28)$$

Nell'ultima uguaglianza si è definito l'operatore spostamento $D(\alpha)$. La rappresentazione attraverso la base degli stati coerenti, come accennato all'inizio della sezione, ha pertanto delle proprietà fisiche interessanti per la similitudine del caso classico con il quantistico poiché gli stati coerenti seguono un'evoluzione dinamica nella medesima forma del caso classico; saturano l'incertezza di Heisenberg, dunque sono gli stati che si avvicinano maggiormente

⁵Si considerano vettori non normalizzati.

alla controparte classica. Considerando le equazioni di scomposizione dell'identità (1.25) e l'associazione degli stati a funzioni analitiche (1.27) si può scrivere un vettore appartenente allo spazio di Hilbert nella forma

$$|\phi\rangle = \left(\int \frac{dR d\alpha dIm\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} |\alpha\rangle \langle \alpha| \right) |\phi\rangle = \int \frac{dR d\alpha dIm\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} |\alpha\rangle \phi(\alpha^*) \quad (1.29)$$

Dove $\phi(\alpha^*) = \langle \alpha | \phi \rangle$ è la funzione d'onda associata al vettore ϕ espresso nella base degli stati coerenti. Essa è quindi esprimibile, per mezzo dell'eq.(1.26), nel modo seguente:

$$\phi(\alpha^*) = \langle \alpha | \phi \rangle = \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.30)$$

Si può notare che lo spazio di definizione è H_{BF} , spazio Hilbert delle funzioni antiolomorfe ⁶ che soddisfano

$$|\phi|_{BF}^2 = \int \frac{dR d\alpha dIm\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} |\phi(\alpha^*)|^2 < \infty \quad (1.31)$$

Ugualmente, partendo dall'eq.(1.30), in tale spazio di definizione H_{BF} è possibile esprimere gli operatori in forma integrale[6]. In conclusione, l'utilizzo degli stati coerenti apre la strada alla definizione della meccanica quantistica nello spazio delle fasi attraverso la definizione di una rappresentazione in cui le funzioni d'onda e gli operatori sono definiti su tutto lo spazio complesso, oltre che presentare delle proprietà ottimali alla corrispondenza tra stato classico e quantistico.

1.3 Associazione di Weyl

Nella trattazione degli stati coerenti, la cui utilità è stata esplicitata nella sezione precedente, è naturale considerare le funzioni e gli operatori definiti direttamente sullo spazio delle fasi, per mezzo della rappresentazione di Bargmann-Fock. L'associazione di Weyl agisce come mappatura continua tra lo spazio degli operatori e lo spazio delle fasi, al fine di rendere gli operatori limitati[7]. Si prenda in considerazione lo spazio vettoriale $V = R^{2n}$, con un dato n . Su di esso supponiamo essere definita una forma simplettica ω , la cui varietà associata viene identificata con lo spazio delle fasi. Si può mappare lo spazio degli operatori unitari agenti sullo spazio di Hilbert $U(H)$ con lo spazio vettoriale V :

$$W : U(H) \mapsto V \quad (1.32)$$

⁶funzione olomorfa: funzione derivabile in senso reale e la cui derivata rispetto alla variabile z è nulla nel dominio, ovvero sia $f(z)$ olomorfa allora $g(z) \equiv f(z^*)$ è antiolomorfa.

Si riscriva relazioni di commutazione canonica, eq.(1.23):

$$\hat{Q}\hat{P} - \hat{P}\hat{Q} = i\hbar I \quad (1.33)$$

Si nota come provato da Wintner nel 1947, che gli operatori \hat{P} e \hat{Q} , detti quadrate, non possono essere entrambi limitati proprio perché soddisfano l'eq.(1.23). A risoluzione del problema di dover trattare con operatori non limitati, Weyl propone una forma esponenziata delle relazioni di commutazione [7]. Dopodiché compiendo l'associazione di Weyl in uno spazio bidimensionale, si mappa una coppia di coordinate $(x, a) \in R^2$, ad una coppia di operatori unitari \hat{P}, \hat{Q} definiti su uno spazio di Hilbert: $e^{-i(aq-xp)} \rightarrow e^{-i(a\hat{Q}-x\hat{P})}$. Si definisca W l'operatore di Weyl

$$W(x, a) = e^{-i(a\hat{Q}-x\hat{P})}$$

Esso soddisfa le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} W(0, 0) &= I \\ W(x_1, a_1)W(x_2, a_2) &= W(x_1 + x_2, a_1 + a_2)e^{i\frac{(a_1x_1 - a_2x_2)}{2}} \\ W^{-1}(x, a) &= W^+(x, a) = W(-x, -a) \end{aligned} \quad (1.34)$$

L'operatore di Weyl identifica una rappresentazione unitaria proiettiva, ovvero una rappresentazione mappante un gruppo G con un insieme di operatori unitari $U(H)$, con H spazio di Hilbert. Inoltre l'operatore di Weyl è tale da mantenere la validità delle relazioni di commutazione canonica. Sia $\alpha \in C$; si imponga l'uguaglianza $\alpha = x + ia$, considerando così lo spazio R^2 come lo spazio complesso C . E' immediato notare che l'operatore di Weyl coincide con $D(\alpha)$, operatore spostamento introdotto nella trattazione degli stati coerenti, eq.(1.28).

Considerando ora la trasformata di Fourier simplettica,

$$F(f)(x, a) = (2\pi)^{-n} \int_{R^{2n}} dpdq f(q, p) e^{i(aq-xp)} \quad (1.35)$$

di una funzione f definita sullo spazio delle fasi, si può notare che la trasformata inversa può essere espressa in termini dell'operatore di Weyl:

$$\hat{f} = (2\pi)^{-n} \int_{R^{2n}} dxda F^{-1}(f)(x, a) W(x, a) \quad (1.36)$$

L'associazione tra funzioni nello spazio delle fasi e operatori è una mappa biettiva, questo rende possibile definire una struttura del prodotto delle funzioni nello spazio delle fasi, che sono sempre immagini degli operatori attraverso la relazione $f \rightarrow \hat{f}$. ⁷ E' possibile perciò definire un prodotto tra funzioni *, tenendo in conto

⁷biattività vera sotto alcune imposizioni, es: f fortemente decrescente ed operatore della classe traccia.

il prodotto operatoriale e l'associazione tra f e operatore: $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. L'univocità della definizione di tale prodotto non è immediata, in quanto si compie attraverso l'ordinazione del prodotto operatoriale. La necessità di ordinare il prodotto operatoriale nasce proprio dalla non commutività degli operatori, che rende il prodotto tra funzione esprimibile in modi diversi. Ad esempio la funzione $|a|^2$, può essere espressa operatorialmente attraverso tre ordinazioni diverse, le quali esprimono le ordinazioni più utili. L'ordinazione normale prevede che la funzione sia associata al prodotto a^+a ; il prodotto ordinato inversamente invece è aa^+ ; infine l'ordinazione simmetrica è data da $\frac{1}{2}(a^+a + aa^+)$ [1]. Solitamente, la molteplicità di associazione viene risolta attraverso la *procedura di simmetrizzazione* proposta da Weyl[3] che afferma come via maestra l'ordinazione simmetrica. In generale, prese due funzioni f e g , non è sempre vero che gli operatori associati $\Omega(f)$ e $\Omega(g)$ soddisfino la *procedura di simmetrizzazione di Weyl*[14]. Ovvero

$$\exists \quad \Omega(f), \Omega(g) \quad / \quad \Omega(fg) \neq \frac{1}{2}(\Omega(f)\Omega(g) + \Omega(g)\Omega(f)) \quad (1.37)$$

Imponendo la definizione della biettività della relazione tra funzioni ed operatori, è possibile pensare la definizione della meccanica quantistica sullo spazio delle fasi, assimilandola alla meccanica classica. Ciò avviene a meno della differente definizione del prodotto tra osservabili $*$, il quale risulta essere non necessariamente commutativo nel caso quantistico.

Capitolo 2

Studio tomografico convenzionale

I presupposti alla base dell'analisi tomografica dei fenomeni quantistici furono presentati in primis da Fano nel 1957 [8]. Egli colse alcune esigenze fondanti per un approccio nuovo allo studio quantistico, come ad esempio la necessità di effettuare molteplici misure su sistemi preparati identicamente al fine di ricostruire lo stato di un sistema quantistico. La proposta che, però, diede propriamente inizio alla tomografia quantistica fu quella di Vogel e Risken [13,7]. Questa consisteva nell'utilizzare per la ricostruzione di uno stato quantistico gli stessi algoritmi utilizzati nell'*imaging* medico, estesi al dominio quantistico. In primo luogo si presenterà il ragionamento e gli algoritmi alla base della ricostruzione della distribuzione di massa di un oggetto e quindi della tomografia classica, ovvero l'antitrasformata di Radon. Dopodiché si farà un excursus sulla definizione della funzione di Wigner usuale e la sua generalizzazione. Tale funzione è di fondamentale importanza in quanto rappresenta la quasi-distribuzione di probabilità e identifica il corrispettivo quantistico della distribuzione di massa. Successivamente si presenterà la modalità di rilevamento sperimentale. L'ampliamento al dominio quantistico, al netto della necessità di strumenti matematici adeguati, avviene con le stesse modalità della tomografia classica. Per questo motivo e per la possibilità di definire osservabili sia classici che quantistici nello stesso spazio, si può dire che il vero raggiungimento della tomografia è nella comparazione efficace di stati classici e quantistici.

2.1 Tomografia classica

La tomografia classica, utilizzata in particolare in campo medico come nella "tomografia assiale computerizzata", agisce secondo principi profondamente legati alla tomografia quantistica. Difatti, entrambi gli studi tomografici si pongono la finalità di ricostruire una grandezza non misurabile direttamente: nel caso classico la distribuzione di massa interna ad un oggetto, nel caso quantistico la funzione di Wigner che viene associata ad una quasi distribuzione di probabilità. Poiché sono impediti misure dirette, la ricostruzione tomografica classica utilizza dei rilevamenti senza prendere visione dell'oggetto interessato. Ad esempio attraverso fasci di luce che attraversano l'oggetto d'interesse, è possibile rilevare un indice di attenuazione dell'intensità luminosa. In questo modo si può ottenere un valore lungo direzioni stabilite identificate da un angolo e della distribuzione di massa. Di seguito viene presentato il procedimento algoritmico finalizzato alla ricostruzione dell'immagine di un oggetto non visibile a priori. L'analogia con il caso quantistico prosegue anche in termini di procedimento algoritmico, la traslazione nel dominio quantistico e la modalità di rilevamento empirico saranno tema di sezioni successive. Nella tomografia medica, al fine di ricostruire la distribuzione della massa nello spazio, si utilizza la trasformata di Radon. Tale trasformata è definita come l'applicazione R che associa ad una funzione f , definita su uno spazio m -dimensionale, il suo integrale su una foliazione $(m-1)$ -dimensionale. Pertanto nel caso di uno spazio bidimensionale quest'ultima risulta essere

$$R(z, \theta)[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(z - x \cos(\theta) - y \sin(\theta)) dx dy \quad (2.1)$$

con θ inclinazione angolare della retta d'integrazione $z - x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$, contraddistinta attraverso la δ di Dirac, che ricordiamo essere definita nello spazio complesso come

$$\delta^{(2)}(a) = \int_C \frac{d^2 k}{\pi^2} e^{(ka^* - k^*a)} \quad (2.2)$$

In altri termini la trasformata di Radon associa ad una funzione il suo integrale lungo una direzione unidimensionale dello spazio, identificata dall'angolo θ . Pertanto, l'applicazione di tale trasformata alla distribuzione di massa sullo spazio delle fasi verifica come risultato l'insieme delle sue distribuzioni marginali nel piano complesso lungo direzioni stabilite. L'interesse nella definizione di tale strumento matematico è che le singole distribuzioni marginali sono misurabili seppur indirettamente, come accennato sopra, indi per cui permettono la conoscenza della trasformata di Radon. Sia quindi la distribuzione di massa nella statistica classica una funzione $\rho(q, p)$ non negativa,

tale per cui

$$\int_C \rho(q, p) dq dp = 1 \quad (2.3)$$

La sua trasformata di Radon è l'insieme dei marginali:

$$r_\rho^\phi(X) = \int_C \rho(q, p) \delta(X - q \cos(\phi) - p \sin(\phi)) dq dp \quad (2.4)$$

Le diverse direzioni sono indicate da ϕ differenti ed X è la posizione della particella nello spazio delle configurazioni ruotato di tale angolo (ed eventualmente riscaldato da un parametro). La trasformata di Radon $R_\rho(X, \phi)$ rappresenta il tomogramma classico ed è solitamente espresso nella notazione comune da $W_\rho(X, \phi)$. Il tomogramma è rilevante poiché si associa ad una distribuzione di probabilità se ne associa una nello spazio reale, difatti, si constata che $W(X, \phi)$ è non negativa e $\int_R W(X, \phi) dX = 1$ [7]. Al fine di ricavare la distribuzione di massa dai marginali, trovati empiricamente, si necessita dell'inverso del tomogramma. L'antitrasformata di Radon può essere ricavata partendo dall'identità:

$$\rho(a, a^*) = \int_C d^2b \delta^{(2)}(a - b) \rho(b, b^*) \equiv \rho(q, p) \quad (2.5)$$

con $a = q + ip$ ed $a^* = q - ip$. Si prenda la delta di Dirac nel piano complesso, eq.(2.2), essa può essere manipolata nel modo seguente.

$$\delta^{(2)}(a) = \int_0^\infty \frac{dk}{4} k \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\pi^2} e^{-ika_\phi} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{4} |k| \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi^2} e^{-ika_\phi} \quad (2.6)$$

con $a_\phi = \text{Re}(ae^{-i\phi}) = q \cos(\phi) + p \sin(\phi)$.¹ A questo punto, sostituendo la delta di Dirac nell'equazione (2.5), l'inverso del marginale della massa risulta essere

$$\rho(q, p) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dX R(X, \phi) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{4} |k| e^{ik(X - p \cos(\phi) - q \sin(\phi))} \quad (2.7)$$

Questa grandezza ricompono nello spazio fisico la composizione interna dell'oggetto analizzato, dopo averlo scomposto in uno spazio reale. Dunque c'è un'associazione biunivoca tra la distribuzione di massa nello spazio delle fasi e la densità di probabilità tomografica cosicché considerare le due rappresentazioni è equivalente. Procedimenti di questo tipo per il raggiungimento di conoscenza della struttura interna di un oggetto sono stati utilizzati in numerose modalità, attraverso raggi X (per la sopracitata TAC), raggi γ ; e per molteplici applicazioni, dall'originaria diagnostica medica all'astronomia, alla geofisica.

¹Si è utilizzata la formula di Eulero: $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$

2.2 Funzione di Wigner

La descrizione statistica di un fenomeno quantistico avviene solitamente attraverso l'operatore densità, in particolare riscrivendo l'equazione (1.5)

$$\langle \hat{F} \rangle = Tr[\rho \hat{F}] \quad (2.8)$$

Dove si è considerato il valore di aspettazione dell'osservabile espresso dall'operatore \hat{F} . Si vuole esprimere il valore di aspettazione degli osservabili come integrali convergenti nello spazio delle fasi, in completa similitudine con la probabilità classica. Al fine di ciò, utilizzando le proprietà degli stati coerenti, si può compiere la quantizzazione attraverso la procedura di Weyl. In [15] Wigner definisce un modo di esprimere l'operatore densità attraverso il valore di aspettazione di operatori su uno spazio complesso, quale lo spazio delle fasi. In particolare vengono presi in considerazione operatori del campo simmetricamente ordinati, ovvero previa applicazione la procedura di Weyl. Se si considera quindi l'operatore spostamento (1.33) è possibile esprimere l'operatore densità nella forma seguente [1]:

$$\rho = \int_C X(\lambda) D^{-1} \pi^{-1} d^2 \lambda \quad (2.9)$$

con la funzione peso $X(\lambda)$ equivalente al valore aspettazione dell'operatore spostamento:

$$X(\lambda) = Tr[\rho D(\lambda)] \quad (2.10)$$

E' dimostrabile che la funzione peso è quadrato sommabile [7], e nel caso sia anche limitata, è possibile applicare la trasformata di Fourier, e trovare

$$W(\alpha) = \int_C e^{(\lambda^* - \alpha^* \lambda)} X(\lambda) \pi^{-1} d^2 \lambda \quad (2.11)$$

Questa equazione a meno di una normalizzazione coincide con la funzione $W(q,p)$ introdotta da Wigner come analogo quantistico della distribuzione nello spazio delle fasi.

E' possibile generalizzare l'originaria funzione di Wigner mappando l'operatore densità a funzioni s-ordinate, considerando quindi diverse tipologie di ordinazione operatoriale, per ricoprire l'intera casistica[14], eq.(1.37). Si inserisce quindi un altro parametro s di dipendenza della funzione di Wigner, a cui vengono dati i valori seguenti:

ordinazione normale $\mapsto s = 1$

ordinazione simmetrica $\mapsto s = 0$

ordinazione inversa $\mapsto s = -1$

La definizione di un'associazione dell'operatore densità con una funzione nello spazio delle fasi consiste nel trasmettere l'informazione statistica dall'operatore densità ρ ad una funzione peso $\omega(\alpha)$, con (α) punto nello spazio delle fasi; l'osservabile definito dall'operatore \hat{F} viene espresso attraverso la funzione $f(\alpha)$. Integrazione effettuata su $d\alpha \propto dq'dp'$ determina una quasidistribuzione, difatti può avere anche valori negativi. In questa proprietà risiede la differenza fondamentale tra stati classici e stati quantistici: la possibilità di una distribuzione di probabilità negativa è pesantemente indice di non-classicità. Come accennato sopra, le funzioni possono essere associate in diverso modo ad operatori, in base al prodotto operatoriale definito. Per le tre tipologie di corrispondenza definite sopra, risultano essere associate altrettante funzioni probabilità [1]:

La funzione P

$$s = 1;$$

La funzione di Wigner

$$s = 0;$$

La funzione Q

$$s = -1.$$

Di seguito si presentano le funzioni più nel dettaglio:

(i) La funzione di Wigner usuale, espressa nella (2.11) per gli operatori ordinati simmetricamente: $s=0$. La funzione usuale di Wigner ha la proprietà di definire la distribuzione di probabilità sulle quadrature del campo in forma di sommatoria.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dIm\alpha W(\alpha e^{i\phi}, \alpha e^{i\phi}) = \langle Re\alpha | \rho | Re\alpha \rangle_{\phi} \quad (2.12)$$

con autostato $|x_{\phi}\rangle = |Re\alpha\rangle$ della quadratura di campo

$$X_{\phi} = \frac{ae^{i\phi} + ae^{-i\phi}}{2} \quad (2.13)$$

Si riporta, in particolare, la formulazione della funzione di Wigner nel vuoto, che corrisponde classicamente ad un ensemble di oscillatori armonici, fluttuanti in un intorno dell'origine con varianza uguale a $\frac{1}{2}\hbar$. Indi per cui si inseriscono nell'equazione di Wigner le funzioni d'onda delle quadrature, cosicché risulti

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} e^{-q^2 - p^2} \quad (2.14)$$

L'equazione esprime una Gaussiana e ci si aspetta che per ogni stato coerente, o stato di vuoto traslato (eq.(1.28)), essa sia della medesima forma.

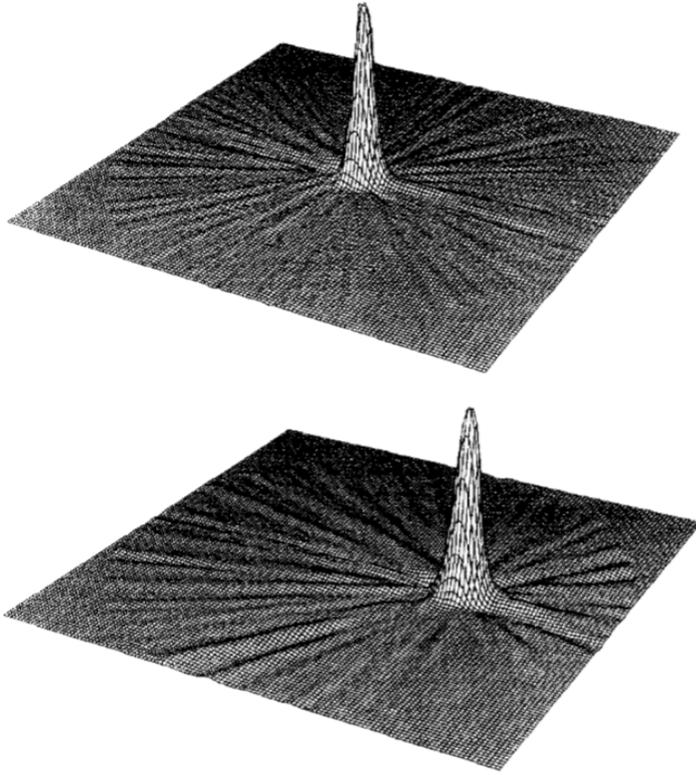


Fig.1: In alto è mostrata la funzione di Wigner nel vuoto; in basso quella di uno stato coerente, che risulta evidentemente "displaced vacuum". [Courtesy of G. Breitenbach, University of Constance]

(ii) La funzione $Q = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$ per operatori ordinati inversamente: $s = -1$. La funzione Q che è sempre positiva e infinitamente differenziabile. Si consideri uno stato di Fock $|n\rangle = n!^{-\frac{1}{2}} (a^+)^n |0\rangle$, la funzione Q associata è

$$Q = \frac{1}{2\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi n!} |\alpha|^{2n} = \frac{1}{2\pi n!} e^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)} \left(\frac{q^2+p^2}{2}\right)^n \quad (2.15)$$

L'equazione precedente può essere approssimata nel modo seguente per n grandi[9]

$$Q_n \propto \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}} r} e^{-(r-r_n)^2} \quad (2.16)$$

con $r = (q^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ e $r_n = (2n + 1)^{\frac{1}{2}}$ raggio di Sommerfeld. Si nota che la funzione Q per uno stato di Fock forma un corona circolare nello spazio delle fasi con il raggio di Sommerfeld. Questo risultato esplica l'interpretazione degli stati di Fock come particelle con n quanti di energia.

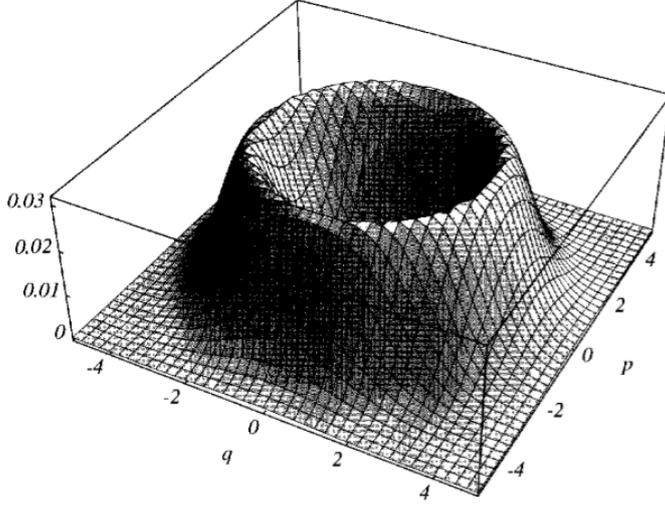


Fig.2: Funzione Q in uno stato di Fock. [Measuring the quantum state of light, U. Leonhardt]

(iii) La funzione P , molto utilizzata nell'ottica quantistica, è definita come

$$P(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(u, v) e^{(iuq+ivp)} du dv \quad (2.17)$$

considerando

$$\tilde{P}(u, v) = \text{Tr}[\hat{\rho} e^{-i(\hat{a}^+ \beta + \hat{a} \beta^*)}] \quad (2.18)$$

con a e a^+ operatori distruzione e creazione e $\beta = 2^{-\frac{1}{2}}(u + iv)$, corrispettivo di α . In altri termini, la funzione P è tale che

$$\hat{\rho} = \int_C d\alpha^2 P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (2.19)$$

Questa funzione è altamente singolare e gli stati sono coerenti solamente se puri, nel cui caso la funzione P è positiva. Nella stessa equazione precedente possono essere notate qualitativamente queste proprietà in quanto esprime l'operatore densità, e per estensione lo stato del sistema, in termini di distribuzione degli stati coerenti. Uno stato puro non è esprimibile come sovrapposizioni di stati coerenti, ovvero pseudo-classici, a meno che non sia coerente esso stesso. La giustificazione dell'equazione (2.19) risiede proprio nell'alta singolarità della funzione P .

L'obiettivo che si pone è di definire una funzione peso che valga per ognuna delle ordinazioni precedenti. Generalizzando la funzione di Wigner, per ogni valore di s , si trova

$$W_s(\alpha, \alpha^*) = \int_C \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda + \frac{s}{2}|\lambda|^2} \text{Tr}[D(\lambda)\rho] \quad (2.20)$$

Dove $d\lambda^2 = d\text{Re}d\text{Im}$. Infine è dimostrabile che la matrice densità può essere ricoperta dalla funzione di Wigner generalizzata [4]:

$$\rho = \frac{2}{1+s} \int_C d^2\alpha W_s(\alpha, \alpha^*) e^{-\frac{2}{1+s}|\alpha|^2} e^{\frac{2\alpha}{1+s}a^\dagger} \left(\frac{s-1}{s+1}\right)^{a^\dagger a} e^{\frac{2\alpha^*}{1+s}a} \quad (2.21)$$

L'importanza di questa equazione risiede nella possibilità di misurare empiricamente dati che possano ricondursi all'operatore densità e quindi indirettamente allo stato del sistema.

2.3 Rilevamenti di ottica quantistica

Si presenta ora uno dei maggiori campi di applicazione per l'utilizzo della teoria sviluppata finora: l'ottica quantistica. La frequenza e l'energia della luce sono rivelate attraverso la sua interazione con la materia, ovvero al reagire degli atomi ionizzandosi o eccitandosi. La natura della luce è l'emblema del dualismo onda particella, in particolare si sfrutteranno, nella rilevazione di ottica quantistica, le proprietà ondulatorie. Modellizzando un'onda elettromagnetica come un ensemble di oscillatori armonici, è possibile associare ogni quanto di energia all'autovalore dell'operatore numero o energia, eq.(1.17), e di seguito gli operatori creazione e distruzione fungono rispettivamente da sommatore e sottrattore di un quanto di energia, ovvero di un fotone. Ogni fotone agisce con le sue peculiarità sull'atomo su cui si infrange ma uno strumento di rilevamento non è in linea di principio in grado di prendere misure di ogni fotone, poiché una parte viene riflessa sulla sua superficie. Di conseguenza esiste una frazione di elettroni f che viene registrata ed amplificata dallo strumento di misura, la quantità l'efficienza quantistica f . La probabilità che uno strumento con efficienza f di rilevare un numero m di fotoni, ipotizzando la larghezza dello strumento minore della lunghezza d'onda della radiazione ed un tempo di rilevamento fisso T , risulta la seguente formula [3]:

$$p(m, T) = Tr[\rho : \frac{(fI(T)T)^m}{m!} e^{-fI(T)T} :] \quad (2.22)$$

Con ρ densità associata allo stato, I intensità del fascio di luce, dipendente dal tempo, $::$ simbolo dell'ordinazione normale del prodotto operatoriale. Considerando uno stato stazionario di un modo singolo ad una frequenza data, posso scrivere l'equazione precedente come

$$p_\epsilon(m) = Tr[\rho : \frac{(\epsilon a^\dagger a)^m}{m!} e^{-\epsilon a^\dagger a} :] \quad (2.23)$$

Dove ϵ è definito come l'efficienza del rivelatore. Manipolando l'equazione della probabilità, si ottiene [3]

$$p_\epsilon(m) = \sum_n p_n n \binom{n}{m} \epsilon^m (a - \epsilon)^{n-m} \quad (2.24)$$

Nel caso l'efficienza non sia uno, è evidente che la densità di probabilità dello stato non è espressa dall'equazione precedente, ma si rende necessario applicare la convoluzione di Bernoulli per ottenere il risultato[3]. La problematica data da un rivelatore con efficienza diversa dal massimo può essere risolto con la modellizzazione della situazione per mezzo di un rivelatore ideale su

cui il fascio viene diviso con trasmissività uguale all'efficienza. Si consideri un fascio di luce, esso può essere diviso, attraverso un beam splitter, nel modo assorbito e quello trasmesso, il quale viene rilevato con efficienza pari a 1. Dai principi di meccanica quantistica possiamo annettere a ciascuno dei modi del campo elettromagnetico, associato ad un oscillatore armonico unidimensionale, un operatore distruzione e l'aggiunto di creazione. Detto ciò si possono associare due operatori ai modi di ingresso (\hat{a}, \hat{b}) , pensati alla medesima frequenza, ed ugualmente a quelli di uscita (\hat{c}, \hat{d}) . Essi sono legati per mezzo della trasmissività τ secondo la relazione

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^{\frac{1}{2}} & -(1-\tau)^{\frac{1}{2}} \\ (1-\tau)^{\frac{1}{2}} & \tau^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Il principio alla base di questo apparato sperimentale è l'interferenza tra due fasci a causa dell'entanglement, che permette perciò una rilevazione efficiente, sia per le informazioni sulla quantità di moto delle particelle analizzate che per lo stato, il quale riceve imposizioni molto utili per questa condizione. Un caso molto interessante di rilevamento di ottica quantistica è dato dal *balanced homodyne*, in quanto permette di misurare le quadrature di campo definite nell'eq.(2.13). Esso consiste in un apparato sperimentale in cui un segnale di modo a , sotto studio, origina interferenza con un modo b , di stato coerente $|z\rangle$. Il *balanced homodyne* è costituito quindi da un fascio di modo a e da uno b in uno beam splitter 50/50, ovvero di trasmissività $\tau = \frac{1}{2}$. Il modo b , dotato di una spiccata intensità è definito oscillatore locale (LO). I modi in uscita incidono su due rilevatori identici, solitamente diodi polarizzati inversamente.

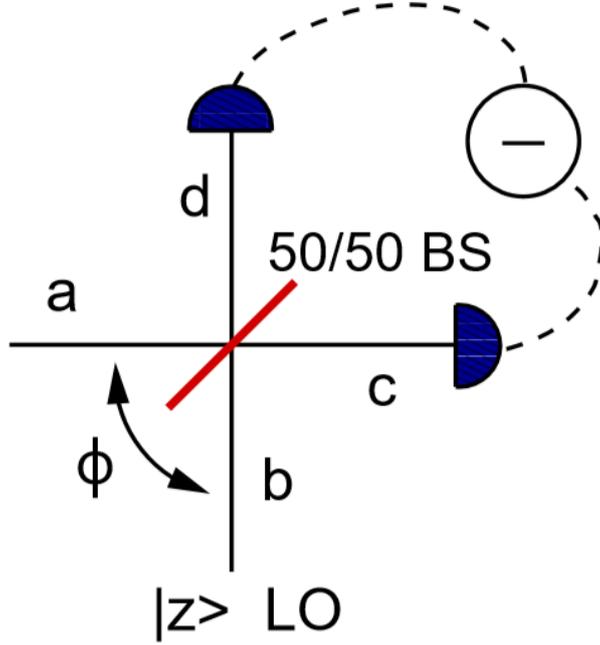


Fig.3:Schema del balanced homodyne,i modi a e b incidono su beam splitter 50/50, offrendo i modi uscenti c e d. Immagine presa da "Quantum tomography"[D'ariano,Paris,Sacco]

La trasmissività pari a $\frac{1}{2}$ implica la mancanza di fasci d'uscita di modi misti, il fascio viene diviso equamente nei due modi. Si considerino due fotoni che incidono sul beam splitter, essi sono descritti negli stati di Fock dall'equazione

$$|1, 1 \rangle = a^+ b^+ |0, 0 \rangle \quad (2.26)$$

Ricordando che i modi uscenti provengono dalle equazioni (2.53) e l'equazione dell'operatore creazione, equazione precedente (3.26), risulta che lo stato uscente è dato da

$$|s_{out} \rangle = (t^{\frac{1}{2}} c^+ + (1-t)^{\frac{1}{2}} d^+) (t^{\frac{1}{2}} d^+ - (1-t)^{\frac{1}{2}} c^+) |0, 0 \rangle$$

Per cui

$$|s_{out} \rangle = -[t(1-t)]^{\frac{1}{2}} |2, 0 \rangle + (2t-1) |1, 1 \rangle + [t(1-t)]^{\frac{1}{2}} |0, 2 \rangle \quad (2.27)$$

Il secondo termine si annulla dunque per $t = \frac{1}{2}$. Si nota che questo apparato, nella reiterazione del processo descritto sopra, risulta molto utile nella preparazione di uno stato coerente $|n \rangle$, quindi anche dello stato $|z \rangle$ dell'oscillatore locale. Ciò che ci interessa è la differenza tra le due fotocorrenti generate. Difatti, i fasci di luce sono generati dallo stesso apparato per cui si può assumere che i due modi una relazione di fase fissata, dunque la fase

del LO può essere considerata come la differenza dei due modi uscenti; da tale considerazione si può utilizzare la differenza dell'intensità dei due fasci per ottenere misure delle quadrature. Si prenda dunque la differenza delle foto-correnti normalizzata per $2|z|$:

$$I = \frac{d^+d - c^+c}{2|z|} = \frac{a^+b + b^+a}{2|z|} \quad (2.28)$$

Questa equazione può essere utilizzata per ricavare la distribuzione di probabilità dell'intensità. Si veda la funzione generatrice di momenti dell'intensità²

$$X(\lambda) = Tr[\rho \otimes |z\rangle\langle z| e^{i\lambda I}] \quad (2.29)$$

Dalla quale equazione possiamo ricavare la distribuzione di probabilità attraverso la trasformata di Fourier

$$P(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda I} X(\lambda) \quad (2.30)$$

Nel limite di forte LO, $z \rightarrow \infty$ l'eq.(2.29) di $X(\lambda)$ diventa ,dopo alcuni passaggi matematici, nell'assunzione di un prodotto diretto operatoriale

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(\lambda) = \langle e^{i\lambda X_\phi} \rangle \quad (2.31)$$

la quale risulta uguale alla distribuzione di probabilità delle quadrature. La POVM³ delle quadrature risulta

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda(X_\phi - x)} = |x\rangle_{\phi\phi}\langle x| \quad (2.32)$$

ovvero la proiezione sugli autostati delle quadrature con autovalori x . Attraverso le differenti $\phi = argz$ si possono ricavare probabilità precedenti per ogni inclinazione possibile, così da riempire gli istogrammi finalizzati alla ricostruzione della funzione di Wigner, eq.(2.11).

²La funzione generatrice di momenti è la funzione di una variabile casuale X , dipendente da un parametro t , definita come valore di aspettazione di e^{tX}

³Positive operator-valued measure: una funzione mappante lo spazio delle misure, rappresentate da una variabile casuale, con un insieme di operatori positivi autoaggiunti nello spazio di Hilbert

2.4 Tomografia Quantistica

Al fine di traslare il procedimento di imaging classico al dominio quantistico, l'obiettivo di conoscenza passa dalla distribuzione di una massa alla ricostruzione di uno stato quantistico. Occorre perciò utilizzare uno strumento matematico di quantizzazione del campo, che associ gli operatori nello spazio delle fasi a funzioni appartenenti ad L^2 , che viene trovata nell'associazione di Weyl. Dopodiché è necessario individuare una grandezza significativa da poter confrontare con risultati empirici (al pari della distribuzione di massa nel caso classico), a cui viene applicata la trasformata di Radon per ottenerne il corrispettivo in uno spazio reale. La funzione di Wigner offre informazioni sulla probabilità delle quadrature di campo per mezzo della rilevazione omodinica: le distribuzioni marginali della funzione di Wigner sono eguali al valore di aspettazione degli operatori quadratura, eq.(2.32). Con questi presupposti, Vogel e Riskel proposero un procedimento analogo a quello della tomografia classica per ricavare la funzione di Wigner, attraverso l'antitrasformata di Radon[13,7]. Si prenda quindi la trasformata di Radon di $f(q, p)$ valore di aspettazione delle quadrature.

$$R(X, \phi) = \int_C (q, p) dq dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(X - q\cos(\phi) - p\sin(\phi))} \frac{dk}{2\pi} \quad (2.33)$$

La formula precedente è completamente analoga a quella utilizzata nel procedimento di tomografia classica, anche se tale associazione non fu identificata nello scritto di Vogel e Riskel [13]. Si pensi il tomogramma, eq.(2.1), come una media sullo spazio delle fasi [7]

$$R(X, \phi) = \left\langle \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(X - q\cos\phi - p\sin\phi)} \right\rangle_f \quad (2.34)$$

Tale espressione suggerisce la definizione del tomogramma quantistico come la versione operatoriale del valore medio espresso nel secondo termine⁴, ovvero:

$$R(X, \phi) = \left\langle \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(\hat{X} - \hat{q}\cos(\phi) - \hat{p}\sin(\phi))} \right\rangle_\rho = Tr[\hat{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\hat{X} - \hat{q}\cos(\phi) - \hat{p}\sin(\phi))}] \quad (2.35)$$

In cui si è utilizzata la relazione di identità tra la media e la traccia operatoriale, la quale ci mostra come R può essere visto come tomogramma quantistico, ossia densità di probabilità marginale della variabile random X , corrispondente ad un autovalore all'operatore hermitiano $\hat{X}_\phi = \hat{q}\cos(\phi) + \hat{p}\sin(\phi)$. Pertanto i tomogrammi corrispondenti a $\hat{X} = \hat{q}$ e $\hat{X} = \hat{p}$ sono le distribuzioni

⁴E' implicata la relazione biunivoca tra spazio delle funzioni e operatoriale

di probabilità marginale rispettivamente dell'operatore posizione e di quello momento; inoltre, come nel caso classico, la trasformata di Radon può essere invertita ed offrire l'espressione densità dello stato:

$$\hat{\rho}(q, p) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dX R(X, \phi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{4} |k| e^{ik(\hat{X} - \hat{q}\cos(\phi) - \hat{p}\sin(\phi))} \quad (2.36)$$

Questo metodo di ricostruzione di stato, sebbene valida, non è molto affidabile. Innanzitutto, il primo integrale dell'equazione (2.33) è non limitato per cui soggetto ad errore intrinseco. Nondimeno il procedimento per ricavare la funzione analitica della distribuzione marginale delle quadrature $f(X, \phi)$ è soggetto ad errore poiché, successivamente alla misurazione sperimentale derivante dall'omodino, è necessario costruire istogrammi e manipolarli. Tale processo non è ovviamente privo di deviazione di errore, inoltre il numero minimo di istogrammi per non sviluppare errori sistematici dipende dallo stato sconosciuto da ricostruire[3].

Conclusioni

Il capitolo precedente si è concluso affermando la limitatezza e l'errore ineliminabile della procedura classica di tomografia quantistica. Non si vuole in questo modo negare l'effettiva utilità di tale metodo ma si evince la problematicità di un risultato soddisfacente e consistente. Per questo motivo si è teorizzata una tecnica differente, in alternativa alla trasformata di Radon inversa, a cui ci si riferisce con il nome di *quantum homodyne tomography*. Suddetta tecnica abolisce il passaggio intermedio alla funzione di Wigner e ricostruisce la matrice densità direttamente dal rilevamento sperimentale, al fine di eliminare gli errori sistematici, dovuti alla costruzione di istogrammi sufficienti all'ottenimento della funzione di Wigner analitica. Di conseguenza si utilizzano nel metodo generale strumenti probabilistici, come ad esempio il teorema del limite centrale e la massima probabilità. Si evince una strada alternativa al metodo presentato precedentemente, la quale procede all'ottenimento della densità di probabilità ρ mediando un funzionale dei dati ottenuti dal rilevamento sperimentale. In particolare si risale al valore di aspettazione di un osservabile $\langle O \rangle = Tr[O\rho]$, con ρ matrice densità del sistema sotto analisi, attraverso l'integrazione di *estimators* o funzione di Kernel, funzionale degli autovalori degli operatori che formano il *quorum*. Il *quorum* è un insieme completo di operatori Q_λ , con $\lambda \in \Lambda$ autovalori, individuabile con una stima ammessa con le sole imposizioni di ortogonalità e completezza degli operatori nell'algebra lineare. Il metodo è pensato nel limite delle rilevazioni che tendono all'infinito, nel cui caso lo stato è completamente ricoperto; altrimenti, è possibile valutare con quale errore viene

effettuata la ricostruzione. La tecnica risulta talmente efficace che si è tralato il campo d'azione dalla rilevazione di ottica quantistica, ad esempio per fasci atomici, ensemble di atomi di elio o stati vibrazionali delle molecole. In conclusione, per tornare all'approccio epistemologico, la teoria viene soppiantata da una metodologia prettamente pragmatica finalizzata al risultato numerico. Si può difatti interpretare il tentativo di guardare all'ottica quantistica in similitudine con il caso classico, come la ricerca di un caso generale a meno di incertezze ineliminabili. La costruzione teorica sottesa alla meccanica quantistica nello spazio delle fasi non è altro che il caso particolare che si riconduce alla logica umana, al fine di una comprensione più profonda dei fenomeni. I limiti nell'applicabilità della metodologia tomografica standard riportano la scienza alla modellizzazione della realtà, e non alla conoscenza del reale stesso, *cosa in sé* inconoscibile.

Concludendo con una citazione di Weyl: "L'inizio di ogni riflessione filosofica sta nella comprensione del fatto che il mondo quale ci è offerto dalla percezione non è che un immagine (del reale).[...] Tuttavia, da un punto di vista puramente epistemologico non si può sollevare alcuna obiezione contro il fenomenismo, cioè contro la concezione che vorrebbe limitare la scienza a ciò che è dato alla scienza con immediatezza".

Bibliografia

- [1] K.E.Cahill, R.J.Glauber, "Density Operators and Quasiprobability Distribution" (1968).
- [2] G. Cassinelli, G. M. D'Ariano, E. De Vito, and A. Levrero, *J. Math. Phys.* 41, 7940 (2000).
- [3] G.M.D'ariano,M.G.A.Paris,M.F.Sacchi "Quantum tomography"(2008)
- [4] G. M. D'Ariano, P. Kumar, and M. F. Sacchi, *Phys. Rev. A* 61, 013806 (2000)
- [5] G. M. D'Ariano, in *Quantum Communication, Computing, and Measurement*, edited by Kumar P., D'Ariano G. M. Hirota O. (Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York and London, 2000), p. 137.
- [6] E.Ercolessi, V.Moretti,"From Classical Mechanics to Quantum Field Theory"[World Scientific](2020).
- [7] Esposito, Marmo, Miele, Sadarshan,"Advanced concept in quantum mechanics"[Cambridge University Press](2014).
- [8] U. Fano, *Rev. Mod. Phys.* 29, 74 (1957).
- [9] U.Leonhardt, "Measuring the quantum state of light"[Cambridge studies in modern optics](1997)
- [10] M. Munroe, D. Boggavarapu, M. E. Anderson, M. G. Raymer, *Phys. Rev. A* 52, R924 (1995)
- [11] S. Schiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira, T. Muller, J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* 77, 2933 (1996); G. Breitenbach, S. Schiller, and J. Mlynek, *Nature* 387, 471 (1997)
- [12] M. G. Raymer, M. Beck, and D. F. McAlister, *Phys.Rev.*8 (1993)
- [13] K. Vogel and H. Risken, *Phys. Rev. A.* 40, 2847 (1989)
- [14] H. Weyl, "The Theory of Groups and Quantum Mechanic" (Dover, New York, 1950).

[15] E. P. Wigner, Phys. Rev. 40, 749 (1932).

[16] R.Zucchini "Quantum Mechanics",note dal corso di meccanica quantistica.