

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

**Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile
Indirizzo Strutture**

***DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE,
AMBIENTALE E DEI MATERIALI***

TESI DI LAUREA

in
Progetto in zona sismica LS

**SVILUPPI ANALITICI PER LA VALUTAZIONE
DELL'AZIONE INDOTTA DAI CEREALI SU SILOS A
FONDO PIANO A SEGUITO DI INPUT SISMICO**

Tesi di laurea di:

FRANCESCO FABBRI

Relatore:

Chiar.mo Prof. Ing.
TOMASO TROMBETTI

Correlatore:

Dott. Ing. STEFANO SILVESTRI

Anno Accademico 2009/10

Sessione III

Desidero ringraziare tutte le persone che mi sono state vicine durante il lavoro di questa tesi e durante tutta la mia carriera universitaria.

In primo luogo ringrazio il Professor Tomaso Trombetti che mi ha proposto questo studio e mi ha guidato nella sua realizzazione, dandomi la possibilità di conoscere ed addentrarmi negli ambiti della ricerca.

Un grazie anche all'Ingegnere Stefano Silvestri che con costanza e pazienza mi ha supportato, accompagnato ed aiutato lungo tutto lo sviluppo del lavoro.

Ritengo giusto ringraziare, al termine di questo percorso formativo, anche i Professori, gli assistenti ed i relatori incontrati che hanno contribuito alla mia crescita personale. Vorrei aggiungere due persone che, per motivi anagrafici, non ho potuto incontrare personalmente (eccetto la seconda in una fortunata occasione) ma che ho conosciuto tramite i loro colleghi, allievi, amici e la loro magistrale opera: il Professor Piero Pozzati ed il Professor Claudio Ceccoli.

Ringrazio la mia famiglia che ha permesso, col suo appoggio e sostegno, il raggiungimento di questo traguardo.

Mi è caro inoltre ringraziare gli amici, i compagni ed i colleghi che hanno condiviso con me questo periodo supportandomi, talvolta sopportandomi, e che mi hanno sostenuto materialmente, moralmente e spiritualmente.

INDICE

1	INTRODUZIONE	1
1.1	Background	1
1.2	Obiettivo della tesi	2
1.3	Organizzazione del testo	3
2	STATO DELL'ARTE	4
2.1	Riferimenti bibliografici	4
2.2	Quadro normativo	4
2.3	Formulazione Eurocodice	5
2.3.1	Condizioni statiche	5
2.3.1.1	silos snelli	6
2.3.1.2	silos mediamente snelli e tozzi	7
2.3.2	Condizioni sismiche	9
2.3.2.1	silos circolari	9
2.3.2.2	silos rettangolari	11
3	TEORIA PRESENTATA	13
3.1	Generalità	13
3.2	Ipotesi	18
4	SVILUPPO PER SILOS CILINDRICI	27
4.1	Caso limite A	27
4.1.1	Le azioni agenti sul disco D	29
4.1.2	Equilibri alla traslazione radiale di D	31
4.1.3	Equilibrio alla traslazione radiale di D	32
4.1.4	Le azioni agenti sull'elemento E	34

4.1.5	Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E	36
4.1.6	Equilibrio alla traslazione tangenziale di E	40
4.1.7	Limiti di validità	41
4.1.7.1	Esistenza della porzione A1	41
4.1.7.2	Esistenza della porzione A2	43
4.1.7.3	Esistenza della radice quadrata	45
4.1.7.4	Esistenza delle sollecitazioni	47
4.1.7.5	Accelerazione orizzontale di scorrimento	48
4.1.8	Riassunto delle limitazioni	52
4.1.9	Esempi numerici	54
4.2	Caso limite B	56
4.2.1	Le azioni agenti sul disco D	58
4.2.2	Equilibri alla traslazione radiale di D	60
4.2.3	Equilibrio alla traslazione radiale di D	61
4.2.4	Le azioni agenti sull'elemento E	62
4.2.5	Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E	65
4.2.6	Equilibrio alla traslazione tangenziale di E	70
4.2.7	Limiti di validità	71
4.2.7.1	Esistenza della porzione A1	71
4.2.7.2	Esistenza della porzione A2	73
4.2.7.3	Esistenza della radice quadrata	75
4.2.7.4	Esistenza delle sollecitazioni	77
4.2.7.5	Accelerazione orizzontale di scorrimento	78
4.2.8	Riassunto delle limitazioni	79
4.3	Le azioni agenti sull'elemento E: confronto tra casi limite	79
4.4	Le porzioni in cui può essere suddiviso il cereale in relazione al suo comportamento in condizioni accelerate	80
4.5	Calcolo del volume delle porzioni di cereale	87
4.5.1	Calcolo del volume della porzione A1	89
4.5.2	Calcolo del volume della porzione A2	90
4.5.3	Calcolo del volume della porzione B1	91
4.5.4	Calcolo del volume della porzione B2	92

4.5.5	Calcolo del volume della porzione B3	93
4.5.6	Calcolo del volume della porzione B2+B3	94
4.5.7	Considerazioni sui volumi delle porzioni di cereale	94
4.5.8	Rapporto tra il volume della porzione A2 o della porzione B2+B3 ed il volume totale	94
4.6	Le azioni alla base del silos	95
4.6.1	Calcolo del taglio alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h	95
4.6.2	Calcolo del taglio alla base mediante il volume della porzione A2 o della porzione B2+B3	97
4.6.3	Calcolo del momento flettente alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h	98
4.6.4	Calcolo del momento flettente alla base mediante la massa della porzione A2 o della porzione B2+B3	99
4.6.5	Calcolo dello sforzo normale	99
4.6.6	Considerazioni in merito alle sollecitazioni alla base del silos	100
5	SVILUPPO PER SILOS PRISMATICI	104
5.1	Caso limite A	104
5.1.1	Le azioni agenti sul disco D	106
5.1.2	Equilibri alla traslazione radiale di D	108
5.1.3	Equilibrio alla traslazione radiale di D	109
5.1.4	Le azioni agenti sull'elemento E	111
5.1.5	Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E	114
5.1.6	Equilibrio alla traslazione tangenziale di E	117
5.1.7	Limiti di validità	118
5.1.7.1	Esistenza della porzione A1	118
5.1.7.2	Esistenza della porzione A2	120
5.1.7.3	Esistenza delle sollecitazioni	121
5.1.8	Riassunto delle limitazioni	122
5.1.9	Esempi numerici	123

5.2	Caso limite <i>B</i>	124
5.2.1	Le azioni agenti sul disco <i>D</i>	126
5.2.2	Equilibri alla traslazione radiale di <i>D</i>	128
5.2.3	Equilibrio alla traslazione radiale di <i>D</i>	129
5.2.4	Le azioni agenti sull'elemento <i>E</i>	130
5.2.5	Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di <i>E</i>	133
5.2.6	Equilibrio alla traslazione tangenziale di <i>E</i>	137
5.2.7	Limiti di validità	138
5.2.7.1	Esistenza della porzione <i>A1</i>	138
5.2.7.2	Esistenza della porzione <i>A2</i>	140
5.2.7.3	Esistenza della radice quadrata	141
5.2.7.4	Esistenza delle sollecitazioni	141
5.2.8	Riassunto delle limitazioni	142
5.3	Le azioni agenti sull'elemento <i>E</i> : confronto tra casi limite	143
5.4	Le porzioni in cui può essere suddiviso il cereale in relazione al suo comportamento in condizioni accelerate	144
5.5	Calcolo del volume delle porzioni di cereale	151
5.5.1	Calcolo del volume della porzione <i>A1</i>	153
5.5.2	Calcolo del volume della porzione <i>A2</i>	153
5.5.3	Calcolo del volume della porzione <i>B1</i>	154
5.5.4	Calcolo del volume della porzione <i>B2</i>	155
5.5.5	Calcolo del volume della porzione <i>B3</i>	155
5.5.6	Calcolo del volume della porzione <i>B2+B3</i>	156
5.5.7	Considerazioni sui volumi delle porzioni di cereale	156
5.5.8	Rapporto tra il volume della porzione <i>A2</i> o della porzione <i>B2+B3</i> ed il volume totale	157
5.6	Le azioni alla base del silos	157
5.6.1	Calcolo del taglio alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h	158
5.6.2	Calcolo del taglio alla base mediante il volume della porzione <i>A2</i> o della porzione <i>B2+B3</i>	159

5.6.3	Calcolo del momento flettente alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h	160
5.6.4	Calcolo del momento flettente alla base mediante la massa della porzione A2 o della porzione B2+B3	160
5.6.5	Calcolo dello sforzo normale	161
5.6.6	Considerazioni in merito alle sollecitazioni alla base del silos	162
6	PREPARAZIONE DELLA PROVA	167
6.1	Descrizione della tavola vibrante	167
6.2	Ipotesi di provini	169
6.2.1	Acciaio	172
6.2.1.1	Grafici delle pressioni	179
6.2.1.2	Risultati	188
6.2.2	Plexiglass	201
6.2.2.1	Grafici delle pressioni	204
6.2.2.2	Risultati	210
6.2.3	Validazione analitica	229
6.2.3.1	Acciaio	234
6.2.3.2	Plexiglass	238
6.3	Possibili realizzazioni dei provini	246
6.3.1	Metodo delle bande	247
7	CONCLUSIONI	264
7.1	Analisi condotte	264
7.2	Risultati ottenuti	265
7.3	Sviluppi futuri	266
	BIBLIOGRAFIA	267

APPENDICI	269
A SCHEDE RIASSUNTIVE DELLE PROCEDURE	270
B SCHEDE DI PRESENTAZIONE PROVINI	277

1 INTRODUZIONE

1.1 Background

Nella problematica generale relativa alla valutazione delle azioni indotte dal sisma sulle pareti di silos a fondo piano contenenti cereali risulta di particolare interesse la valutazione delle azioni orizzontali. Tali azioni vengono usualmente valutate ipotizzando:

(i) un comportamento rigido del silos e del contenuto (il che equivale a considerare silos e contenuto soggetti alle accelerazioni del terreno);

(ii) che la massa di cereale corrispondente a tutto il contenuto del silos meno il cono di base avente inclinazione pari all'angolo di attrito interno del cereale venga equilibrata dalle spinte orizzontali fornite dalle pareti (supponendo che la forza sismica che nasce nel cono di base venga equilibrata per attrito alla base e pertanto non si scarichi sulle pareti).

Questo approccio progettuale non è tuttavia supportato da specifici studi scientifici a riguardo; infatti, nonostante vi siano molte pubblicazioni sul comportamento sotto sisma di silos contenenti liquidi, in letteratura incominciano ad apparire solo ora le prime pubblicazioni a carattere scientifico relative al comportamento dinamico di silos a fondo piano contenenti materiali granulari tipo cereale.

1.2 Obiettivo della tesi

La presente tesi si inserisce quindi in questo contesto avendo l'obiettivo di presentare una serie di sviluppi analitici volti alla valutazione dell'effettivo comportamento di silos a fondo piano contenenti cereali soggetti a sisma.

Gli sviluppi qui presentati, mantenendo valida l'ipotesi (i), vogliono valutare per via analitica, sulla base di considerazioni di equilibrio dinamico, le effettive spinte orizzontali che nascono sulle pareti del silos.

I risultati ottenuti mostrano come le spinte orizzontali che nascono sulle pareti del silos siano sensibilmente inferiori a quelle ottenibili secondo l'ipotesi (ii). Per una migliore comprensione fisica dei risultati ottenuti, ad una espressione analitica corrispondente alle spinte orizzontali che si scaricano sulle pareti del silos viene qui accoppiata anche una rappresentazione fisica dei risultati ottenuti in termini di quotaparte della massa del cereale che effettivamente grava (in termini di spinta orizzontale) sulle pareti del silos.

I risultati ottenuti vengono infine utilizzati per la formulazione di una procedura per la progettazione sismica di tali silos.

Un ulteriore obiettivo è quello di porre le basi per una prova sperimentale che avrà luogo presso il Earthquake and Large Structures Laboratory (EQUALS), laboratorio della Facoltà di Ingegneria della Università di Bristol (UK).

La prova sarà effettuata su piastra vibrante al fine di validare la teoria proposta e confrontarne i risultati ottenuti con le metodologie proposte al giorno d'oggi dalle normative vigenti.

Oltre al D.I.C.A.M. dell'Università di Bologna, nel progetto di ricerca sono coinvolti il Politecnico di Bari e l'Università di Alicante in Spagna.

1.3 Organizzazione del testo

Nel secondo capitolo si riassume lo stato dell'arte per quanto riguarda l'identificazione delle azioni di progetto riguardanti silos a fondo piano contenenti materiale granulare soggetto ad azione sismica.

Nello specifico si andrà a mostrare cosa prevedono gli Eurocodici ora vigenti e si riporteranno i principali riferimenti bibliografici riguardanti l'argomento.

Il terzo capitolo illustra le generalità e le ipotesi alla base della teoria sviluppata. La teoria, partendo dalle ipotesi formulate, si struttura soltanto su equilibri di corpo rigido andando a fornire le pressioni agenti e i volumi di cereale effettivamente gravante sulle pareti.

Il quarto e il quinto capitolo rappresentano il cuore della prima parte della presente tesi in quanto viene impostata, illustrandone le ipotesi alla base, e sviluppata la teoria proposta dal Dipartimento.

Il quarto capitolo è dedicato ai silos a pianta circolare mentre il quinto tratta di silos a pianta rettangolare.

Il sesto capitolo tratta della preparazione della prova andando a descrivere le caratteristiche della piastra vibrante, i provini ipotizzati, i risultati previsti tramite simulazioni numeriche, con le rispettive validazioni analitiche, e le possibili modalità di realizzazione dei provini.

Il settimo, ed ultimo, capitolo riassume le analisi condotte e i principali risultati ed indica quali siano gli sviluppi futuri da effettuarsi in previsione della prova.

Nelle appendici sono allegate due tipologie di schede:

- il primo gruppo fornisce una descrizione concisa delle procedure di calcolo proposte dall'Eurocodice e della procedura sviluppata dal D.I.C.A.M.
- il secondo gruppo sono valutazioni iniziali fatte su alcune geometrie per andare ad identificare i provini da proporre all'EQUALS.

2 STATO DELL'ARTE

2.1 Riferimenti Bibliografici

I testi di riferimento per il calcolo dei silos, allo stato attuale, sono:

- “*Silos, fundamentals of theory, behaviour and design*”, C.J. Brown, J. Nielsen, Taylor&Francis Group, London and New York;
- “*Circular Storage Tanks and Silos*”, A. Ghali, Taylor&Francis Group, London and New York;
- “*Structures and Granular Solids. From scientific principles to Engineering Application*”, J.F. Chen, J.Y. Oai, J.G. Teng, CRC Press.

Rimangono poi sempre validi i trattati del Prof. Belluzzi e del Prof. Pozzati: il primo (“*Scienza delle Costruzioni*”) in special modo per il calcolo delle sollecitazioni nei serbatoi ed il secondo (“*Teoria e Tecnica delle Strutture*”) per la valutazione dell’azione statica indotta dai cereali secondo la teoria di Janssen e Koenen.

2.2 Quadro normativo

Per quanto riguarda l’aspetto prettamente normativo occorre riferirsi a:

- Decreto Ministeriale 14/01/2008: “Norme tecniche per le costruzioni”;
- Circolare 2/02/2009, n. 617 del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici;
- UNI EN 1991-4: Eurocodice 1. Azioni sulle strutture. Parte 4: Azioni su silos e serbatoi;
- UNI EN 1998-4: Eurocodice 8. Progettazione delle strutture per la resistenza sismica. Parte 4: Silos, serbatoi e condotte.

2.3 Formulazione Eurocodice

Prima di sviluppare ed esporre la teoria proposta risulta opportuno illustrare quanto è previsto dagli Eurocodici, ricordando che tali direttive assumono che la massa di cereale corrispondente a tutto il contenuto del silos meno il cono di base avente inclinazione pari all'angolo di attrito interno del cereale, venga equilibrata dalle spinte orizzontali fornite dalle pareti (supponendo che la forza sismica che nasce nel cono di base venga equilibrata per attrito alla base e pertanto non si scarichi sulle pareti).

Nell'ordine si riassume il calcolo in condizioni statiche e poi la valutazione degli effetti dell'azione sismica.

2.3.1 Condizioni Statiche

I carichi sulle pareti dei silos possono essere valutate in modo diverso in base alla snellezza del silos stesso, per tale motivo vengono classificati come segue:

- a. *silos snelli*: $2,0 \leq h_c / d_c$;
- b. *silos mediamente snelli*: $1,0 < h_c / d_c \leq 2,0$;
- c. *silos tozzi*: $0,4 < h_c / d_c \leq 1,0$;
- d. *silos molto tozzi*: $h_c / d_c \leq 0,4$.

dove:

- h_c : è la quota del pelo libero dell'insilato;
- d_c : è il diametro (o dimensione caratteristica) interno del silos.

2.3.1.1 Silos snelli

Con riferimento alla Figura 2.1 si possono calcolare i carichi agenti come segue:

$$p_{hf}(z) = \gamma \cdot K z_0 (1 - e^{-z/z_0}) \quad (2.1)$$

$$p_{wf}(z) = \mu \cdot \gamma K z_0 (1 - e^{-z/z_0}) \quad (2.2)$$

$$p_{vft}(z) = \gamma z_0 (1 - e^{-z/z_0}) \quad (2.3)$$

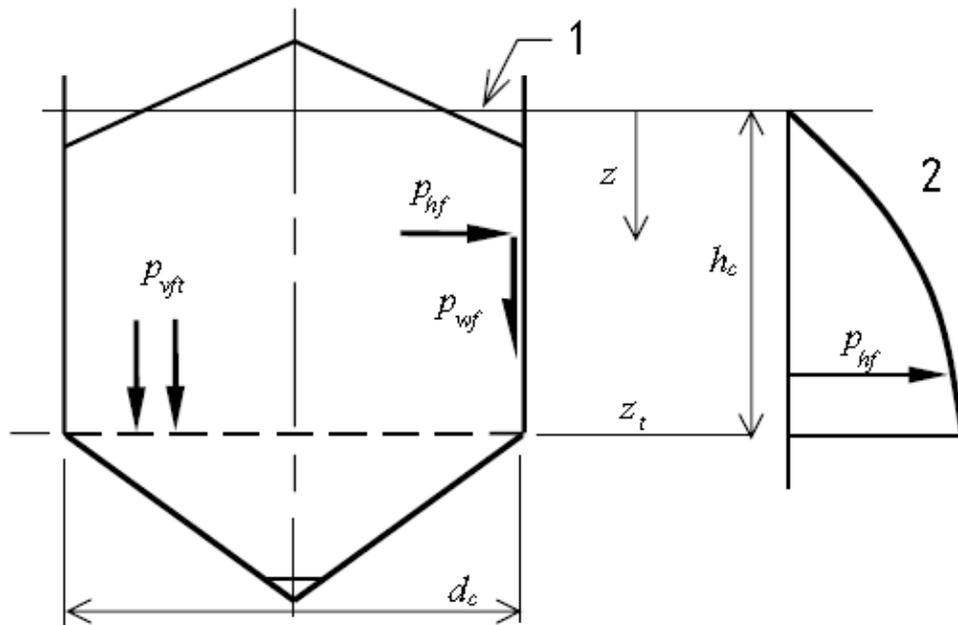


Figura 2.1 Carichi simmetrici dovuti al materiale insilato

dove:

$$z_0 = \frac{1}{K \mu} \frac{A}{U} \quad (2.4)$$

z_0 = profondità caratteristica;

A = area della sezione trasversale del silos;

U = perimetro interno della sezione trasversale del silos;

K = valore caratteristico del coefficiente di spinta orizzontale

$$K = a_K K_m = a_K \cdot 1.1 \cdot (1 - \sin \varphi_{im}) \quad (2.5)$$

μ = valore caratteristico del coefficiente di attrito per le pareti verticali.

Come si può notare l'Eurcodice si basa sulla teoria di Janssen e Koenen le cui ipotesi, come già notava Pozzati, sono confermate “quando il materiale è in quiete e la cella è snella (Pozzati, 1972)”.

Da qui la necessità di diversificare le formule in funzione della snellezza.

2.3.1.2 Silos mediamente snelli e tozzi

In questo caso le espressioni per la valutazione dei carichi assumono la forma:

$$p_{hf}(z) = \gamma \cdot K z_0 \left\{ \left[\left(\frac{z - h_0}{z_0 - h_0} \right) + 1 \right]^n \right\} \quad (2.6)$$

$$p_{wf}(z) = \mu \cdot p_{hf}(z) \quad (2.7)$$

dove:

- z_0 = profondità caratteristica;
- $n = -(1 + \tan \phi_r) \left(1 + \frac{h_0}{z_0} \right)$;
- $h_0 = \frac{r}{3} \tan \phi_r$.

dove:

- r = raggio del silos;
- ϕ_r = angolo di riposo

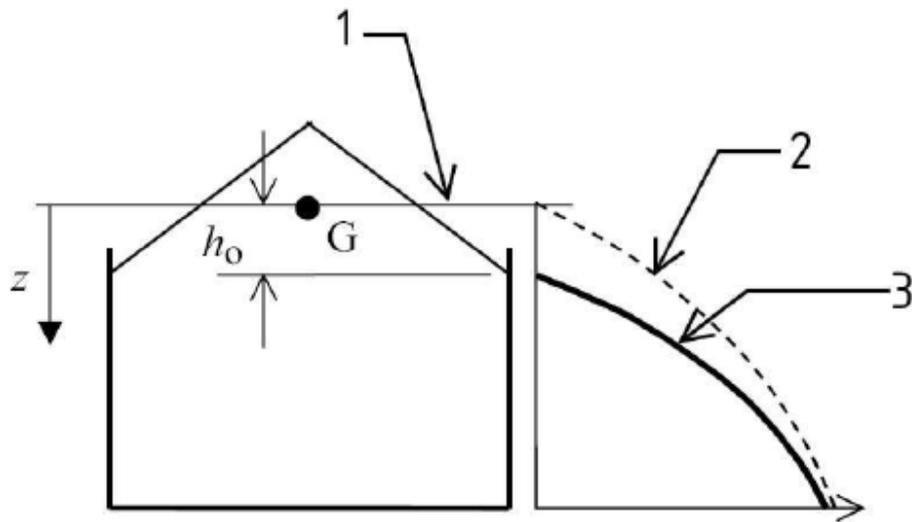


Figura 2.2 Andamento delle pressioni normali alla parete nei silos tozzi e mediamente snelli

Nella figura sono evidenziati rispettivamente:

- 1 superficie equivalente;
- 2 pressioni calcolate per silos snelli;
- 3 pressioni calcolate per silos tozzi.

2.3.2 Condizioni Sismiche

L'azione sismica può essere rappresentata tramite una pressione orizzontale normale agenti sulle pareti.

2.3.2.1 Silos circolari

La sovrappressione può essere valutata come:

$$\Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \cdot \cos \vartheta \quad (2.8)$$

dove:

- $\Delta_{ph,s0}$: la pressione di riferimento a distanza verticale x dal fondo piano

$$\Delta_{ph,s0} = \alpha(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \quad (2.9)$$

- ϑ : è l'angolo ($0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$) tra la linea radiale del punto di interesse sulla parete e la direzione della componente orizzontale dell'azione sismica;

- $\alpha(z)$: è il rapporto tra l'accelerazione di risposta del silos a distanza verticale z dalla superficie equivalente dei materiali insilati, e l'accelerazione di gravità;

- $r_s^* = \min\left(h_b, \frac{d_c}{2}\right)$;

- h_b : è la quota più alta raggiunta dal silos;

- d_c : è la dimensione interna del silos parallela alla componente orizzontale dell'azione sismica.

- x : distanza verticale dal fondo piano o dall'apice di una tramoggia conica o piramidale.

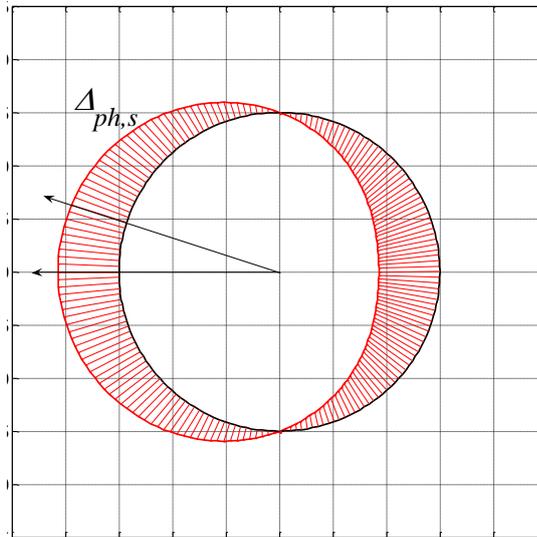


Figura 2.3 Andamento delle sovrappressioni normali dovute all'azione sismica

Il taglio totale alla base e il momento flettente totale alla base (alla fondazione del silos) possono essere valutati, tramite integrazione delle pressioni, come segue:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(H - \frac{R}{6} \right) \\
 M &= \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \left(H^2 - \frac{R^2}{27} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

L'Eurocodice prevede, altresì, un calcolo approssimato per la valutazione dell'azione sismica facendo le seguenti posizioni:

- si assume che il particolato contenuto si muova assieme alla struttura del silos;
- modellare il particolato con l'effettiva massa posta al centro di gravità e valutare la sua inerzia rotazionale rispetto ad esso.

Si può inoltre assumere che il silos abbia una massa effettiva uguale all' 80% della massa totale.

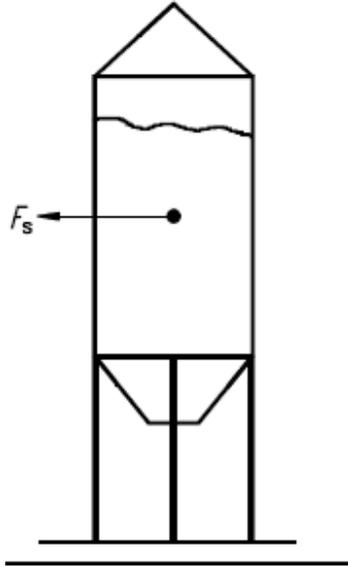


Figura 2.4 Schematizzazione approssimata dell'azione del sisma

In questo caso il taglio e il momento flettente alla base possono valutarsi rispettivamente come:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8 \\
 M &= \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

2.3.2.2 Silos rettangolari

Nel caso di silos rettangolari occorre distinguere tra:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{per le pareti sottovento: } \Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \\
 \text{per le pareti sopravento: } \Delta_{ph,s} = -\Delta_{ph,s0} \\
 \text{per le pareti parallele: } \Delta_{ph,s} = 0
 \end{array} \right.
 \tag{2.12}$$

Integrando le pressioni si arriva ad ottenere, analogamente al caso di silos circolare:

$$\begin{aligned} T &= 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H - \frac{A}{6} \right) \\ M &= 2 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H^2 - \frac{A^2}{27} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove:

- A: mezza larghezza della base rettangolare del silos;
- B: mezza lunghezza della base rettangolare del silos.

Utilizzando la metodologia semplificata si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8 \\ M &= 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Come si può osservare, sia con la trattazione più accurata che con quella semplificata, sia nel caso di silos circolare che rettangolare, le azioni alla base non coinvolgono la totalità del volume insilato. Questo fatto rispecchia l'ipotesi che un cono alla base scarichi direttamente sul fondo senza poggiarsi alle pareti.

3 TEORIA PRESENTATA

3.1 Generalità

E' ben noto come il cereale fornisca una spinta verticale sulle pareti del silos. Secondo la trattazione di Janssen e Koenen per l'equilibrio alla traslazione verticale di una porzione di cereale a quota generica z (vedi fig. 3.1), le pressioni verticali alla base di tale porzione di cereale sono distribuite uniformemente su tutta la superficie.

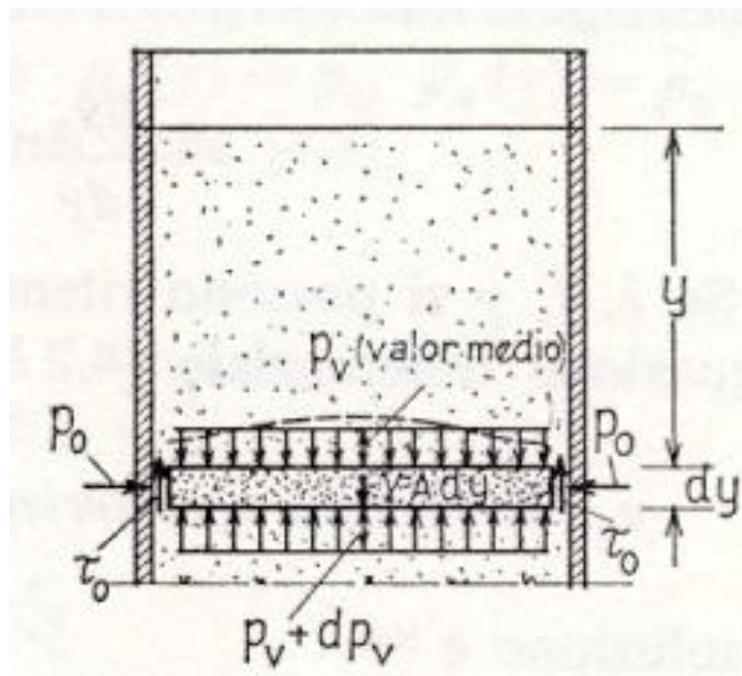


Figura 3.1 Distribuzione uniforme della pressione verticale sulla superficie della porzione di cereale alla generica quota z .

E' ipotizzabile che, in realtà, le pressioni verticali vadano via via decrescendo dal centro della porzione di cereale sino ad annullarsi in corrispondenza del cereale a contatto con le pareti del silos. Una schematizzazione limite (che risulterà utile per la valutazione a favore di sicurezza delle azioni indotte sulle pareti del silos dalle accelerazioni orizzontali, come illustrato nei paragrafi seguenti) è quella che vede il cereale suddiviso in due porzioni "equivalenti" di (i) granuli che si appoggiano completamente sugli strati sottostanti (porzione centrale) e (ii) granuli completamente sostenuti dalla parete (quindi caratterizzati da una pressione verticale tra granulo e granulo nulla).

Pertanto, facendo riferimento ad uno strato orizzontale di cereali di altezza dz posto ad una quota generica z misurata a partire dal pelo libero del cereale (vedi fig. 3.2), esso può essere suddiviso in due porzioni:

- un "disco interno" di diametro $2r$ (corrispondente ai granuli che si appoggiano completamente sugli strati sottostanti);
- un "toro esterno", evidenziato in fig. 3.2 con un tratteggio rosso, di spessore s (corrispondente ai granuli completamente sostenuti dalla parete).

Le dimensioni del disco interno e del toro esterno variano con la quota z misurata a partire dal pelo libero del cereale, in quanto lo spessore s del toro esterno varia con z .

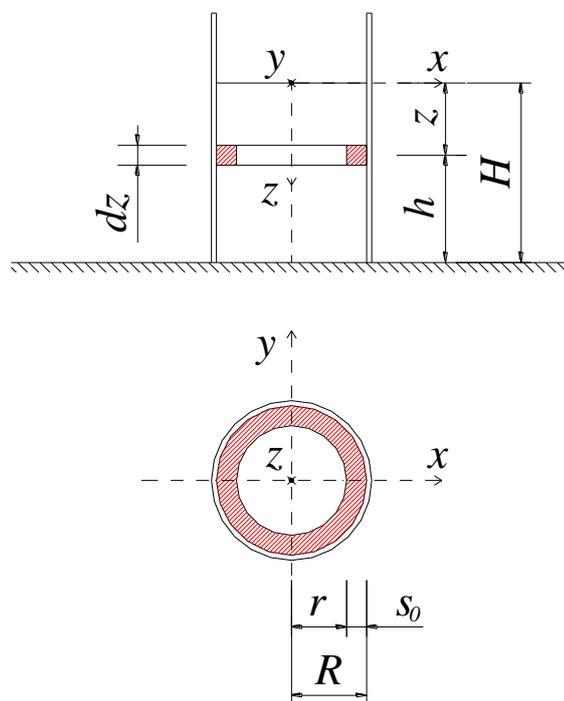


Figura 3.2 Sezione verticale e sezione orizzontale alla quota z a partire dal pelo libero del cereale del silos a fondo piano.

Si consideri un disco interno di altezza dz , di raggio pari a $r = R - s$, dove s (ancora incognito) rappresenta lo spessore del toro esterno corrispondente, come rappresentato in figura 3.2. Si suppone che il disco considerato sia posto ad una profondità z , misurata a partire dal pelo libero del cereale, ovvero ad una quota $h = H - z$ dal piano di campagna.

Il disco interno verrà indicato nel seguito come disco D .

Si consideri il toro esterno (corrispondente al disco interno sopra descritto) di altezza dz , di raggio esterno pari a R (uguale al raggio del silos) e di raggio interno pari a $r = R - s$, dove s (ancora incognito) rappresenta lo spessore del toro, come rappresentato in figura 3.3.

Il toro considerato si suppone posto ad una profondità z , misurata a partire dal pelo libero del cereale, ovvero ad una quota $h = H - z$ dal piano di campagna.

Si consideri ora un settore di corona circolare (spicchio di toro esterno) con angolo al centro pari a $d\theta$. Il settore di corona circolare risulta identificato dall'angolo al centro θ misurato a partire dal semiasse negativo delle x in senso orario, come indicato in figura 3.3. Il settore di corona circolare è evidenziato con un tratteggio blu, sovrapposto al tratteggio rosso, in figura 3.3. Viene definito anche un sistema di coordinate ausiliarie $\xi - \eta$ nel piano orizzontale, in cui ξ rappresenta la direzione radiale (normale alla superficie laterale del silos) ed η rappresenta la direzione normale a ξ (tangente alla superficie laterale del silos), come indicato in figura 3.3.

Ciascun settore di corona circolare (che è una porzione di toro esterno) verrà indicata nel seguito come elemento E . Ogni elemento E presenta altezza dz e spessore s .

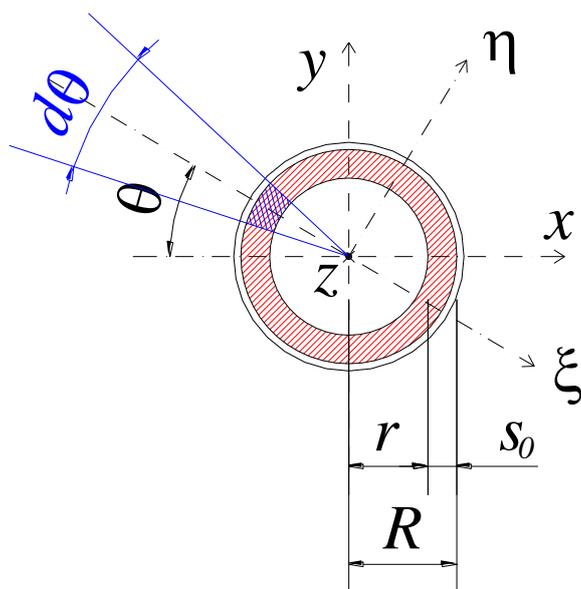
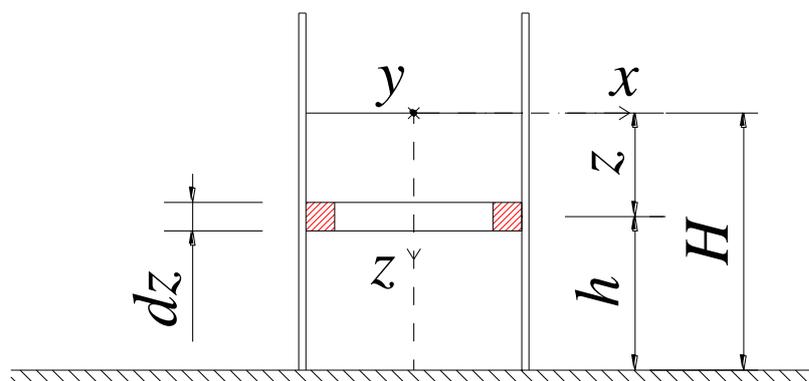


Figura 3.3 Il settore di corona circolare (tratteggiato in blu) identificato dall'angolo al centro θ del toro esterno di cereale (tratteggiato in rosso).

3.2 Ipotesi di base

Si considerano le seguenti ipotesi:

1. pelo libero orizzontale del cereale;
2. presenza di accelerazione aggiuntiva verticale costante a_{g-vert} in direzione z (accelerazione assunta positiva verso l'alto);
3. presenza di accelerazione aggiuntiva orizzontale $a_{g-orizz} = a_{g-orizz}(z)$ in direzione x (accelerazione assunta positiva verso destra);
4. le forze d'inerzia che agiscono sul disco interno D a seguito dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale sono equilibrate completamente dalla risultante delle tensioni tangenziali che si sviluppano sulla superficie inferiore del disco (alla base del disco), che di seguito indicheremo con τ_{base} (assenza di scorrimento orizzontale del cereale);
5. la pressione orizzontale, $p_h(z)$, tra l'elemento E ed il disco D in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale si mantiene uguale alla pressione orizzontale, $p_{h0}^*(z)$, tra l'elemento E ed il disco D in presenza di accelerazione aggiuntiva solo verticale;
6. la variazione negativa (depressione) di pressione orizzontale, $\Delta p_h(z)$, tra l'elemento E e la parete del silos è tale da non annullare mai completamente la pressione orizzontale, $p_h(z)$, tra l'elemento E e la parete del silos (ipotesi di non annullamento della pressione).

Le azioni mutue scambiate tra cereali e pareti del silos vengono qui valutate (come usualmente effettuato nelle analisi sismiche in cui vengono valutati gli effetti di accelerazioni orizzontali, vedi figura 3.4), mediante lo studio di diagrammi di corpo libero rappresentativi delle condizioni di equilibrio in regime dinamico.

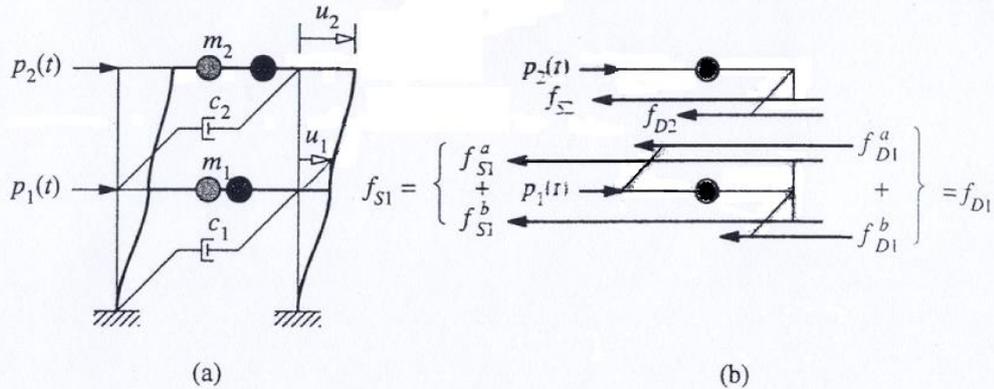


Figure 9.1.1 (a) Two-story shear frame: (b) forces acting on the two masses.

Figura 3.4 Diagrammi di corpo libero per un telaio shear-type a due piani in regime dinamico (tratta da [8], pag. 314)..

Se vengono adottate le ipotesi di Janssen e Koenen (descritte in § 3.1), la valutazione dell'equilibrio alla traslazione orizzontale di un disco posto alla quota generica z porge:

$$\tau = \gamma \cdot z \cdot a_{g-orizz} \quad (3.1)$$

dove le τ rappresentano le tensioni tangenziali che si sviluppano sulla superficie inferiore del disco. Le pressioni mutue scambiate tra parete e cereale rimangono pari a quelle ottenute in condizioni statiche o in condizioni accelerate con accelerazione aggiuntiva solo verticale.

Se si accettano le ipotesi di Janssen e Koenen, l'accelerazione aggiuntiva orizzontale non induce azioni aggiuntive (rispetto a quelle ottenute in condizioni statiche o in condizioni accelerate con accelerazione aggiuntiva solo verticale), essendo le pressioni orizzontali sulle pareti del silos pari a p_{h0}^* , a patto che le τ non superino il loro valore limite, $\bar{\tau}$, fornito da:

$$\bar{\tau} = p_{v-JK} \cdot \mu \quad (3.2)$$

dove le $p_{v-JK} = p_{v-JK}(z)$ rappresentano le pressioni verticali della soluzione di Janssen e Koenen. La (3.2) fornisce il seguente valore limite alle accelerazioni orizzontali sino al quale non nascono azioni aggiuntive sulle pareti:

$$a_{g-orizz} < \frac{p_{v-JK} \cdot \mu}{\gamma \cdot z} \quad (3.3)$$

A favore di sicurezza, le analisi vengono qui svolte non con riferimento alle ipotesi di Janssen e Koenen, ma con riferimento alla suddivisione del cereale in dischi ed elementi, così come definiti nella sezione 3.1, che, come si vedrà nel seguito, comporta l'insorgere di azioni aggiuntive scambiate tra pareti del silos e cereale in presenza di accelerazioni orizzontali anche inferiori al limite massimo fornito dalla (3.3).

Le figure 3.6 e 3.7 rappresentano schematicamente le azioni (pressioni, tensioni tangenziali, ...) che si scambiano l'elemento E , l'elemento D e le pareti del silos per effetto di una accelerazione orizzontale $a_g = a_g(z)$ e una accelerazione verticale a_{g-vert} costante, rispettivamente nei casi limite seguenti:

- *caso limite A*: ogni disco è in equilibrio orizzontale trasmettendo azioni taglienti al solo disco D sottostante;
- *caso limite B*: ogni disco è in equilibrio orizzontale trasmettendo azioni taglienti non solo al disco D sottostante, ma anche agli elementi E sottostanti.

In entrambe le figure, la direzione dell'accelerazione aggiuntiva (direzione x) è inclinata di un angolo θ nel piano orizzontale rispetto alla direzione normale (direzione ξ) alla superficie esterna verticale dell'elemento E (superficie di contatto elemento - parete del silos).

Caso limite A:

La figura 3.5 mette in evidenza le azioni mutue che si scambiano gli elementi D , E e la parete esterna del silos. Si noti come, oltre alle forze verticali ed orizzontali presenti nel caso di carichi statici ed accelerazione aggiuntiva solo verticale, sono presenti anche le forze orizzontali aggiuntive di seguito riportate:

Δp_h sovrappressione (o depressione) dovuta agli effetti dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale e da sommare (o sottrarre) alla p_{h0}^* tra l'elemento E e la parete del silos;

$a_g \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione x per effetto dell'accelerazione a_g (forza d'inerzia rivolta verso sinistra avendo assunto positiva l'accelerazione $a_{g-orizz}$ verso destra).

Il diagramma di corpo libero mostra come:

- per l'equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D , il peso del disco D moltiplicato per a_g deve essere uguale alla risultante delle tensioni tangenziali τ che si esplicano sulla superficie inferiore del disco D ;
- per l'equilibrio alla traslazione orizzontale dell'elemento E , la risultante delle sovrappressioni orizzontali Δp_h deve essere uguale al peso dell'elemento E moltiplicato per a_g ;
- per l'equilibrio alla traslazione verticale del disco D , la risultante delle pressioni verticali p_{v0}^* sulla sua superficie inferiore deve essere uguale al peso del disco D moltiplicato per $1 + a_{g-vert}$;
- per l'equilibrio alla traslazione verticale dell'elemento E , la risultante delle tensioni tangenziali p_w deve essere uguale al peso dell'elemento E moltiplicato per $1 + a_{g-vert}$.

Caso limite B:

La figura 3.6 mette in evidenza le azioni mutue che si scambiano gli elementi D , E e la parete esterna del silos. Si noti come, in aggiunta alle azioni mutue che si scambiano gli elementi posizionati in corrispondenza del pelo libero, occorre considerare anche le tensioni tangenziali τ che la porzione di cereale posizionata direttamente al di sopra della porzione sospesa alle pareti esterne trasmette alla porzione sottostante sospesa alle pareti esterne.

Il diagramma di corpo libero mostra come:

- per l'equilibrio alla traslazione orizzontale del disco D , il peso del disco D moltiplicato per a_g deve essere uguale alla differenza tra la risultante delle tensioni tangenziali τ che si esplicano sulla superficie inferiore del disco D e la risultante delle tensioni tangenziali τ che si esplicano sulla superficie superiore del disco D ;
- per l'equilibrio alla traslazione orizzontale dell'elemento E , la risultante delle sovrappressioni orizzontali Δp_h deve essere uguale alla somma del peso dell'elemento E e del peso della porzione di cereale posizionata direttamente al di sopra della porzione sospesa alle pareti esterne moltiplicata per a_g ;
- per l'equilibrio alla traslazione verticale del disco D , la differenza tra la risultante delle pressioni verticali p_{v0}^* sulla superficie inferiore del disco e la risultante delle pressioni verticali p_{v0}^* sulla superficie superiore del disco deve essere uguale al peso del disco D moltiplicato per $1 + a_{g-vert}$;
- per l'equilibrio alla traslazione verticale dell'elemento E , la risultante delle tensioni tangenziali p_w deve essere uguale alla somma del peso dell'elemento E e del peso della porzione di cereale posizionata direttamente al di sopra della porzione sospesa alle pareti esterne moltiplicata per $1 + a_{g-vert}$.

vertical section

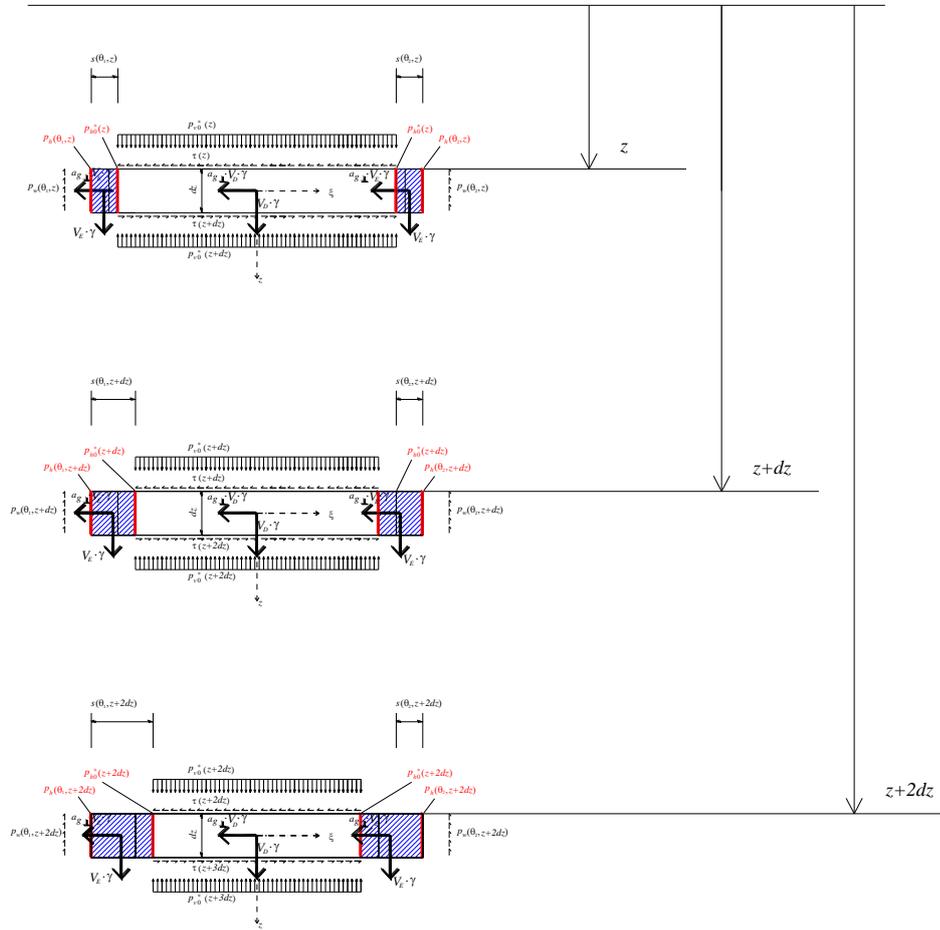


Figura 3.5a Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su dischi D e su elementi simmetrici E posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale; caso limite A, sezione verticale.

horizontal section

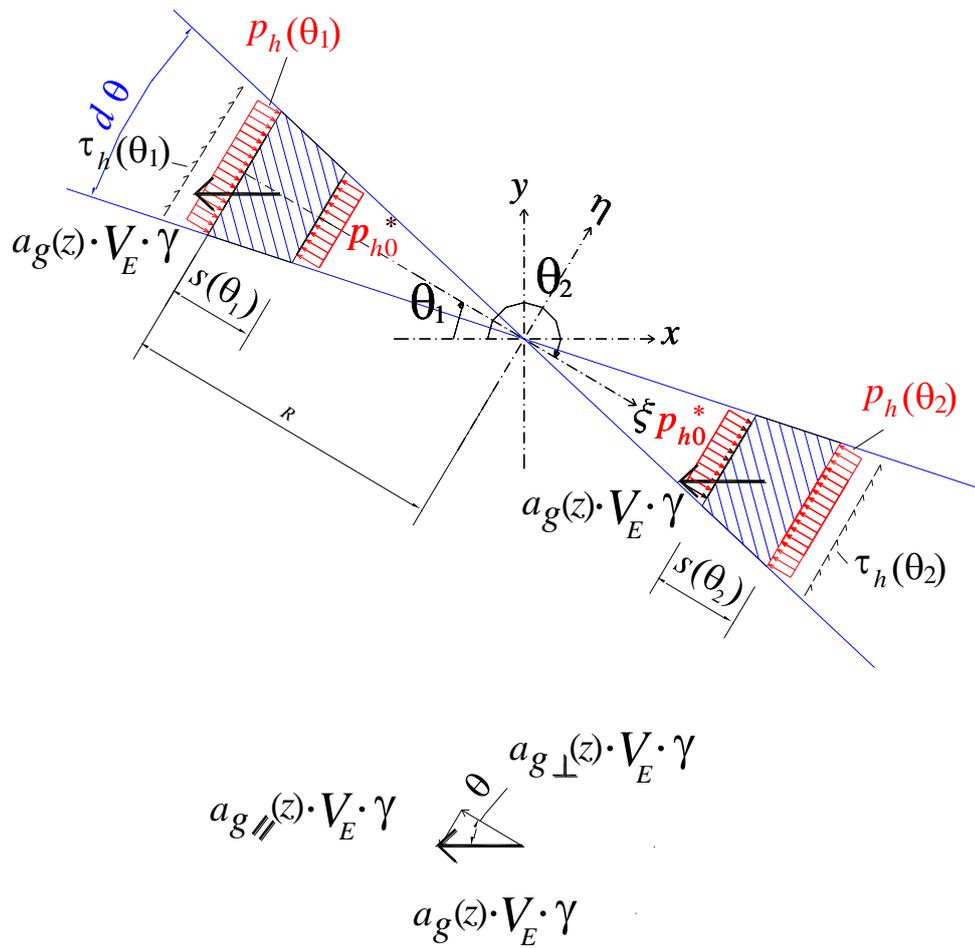


Figura 3.5b Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su dischi D e su elementi simmetrici E posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite A, sezione orizzontale.

vertical section

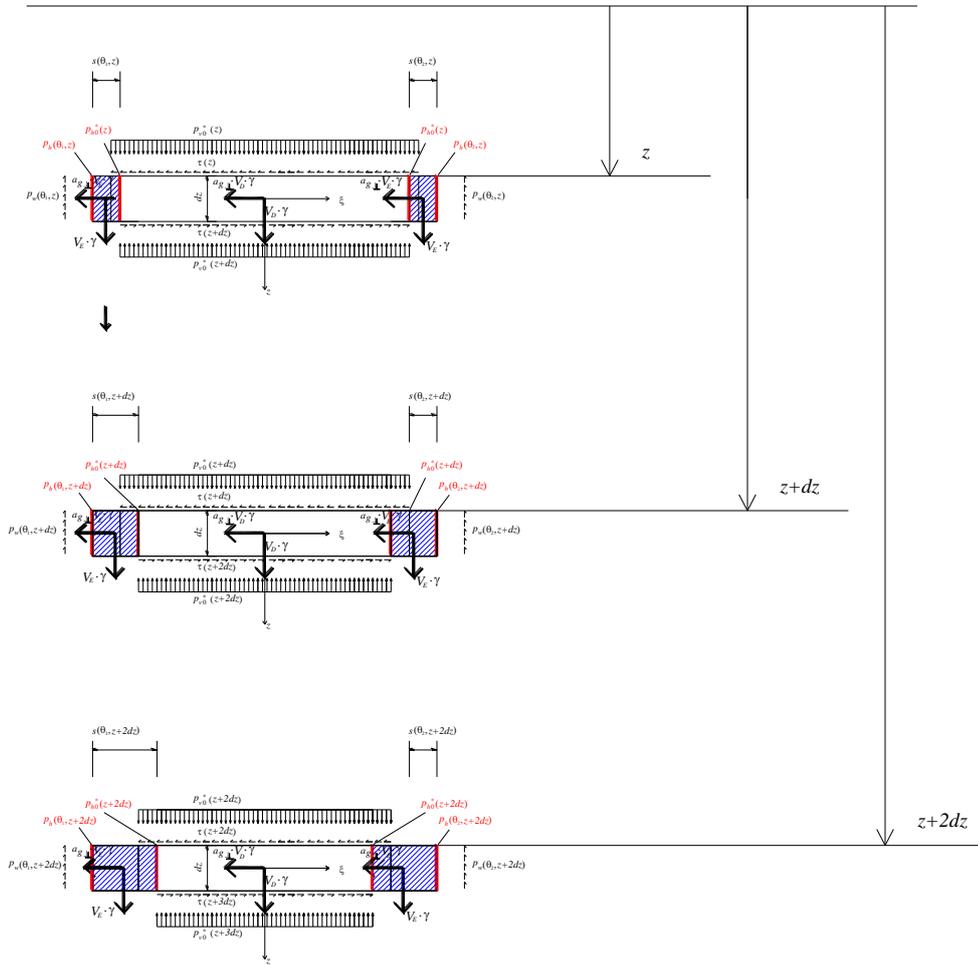


Figura 3.6a Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su dischi D e su elementi simmetrici E posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite B , sezione verticale.

horizontal section

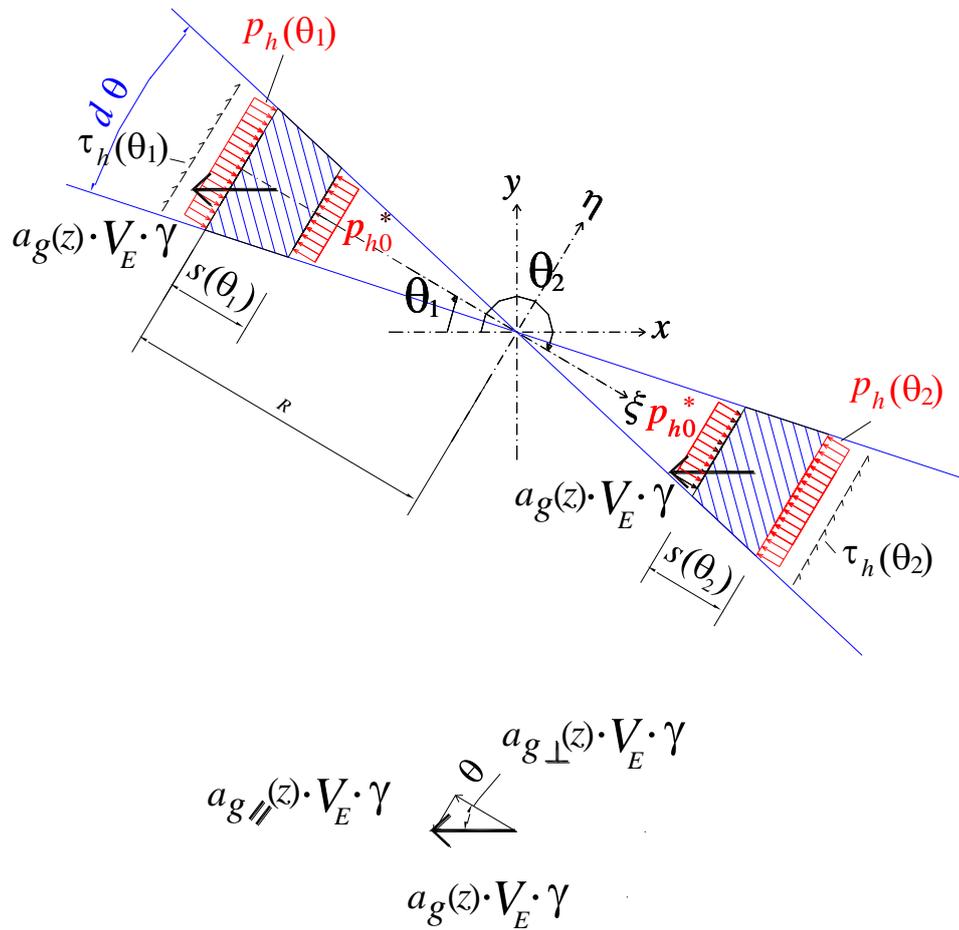
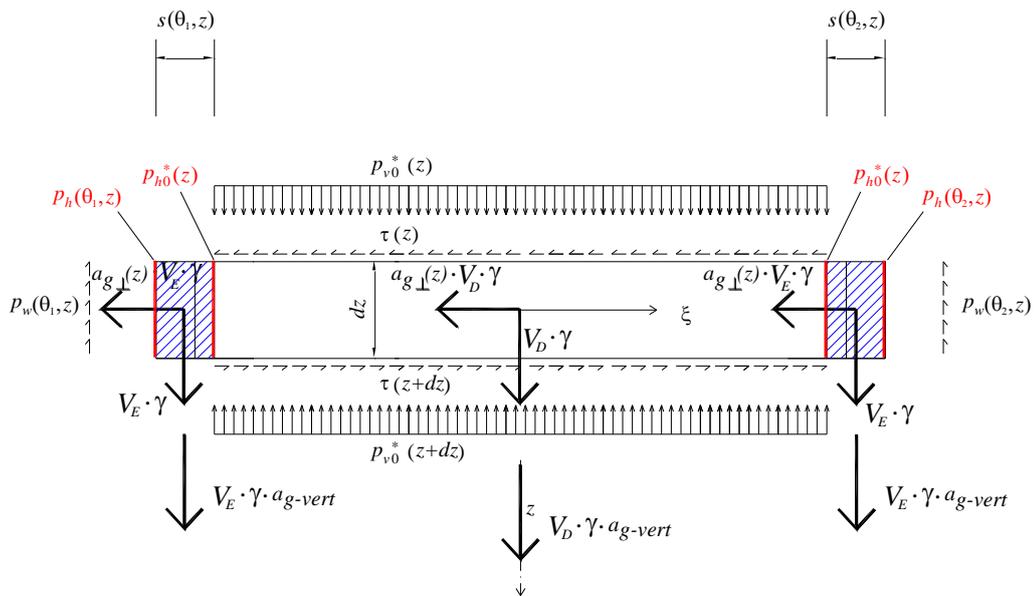


Figura 3.6b Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su dischi D e su elementi simmetrici E posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite B, sezione verticale.

4 SVILUPPO PER SILOS CILINDRICI

Nello sviluppo della teoria si è considerato sia che l'accelerazione agente sia quella al suolo, ipotesi realistica data l'elevata rigidezza dei silos, sia accelerazione variabile linearmente lungo l'altezza, in quanto vi sia la possibilità che la struttura del silos amplifichi l'accelerazione al suolo.

4.1 Caso limite A



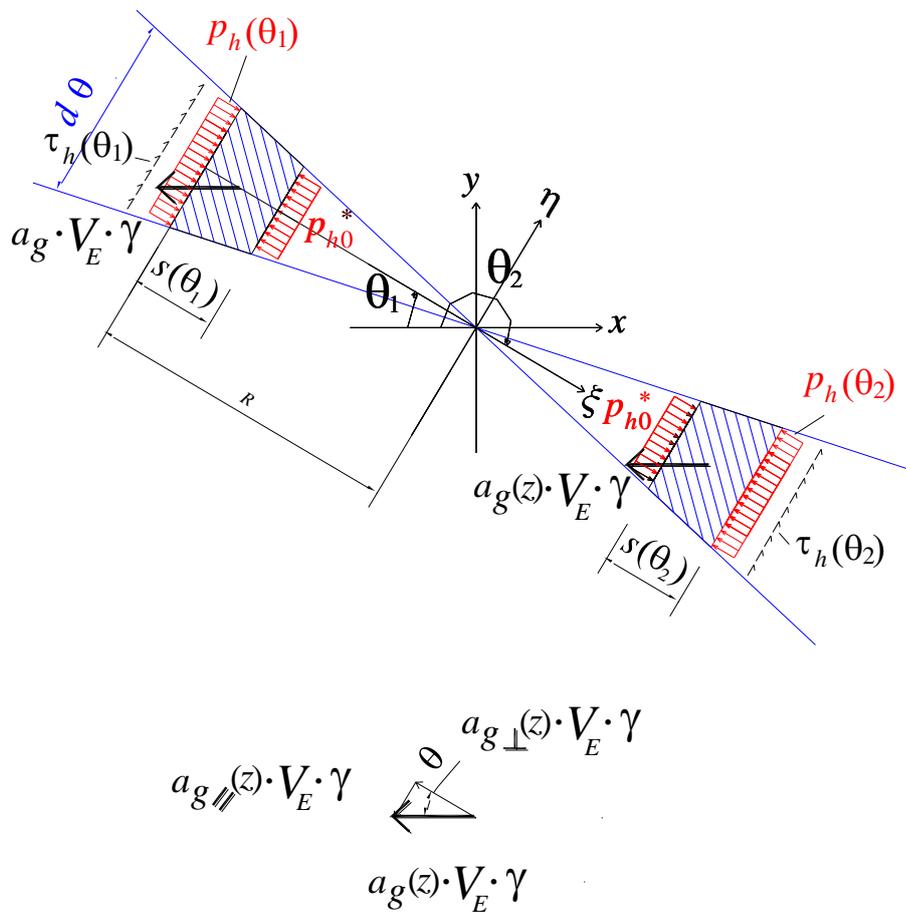


Figura 4.. Forze verticali e forze orizzontali agenti sul disco D e sulla porzione E .

Incognite del problema:

- 1 p_{v0}^* = pressione verticale che agisce sulla faccia orizzontale del disco interno D ;
- 2 τ = tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale del disco interno D ;
- 3 p_h = la pressione totale tra l'elemento E e la parete del silos;
- 4 s = spessore del toro esterno;
- 5 τ_h = tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento E e le pareti del silos.

Equazioni a disposizione:

- 1 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di D;
- 2 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di D;
- 3 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di E;
- 4 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di E;
- 5 equilibrio alla traslazione in direzione tangenziale di E.

4.1.1 Le azioni agenti sul disco D

La figura 4.1 rappresenta schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento D .

Le azioni che agiscono sul disco D si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate in figura 4.2. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_D \cdot \gamma$ peso proprio del disco D di volume V_D e densità γ ;

$p_{v0}^*(z)$ pressione verticale (rivolta verso il basso) che agisce sulla faccia orizzontale superiore del disco interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sopra;

$p_{v0}^*(z + dz)$ pressione verticale (rivolta verso l'alto) che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del disco interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sotto;

$a_{g-vert} \cdot V_D \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro del disco D e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra il disco D e ciascuno degli elementi E ;

$\tau(z)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale superiore del disco interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sopra;

$\tau(z + dz)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del disco interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sotto.

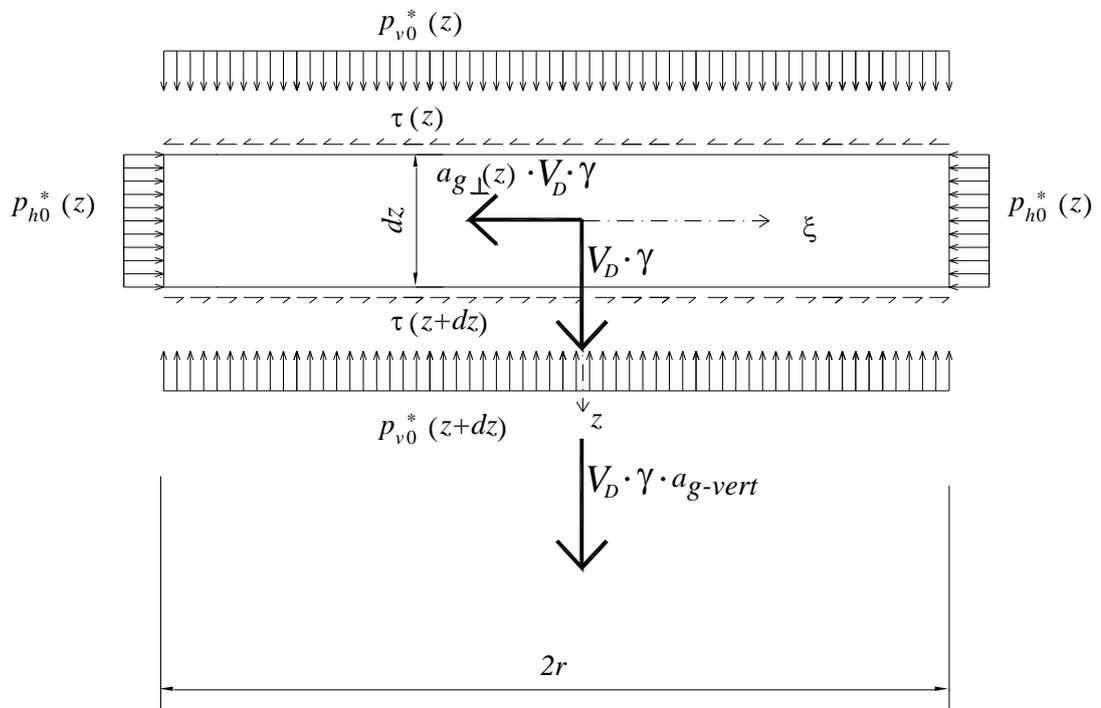


Figura 4.2 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul disco D .

4.1.2 Equilibrio alla traslazione verticale di D

Dall'equilibrio alla traslazione verticale del disco interno D alla quota z , si ottiene:

$$p_{v0}^*(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D + a_{g-vert} \cdot \gamma \cdot V_D = p_{v0}^*(z + dz) \cdot A_D \quad (4.1)$$

Essendo:

$$V_D = A_D \cdot dz \quad (4.2)$$

si ottiene:

$$dp_{v0}^* = \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot dz \quad (4.3)$$

che, integrata, fornisce:

$$p_{v0}^*(z) = \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z + C \quad (4.4)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che, in sommità (alla quota del pelo libero del materiale), la pressione verticale sia nulla:

$$\begin{aligned} p_{v0}^*(z=0) &= 0 \\ \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot 0 + C &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0 \quad (4.6)$$

Pertanto, la pressione verticale è funzione della quota z misurata a partire dal pelo libero del materiale e vale:

$$p_{v0}^*(z) = \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z \quad (4.7)$$

Essendo:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot p_{v0}^*(z) = p_{h0}(z) \cdot (1 + a_{g-vert}) \quad (4.8)$$

si ha che:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z \quad (4.9)$$

4.1.3 Equilibrio alla traslazione radiale di D

Dall'equilibrio alla traslazione radiale del disco interno D alla quota z , si ottiene:

$$\tau(z + dz) \cdot A_D = a_g(z) \cdot \gamma \cdot V_D + \tau(z) \cdot A_D \quad (4.10)$$

Dal momento che $\tau(z + dz) = \tau(z) + d\tau$ e $V_D = A_D \cdot dz$ si ottiene:

$$d\tau(z) = a_g(z) \cdot \gamma \cdot dz \quad (4.11)$$

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = a_g$) si ottiene:

$$\tau(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot z + C \quad (4.12)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che, in sommità (alla quota del pelo libero del materiale), le tensioni tangenziali siano nulle:

$$\tau(z = 0) = 0 \quad (4.13)$$

$$a_{g0} \cdot \gamma \cdot 0 + C = 0 \quad (4.14)$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0 \quad (4.15)$$

Si ottiene pertanto:

$$\tau(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot z \quad (4.16)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza nella forma:

$$a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \quad (4.17)$$

l'integrazione fornisce:

$$\tau(z) = \left(-a_{g1} \cdot \frac{z^2}{2} + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot z + C \right) \cdot \gamma \quad (4.18)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che in sommità (alla quota del pelo libero del materiale) le tensioni tangenziali siano nulle:

$$\tau(z = 0) = 0 \quad (4.19)$$

$$(-a_{g1} \cdot 0 + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot 0 + C) \cdot \gamma = 0 \quad (4.20)$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0 \quad (4.21)$$

Si ottiene pertanto:

$$\tau(z) = \left(-a_{g1} \cdot \frac{z^2}{2} + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot z \right) \cdot \gamma \quad (4.22)$$

4.1.4 Le azioni agenti sull'elemento E

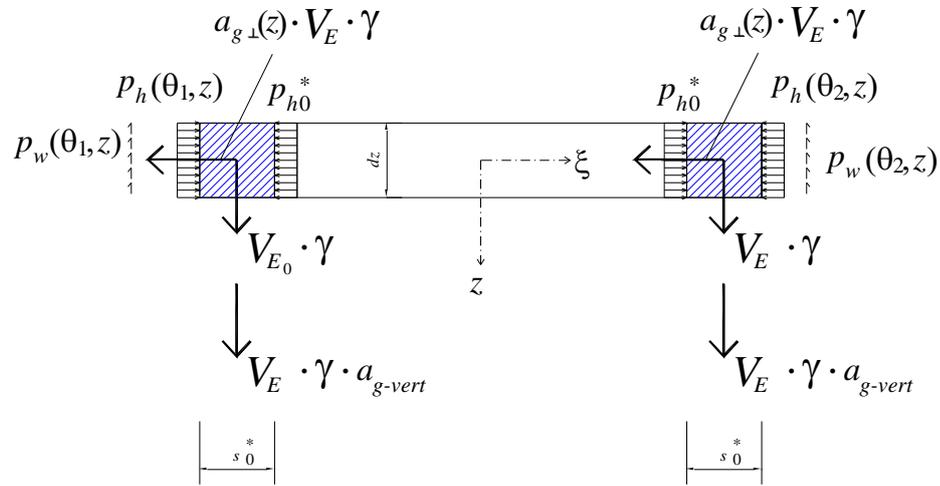


Figura 4.3a Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su due elementi simmetrici E in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale ed orizzontale; sezione verticale

horizontal section

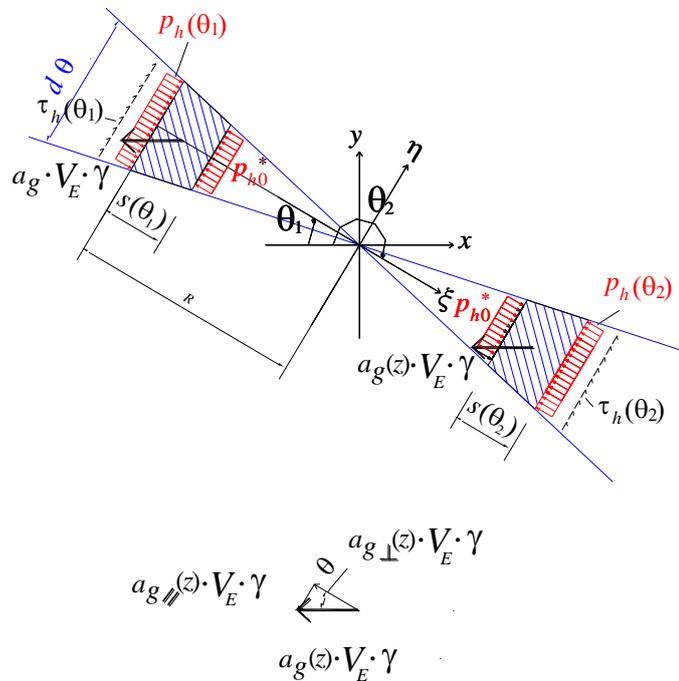


Figura 4.3b Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su due elementi simmetrici E in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale ed orizzontale; sezione orizzontale

Le figure 4.3 rappresentano schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento E .

Le azioni che agiscono sull'elemento E si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate in figura 4.3. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_E \cdot \gamma$ peso proprio dell'elemento E di volume V_E e densità γ ;

$p_w(z)$ tensioni tangenziali di aderenza tra l'elemento E e la parete metallica del silos;

$a_{g-vert} \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra l'elemento E e il disco D .

Δp_h sovrappressione (o depressione) dovuta agli effetti dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale e da sommare (o sottrarre) alla p_{h0}^* tra l'elemento E e la parete del silos;

$a_g \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione x per effetto dell'accelerazione a_g (forza d'inerzia rivolta verso sinistra avendo assunto positiva l'accelerazione $a_{g-orizz}$ verso destra).

$\tau_h(z)$ tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento E e le pareti del silos.

4.1.5 Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E :

Si consideri l'elemento E posizionato alla quota generica z .

Le due equazioni di equilibrio risultano accoppiate per cui vi è la necessità di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta p_h \cdot A_E = a_{g\perp}(z) \cdot V_E \cdot \gamma \\ V_E \cdot \gamma \cdot (1 - a_{g\text{-vert}}) = A_E \cdot p_w \end{cases} \quad (4.23)$$

Dove la prima delle (4.23) è l'equilibrio alla traslazione orizzontale e la seconda è l'equilibrio alla traslazione verticale.

In presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale, la pressione totale, p_h , tra l'elemento E e la parete del silos è data da:

$$p_h = p_{h0}^* + \Delta p_h \quad (4.24)$$

che permette di riscrivere la prima delle (4.23) nel seguente modo:

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot A_E = a_{g\perp}(z) \cdot V_E \cdot \gamma \quad (4.25)$$

dove $a_{g\perp}(z)$ rappresenta la componente in direzione normale (direzione ξ) alla superficie esterna verticale dell'elemento E (vedi fig. 4.3b) dell'accelerazione orizzontale $a_g(z)$, che vale:

$$a_{g\perp}(z) = a_g(z) \cdot \cos \vartheta \quad (4.26)$$

mentre V_E ed A_E rappresentano rispettivamente il volume dell'elemento E e l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E :

$$V_E = s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.27)$$

$$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.28)$$

dove s è lo spessore dell'elemento E .

Sostituendo la (4.27) e la (4.28) nella (4.25), si ottiene:

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot R \cdot d\vartheta \cdot dz = a_{g\perp}(z) \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2}\right) \cdot d\vartheta \cdot dz \cdot \gamma \quad (4.29)$$

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot R = a_{g\perp}(z) \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2}\right) \cdot \gamma \quad (4.30)$$

Occorre adesso lavorare sull'equilibrio alla traslazione verticale nella quale sostituire la (4.27) e la (4.28), in tal modo si ha:

$$s \cdot \left(R - \frac{s}{2}\right) \cdot d\theta \cdot dz \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) = R \cdot d\theta \cdot dz \cdot p_w \quad (4.31)$$

$$s \cdot \left(R - \frac{s}{2}\right) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) = R \cdot p_w$$

La tensione tangenziale verticale di aderenza, in questo caso, è data da:

$$p_w = p_h \cdot \mu \quad (4.32)$$

che inserita nella (4.31) fornisce:

$$s \cdot \left(R - \frac{s}{2}\right) \cdot \gamma = \frac{R \cdot p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (4.33)$$

Andando a sostituire la (4.33) nella (4.30) si ricava:

$$(p_h - p_{h0}^*) = a_{g\perp}(z) \cdot \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (4.34)$$

che fornisce:

$$p_h = p_{h0}^* + \frac{a_{g\perp}(z) \cdot p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}}$$

$$p_h \cdot \left(1 - \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}}\right) = p_{h0}^*$$

$$p_h = \frac{p_{h0}^*}{1 - \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}}} \quad (4.35)$$

$$p_h = \frac{p_{h0}^*}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}$$

Avendo posto:

$$v = \frac{1}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (4.36)$$

Ricordando infine la (4.9) ottiene:

$$p_h = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \mu)} \quad (4.37)$$

Da tale risultato si può ottenere anche l'espressione delle Δp_h andando a sostituire nella (4.24) la (4.37) e la (4.9):

$$\begin{aligned} \Delta p_h &= p_h - p_{h0}^* \\ \Delta p_h &= \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \mu)} - \gamma \cdot \lambda \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z \\ \Delta p_h &= \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - v \cdot \mu \cdot a_{g\perp}(z)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ponendo:

$$\beta(z) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \mu} \quad (4.39)$$

Si può scrivere:

$$\Delta p_h = a_g(z) \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot \gamma \cdot z \quad (4.40)$$

Al fine di ottenere lo spessore s si deve inserire la (4.37) nella (4.33) che in tal modo fornisce:

$$s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot \gamma \cdot \frac{(1 + a_{g\text{-vert}})}{R \cdot \mu} = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}$$

$$s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right) \cdot \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot z}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \quad (4.41)$$

$$s \cdot \left(1 - \frac{s}{2R} \right) = \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}$$

$$s - \frac{s^2}{2R} = \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \quad (4.42)$$

$$s^2 - 2Rs + \frac{2R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} = 0$$

che fornisce la soluzione seguente:

$$s = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{2R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}} \quad (4.43)$$

Assume significato fisico solo la soluzione seguente (col segno -):

$$s = R - \sqrt{R^2 - \frac{2R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}} \quad (4.44)$$

$$s = R - \sqrt{R^2 - \frac{2R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z)) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}} \quad (4.45)$$

Ricordando che:

$$\beta(z) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \quad (4.46)$$

si ha:

$$s = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta(z) \cdot z} \quad (4.47)$$

4.1.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale di E :

Si indichino con τ_h le tensioni tangenziali orizzontali che si scambiano il toro esterno di cereale e le pareti del silos. Sotto l'ipotesi della teoria, per il singolo elemento E , l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale in direzione tangenziale (cioè secondo la tangente orizzontale alla superficie esterna dell'elemento E) fornisce:

$$\tau_h \cdot A_E = a_{g//}(z) \cdot \gamma \cdot V_E \quad (4.48)$$

dove $a_{g//}(z)$ rappresenta la componente in direzione tangenziale (direzione η) alla superficie esterna verticale dell'elemento E (vedi fig. 4.3b) dell'accelerazione orizzontale $a_g(z)$, che vale:

$$a_{g//}(z) = a_g(z) \cdot \sin \vartheta \quad (4.49)$$

Sostituendo la (4.27) e la (4.30) nella (4.48) si ottiene:

$$\tau_h \cdot R \cdot d\vartheta \cdot dz = a_{g//}(z) \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot dz \quad (4.50)$$

Tenendo conto della (4.23), della (4.32) e della (4.37) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_h \cdot R &= a_{g//}(z) \cdot \gamma \cdot s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \\ \tau_h &= a_{g//}(z) \cdot \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g-vert}} \\ \tau_h &= \left[\frac{\nu \cdot a_{g//}(z)}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu \\ \tau_h &= \left[\frac{a_g(z) \cdot \sin \vartheta}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z) \cdot \sin \vartheta}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu \quad (4.52)$$

4.1.7 Limiti di validità

4.1.7.1 Esistenza della porzione A1

Affinché la porzione A1 di cereale esista deve essere soddisfatta la relazione seguente:

$$\boxed{r_A(\theta, z) = R - s_{A, z=H} > 0, \forall \theta} \quad (4.53)$$

che fornisce:

$$R > s_{A, z=H}, \forall \theta \quad (4.54)$$

Tenendo presente la (4.47) si ha:

$$R > R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta(z=H) \cdot H}, \forall \theta \quad (4.55)$$

$$\sqrt{R^2 - R \cdot \beta(z=H) \cdot H} > 0, \forall \theta \quad (4.56)$$

che fornisce:

$$R > \beta(z=H) \cdot H, \forall \theta \quad (4.57)$$

Il valore massimo di $\beta(\theta, z)$ si ha per $\theta = 0^\circ$, per cui la condizione (4.53) è sicuramente soddisfatta se è soddisfatta la condizione seguente:

$$R > \beta(\theta = 0^\circ, z = H) \cdot H \quad (4.58)$$

In virtù della (4.46) si ottiene:

$$R > \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(H) \cdot \cos(0^\circ) \cdot \mu} \cdot H \quad (4.59)$$

che fornisce:

$$\Delta = \frac{H}{2R} > \frac{1 - \nu \cdot a_g(H) \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.60)$$

L'equazione (4.60) riporta il valore limite massimo del rapporto altezza/diametro, $\Delta_{\max-A} = \left(\frac{H}{2R} \right)_{\max-A}$, del silos affinché lo spessore massimo della porzione di cereale sostenuto verticalmente dalle pareti del silos sia minore del raggio del silos e quindi affinché la notazione adottata rimanga valida

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = cost$) si ottiene:

$$\Delta = \frac{H}{2R} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.61)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza nella forma:

$$a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \quad (4.62)$$

si ha:

$$\Delta = \frac{H}{2R} > \frac{1 - \nu \cdot (-a_{g1} \cdot H + a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} = \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.63)$$

$$\Delta = \frac{H}{2R} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.64)$$

La snellezza limite nei due casi non cambia perché l'accelerazione entra con il suo valore alla base.

4.1.7.2 Esistenza della porzione A2

Affinché esista la porzione A2 spingente sulle pareti deve essere verificata la seguente relazione:

$$\boxed{s = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \beta(z) \cdot z} > 0} \quad (4.65)$$

che fornisce:

$$R > \sqrt{R^2 - R \cdot \beta(z) \cdot z} \quad (4.66)$$

Tenendo presente la (4.46) si ha:

$$\begin{aligned} R &> \sqrt{R^2 - \frac{2R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}} \\ R &> R - \frac{2 \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \\ \frac{2 \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} &> 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Essendo che:

$$\begin{aligned} R &> 0 \\ z &\geq 0 \\ 2 \cdot \lambda \cdot \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

si deve avere:

$$1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu > 0 \quad (4.69)$$

da cui si ottiene:

$$a_g(z) < \frac{1}{\nu \cdot \mu \cdot \cos \vartheta} \quad (4.70)$$

Il valore più restrittivo si ha per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$a_g(z) < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.71)$$

Il valore più restrittivo sarà alla sommità dove l'accelerazione ha il suo massimo.

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = a_{g0}$) si ottiene:

$$a_{g0} < \frac{1}{v \cdot \mu} \quad (4.72)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza come illustrato nella (4.62) si ha:

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H < \frac{1}{v \cdot \mu} \quad (4.73)$$

4.1.7.3 Esistenza della radice quadra

Per assicurare l'esistenza della radice quadrata nel campo dei numeri reali deve essere verificata una condizione analoga alla (4.56) studiandola però su tutta l'altezza z del silos:

$$\boxed{\begin{array}{l} R^2 - R \cdot \beta(z) \cdot z \geq 0 \\ \beta(z) \cdot z \leq R \end{array}} \quad (4.74)$$

In virtù della (4.46) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \cdot z &\leq R \\ \frac{2 \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{R} \cdot z &\leq 1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \\ \frac{z}{z_0} &\leq 1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \end{aligned} \quad (4.75)$$

essendo z_0 la profondità caratteristica:

$$z_0 = \frac{R}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.76)$$

Si giunge quindi ad avere:

$$a_g(z) \leq \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \quad (4.77)$$

Il valore più restrittivo si ha per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$a_g(z) \leq \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.78)$$

Per silos con altezze inferiori alla profondità critica ($H < z_0$) il controllo risulta più restrittivo in sommità, fornendo in tal modo gli stessi parametri di controllo (4.72) e (4.73).

Per silos con altezze superiori alla profondità critica ($H \geq z_0$) il controllo risulta più restrittivo alla base, ove si ottiene, sia per accelerazione costante che per accelerazione variabile (in quanto alla base il valore risulta uguale):

$$a_{g0} \leq \left(1 - \frac{H}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.79)$$

Risulta utile notare che dalla quota corrispondente a z_0 il parametro di controllo diviene negativo.

4.1.7.4 Esistenza delle sollecitazioni

Con riferimento alla (4.37) e alla (4.52) per aver assicurata l'esistenza delle pressioni orizzontali e delle tensioni tangenziali è necessario porre:

$$1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \neq 0 \quad (4.80)$$

che fornisce:

$$\begin{aligned} \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu &\neq 1 \\ a_g(z) &\neq \frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Il cui valore più restrittivo è per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$a_g(z) \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.82)$$

Occorre notare che a tale, e ancor più selettiva, restrizione si era già giunti imponendo l'esistenza della porzione A2 che forniva:

$$a_g(z) < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.83)$$

con le specificazioni nei due casi di accelerazione (4.72) e (4.73).

.

4.1.7.5 Accelerazione orizzontale di scorrimento

La validità dell'ipotesi 4 del capitolo 3 risulta fondamentale per la valutazione dell'azione indotta dai cereali su silos a fondo piano in condizioni accelerate. L'ipotesi 4 del capitolo 3 recita:

“le forze d'inerzia che agiscono sul disco interno D a seguito dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale sono equilibrate completamente dalla risultante delle tensioni tangenziali che si sviluppano sulla superficie inferiore del disco (alla base del disco), che di seguito indicheremo con τ_{base} ”.

Gli sviluppi analitici, di seguito riportati, mostrano come l'ipotesi è verificata fintanto che l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g è inferiore ad uno specifico valore limite qui identificato e chiamato “accelerazione orizzontale di scorrimento”.

In queste analisi, per quanto riguarda la simultaneità dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale con l'accelerazione aggiuntiva verticale, la condizione più gravosa coincide con l'assumere un'accelerazione aggiuntiva verticale diretta verso il basso. Ad essa corrisponde una forza d'inerzia diretta verso l'alto che, nella scrittura dell'equazione di equilibrio in direzione verticale, vedi Eq. (4.84), ha segno opposto a quello della forza peso. Per evitare ambiguità, l'accelerazione sarà indicata con il suo valore assoluto, $|a_{g-vert}|$, ed il segno corrispondente alla condizione più gravosa di simultaneità sarà riportato esplicitamente.

Per quanto concerne l'equilibrio dinamico della porzione A1 sotto sisma, le equazioni di equilibrio in direzione verticale e in direzione orizzontale forniscono:

$$\text{Eq. Vert.} \quad p_{v,z=H} \cdot A_{A1,z=H} = V_{A1} \cdot \gamma \cdot (1 - |a_{g-vert}|) \quad (4.84)$$

$$\text{Eq. Orizz.} \quad \tau_{base} \cdot A_{A1,z=H} = a_{g-orizz} \cdot V_{A1} \cdot \gamma \quad (4.85)$$

dove:

- $p_{v,z=H} = p_v(z=H) = \gamma \cdot H$ rappresenta la pressione verticale che il cereale trasmette alla base del silos (alla quota $z = H$),

- $A_{A1,z=H} = \int_0^{2\pi} \frac{r_{A,z=H}^2}{2} d\theta$ rappresenta l'area della base minore (alla quota $z = H$) della porzione A1,

- $r_{A,z=H} = R - s_{A,z=H} = \sqrt{R^2 - \beta(\theta)RH}$ rappresenta il raggio (variabile con θ) della figura geometrica che costituisce la base della porzione A1,

- V_{A1} rappresenta il volume della porzione 1, fornito dalla (4.199),

- τ_{base} rappresentano le tensioni tangenziali di attrito tra la porzione 1 di cereale e la base del silos,

- $a_{g-orizz}$ rappresenta la accelerazione aggiuntiva orizzontale del terreno (per semplicità di notazione indicata con a_g) assunta positiva verso destra,

- $|a_{g-vert}|$ rappresenta il modulo della accelerazione aggiuntiva verticale del terreno. In questa analisi, l'accelerazione aggiuntiva verticale è considerata diretta verso il basso, in quanto questa rappresenta la condizione più gravosa di simultaneità con l'accelerazione aggiuntiva orizzontale.

Si ha che:

$$A_{A1,z=H} = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\sqrt{R^2 - \beta(\theta)RH}\right)^2}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \beta(\theta)RH}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\beta(\theta)RH}{2} d\theta \quad (4.86)$$

$$A_{A1,z=H} = \frac{R^2}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) - \frac{RH}{2} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \right) = \pi R^2 - \frac{RH}{2} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \right) \quad (4.87)$$

Essendo che:

$$\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_g \cdot \cos(\theta) \cdot \mu} \right) d\theta = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \quad (4.88)$$

si ottiene:

$$A_{A1, z=H} = \pi R^2 - \frac{RH}{2} \left(\frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.89)$$

$$A_{A1, z=H} = \pi R^2 - \pi RH \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.90)$$

Dalle equazioni (4.84), (4.90) e (4.199), si può scrivere:

$$P_{v, z=H} = \left[\pi R^2 H - \frac{\pi RH^2}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right] \cdot \gamma \cdot (1 - |a_{g-vert}|)$$

$$P_{v, z=H} = \frac{\left[\pi R^2 - \frac{\pi RH}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]}{\left[\pi R^2 - \pi RH \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]} \cdot H \cdot \gamma \cdot (1 - |a_{g-vert}|) \quad (4.91)$$

Dalle equazioni (4.85), (4.90) e (4.199), si può scrivere:

$$\tau_{base} = \frac{\left[\pi R^2 - \frac{\pi RH}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]}{\left[\pi R^2 - \pi RH \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]} \cdot H \cdot \gamma \cdot a_{g-orizz} \quad (4.92)$$

L'ipotesi 4 del capitolo 3 è verificata solamente se:

$$\tau_{base} \leq \bar{\tau}_{base} \quad (4.93)$$

dove $\bar{\tau}_{base}$ è il valore limite (massimo) che le forze di attrito possono assumere:

$$\bar{\tau}_{base} = p_{v,z=H} \cdot \mu_{base} \quad (4.94)$$

dove μ_{base} indica il coefficiente di attrito tra i grani del materiale e la base del silos.

La (4.93) in virtù delle equazioni (4.91), (4.92) e (4.94) diventa:

$$\begin{aligned} \tau_{base} &= \frac{\left[\pi R^2 - \frac{\pi RH}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]}{\left[\pi R^2 - \pi RH \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]} \cdot H \cdot \gamma \cdot a_{g-orizz} \leq \\ &\leq \bar{\tau}_{base} = p_{v,z=H} \cdot \mu_{base} = \frac{\left[\pi R^2 - \frac{\pi RH}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]}{\left[\pi R^2 - \pi RH \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \right]} \cdot H \cdot \gamma \cdot (1 - |a_{g-vert}|) \cdot \mu_{base} \end{aligned} \quad (4.95)$$

da cui:

$$a_{g-orizz} \leq (1 - |a_{g-vert}|) \cdot \mu_{base} \quad (4.96)$$

La (4.96) deve essere verificata in ogni istante temporale, affinché sia verificata l'ipotesi 4 del capitolo 3.

4.1.8 Riassunto delle limitazioni

1 Esistenza porzione A1:

Accelerazione costante

$$\Delta = \frac{H}{2R} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.97)$$

Accelerazione lineare

$$\Delta = \frac{H}{2R} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{4 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.98)$$

2 Esistenza porzione A2:

Accelerazione costante

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.99)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.100)$$

3 Esistenza della radice quadra:

per $H < z_0$

Accelerazione costante

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.101)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.102)$$

Per $H \geq z_0$

Accelerazione costante

$$a_{g0} \leq \left(1 - \frac{H}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.103)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} \leq \left(1 - \frac{H}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.104)$$

4 Esistenza delle sollecitazioni:

Accelerazione costante

$$a_{g0} \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.105)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.106)$$

5 Accelerazione orizzontale di scorrimento:

$$a_{g-orizz} \leq (1 - |a_{g-vert}|) \cdot \mu_{base} \quad (4.107)$$

4.1.9 Esempi numerici

Per una maggior chiarezza si riportano alcuni valori di tali limiti prendendo in considerazione alcuni valori tipici.

Considerando del grano contenuto in un silos d'acciaio e in un silos di calcestruzzo armato sottoposto a diverse accelerazioni verticali, si ottiene:

$1/(\nu^* \mu)$			$a_{g\text{-vert}}$			
			0,00	0,05	0,10	0,15
μ	Acciaio	0,27	3,70	3,89	4,07	4,26
	Cls	0,26	3,85	4,04	4,23	4,42

Tabella 4 Valori di $\frac{1}{\nu \cdot \mu}$ per valori comuni di $a_{g\text{-vert}}$, μ

Per controllare l'esistenza della radice quadra consideriamo un silos con le seguenti caratteristiche:

$$R = 10 \text{ m};$$

$$H = 20 \text{ m};$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

$$a_{g\text{-vert}} = 0,15;$$

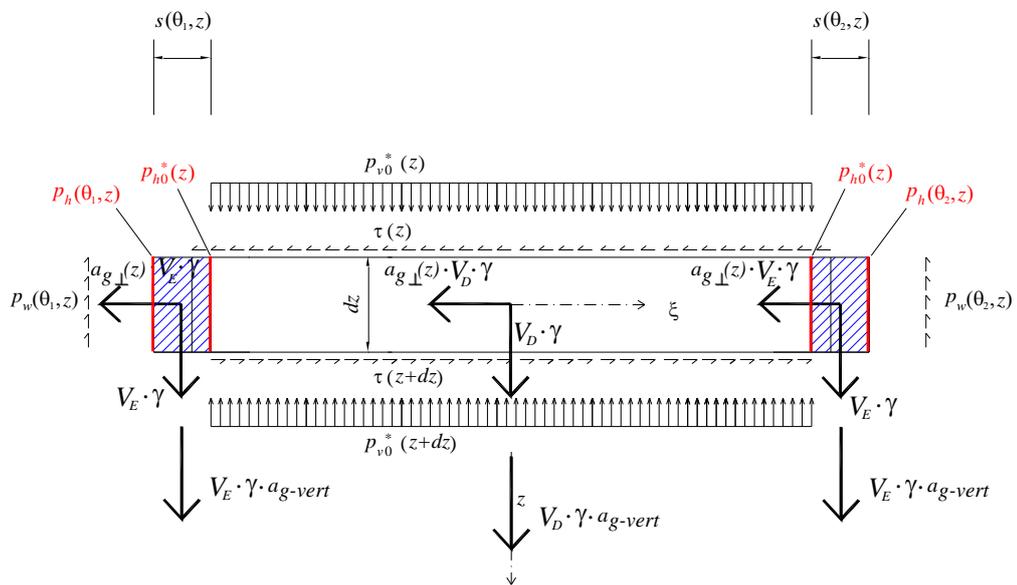
$$z_0 = 29,28 \text{ m}.$$

z	$\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{v \cdot \mu}$
0	4,26
2	3,97
4	3,68
6	3,39
8	3,10
10	2,80
12	2,51
14	2,22
16	1,93
18	1,64
20	1,35

Tabella 4.2 Valori di $\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \cdot \frac{1}{v \cdot \mu}$ al variare di z

4.2 Caso limite B

Come precedentemente si è fatto per il caso limite A, ora si andrà a sviluppare la trattazione anche nel caso limite B.



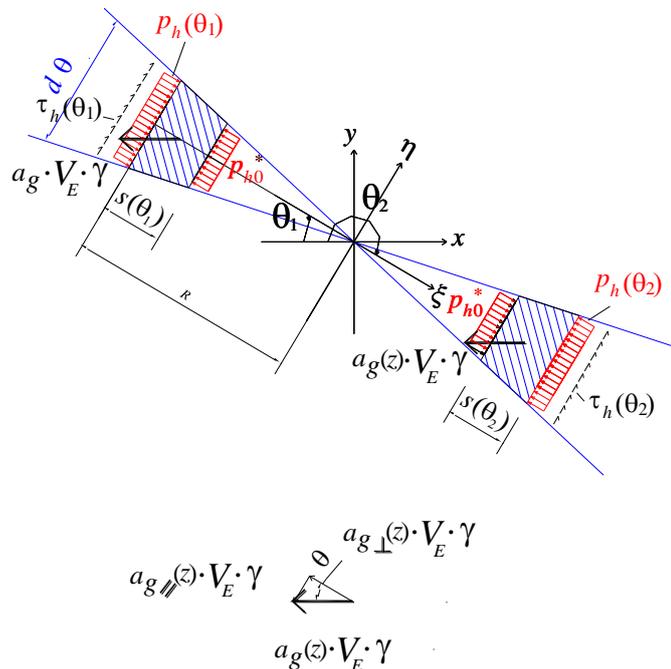


Figura 4.4 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul disco D e sulla porzione E .

Incognite del problema:

- 1 p_{v0}^* = pressione verticale che agisce sulla faccia orizzontale del disco interno D ;
- 2 τ = tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale del disco interno D ;
- 3 p_h = la pressione totale tra l'elemento E e la parete del silos;
- 4 s = spessore del toro esterno;
- 5 $\tau_{h.}$ = tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento E e le pareti del silos.

Equazioni a disposizione:

- 1 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di D ;
- 2 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di D ;
- 3 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di E ;
- 4 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di E ;
- 5 equilibrio alla traslazione in direzione tangenziale di E .

4.2.1 Le azioni agenti sul disco D

La figura 4.4 rappresenta schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento D .

Le azioni che agiscono sul disco D si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate in figura. 4.5. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_D \cdot \gamma$ peso proprio del disco D di volume V_D e densità γ ;

$p_{v0}^*(z)$ pressione verticale (rivolta verso il basso) che agisce sulla faccia orizzontale superiore del disco interno D trasmessa tra il disco in esame e quello posto sopra;

$p_{v0}^*(z + dz)$ pressione verticale (rivolta verso l'alto) che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del disco interno D trasmessa tra il disco in esame e quello posto sotto;

$a_{g-vert} \cdot V_D \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro del disco D e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra il disco D e ciascuno degli elementi E ;

$\tau(z)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale superiore del disco interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sopra;

$\tau(z + dz)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del disco interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sotto;

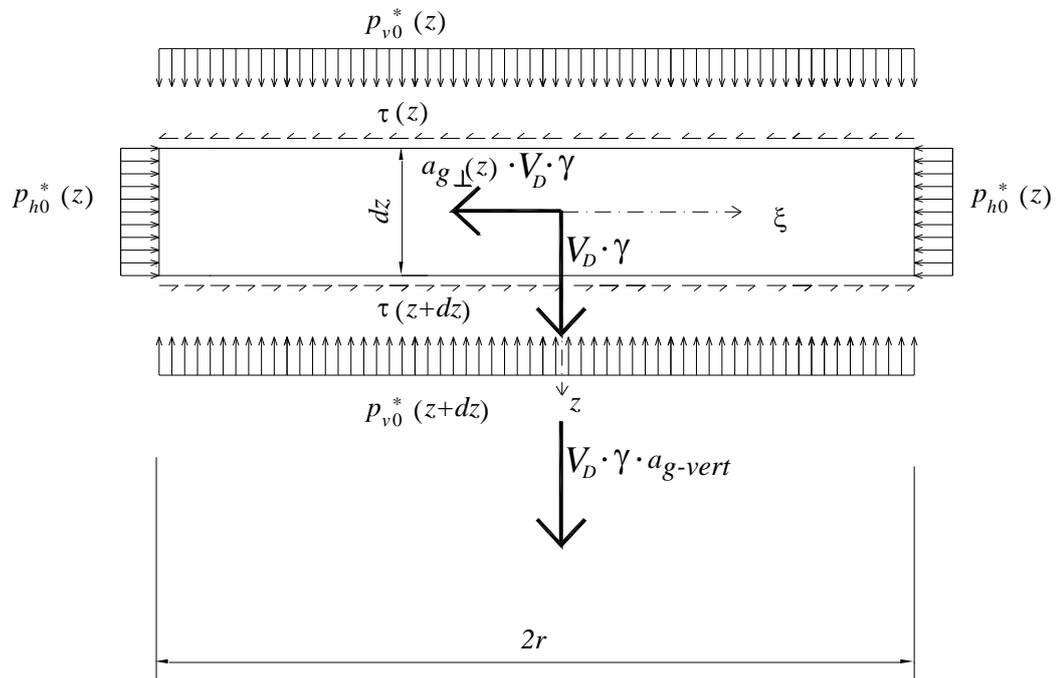


Figura 4.5 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul disco D .

4.2.2 *Equilibrio alla traslazione verticale di D*

Dall'equilibrio alla traslazione verticale del disco interno D alla quota z , si ottiene:

$$\boxed{p_{v0}^*(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D + a_{g\text{-vert}} \cdot \gamma \cdot V_D = p_{v0}^*(z + dz) \cdot A_D} \quad (4.108)$$

Come si può notare l'equazione, e gli attori in essa presenti, è uguale a quella ottenuta nel caso limite A, pertanto, il risultato sarà coincidente:

$$\boxed{P_{v0}^*(z) = \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z} \quad (4.109)$$

Essendo:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot p_{v0}^*(z) = p_{h0}(z) \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \quad (4.110)$$

si ha che:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z \quad (4.111)$$

4.2.3 *Equilibrio alla traslazione radiale di D*

Dall'equilibrio alla traslazione radiale del disco interno D alla quota z , si ottiene:

$$\tau(z + dz) \cdot A_D = a_g(z) \cdot \gamma \cdot V_D + \tau(z) \cdot A_D \quad (4.112)$$

Come per l'equilibrio precedente, anche questo è uguale in tutto a quello del caso limite A.

Di conseguenza i risultati saranno uguali.

Accelerazione costante

$$\tau(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot z \quad (4.113)$$

Accelerazione lineare

$$\tau(z) = \left(-a_{g1} \cdot \frac{z^2}{2} + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot z \right) \cdot \gamma \quad (4.114)$$

4.2.4 Le azioni agenti sull'elemento E

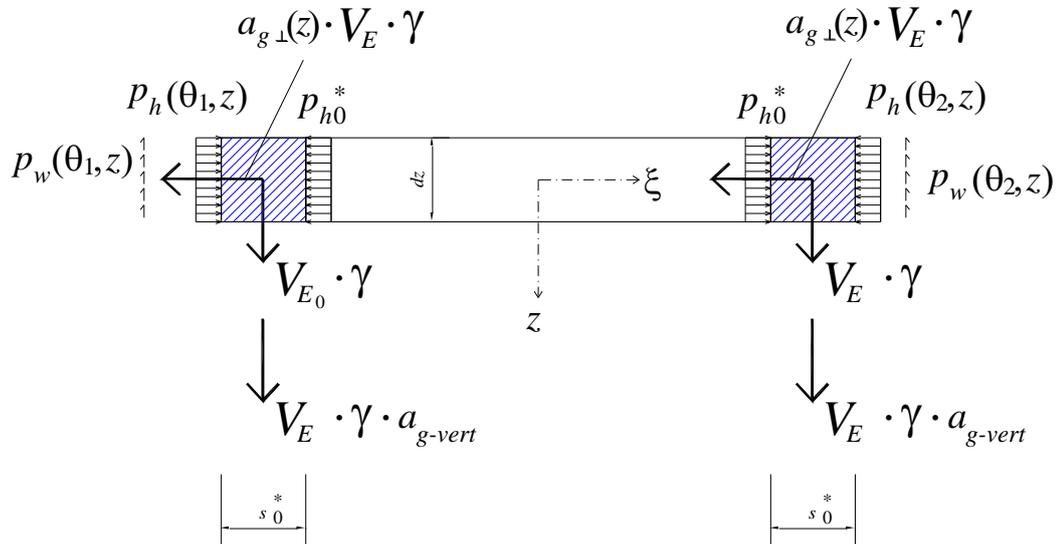


Figura 4.6a Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su due elementi simmetrici E in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale ed orizzontale; sezione verticale.

Le figure 4.6 rappresentano schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento E .

Le azioni che agiscono sull'elemento E si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate nelle figure 4.6. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_E \cdot \gamma$ peso proprio dell'elemento E di volume V_E e densità γ ;

$p_w(z)$ tensioni tangenziali di aderenza tra l'elemento E e la parete metallica del silos;

$a_{g\text{-vert}} \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione $a_{g\text{-vert}}$ (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione $a_{g\text{-vert}}$ verso l'alto).

horizontal section

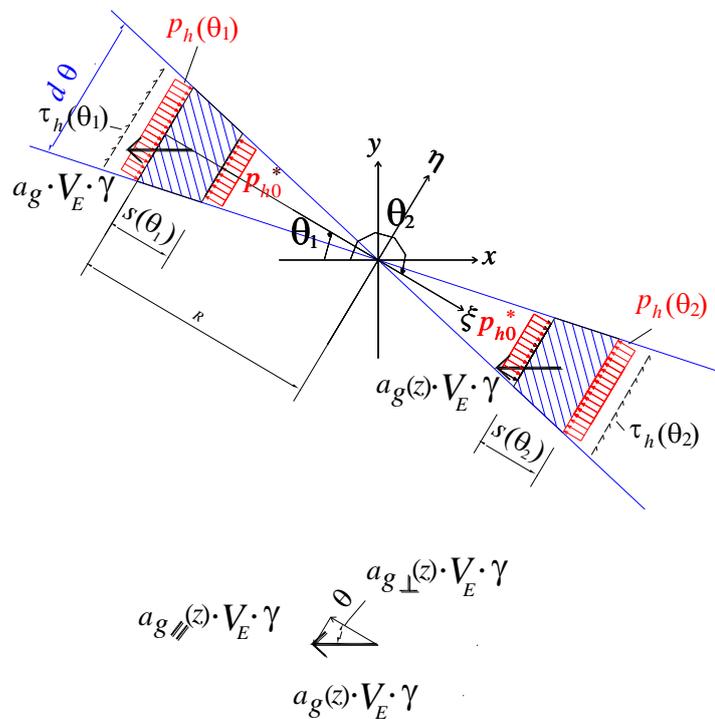


Figura 4.6b Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su due elementi simmetrici E in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale ed orizzontale; sezione orizzontale.

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra l'elemento E e il disco D .

Δp_h sovrappressione (o depressione) dovuta agli effetti dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale e da sommare (o sottrarre) alla p_{h0}^* tra l'elemento E e la parete del silos;

$a_g \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione x per effetto dell'accelerazione a_g (forza d'inerzia rivolta verso sinistra avendo assunto positiva l'accelerazione $a_{g-orizz}$ verso destra);

$\tau_h(z)$ tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento E e le pareti del silos.

4.2.5 Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E :

Si consideri l'elemento E posizionato alla quota generica z .

Le due equazioni di equilibrio risultano accoppiate per cui vi è la necessità di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta p_h \cdot A_E = a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \left(V_E + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot z \right) \\ \left(V_E + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot z \right) \cdot \gamma \cdot (1 - a_{g\text{-vert}}) = A_E \cdot p_w \end{cases} \quad (4.115)$$

Dove la prima delle (4.115) è l'equilibrio alla traslazione orizzontale e la seconda è l'equilibrio alla traslazione verticale.

In questi equilibri entra anche il peso della porzione di cereale posizionata direttamente al di sopra della porzione sospesa alle pareti.

In presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale, la pressione totale, p_h , tra l'elemento E e la parete del silos è data da:

$$p_h = p_{h0}^* + \Delta p_h \quad (4.116)$$

che permette di riscrivere la (4.115) nel seguente modo:

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot A_E = a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \left(V_E + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot z \right) \quad (4.117)$$

dove $a_{g\perp}(z)$ rappresenta la componente in direzione normale (direzione ξ) alla superficie esterna verticale dell'elemento E (vedi Fig. 15b) dell'accelerazione orizzontale $a_g(z)$, che vale:

$$a_{g\perp}(z) = a_g(z) \cdot \cos \vartheta \quad (4.118)$$

mentre V_E ed A_E rappresentano rispettivamente il volume dell'elemento E e l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E :

$$V_E = s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.119)$$

$$A_E = R \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.120)$$

dove s è lo spessore dell'elemento E .

Sostituendo la (4.119) e la (4.120) nella (4.117), si ottiene:

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot R \cdot d\vartheta \cdot dz = a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \left(s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot dz + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot z \right)$$

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot R = a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \left(s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \quad (4.121)$$

Occorre adesso lavorare sull'equilibrio alla traslazione verticale nella quale sostituire la (4.119) e la (4.120), in tal modo si ha:

$$\left(s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) d\theta \cdot ds \cdot z \right) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) = R \cdot d\theta \cdot dz \cdot p_w \quad (4.122)$$

$$\left(s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) = R \cdot p_w$$

La tensione tangenziale verticale di aderenza, in questo caso, è data da:

$$p_w = p_h \cdot \mu \quad (4.123)$$

Che inserita nella (4.122) fornisce:

$$\left(s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) = R \cdot p_h \cdot \mu \quad (4.124)$$

$$\left(s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot \frac{ds}{dz} \cdot z \right) = \frac{R \cdot p_h \cdot \mu}{\gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}})}$$

Andando a sostituire la (4.124) nella (4.121) si ricava:

$$(p_h - p_{h0}^*) = a_{g\perp}(z) \cdot \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (4.125)$$

che fornisce:

$$\begin{aligned}
 p_h &= p_{h0}^* + \frac{a_{g\perp}(z) \cdot p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \\
 p_h \cdot \left(1 - \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \right) &= p_{h0}^* \\
 p_h &= \frac{p_{h0}^*}{1 - \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}}} \\
 p_h &= \frac{p_{h0}^*}{1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

Avendo posto:

$$v = \frac{1}{1 + a_{g\text{-vert}}} \tag{4.127}$$

Ricordando infine la (4.111) ottiene:

$$p_h = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu)} \tag{4.128}$$

Da tale risultato si può ottenere anche l'espressione delle Δp_h andando a sostituire nella (4.116) la (4.128) e la (4.111):

$$\begin{aligned}
 \Delta p_h &= p_h - p_{h0}^* \\
 \Delta p_h &= \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{v \cdot (1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu)} - \gamma \cdot \lambda \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z \\
 \Delta p_h &= \frac{a_{g\perp}(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - v \cdot \mu \cdot a_{g\perp}(z)}
 \end{aligned} \tag{4.129}$$

Ponendo:

$$\beta(z) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \tag{4.130}$$

si può scrivere:

$$\Delta p_h = a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot \gamma \cdot z \quad (4.131)$$

Al fine di ottenere lo spessore s si deve inserire la (4.128) nella (4.124) che in tal modo fornisce:

$$\begin{aligned} \left[s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot \frac{ds}{dz} \cdot z \right] \cdot \gamma &= \frac{R \cdot \mu \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot z}{(1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu)} \\ s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot \frac{ds}{dz} \cdot z &= \frac{R \cdot \mu \cdot \lambda \cdot z}{(1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu)} \\ s \cdot \left(R - \frac{s}{2} \right) + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot \frac{ds}{dz} \cdot z &= R \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \end{aligned} \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} sR - \frac{s^2}{2} + R \frac{ds}{dz} z - s \frac{ds}{dz} z - \frac{ds}{2} \frac{ds}{dz} z &= R \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \\ \frac{s^2}{2} - sR + s \frac{ds}{dz} z - R \frac{ds}{dz} z + \frac{ds}{2} \frac{ds}{dz} z + R \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot z &= 0 \end{aligned} \quad (4.133)$$

Si trascura il termine in ds^2 (infinitesimo di ordine superiore) ottenendo:

$$\frac{s^2}{2} - sR + s \frac{ds}{dz} z - R \frac{ds}{dz} z + R \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot z = 0 \quad (4.134)$$

L'equazione differenziale sovrastante ha soluzioni diverse a seconda della variazione dell'accelerazione lungo l'altezza.

Pertanto si esplica di seguito la soluzione ottenuta per:

- 1) $a_g(z) = a_{g0}$
- 2) $a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H)$

Accelerazione costante

$$s = R \pm \sqrt{R^2 - \frac{R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu)}} \quad (4.135)$$

Assume significato fisico solo la soluzione seguente (col segno -):

$$s = R - \sqrt{R^2 - \frac{R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - v \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu)}} \quad (4.136)$$

Ricordando che:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \quad (4.137)$$

si ha:

$$s = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z} \quad (4.138)$$

Accelerazione lineare

$$s = R \pm \sqrt{R^2 + \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot + \left(-\frac{1}{v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right)} \quad (4.139)$$

Assume significato fisico solo la soluzione seguente (col segno -):

$$s = R - \sqrt{R^2 + \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot + \left(-\frac{1}{v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right)} \quad (4.140)$$

4.2.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale di E:

Si indichino con τ_h le tensioni tangenziali orizzontali che si scambiano il toro esterno di cereale e le pareti del silos. Sotto l'ipotesi della teoria, per il singolo elemento E , l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale in direzione tangenziale (cioè secondo la tangente orizzontale alla superficie esterna dell'elemento E) fornisce:

$$\tau_h \cdot A_E = a_{g//}(z) \cdot \gamma \cdot \left(V_E + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot dz \right) \quad (4.141)$$

dove $a_{g//}(z)$ rappresenta la componente in direzione tangenziale (direzione η) alla superficie esterna verticale dell'elemento E (vedi fig. 4.5) dell'accelerazione orizzontale $a_g(z)$, che vale:

$$a_{g//}(z) = a_g(z) \cdot \sin \vartheta \quad (4.142)$$

Sostituendo la (4.120) si ottiene:

$$\tau_h \cdot R \cdot d\vartheta \cdot dz = a_{g//}(z) \cdot \gamma \cdot \left(V_E + \left(R - s - \frac{ds}{2} \right) \cdot d\vartheta \cdot ds \cdot dz \right) \quad (4.143)$$

Tenendo conto della (4.122), della (4.123) e della (4.128) si ottiene:

$$\tau_h = a_{g//}(z) \cdot \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g-vert}}$$

$$\tau_h = \left[\frac{\nu \cdot a_{g//}(z)}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu \quad (4.144)$$

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z) \cdot \sin \vartheta}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu$$

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z) \cdot \sin \vartheta}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu \quad (4.145)$$

4.2.7 Limiti di validità

4.2.7.1 Esistenza della porzione B1

Affinché la porzione B1 di cereale esista deve essere soddisfatta la relazione seguente:

$$\boxed{r_A(\theta, z) = R - s_{B, z=H} > 0, \forall \theta} \quad (4.146)$$

che fornisce:

$$R > s_{B, z=H}, \forall \theta \quad (4.147)$$

Accelerazione costante

Tenendo presente la (4.138) si ha:

$$R > R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{\beta(z=H)}{2} \cdot H}, \forall \theta \quad (4.148)$$

$$\sqrt{R^2 - R \cdot \frac{\beta(z=H)}{2} \cdot H} > 0, \forall \theta \quad (4.149)$$

che fornisce:

$$R > \frac{\beta(z=H)}{2} \cdot H, \forall \theta \quad (4.150)$$

Il valore massimo di $\beta(\theta, z)$ si ha per $\theta = 0^\circ$, per cui la condizione (4.146) è sicuramente soddisfatta se è soddisfatta la condizione seguente:

$$R > \frac{\beta(\theta = 0^\circ, z = H)}{2} \cdot H \quad (4.151)$$

In virtù della (4.137) si ottiene:

$$R > \frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos(0^\circ)} \cdot \mu \cdot H \quad (4.152)$$

che fornisce:

$$\Delta = \frac{H}{2R} < \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.153)$$

L'equazione (4.153) riporta il valore limite massimo del rapporto altezza/diametro, $\Delta_{\max-B} = \left(\frac{H}{2R} \right)_{\max-B}$, del silos affinché lo spessore massimo della porzione di cereale sostenuto verticalmente dalle pareti del silos sia minore del raggio del silos e quindi affinché la notazione adottata rimanga valida

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza nella forma:

$$a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \quad (4.154)$$

si ha:

$$R > R - \sqrt{R^2 + \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{H \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot H \cdot + \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(H)} \right] \right)} \quad (4.155)$$

Sviluppando si ottiene:

$$R > \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{H \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot H \cdot + \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(H)} \right] \right) \quad (4.156)$$

Il valore più restrittivo si ha per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$\frac{1}{a_{g1}^2} \cdot \left(-a_{g1} \cdot H \cdot + \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(H)} \right] \right) < \frac{R \cdot H \cdot \mu \cdot \nu}{2 \cdot \lambda} \quad (4.157)$$

La limitazione non è più sulla snellezza.

4.2.7.2 Esistenza della porzione B2

Affinché esista la porzione B2 spingente sulle pareti deve essere verificata la seguente relazione:

$$\boxed{s > 0} \quad (4.158)$$

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = a_{g0}$) si ha:

$$s = R - \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z} > 0 \quad (4.159)$$

che fornisce

$$R > \sqrt{R^2 - R \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z} \quad (4.160)$$

Tenendo presente la (4.137) si ha:

$$\begin{aligned} R &> \sqrt{R^2 - \frac{R \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu}} \\ R &> R - \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \\ \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} &> 0 \end{aligned} \quad (4.161)$$

Essendo che:

$$\begin{aligned} R &> 0 \\ z &\geq 0 \\ \lambda \cdot \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.162)$$

si deve avere:

$$1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu > 0 \quad (4.163)$$

da cui si ottiene:

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu \cdot \cos \vartheta} \quad (4.164)$$

Il valore più restrittivo si ha per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.165)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza come illustrato nella (4.154) si ha:

$$R - \sqrt{R^2 + \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right)} > 0 \quad (4.166)$$

che fornisce

$$R > \sqrt{R^2 + \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right)} \quad (4.167)$$

Sviluppando si ha:

$$R > R + \frac{2 \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right) > 0 \quad (4.168)$$

ottenendo:

$$\frac{2 \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot \left(-\frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - \nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right) > 0 \quad (4.169)$$

4.2.7.3 Esistenza della radice quadra

Occorre assicurare l'esistenza della radice quadrata nel campo dei numeri reali.

Accelerazione costante

Per assicurare l'esistenza della radice quadrata nel campo dei numeri reali, deve essere verificata una condizione analoga alla (4.149), studiandola però su tutta l'altezza z del silos:

$$\boxed{\begin{array}{l} R^2 - R \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \geq 0 \\ \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \leq R \end{array}} \quad (4.170)$$

In virtù della (4.137) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \cdot z &\leq R \\ \frac{\lambda \cdot \mu}{R} \cdot z &\leq 1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \\ \frac{z}{2z_0} &\leq 1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \end{aligned} \quad (4.171)$$

essendo z_0 la profondità caratteristica:

$$z_0 = \frac{R}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (4.172)$$

Si giunge quindi ad avere:

$$a_{g0} \leq \left(1 - \frac{z}{2z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \quad (4.173)$$

Il valore più restrittivo si ha per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$a_{g0} \leq \left(1 - \frac{z}{2z_0}\right) \cdot \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.174)$$

Il controllo risulta più restrittivo alla base ove si ottiene:

$$a_{g0} \leq \left(1 - \frac{H}{2z_0}\right) \cdot \frac{1}{v \cdot \mu} \quad (4.175)$$

Accelerazione lineare

Nel caso di accelerazione lineare, la condizione si esplicita nella seguente forma:

$$R^2 + \frac{2 \cdot R \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \cos \vartheta} \cdot \left(-a_{g1} \cdot z \cdot + \left(-\frac{1}{v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \right) \leq R \quad (4.176)$$

Giungendo così ad avere:

$$\frac{2 \cdot \lambda}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \cos \vartheta} \left(-\frac{1}{v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} + a_g(0) \right) \cdot \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(0)}{1 - v \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \cdot a_g(z)} \right] \leq -R + \frac{2 \cdot \lambda \cdot a_{g1}}{a_{g1} \cdot v \cdot \cos \vartheta} \quad (4.177)$$

4.2.7.4 Esistenza delle sollecitazioni

Con riferimento alla (4.128) e alla (4.145), per aver assicurata l'esistenza delle pressioni orizzontali e delle tensioni tangenziali è necessario porre:

$$1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu \neq 0 \quad (4.178)$$

che fornisce:

$$\begin{aligned} \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \mu &\neq 1 \\ a_g(z) &\neq \frac{1}{\nu \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \end{aligned} \quad (4.179)$$

Il cui valore più restrittivo è per $\theta = 0^\circ$, fornendo in tal modo:

$$a_g(z) \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.180)$$

Accelerazione costante

$$a_{g0} \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.181)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1}H \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (4.182)$$

4.2.7.5 Accelerazione orizzontale di scorrimento

Gli sviluppi analitici, di seguito riportati, mostrano come l'ipotesi 4 del capitolo 3 è verificata fintanto che l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g è inferiore ad uno specifico valore limite qui identificato e chiamato "accelerazione orizzontale di scorrimento".

Per quanto concerne l'equilibrio dinamico della porzione B1 sotto sisma, le equazioni di equilibrio in direzione verticale e in direzione orizzontale forniscono:

$$\text{Eq. Vert.} \quad p_{v,z=H} \cdot A_{B1} = V_{B1} \cdot \gamma \cdot (1 - |a_{g\text{-vert}}|) \quad (4.183)$$

$$\text{Eq. Orizz.} \quad \tau_{base} \cdot A_1 = a_{g\text{-orizz}} \cdot V_1 \cdot \gamma \quad (4.184)$$

dove:

- $p_{v,z=H} = p_v(z=H) = \gamma \cdot H$ rappresenta la pressione verticale che il cereale trasmette alla base del silos (alla quota $z = H$);

- $A_{B1} = \int_0^{2\pi} \frac{r_B(\theta)^2}{2} d\theta$ rappresenta l'area di base della porzione B1;

- $r_B(\theta) = R - \frac{\beta(\theta)}{2} \cdot H$ rappresenta il raggio (variabile con θ) della figura geometrica che costituisce la base della porzione B1;

- $V_{B1} = A_{B1} \cdot H$ rappresenta il volume della porzione B1.

Dalla (4.183):

$$\begin{aligned} p_{v,z=H} \cdot A_{B1} &= A_{B1} \cdot H \cdot \gamma \cdot (1 - |a_{g\text{-vert}}|) \\ p_{v,z=H} &= \gamma \cdot H \cdot (1 - |a_{g\text{-vert}}|) \end{aligned} \quad (4.185)$$

Dalla (4.184):

$$\tau_{base} = \frac{\gamma \cdot V_{B1} \cdot a_{g\text{-orizz}}}{A_{B1}} = \frac{\gamma \cdot A_{B1} \cdot H \cdot a_{g\text{-orizz}}}{A_{B1}} = \gamma \cdot H \cdot a_{g\text{-orizz}} \quad (4.186)$$

L'ipotesi 4 del capitolo 3 è verificata solamente se:

$$\tau_{base} \leq \bar{\tau}_{base} \quad (4.187)$$

dove $\bar{\tau}_{base}$ è il valore limite (massimo) che le forze di attrito possono assumere:

$$\bar{\tau}_{base} = p_{v,z=H} \cdot \mu_{base} \quad (4.188)$$

dove μ_{base} indica il coefficiente di attrito tra i grani del materiale e la base del silos.

La (4.187) in virtù delle equazioni (4.185), (4.186) e (4.188) diventa:

$$\tau_{base} = \gamma \cdot H \cdot a_{g-orizz} \leq \bar{\tau}_{base} = p_{v,z=H} \cdot \mu_{base} = \gamma \cdot H \cdot (1 - |a_{g-vert}|) \cdot \mu_{base} \quad (4.189)$$

da cui:

$$a_{g-orizz} \leq (1 - |a_{g-vert}|) \cdot \mu_{base} \quad (4.190)$$

La (4.190) deve essere verificata in ogni istante temporale, affinché sia verificata l'ipotesi 4 del capitolo 3.

4.3 Le azioni agenti sull'elemento E: confronto tra casi limite

E' interessante notare come entrambi i casi limite portino alla identificazione delle stesse pressioni aggiuntive orizzontali Δp_h (e pertanto agli stessi valori delle pressioni orizzontali e verticali trasmesse dal cereale alle pareti del silos) fornendo pertanto robustezza al risultato ottenuto.

4.4 Le porzioni in cui può essere suddiviso il cereale in relazione al suo comportamento in condizioni accelerate

Per dare senso fisico ai risultati ottenuti nei paragrafi 4.1 e 4.2 sulle azioni trasmesse dal cereale alle pareti del silos in condizioni accelerate (accelerazione orizzontale e verticale) e, quindi, per fornire immediata comprensione al progettista di quali siano le porzioni di cereale che vanno a scaricare azioni sulle pareti del silos in condizioni accelerate, risulta opportuno suddividere il cereale in diverse porzioni secondo quanto di seguito riportato:

Caso limite A:

- **Porzione A1:** è la quota parte di cereale che si appoggia sul cereale sottostante via via fino alla base del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 4.1.5 e 4.1.6). Questa porzione di cereale non interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con il tronco di cono (rovesciato) di asse verticale (rappresentato in giallo in figura 4.7) avente come base minore la figura geometrica piana che si ottiene tracciando nel piano $z = H$ (quindi alla base del silos) la curva $r(z, \theta) = R - s(z, \theta) = R - \frac{\beta(z, \theta)}{2} \cdot z$ per $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ e come base maggiore la circonferenza del silos (posizionata alla quota $z = 0$).

- **Porzione A2:** è la quota parte di cereale sostenuta interamente dalle pareti laterali del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 4.1.5 e 4.1.6). Questa porzione di cereale interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con la corona cilindrica di asse verticale

(rappresentata in rosso in figura 4.8) e di spessore $s = s(z, \theta)$ variabile in funzione della quota z e dell'angolo θ sul piano orizzontale.

Caso limite B:

- **Porzione B1:** è la quotaparte di cereale che si appoggia sul cereale sottostante via via fino alla base del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 4.2.5 e 4.2.6). Questa porzione di cereale non interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con il cilindro di asse verticale (rappresentato in giallo in figura 4.9) che si può ricavare trasladando in direzione z la figura geometrica piana che si ottiene tracciando nel piano $z = H$ (quindi alla base del silos) la curva $r(z, \theta) = R - s(z, \theta)$ per $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

- **Porzione B2:** è la quotaparte di cereale sostenuta interamente per via diretta dalle pareti laterali del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 4.2.5 e 4.2.6). Questa porzione di cereale interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con la corona cilindrica di asse verticale (rappresentata in rosso in figura 4.10) e di spessore $s = s(z, \theta)$ variabile in funzione della quota z e dell'angolo θ sul piano orizzontale.

- **Porzione B3:** è la quotaparte di cereale sostenuta interamente per via indiretta (attraverso il cereale della porzione 2) dalle pareti laterali del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 4.2.5 e 4.2.6). Questa porzione di cereale interagisce indirettamente con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con la corona cilindrica di asse verticale (rappresentata in blu in figura 4.11) e di spessore $t(z, \theta) = s(z = H, \theta) - s(z, \theta)$

variabile in funzione della quota z e dell'angolo θ sul piano orizzontale. Questa porzione costituisce la parte restante del cilindro di cereale quando si sottraggono la porzione 1 e la porzione 2.

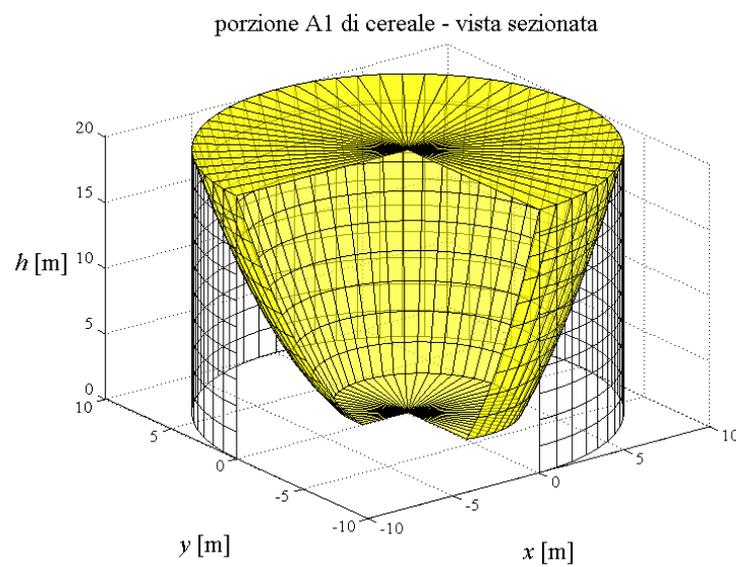
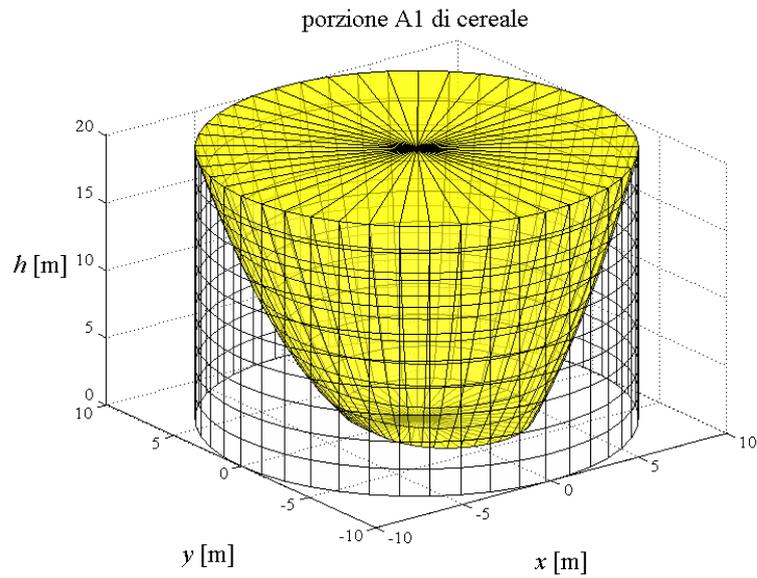


Figura 4.7 Porzione A1 di cereale: vista intera, vista sezionata.

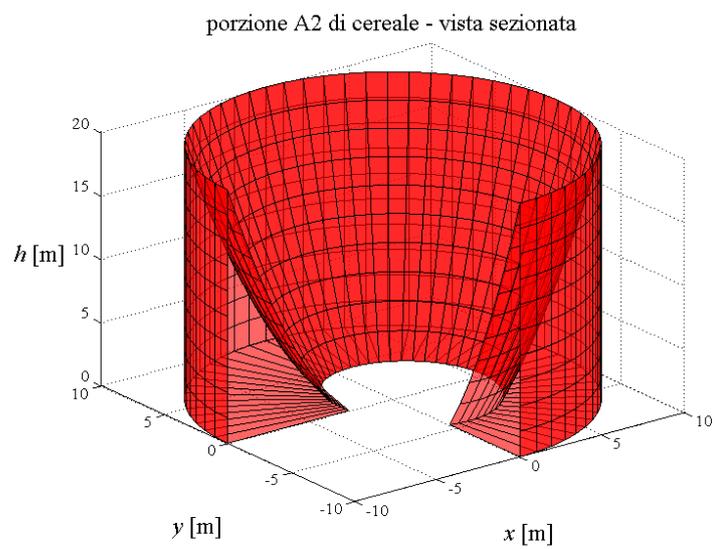
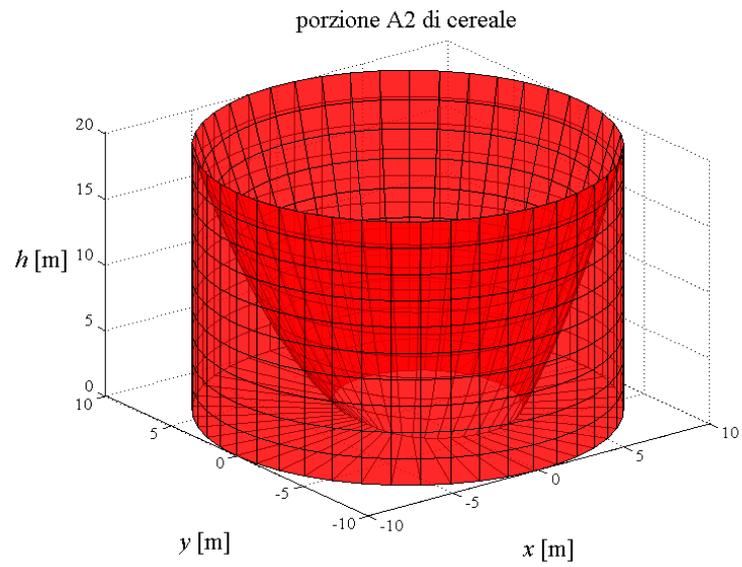


Figura 4.8 Porzione A2 di cereale: vista intera, vista sezionata.

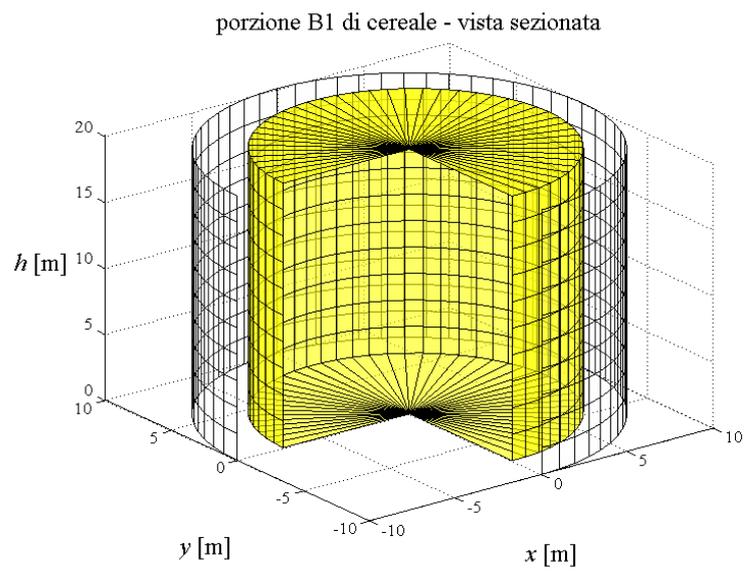
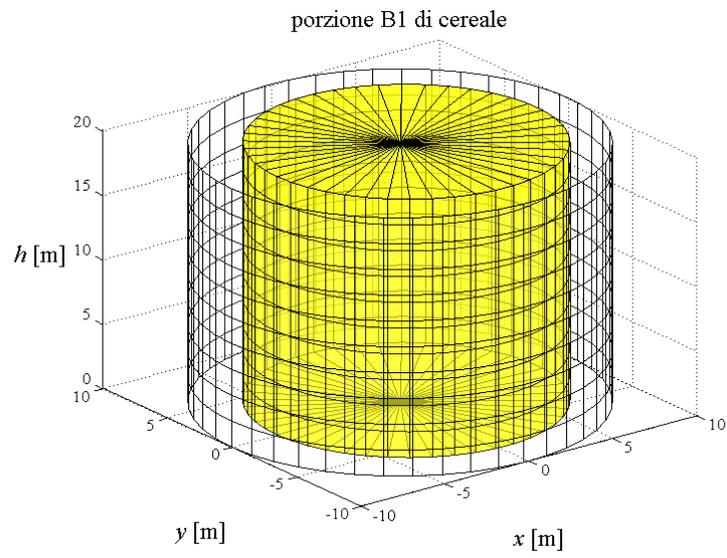


Figura 4.9 Porzione B1 di cereale: vista intera, vista sezionata.

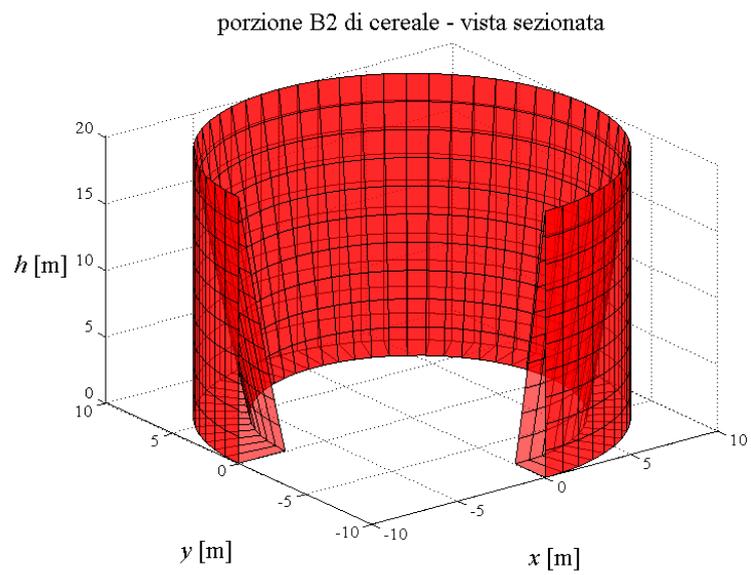
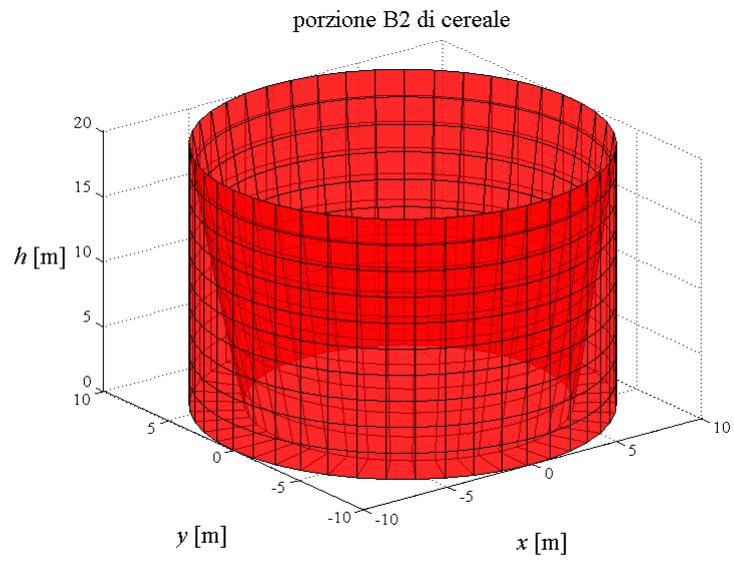


Figura 4.10 Porzione B2 di cereale: vista intera, vista sezionata.

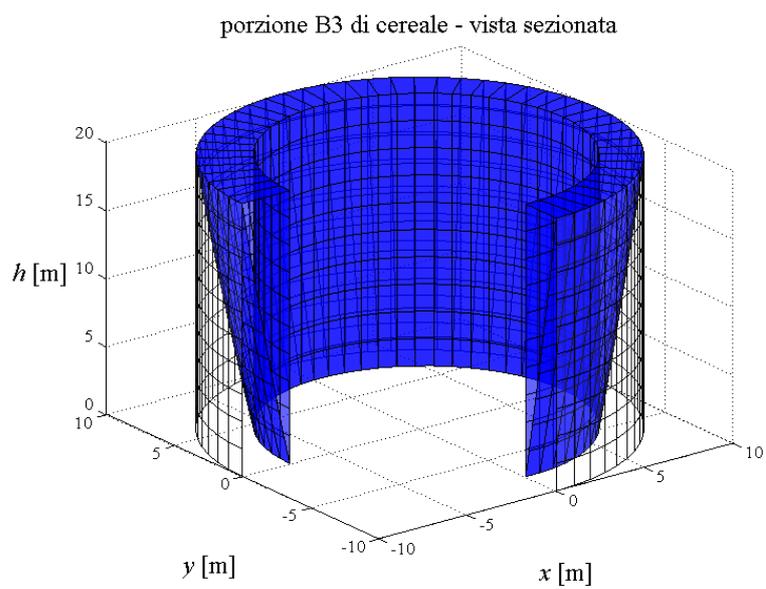
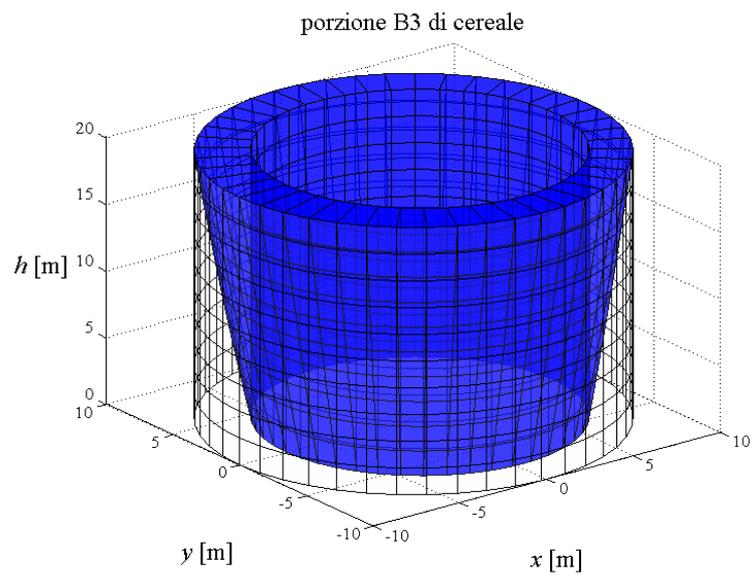


Figura 4.11 Porzione B3 di cereale: vista intera, vista sezionata.

4.5 Calcolo del volume delle porzioni di cereale

In questa sezione si identificheranno formule analitiche per il calcolo del volume delle porzioni di cereale, descritte nella sezione 4.4 e rappresentate in figura 4.12 e in figura 4.13. Tale calcolo può risultare utile per l'interpretazione fisica dei risultati presentati nei paragrafi 4.1 e 4.2.

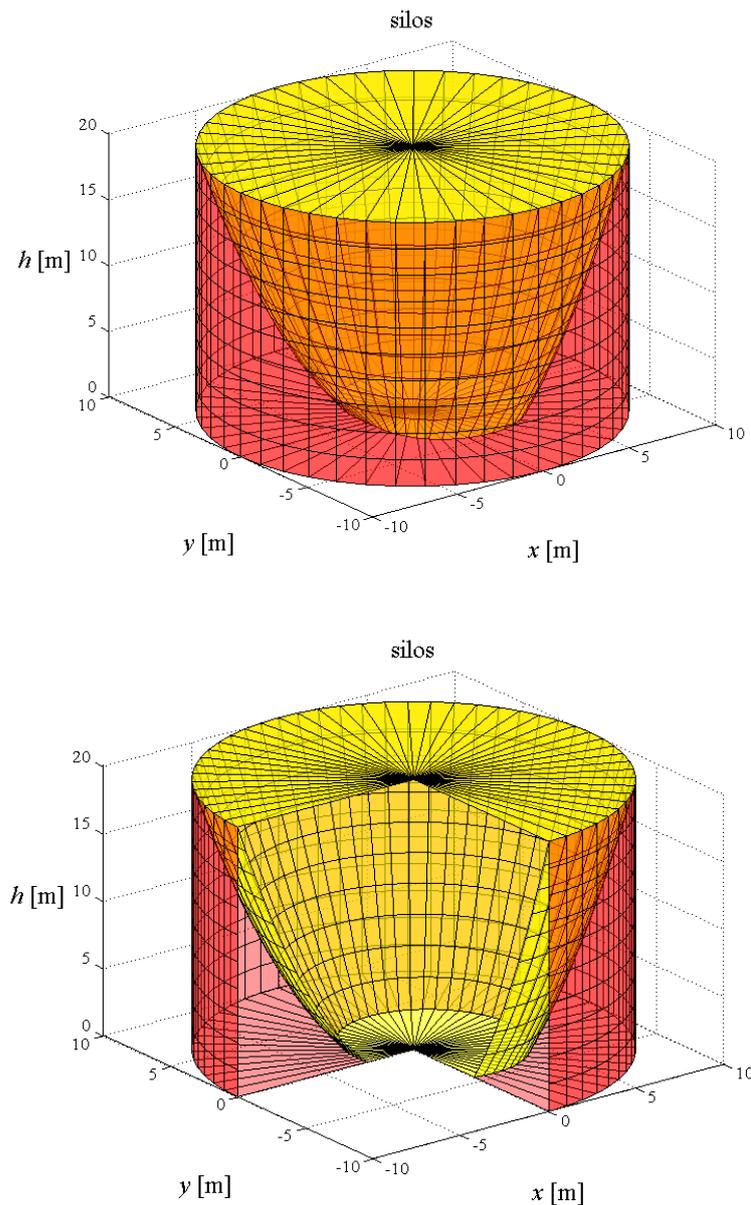


Figura 4-12 Viste tridimensionali della porzione A1 (in giallo) e della porzione A2 (in rosso) del silos cereali a fondo piano: vista intera, vista sezionata.

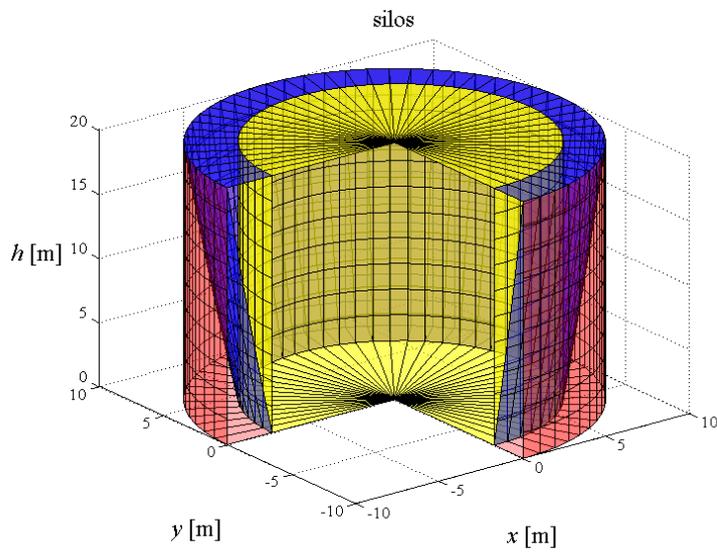
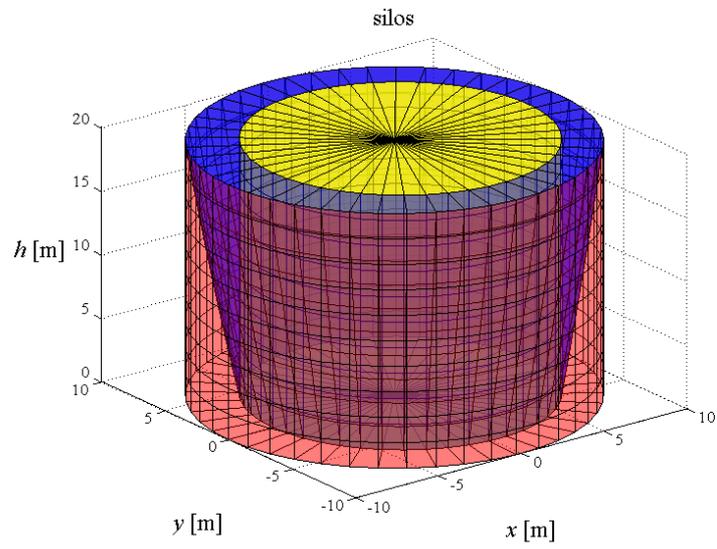


Figura 4.13 Viste tridimensionali della porzione B1 (in giallo), della porzione B2 (in rosso) e della porzione B3 (in blu) del silos cereali a fondo piano: vista intera, vista sezionata.

4.5.1 Calcolo del volume della porzione A1

Il volume della porzione A1, V_{A1} , è dato da:

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{r_A^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.191)$$

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{(R - s_A)^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.192)$$

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{(R - R + \sqrt{R^2 - \beta Rz})^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \beta Rz}{2} \cdot d\theta \cdot dz$$

$$V_{A1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \cdot dz - \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R}{2} \beta z \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.193)$$

$$V_{A1} = \frac{R^2}{2} \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{R}{2} \int_0^H z \cdot dz \int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \quad (4.194)$$

$$V_{A1} = \pi R^2 H - \frac{RH^2}{4} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \right) \quad (4.195)$$

Essendo:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{(1 - v \cdot a_g \cdot \cos \theta \cdot \mu)} \quad (4.196)$$

si ha:

$$\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_g \cdot \cos(\theta) \cdot \mu} \right) d\theta = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \quad (4.197)$$

per cui la (4.195) diventa:

$$V_{A1} = \pi R^2 H - \frac{RH^2}{4} \left(\frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.198)$$

$$V_{A1} = \pi R^2 H - \pi RH^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.199)$$

4.5.2 *Calcolo del volume della porzione A2*

Il volume della porzione A2, V_{A2} , è dato dalla differenza tra il volume totale del silos, V_{tot} , e il volume della porzione A1, V_{A1} :

$$V_{A2} = V_{tot} - V_{A1} \quad (4.200)$$

dove il volume totale del silos vale:

$$V_{tot} = \pi R^2 H \quad (4.201)$$

ed il volume della porzione 1 è dato dalla (4.199). Pertanto si ha:

$$V_{A2} = \pi R^2 H - \pi R^2 H + \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.202)$$

che fornisce:

$$V_{A2} = \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.203)$$

4.5.3 Calcolo del volume della porzione B1

Il volume della porzione B1, V_{B1} , è dato da:

$$V_{B1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{r_{B,z=H}^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.204)$$

$$V_{B1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{(R - s_{B,z=H})^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.205)$$

$$V_{B1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{\left(R - R + \sqrt{R^2 - \frac{\beta}{2} RH} \right)^2}{2} \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \frac{\beta}{2} RH}{2} \cdot d\theta \cdot dz$$

$$V_{B1} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \cdot dz - \int_0^H \int_0^{2\pi} \frac{\beta}{4} RH \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.206)$$

$$V_{B1} = \frac{R^2}{2} \int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{RH}{4} \int_0^H dz \int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \quad (4.207)$$

$$V_{B1} = \pi R^2 H - \frac{RH^2}{4} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) d\theta \right) \quad (4.208)$$

Tenendo conto della (4.197) si ottiene:

$$V_{B1} = \pi R^2 H - \frac{RH^2}{4} \left(\frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.209)$$

$$V_{B1} = \pi R^2 H - \pi RH^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.210)$$

4.5.4 Calcolo del volume della porzione B2

Il volume della porzione B2, V_{B2} , è dato da:

$$V_{B2} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - r_B^2}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.211)$$

$$V_{B2} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - (R - s_B)^2}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - \left(R - R + \sqrt{R^2 - \frac{\beta}{2} Rz} \right)^2}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.212)$$

$$V_{B2} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - R^2 + \frac{\beta}{2} Rz}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{4} Rz \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.213)$$

$$V_{B2} = \frac{R}{4} \left(\int_0^H z \cdot dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta \right) = \frac{RH^2}{8} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta \right) \quad (4.214)$$

Tenendo conto della (4.197) si ottiene:

$$V_{B2} = \frac{RH^2}{8} \left(\frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.215)$$

$$V_{B2} = \frac{\pi RH^2}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.216)$$

4.5.5 Calcolo del volume della porzione B3

Il volume della porzione B3, V_{B3} , è dato da:

$$V_{B3} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{r_B^2 - r_{B,z=H}^2}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.217)$$

$$V_{B3} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{(R - s_B)^2 - (R - s_{B,z=H})^2}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.218)$$

$$V_{B3} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{\left(R - R + \sqrt{R^2 - \frac{\beta}{2} Rz} \right)^2 - \left(R - R + \sqrt{R^2 - \frac{\beta}{2} RH} \right)^2}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.219)$$

$$V_{B3} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - \frac{\beta}{2} Rz - \left(R^2 - \frac{\beta}{2} RH \right)}{2} \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.220)$$

$$V_{B3} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{4} R(H - z) \right) \cdot d\theta \cdot dz \quad (4.221)$$

$$V_{B3} = \frac{R}{4} \left(\int_0^H (H - z) \cdot dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta \right) \quad (4.222)$$

$$V_{B3} = \frac{RH^2}{8} \left(\int_0^{2\pi} \beta(\theta) \cdot d\theta \right) \quad (4.223)$$

Tenendo conto della (4.197) si ottiene:

$$V_{B3} = \frac{RH^2}{8} \left(\frac{4\pi \cdot \lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.224)$$

$$V_{B3} = \frac{\pi RH^2}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.225)$$

4.5.6 Calcolo del volume della porzione B2+B3

Il volume di cereale, V_{B2+B3} , somma dei volumi delle due porzioni B2 e B3, può essere calcolato direttamente come somma dei due volumi V_{B2} e V_{B3} :

$$V_{B2+B3} = V_{B2} + V_{B3} \quad (4.226)$$

$$V_{B2+B3} = \frac{\pi R H^2}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) + \frac{\pi R H^2}{2} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.227)$$

$$V_{B2+B3} = \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 a_g^2 \mu^2}} \right) \quad (4.228)$$

4.5.7 Considerazioni sui volumi delle porzioni di cereale

Sulla base dei risultati presentati in questa sezione, si può notare che:

- $V_{B2} = V_{B3}$ (4.229)
- $V_{B2} + V_{B3} = V_{A2}$ (4.230)
- $V_{B1} = V_{A1}$ (4.231)

4.5.8 Rapporto tra il volume della porzione A2 o della porzione B2+B3 ed il volume totale

Il rapporto tra il volume della porzione A2 (o, in modo equivalente per la (4.230), della porzione B2+B3) ed il volume totale è pari a:

$$\frac{V_{A2}}{V_{tot}} = \frac{\pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2}} \right)}{\pi R^2 H} = \frac{H}{R} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2}} \right) \quad (4.232)$$

4.6 Le azioni alla base del silos

Il taglio alla base del silos, inteso come la risultante delle azioni orizzontali che si scambiano il toro esterno di cereale e le pareti del silos, può essere valutato nei due modi seguenti:

- mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h (paragrafo 4.6.1);
- moltiplicando la massa della porzione A2 (o, in modo equivalente per la (4.230), della porzione B2+B3) per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g (paragrafo 4.6.2).

Analogamente, il momento flettente alla base del silos può essere valutato nei due modi seguenti:

- mediante proiezione diretta delle pressioni Δp_h (paragrafo 4.6.3);
- mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h (paragrafo 4.6.4);
- moltiplicando la massa della porzione A2 (o, in modo equivalente per la (4.230), della porzione B2+B3) per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g (paragrafo 4.6.5).

4.6.1 *Calcolo del taglio alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h*

Il taglio alla base del silos è dato dall'integrale, sulla superficie laterale del silos, della somma delle proiezioni delle pressioni orizzontali Δp_h , fornite dalla(4.131), e delle proiezioni delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h , fornite

dalla(4.145), in direzione x (ossia nella direzione dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale) come si può vedere in figura 4.14:

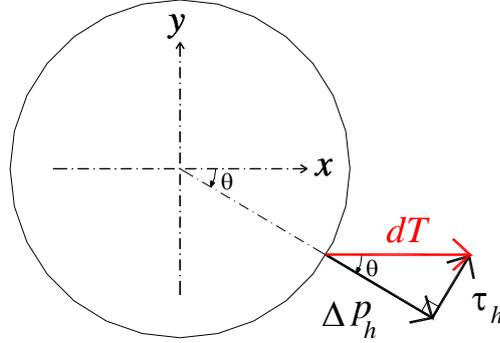


Figura 4.14 Schematizzazione delle proiezioni delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h atte a fornire il taglio

$$\begin{aligned}
 T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} [\Delta p_h(\theta, z) \cos \theta + \tau_h(\theta, z) \sin \theta] \cdot R d\theta \cdot dz \\
 T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \cos^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] + \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \sin^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot R d\theta \cdot dz \\
 T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot R d\theta \cdot dz \quad (4.233) \\
 T &= a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R \left(\int_0^H z \cdot dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right) \\
 T &= \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R H^2}{2} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right)
 \end{aligned}$$

Dal momento che:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{(1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu)} \right] d\theta = \frac{2\pi}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)} \quad (4.234)$$

si ottiene:

$$T = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R H^2}{2} \left(\frac{2\pi}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)} \right) \quad (4.235)$$

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)} \right) \quad (4.236)$$

4.6.2 *Calcolo del taglio alla base mediante il volume della porzione A2 o della porzione B2+B3*

Il taglio alla base del silos è dato dall'integrale si può ottenere anche moltiplicando la massa della porzione A2 o della porzione B2+B3 (che sono uguali in virtù della (4.230)) per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g . La massa della porzione A2 è data da:

$$m_{A2} = \frac{V_{A2} \cdot \gamma \cdot g}{g} = V_{A2} \cdot \gamma \quad (4.237)$$

dove il volume V_{A2} è dato dalla (4.203):

$$m_{A2} = \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \cdot \gamma \quad (4.238)$$

Si ottiene pertanto:

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \quad (4.239)$$

4.6.3 *Calcolo del momento flettente alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h*

Il momento flettente alla base del silos è dato dall'integrale, sulla superficie laterale del silos, della somma delle proiezioni delle pressioni orizzontali Δp_h , fornite dalla(4.131), e delle proiezioni delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h , fornite dalla(4.145), in direzione x (ossia nella direzione dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale) moltiplicate per la quota $h = H - z$ a partire dalla base del silos:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^H \int_0^{2\pi} [\Delta p_h(\theta, z) \cos \theta + \tau_h(\theta, z) \sin \theta] \cdot (H - z) \cdot R d\theta \cdot dz \\
 T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \cos^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] + \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot \sin^2 \theta}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot (H - z) \cdot R d\theta \cdot dz \\
 T &= \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] \cdot (H - z) \cdot R d\theta \cdot dz \\
 T &= a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot R \left(\int_0^H z(H - z) \cdot dz \right) \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right) \\
 T &= \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot RH^3}{6} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu} \right] d\theta \right)
 \end{aligned} \tag{4.240}$$

Tenendo conto della (4.234), si ottiene:

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot RH^3}{6} \cdot \left(\frac{2\pi}{(1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2)} \right) \tag{4.241}$$

$$M = \frac{1}{3} a_g \cdot \gamma \cdot \pi RH^3 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \tag{4.242}$$

4.6.4 Calcolo del momento flettente alla base mediante la massa della porzione A2 o della porzione B2+B3

Il momento flettente alla base del silos si può ottenere anche moltiplicando la massa della porzione A2 o della porzione B2+B3 (che sono uguali in virtù della (4.230)) per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g e per la quota di applicazione della risultante delle pressioni. La massa della porzione A2 è data dalla (4.238). Le pressioni presentano un diagramma triangolare e pertanto la quota di applicazione della risultante delle pressioni si trova alla quota $h = \frac{1}{3}H$ a partire dalla base del silos.

Si ottiene pertanto:

$$M = \frac{1}{3} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^3 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \quad (4.243)$$

4.6.5 Calcolo dello sforzo normale

Gli sforzi normali che nascono alla base del silos lungo le pareti (sforzi di meridiano n_x relativi ad una striscia di larghezza unitaria) si ottengono integrando lungo z le p_w fornite dalla (4.123):

$$n_x(\theta) = \int_0^H p_w(\theta, z) dz = \int_0^H \mu \cdot p_h(\theta, z) dz \quad (4.244)$$

$$n_x(\theta) = \frac{(1 + a_{g\text{-vert}})^2}{1 + a_{g\text{-vert}} - a_{g\text{-orizz}} \cdot \cos \theta \cdot \mu} \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \frac{H^2}{2} \quad (4.245)$$

La pressione di contatto tra il cereale e la base del silos p_v (che si esplica alla base della porzione A1 di raggio $\sqrt{R^2 - \beta RH}$ o B1 di raggio $\sqrt{R^2 - \frac{\beta}{2} RH}$) vale:

$$p_v = \gamma \cdot H \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \quad (4.246)$$

4.6.6 Considerazioni in merito alle sollecitazioni alla base del silos

Il calcolo tradizionale dei silos a fondo piano contenenti cereali condurrebbe alle seguenti azioni alla base del silos:

$$T_{trad.} = a_g \cdot \gamma \cdot V_{tot} = a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H \quad (4.247)$$

$$M_{trad.} = a_g \cdot \gamma \cdot V_{tot} \cdot \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H^2 \quad (4.248)$$

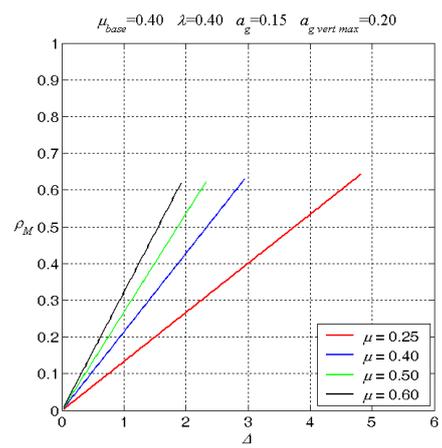
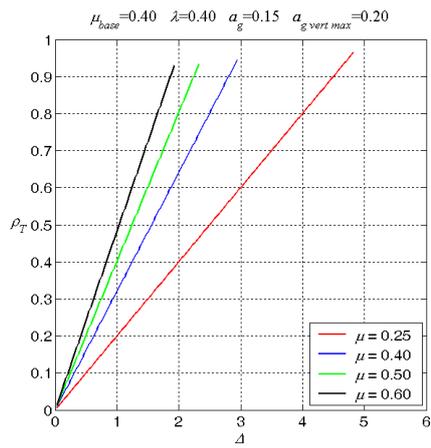
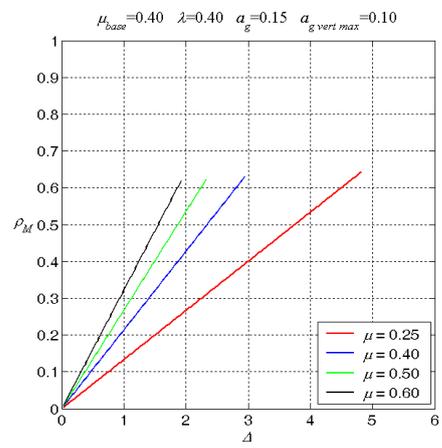
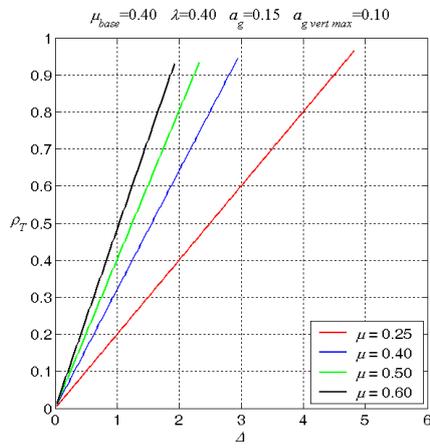
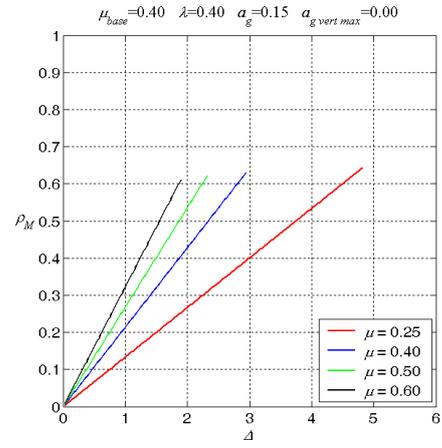
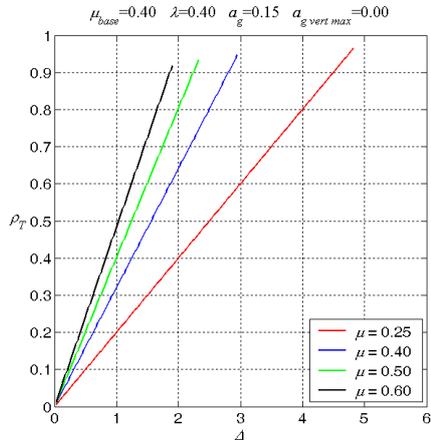
Per la valutazione immediata dei benefici che la formulazione qui presentata per il calcolo dei silos a fondo piano contenenti cereali fornisce, rispetto al calcolo tradizionale, è opportuno definire i seguenti rapporti tra il taglio della formulazione presentata e il taglio ottenuto con il calcolo tradizionale e tra il momento flettente della formulazione presentata e il momento flettente ottenuto con il calcolo tradizionale:

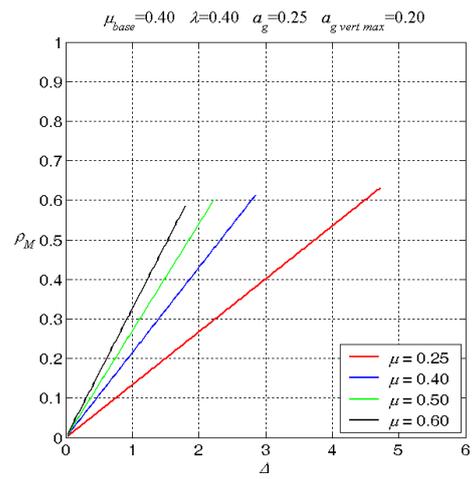
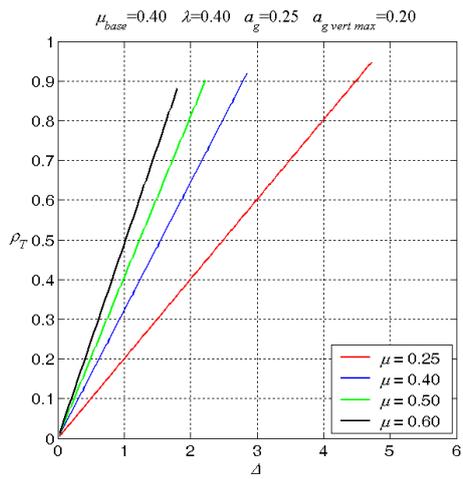
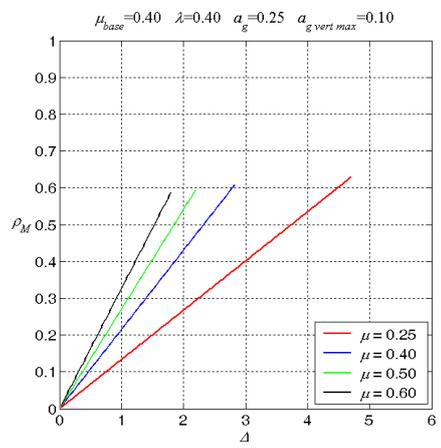
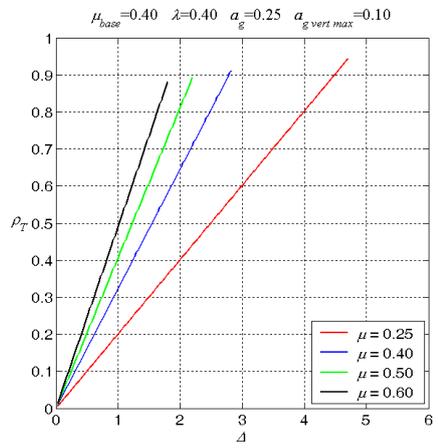
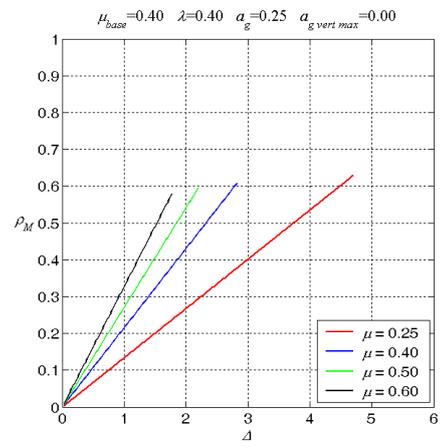
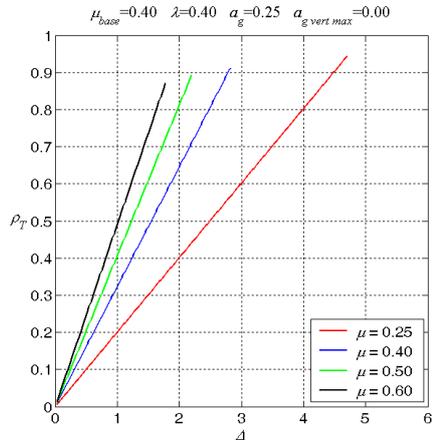
$$\rho_T = \frac{T}{T_{trad.}} = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^2 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)}{a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H} = \frac{H}{R} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \quad (4.249)$$

$$\rho_M = \frac{M}{M_{trad.}} = \frac{\frac{1}{3} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R H^3 \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)}{\frac{1}{2} a_g \cdot \gamma \cdot \pi R^2 H^2} = \frac{2}{3} \frac{H}{R} \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - v^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right) \quad (4.250)$$

A titolo illustrativo, nel seguito (fig. 4.15) viene riportata una serie di grafici dei due rapporti ρ_T e ρ_M , al variare dei parametri λ , μ , a_g ed a_{g-vert} (si ricorda

che $v = \frac{1}{1 + a_{g-vert}}$).





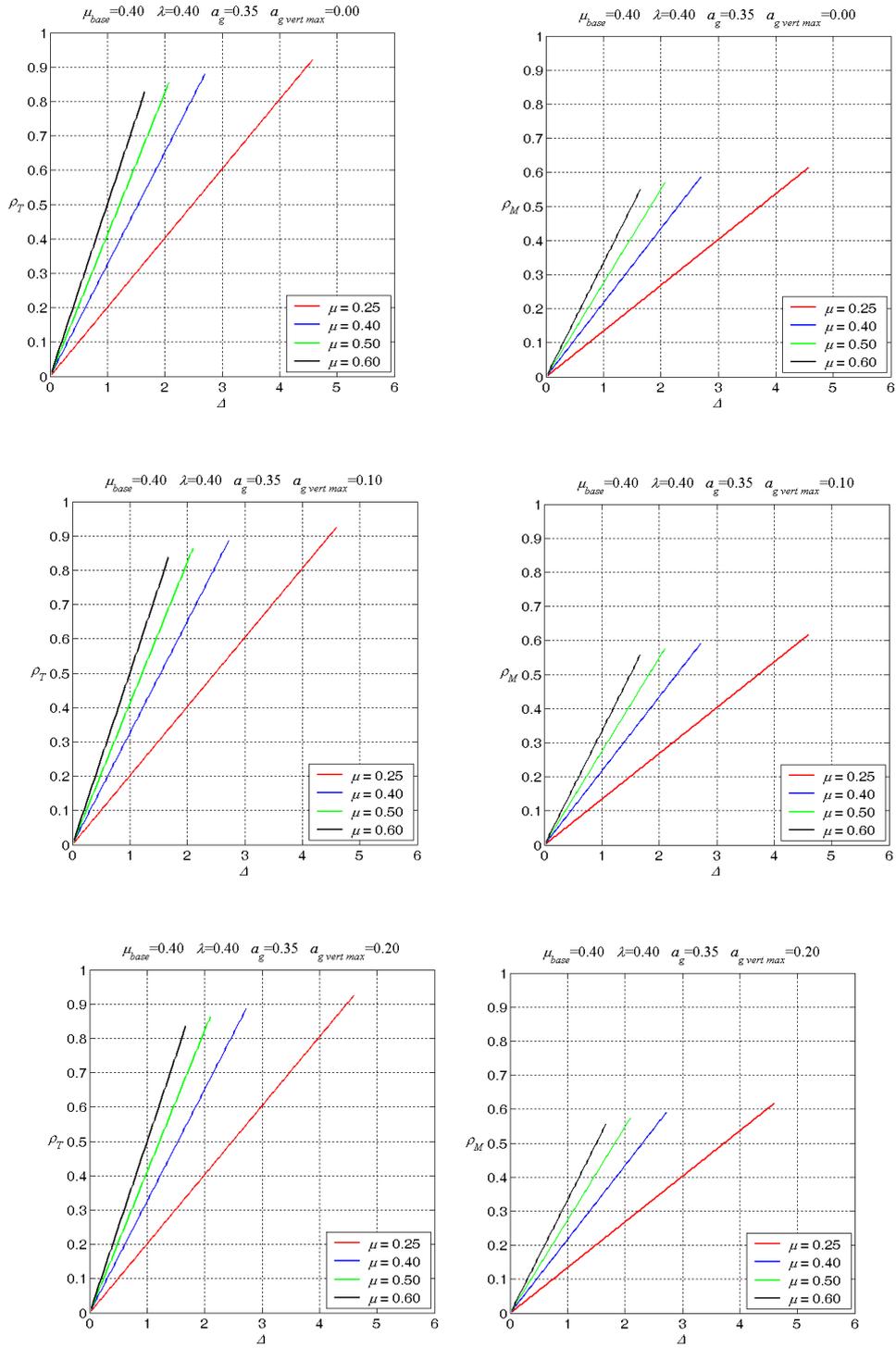


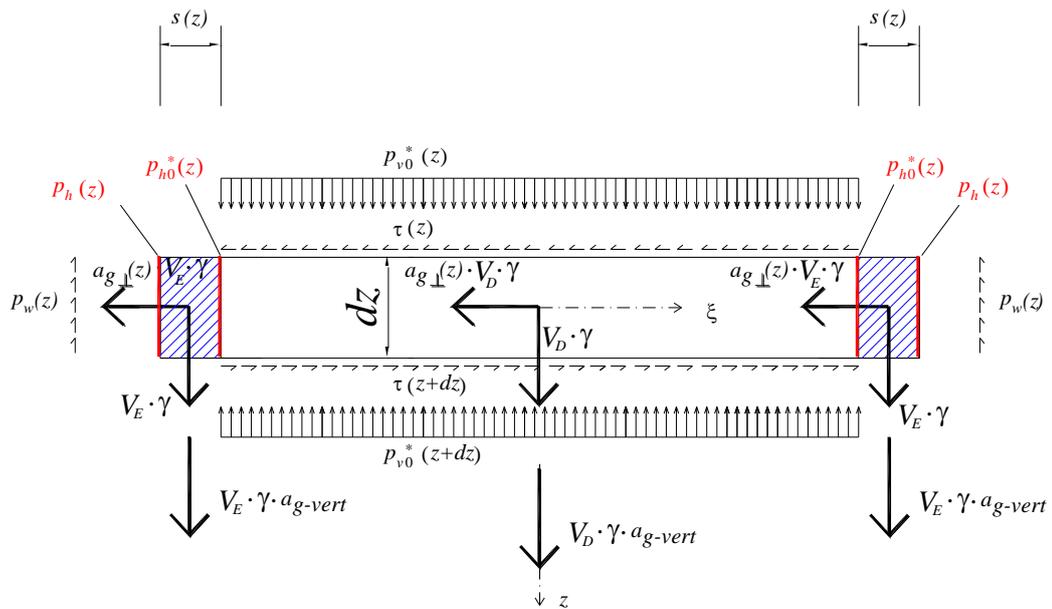
Figura 4.15 Rapporti ρ_T e ρ_M , al variare dei parametri λ , μ , a_g ed a_{g-vert} .

5 SVILUPPO PER SILOS PRISMATICI

Nello sviluppo della teoria si sono considerate due tipologie di accelerazioni:

- i. quella al suolo, ipotesi realistica data l'elevata rigidezza dei silos;
- ii. variabile linearmente lungo l'altezza, in quanto vi è la possibilità che la struttura del silos amplifichi l'accelerazione al suolo.

5.1 Caso limite A



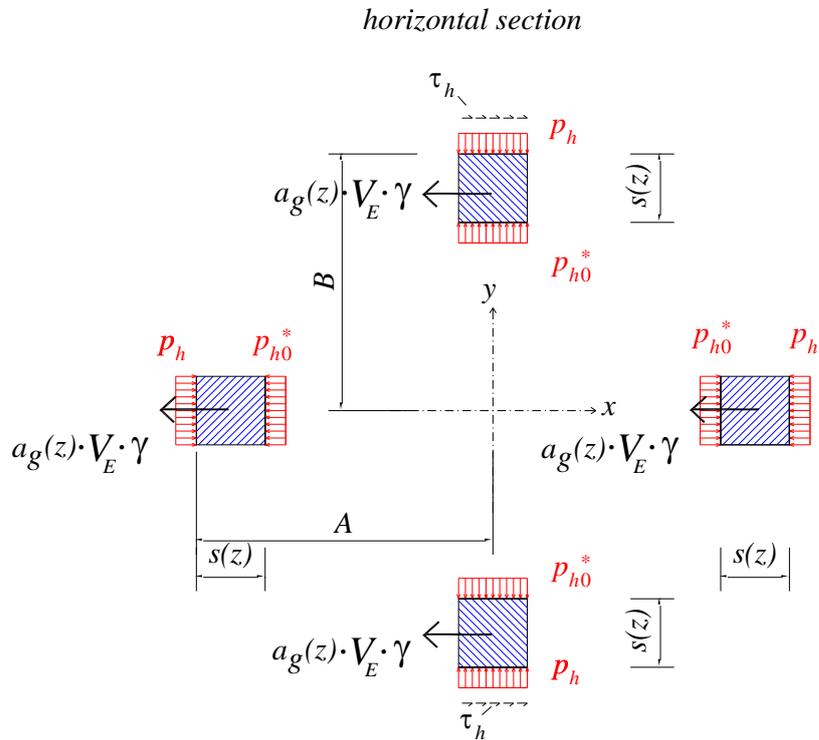


Figura 5.1 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul foglio *D* e sulla porzione *E* ponendo in evidenza anche le porzioni ortogonali e parallele all'azione sismica.

Incognite del problema:

- 1 p_{v0}^* = pressione verticale che agisce sulla faccia orizzontale del foglio interno *D*;
- 2 τ = tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale del foglio interno *D*;
- 3 p_h = la pressione totale tra l'elemento *E* e la parete del silos;
- 4 s = spessore del toro esterno;
- 5 τ_h = tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento *E* e le pareti del silos.

Equazioni a disposizione:

- 1 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di *D*;
- 2 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di *D*;
- 3 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di *E*;
- 4 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di *E*;
- 5 equilibrio alla traslazione in direzione tangenziale di *E*.

5.1.1 Le azioni agenti sul foglio D

La figura 5.1 rappresenta schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento D .

Le azioni che agiscono sul foglio D si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate in figura 5.2. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_D \cdot \gamma$ peso proprio del foglio D di volume V_D e densità γ ;

$p_{v0}^*(z)$ pressione verticale (rivolta verso il basso) che agisce sulla faccia orizzontale superiore del foglio interno D , trasmessa tra il foglio in esame e quello posto sopra;

$p_{v0}^*(z + dz)$ pressione verticale (rivolta verso l'alto) che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del foglio interno D , trasmessa tra il foglio in esame e quello posto sotto;

$a_{g-vert} \cdot V_D \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro del foglio D e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra il foglio D e ciascuno degli elementi E ;

$\tau(z)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale superiore del foglio interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sopra;

$\tau(z + dz)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del foglio interno D , trasmessa tra il foglio in esame e quello posto sotto.

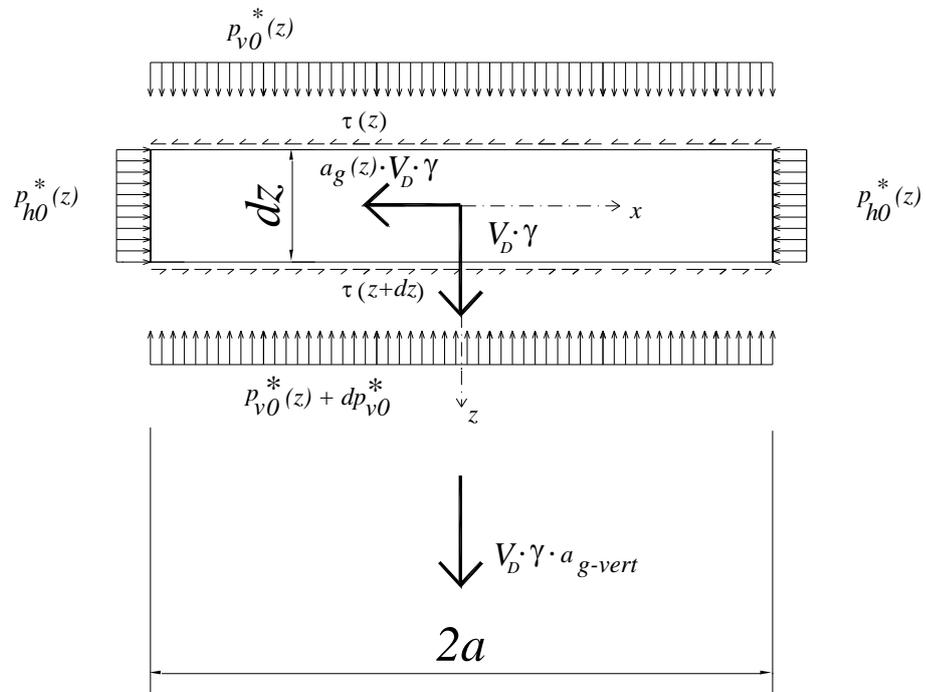


Figura 5.2 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul foglio D

5.1.2 Equilibrio alla traslazione verticale di D

Dall'equilibrio alla traslazione verticale del foglio interno D alla quota z , si ottiene:

$$p_{v0}^*(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D + a_{g-vert} \cdot \gamma \cdot V_D = p_{v0}^*(z + dz) \cdot A_D \quad (5.1)$$

Essendo:

$$V_D = A_D \cdot dz \quad (5.2)$$

si ottiene:

$$dp_{v0}^* = \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot dz \quad (5.3)$$

che, integrata, fornisce:

$$p_{v0}^*(z) = \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z + C \quad (5.4)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che, in sommità (alla quota del pelo libero del materiale), la pressione verticale sia nulla:

$$\begin{aligned} p_{v0}^*(z=0) &= 0 \\ \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot 0 + C &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0 \quad (5.6)$$

Pertanto, la pressione verticale è funzione della quota z misurata a partire dal pelo libero del materiale e vale:

$$p_{v0}^*(z) = \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z \quad (5.7)$$

Essendo:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot p_{v0}^*(z) = p_{h0}(z) \cdot (1 + a_{g-vert}) \quad (5.8)$$

si ha che:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z \quad (5.9)$$

5.1.3 *Equilibrio alla traslazione radiale di D*

Dall'equilibrio alla traslazione radiale del foglio interno D alla quota z , si ottiene:

$$\tau(z + dz) \cdot A_D = a_g(z) \cdot \gamma \cdot V_D + \tau(z) \cdot A_D \quad (5.10)$$

Dal momento che $\tau(z + dz) = \tau(z) + d\tau$ e $V_D = A_D \cdot dz$ si ottiene:

$$d\tau(z) = a_g(z) \cdot \gamma \cdot dz \quad (5.11)$$

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = a_g$) si ottiene:

$$\tau(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot z + C \quad (5.12)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che, in sommità (alla quota del pelo libero del materiale), le tensioni tangenziali siano nulle:

$$\tau(z = 0) = 0 \quad (5.13)$$

$$a_{g0} \cdot \gamma \cdot 0 + C = 0 \quad (5.14)$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0 \quad (5.15)$$

Si ottiene pertanto:

$$\tau(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot z \quad (5.16)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza nella forma:

$$a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \quad (5.17)$$

l'integrazione fornisce:

$$\tau(z) = \left(-a_{g1} \cdot \frac{z^2}{2} + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot z + C \right) \cdot \gamma \quad (5.18)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Imponendo la condizione che, in sommità (alla quota del pelo libero del materiale), le tensioni tangenziali siano nulle:

$$\tau(z = 0) = 0 \quad (5.19)$$

$$\left(-a_{g1} \cdot 0 + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot 0 + C \right) \cdot \gamma = 0 \quad (5.20)$$

si ottiene il valore della costante di integrazione C :

$$C = 0 \quad (5.21)$$

Si ottiene pertanto:

$$\tau(z) = \left(-a_{g1} \cdot \frac{z^2}{2} + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot z \right) \cdot \gamma \quad (5.22)$$

5.1.4 Le azioni agenti sull'elemento E

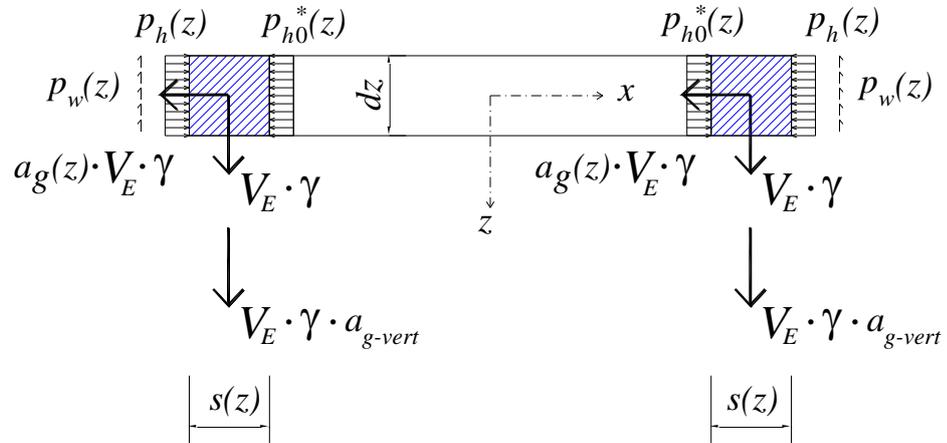


Figura 5.3a Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su due elementi simmetrici E in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale ed orizzontale; sezione verticale

horizontal section

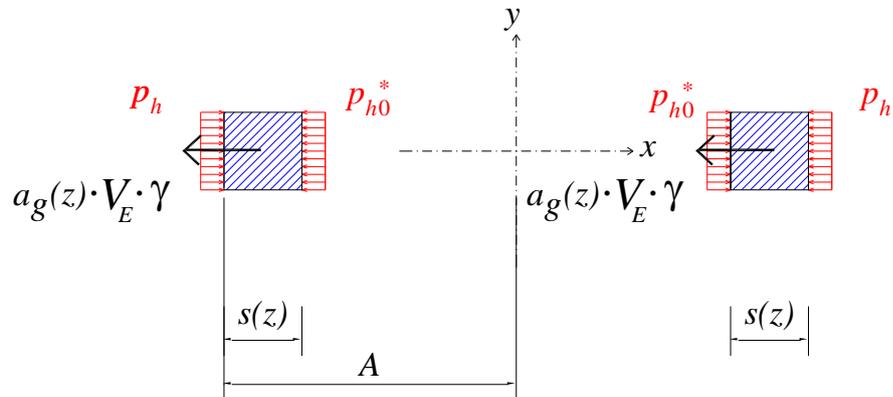


Figura 5.3b Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su fogli D e su elementi simmetrici E posti sulle pareti normali alla direzione di ingresso del sisma posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite A , sezione orizzontale.

horizontal section

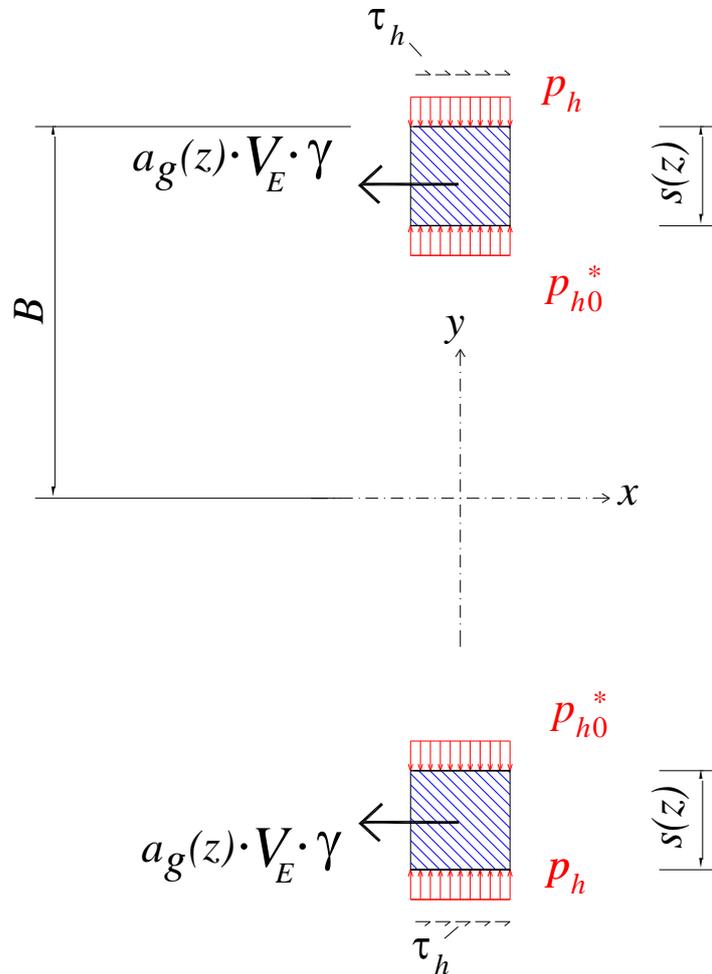


Figura 5.3c Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su fogli D e su elementi simmetrici E posti sulle pareti parallele alla direzione di ingresso del sisma posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite A, sezione orizzontale.

Le figure 5.3 rappresentano schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento E .

Le azioni che agiscono sull'elemento E si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate nelle figure 5.3. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_E \cdot \gamma$ peso proprio dell'elemento E di volume V_E e densità γ ;

$p_w(z)$ tensioni tangenziali di aderenza tra l'elemento E e la parete metallica del silos;

$a_{g-vert} \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra l'elemento E e il foglio D ;

Δp_h sovrappressione (o depressione) dovuta agli effetti dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale e da sommare (o sottrarre) alla p_{h0}^* tra l'elemento E e la parete del silos;

$a_g \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione x per effetto dell'accelerazione a_g (forza d'inerzia rivolta verso sinistra avendo assunto positiva l'accelerazione $a_{g-orizz}$ verso destra);

$\tau_h(z)$ tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento E e le pareti del silos.

5.1.5 Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E :

Si consideri l'elemento E posizionato alla quota generica z .

Le due equazioni di equilibrio risultano accoppiate per cui vi è la necessità di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta p_h \cdot A_E = a_g(z) \cdot V_E \cdot \gamma \\ V_E \cdot \gamma \cdot (1 - a_{g-vert}) = A_E \cdot p_w \end{cases} \quad (5.23)$$

Dove la prima delle (5.23) è l'equilibrio alla traslazione orizzontale e la seconda è l'equilibrio alla traslazione verticale.

In presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale, la pressione totale, p_h , tra l'elemento E e la parete del silos è data da:

$$p_h = p_{h0}^* + \Delta p_h \quad (5.24)$$

che permette di riscrivere la prima delle (5.23) nel seguente modo:

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot A_E = a_g(z) \cdot V_E \cdot \gamma \quad (5.25)$$

dove $a_g(z)$ rappresenta la componente in direzione normale (direzione x) alla superficie esterna verticale dell'elemento E (vedi figura 5.3b) dell'accelerazione orizzontale $a_g(z)$ mentre V_E ed A_E rappresentano rispettivamente il volume dell'elemento E e l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E :

$$V_E = s \cdot dB \cdot dz \quad (5.26)$$

$$A_E = dB \cdot dz \quad (5.27)$$

dove s è lo spessore dell'elemento E .

Sostituendo la (5.26) e la (5.27) nella (5.25), si ottiene:

$$\begin{aligned} (p_h - p_{h0}^*) \cdot dB \cdot dz &= a_g(z) \cdot s \cdot dB \cdot dz \cdot \gamma \\ (p_h - p_{h0}^*) &= a_g(z) \cdot s \cdot \gamma \end{aligned} \quad (5.28)$$

Occorre adesso lavorare sull'equilibrio alla traslazione verticale nella quale sostituire la (5.26) e la (5.27), in tal modo si ha:

$$\begin{aligned} s \cdot dB \cdot dz \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) &= dB \cdot dz \cdot p_w \\ s \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) &= p_w \end{aligned} \quad (5.29)$$

La tensione tangenziale verticale di aderenza, in questo caso, è data da:

$$p_w = p_h \cdot \mu \quad (5.30)$$

che inserita nella (5.29) fornisce:

$$s \cdot \gamma = \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (5.31)$$

Andando a sostituire la (5.31) nella (5.28) si ricava:

$$(p_h - p_{h0}^*) = a_g(z) \cdot \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (5.32)$$

che fornisce:

$$\begin{aligned} p_h &= p_{h0}^* + \frac{a_g(z) \cdot p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \\ p_h \cdot \left(1 - \frac{a_g(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \right) &= p_{h0}^* \\ p_h &= \frac{p_{h0}^*}{1 - \frac{a_g(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}}} \\ p_h &= \frac{p_{h0}^*}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \cos \mathcal{G} \cdot \mu} \end{aligned} \quad (5.33)$$

avendo posto:

$$\nu = \frac{1}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (5.34)$$

Ricordando infine la (5.9) si ottiene:

$$p_h = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} \quad (5.35)$$

Da tale risultato si può ottenere anche l'espressione delle Δp_h andando a sostituire nella (5.24) la (5.35) e la (5.9):

$$\begin{aligned} \Delta p_h &= p_h - p_{h0}^* \\ \Delta p_h &= \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} - \gamma \cdot \lambda \cdot (1 + a_{g-vert}) \cdot z \\ \Delta p_h &= \frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z)} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Ponendo:

$$\beta(z) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu} \quad (5.37)$$

si può scrivere:

$$\Delta p_h = a_g(z) \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot \gamma \cdot z \quad (5.38)$$

Al fine di ottenere lo spessore s si deve inserire la (5.35) nella (5.31) che in tal modo fornisce:

$$\begin{aligned} s \cdot \gamma &= \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z \cdot \mu}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} \cdot \frac{1}{(1 + a_{g-vert})} \\ s &= \frac{\lambda \cdot z \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ricordando che:

$$\beta(z) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu} \quad (5.40)$$

si ha:

$$s = \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \quad (5.41)$$

5.1.6 *Equilibrio alla traslazione tangenziale di E:*

Si consideri ora l'elemento E posizionato alla quota generica z sulla parete del silos parallela alla direzione di ingresso del sisma.

Si indichino con τ_h le tensioni tangenziali orizzontali che si scambiano il toro esterno di cereale e le pareti del silos parallele alla direzione di ingresso del sisma. Sotto l'ipotesi della teoria, per il singolo elemento E , l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale in direzione tangenziale (cioè secondo la tangente orizzontale alla superficie esterna dell'elemento E) fornisce:

$$\tau_h \cdot A_E = a_g(z) \cdot \gamma \cdot V_E \quad (5.42)$$

Sostituendo la (5.26) e la (5.27) nella (5.42) si ottiene:

$$\tau_h \cdot dB \cdot dz = a_g(z) \cdot \gamma \cdot s \cdot dB \cdot dz \quad (5.43)$$

Tenendo conto della (5.41) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_h &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot s \\ \tau_h &= a_g(z) \cdot \gamma \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z)}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z))} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \quad (5.45)$$

5.1.7 Limiti di validità

5.1.7.1 Esistenza della porzione A1

Affinché la porzione A1 di cereale esista deve essere soddisfatta la relazione seguente:

$$\boxed{r_A = A - s_{A,z=H} > 0} \quad (5.46)$$

che fornisce:

$$A > s_{A,z=H} \quad (5.47)$$

Tenendo presente la (5.41) si ha:

$$A > \frac{\beta(H)}{2} H \quad (5.48)$$

In virtù della (5.40) si ottiene:

$$A > \frac{\mu \cdot \lambda}{1 - \nu \cdot a_g(H) \cdot \mu} H \quad (5.49)$$

che fornisce:

$$\Delta = \frac{H}{2A} < \frac{1 - \nu \cdot a_g(H) \cdot \mu}{2 \cdot \mu \cdot \lambda} = \left(\frac{H}{2A} \right)_{\max-A} = \Delta_{\max-A} \quad (5.50)$$

L'equazione (5.50) riporta il valore limite massimo del rapporto altezza/diametro, $\Delta_{\max-A} = \left(\frac{H}{2A} \right)_{\max-A}$, del silos affinché lo spessore massimo della porzione di cereale sostenuto verticalmente dalle pareti del silos sia minore della dimensione del silos e quindi affinché la notazione adottata rimanga valida.

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = cost$) si ottiene:

$$\Delta = \frac{H}{2A} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (5.51)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza nella forma:

$$a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \quad (5.52)$$

si ha:

$$\Delta = \frac{H}{2A} > \frac{1 - \nu \cdot (-a_{g1} \cdot H + a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} = \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (5.53)$$

$$\Delta = \frac{H}{2A} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (5.54)$$

La snellezza limite nei due casi non cambia perché l'accelerazione entra con il suo valore alla base.

5.1.7.2 Esistenza della porzione A2

Affinché esista la porzione A2 spingente sulle pareti deve essere verificata la seguente relazione:

$$s = \frac{\beta(z)}{2} \cdot z > 0 \quad (5.55)$$

Tenendo presente la (5.40) si ha:

$$\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu} \cdot z > 0 \quad (5.56)$$

Essendo che:

$$\begin{aligned} z &\geq 0 \\ \lambda \cdot \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

si deve avere:

$$1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu > 0 \quad (5.58)$$

da cui si ottiene:

$$a_g(z) < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.59)$$

Il valore più restrittivo sarà alla sommità dove l'accelerazione ha il suo massimo.

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante ($a_g(z) = a_{g0}$) si ottiene:

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.60)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza come illustrato nella (5.52) si ha:

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.61)$$

5.1.7.3 Esistenza delle sollecitazioni

Con riferimento alla (5.35) e alla (5.45) per aver assicurata l'esistenza delle pressioni orizzontali e delle tensioni tangenziali è necessario porre:

$$1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu \neq 0 \quad (5.62)$$

che fornisce:

$$\nu \cdot a_g(z) \cdot \mu \neq 1 \quad (5.63)$$

$$a_g(z) \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.64)$$

Occorre notare che a tale, e ancor più selettiva, restrizione si era già giunti imponendo l'esistenza della porzione A2 che forniva:

$$a_g(z) < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.65)$$

con le specificazioni nei due casi di accelerazione (5.60) e (5.61)

5.1.8 Riassunto delle limitazioni

Esistenza porzione A1:

Accelerazione costante

$$\Delta = \frac{H}{2A} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (5.66)$$

Accelerazione lineare

$$\Delta = \frac{H}{2A} > \frac{1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu}{2 \cdot \lambda \cdot \mu} \quad (5.67)$$

Esistenza porzione A2:

Accelerazione costante

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.68)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.69)$$

Esistenza delle sollecitazioni:

Accelerazione costante

$$a_{g0} \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.70)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.71)$$

5.1.9 Esempi numerici

Per una maggior chiarezza si riportano alcuni valori di tali limiti prendendo in considerazione alcuni valori tipici.

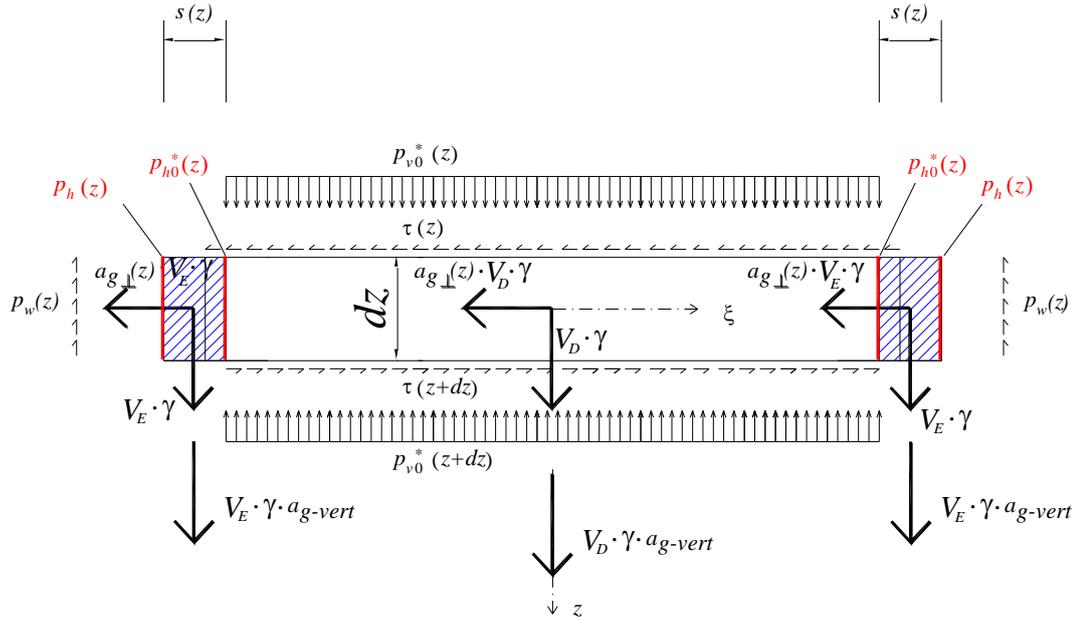
Considerando del grano contenuto in un silos d'acciaio e in un silos di calcestruzzo armato sottoposto a diverse accelerazioni verticali, si ottiene:

$1/(\nu^* \mu)$			$a_{g\text{-vert}}$			
			0,00	0,05	0,10	0,15
μ	Acciaio	0,27	3,70	3,89	4,07	4,26
	Cls	0,26	3,85	4,04	4,23	4,42

Tabella 5.1 Valori di $\frac{1}{\nu \cdot \mu}$ per valori comuni di $a_{g\text{-vert}}$, μ

5.2 Caso limite B

Come precedentemente si è fatto per il caso limite A, ora si andrà a sviluppare la trattazione anche nel caso limite B.



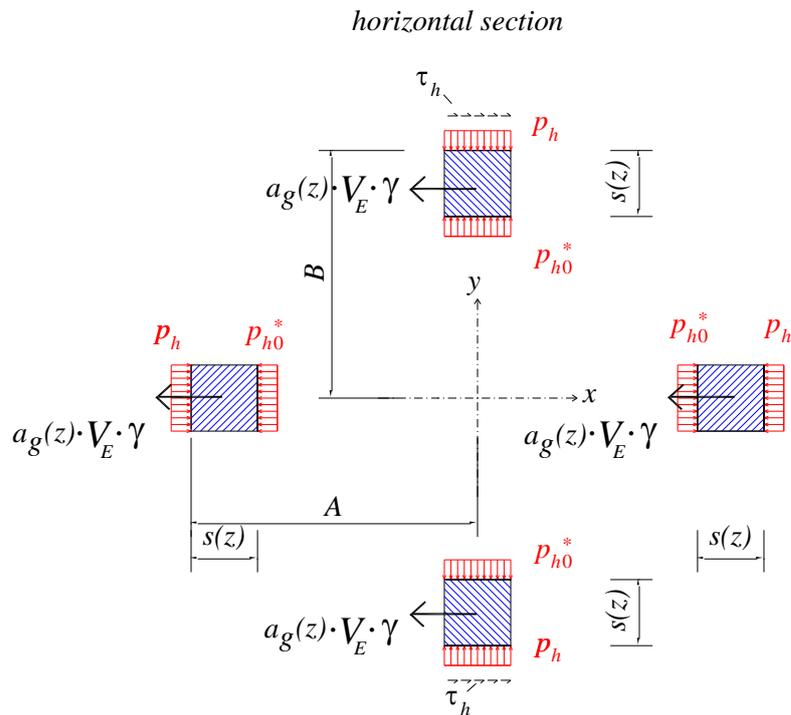


Figura 5.4 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul foglio *D* e sulla porzione *E*.

Incognite del problema:

- 1 p_{v0}^* = pressione verticale che agisce sulla faccia orizzontale del foglio interno *D*;
- 2 τ = tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale del foglio interno *D*;
- 3 p_h = la pressione totale tra l'elemento *E* e la parete del silos;
- 4 s = spessore del toro esterno;
- 5 τ_h = tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento *E* e le pareti del silos.

Equazioni a disposizione:

- 1 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di *D*;
- 2 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di *D*;
- 3 equilibrio alla traslazione in direzione radiale di *E*;
- 4 equilibrio alla traslazione in direzione verticale di *E*;
- 5 equilibrio alla traslazione in direzione tangenziale di *E*.

5.2.1 Le azioni agenti sul foglio D

La figura 5.5 rappresenta schematicamente il diagramma di corpo libero dell'elemento D .

Le azioni che agiscono sul foglio D si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate in figura 5.5. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_D \cdot \gamma$ peso proprio del foglio D di volume V_D e densità γ ;

$p_{v0}^*(z)$ pressione verticale (rivolta verso il basso) che agisce sulla faccia orizzontale superiore del foglio interno D , trasmessa tra il foglio in esame e quello posto sopra;

$p_{v0}^*(z + dz)$ pressione verticale (rivolta verso l'alto) che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del foglio interno D , trasmessa tra il foglio in esame e quello posto sotto;

$a_{g-vert} \cdot V_D \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro del foglio D e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra il foglio D e ciascuno degli elementi E ;

$\tau(z)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale superiore del foglio interno D , trasmessa tra il foglio in esame e quello posto sopra;

$\tau(z + dz)$ tensione tangenziale che agisce sulla faccia orizzontale inferiore del foglio interno D , trasmessa tra il disco in esame e quello posto sotto;

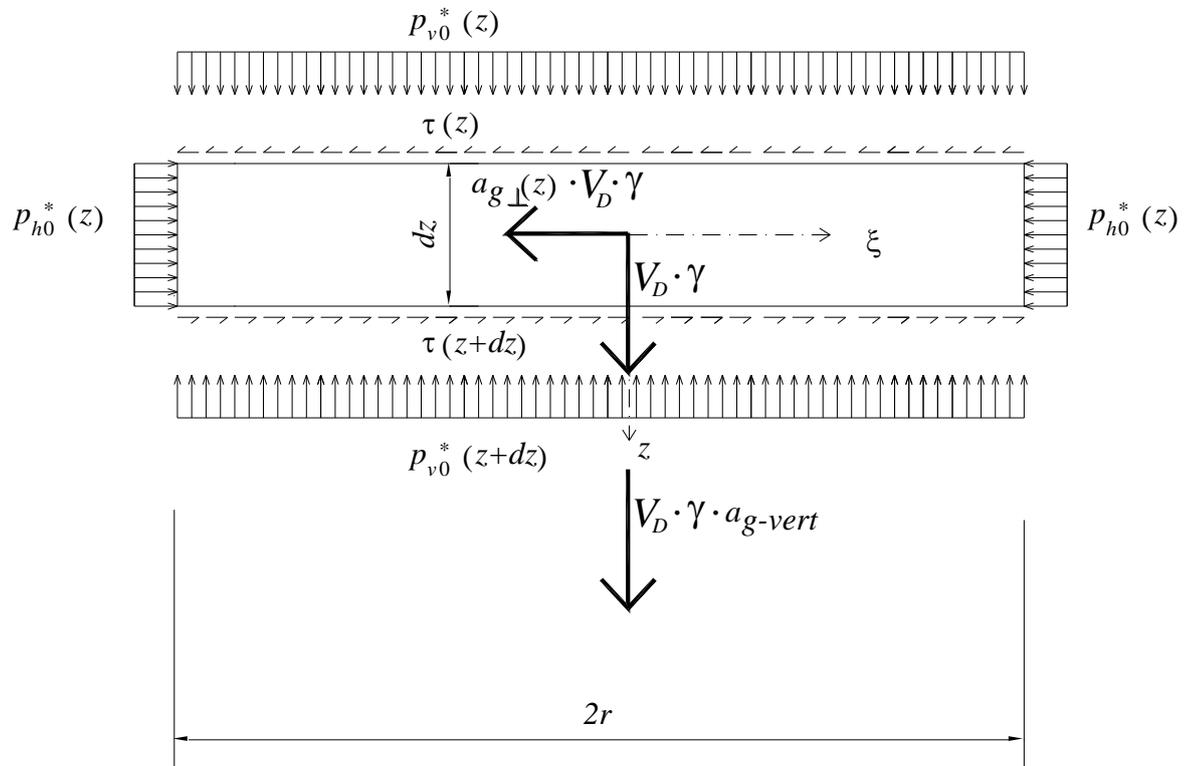


Figura 5.5 Forze verticali e forze orizzontali agenti sul foglio D.

5.2.2 *Equilibrio alla traslazione verticale di D*

Dall'equilibrio alla traslazione verticale del foglio interno D alla quota z , si ottiene:

$$\boxed{p_{v0}^*(z) \cdot A_D + \gamma \cdot V_D + a_{g\text{-vert}} \cdot \gamma \cdot V_D = p_{v0}^*(z + dz) \cdot A_D} \quad (5.72)$$

Come si può notare l'equazione, e gli attori in essa presenti, è uguale a quella ottenuta nel caso limite A , pertanto, il risultato sarà coincidente:

$$\boxed{P_{v0}^*(z) = \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z} \quad (5.73)$$

Essendo:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot p_{v0}^*(z) = p_{h0}(z) \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \quad (5.74)$$

si ha che:

$$p_{h0}^*(z) = \lambda \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z \quad (5.75)$$

5.2.3 *Equilibrio alla traslazione radiale di D*

Dall'equilibrio alla traslazione radiale del foglio interno D alla quota z , si ottiene:

$$\tau(z + dz) \cdot A_D = a_g(z) \cdot \gamma \cdot V_D + \tau(z) \cdot A_D \quad (5.76)$$

Come per l'equilibrio precedente, anche questo è uguale in tutto a quello del caso limite A.

Di conseguenza i risultati saranno uguali.

Accelerazione costante

$$\tau(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot z \quad (5.77)$$

Accelerazione lineare

$$\tau(z) = \left(-a_{g1} \cdot \frac{z^2}{2} + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H) \cdot z \right) \cdot \gamma \quad (5.78)$$

5.2.4 Le azioni agenti sull'elemento E

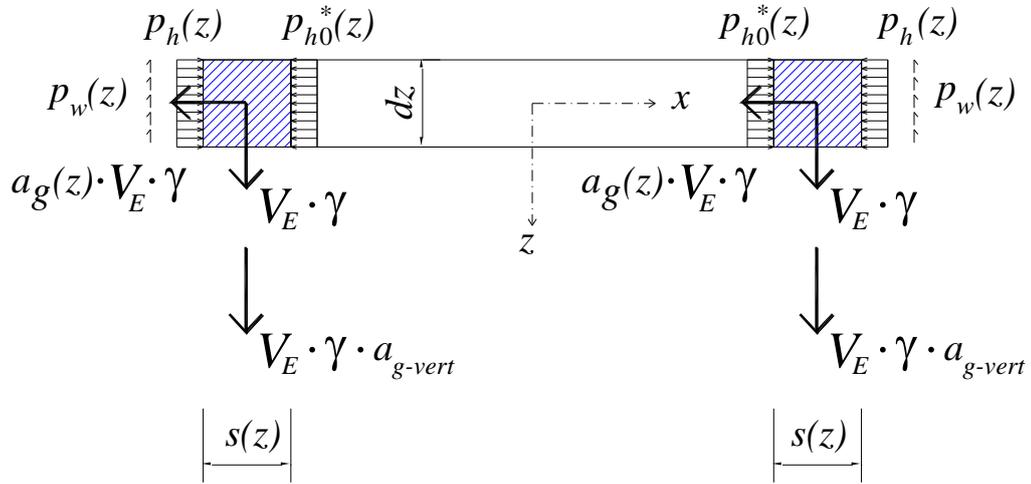


Figura 5.6a Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su due elementi simmetrici E in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale ed orizzontale; sezione verticale

horizontal section

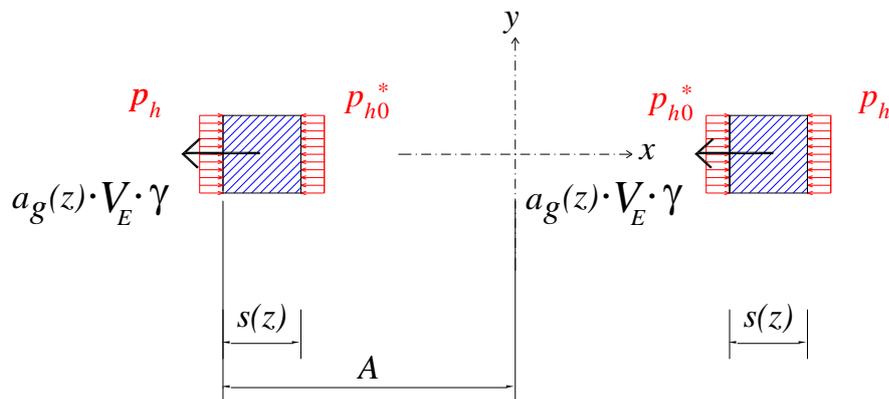


Figura 5.6b Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su fogli D e su elementi simmetrici E posti sulle pareti normali alla direzione di ingresso del sisma posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite B, sezione orizzontale.

horizontal section

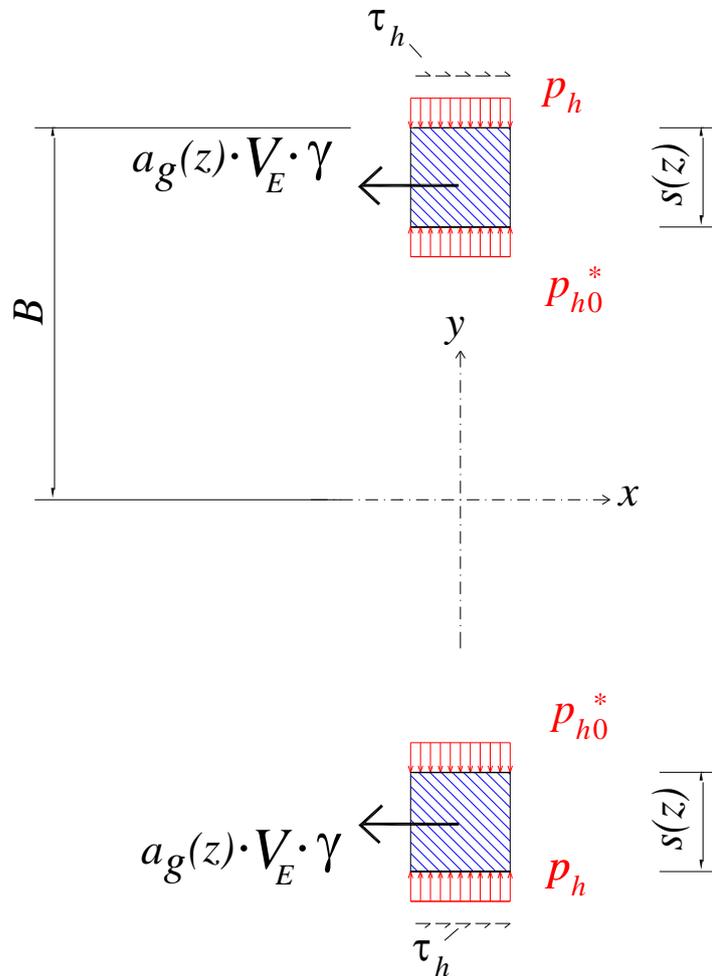


Figura 5.6c Azioni verticali e azioni orizzontali agenti su fogli D e su elementi simmetrici E posti sulle pareti parallele alla direzione di ingresso del sisma posizionati a quote diverse in presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale: caso limite B , sezione orizzontale.

Le azioni che agiscono sull'elemento E si distinguono in azioni verticali e azioni orizzontali e sono rappresentate nelle figure 5.6. Sia γ il peso specifico (densità) del cereale.

Azioni verticali:

$V_E \cdot \gamma$ peso proprio dell'elemento E di volume V_E e densità γ ;

$p_w(z)$ tensioni tangenziali di aderenza tra l'elemento E e la parete metallica del silos.

$a_{g-vert} \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione z per effetto dell'accelerazione a_{g-vert} (forza d'inerzia rivolta verso il basso avendo assunto positiva l'accelerazione a_{g-vert} verso l'alto).

Azioni orizzontali:

$p_{h0}^*(z)$ pressione orizzontale tra l'elemento E e il disco D .

Δp_h sovrappressione (o depressione) dovuta agli effetti dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale e da sommare (o sottrarre) alla p_{h0}^* tra l'elemento E e la parete del silos;

$a_g \cdot V_E \cdot \gamma$ forza d'inerzia che nasce nel baricentro dell'elemento E e agente in direzione x per effetto dell'accelerazione a_g (forza d'inerzia rivolta verso sinistra avendo assunto positiva l'accelerazione $a_{g-orizz}$ verso destra);

$\tau_h(z)$ tensioni tangenziali che si creano tra l'elemento E e le pareti del silos.

5.2.5 Equilibrio alla traslazione radiale e verticale di E :

Si consideri l'elemento E posizionato alla quota generica z .

Le due equazioni di equilibrio risultano accoppiate per cui vi è la necessità di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta p_h \cdot A_E = a_g(z) \cdot \gamma \cdot (V_E + dB \cdot ds \cdot z) \\ (V_E + dB \cdot ds \cdot z) \cdot \gamma \cdot (1 - a_{g\text{-vert}}) = A_E \cdot p_w \end{cases} \quad (5.79)$$

Dove la prima delle (5.79) è l'equilibrio alla traslazione orizzontale e la seconda è l'equilibrio alla traslazione verticale.

In questi equilibri entra anche il peso della porzione di cereale posizionata direttamente al di sopra della porzione sospesa alle pareti.

In presenza di accelerazione aggiuntiva verticale e orizzontale, la pressione totale, p_h , tra l'elemento E e la parete del silos è data da:

$$p_h = p_{h0}^* + \Delta p_h \quad (5.80)$$

che permette di riscrivere la prima delle (5.79) nel seguente modo:

$$(p_h - p_{h0}^*) \cdot A_E = a_g(z) \cdot \gamma \cdot (V_E + dB \cdot ds \cdot z) \quad (5.81)$$

dove V_E ed A_E rappresentano rispettivamente il volume dell'elemento E e l'area della superficie verticale esterna dell'elemento E :

$$V_E = s \cdot dB \cdot dz \quad (5.82)$$

$$A_E = dB \cdot dz \quad (5.83)$$

dove s è lo spessore dell'elemento E .

Sostituendo la (5.82) e la (5.83) nella (5.81), si ottiene:

$$\begin{aligned} (p_h - p_{h0}^*) \cdot dB \cdot dz &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot (s \cdot dB \cdot dz + dB \cdot ds \cdot z) \\ (p_h - p_{h0}^*) &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot \left(s + \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \end{aligned} \quad (5.84)$$

Occorre adesso lavorare sull'equilibrio alla traslazione verticale nella quale sostituire la (5.82) e la (5.83), in tal modo si ha:

$$\begin{aligned} (s \cdot dB \cdot dz + dB \cdot ds \cdot z) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) &= dB \cdot dz \cdot p_w \\ \left(s + \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) &= p_w \end{aligned} \quad (5.85)$$

La tensione tangenziale verticale di aderenza, in questo caso, è data da:

$$p_w = p_h \cdot \mu \quad (5.86)$$

che inserita nella (5.85) fornisce:

$$\begin{aligned} \left(s + \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \cdot \gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) &= p_h \cdot \mu \\ \left(s + \frac{ds}{dz} \cdot z \right) &= \frac{p_h \cdot \mu}{\gamma \cdot (1 + a_{g\text{-vert}})} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Andando a sostituire la (5.87) nella (5.84) si ricava:

$$(p_h - p_{h0}^*) = a_g(z) \cdot \frac{p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (5.88)$$

che fornisce:

$$\begin{aligned} p_h &= p_{h0}^* + \frac{a_g(z) \cdot p_h \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \\ p_h \cdot \left(1 - \frac{a_g(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}} \right) &= p_{h0}^* \\ p_h &= \frac{p_{h0}^*}{1 - \frac{a_g(z) \cdot \mu}{1 + a_{g\text{-vert}}}} \\ p_h &= \frac{p_{h0}^*}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu} \end{aligned} \quad (5.89)$$

avendo posto:

$$\nu = \frac{1}{1 + a_{g\text{-vert}}} \quad (5.90)$$

Ricordando infine la (5.75) si ottiene:

$$p_h = \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} \quad (5.91)$$

Da tale risultato si può ottenere anche l'espressione delle Δp_h andando a sostituire nella (5.80) la (5.91) e la (5.75):

$$\begin{aligned} \Delta p_h &= p_h - p_{h0}^* \\ \Delta p_h &= \frac{\lambda \cdot \gamma \cdot z}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} - \gamma \cdot \lambda \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot z \\ \Delta p_h &= \frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z)} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Ponendo:

$$\beta(z) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu} \quad (5.93)$$

si può scrivere:

$$\Delta p_h = a_g(z) \cdot \frac{\beta(z)}{2} \cdot \gamma \cdot z \quad (5.94)$$

Al fine di ottenere lo spessore s si deve inserire la (5.91) nella (5.87) che in tal modo fornisce:

$$s + \frac{ds}{dz} \cdot z = \frac{\mu \cdot \lambda \cdot z}{(1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu)} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} s + \frac{ds}{dz} \cdot z &= \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \\ s + \frac{ds}{dz} \cdot z - \frac{\beta(z)}{2} \cdot z &= 0 \end{aligned} \quad (5.96)$$

L'equazione differenziale sovrastante ha soluzioni diverse a seconda della variazione dell'accelerazione lungo l'altezza.

Pertanto si esplica di seguito la soluzione ottenuta per:

- 1) $a_g(z) = a_{g0}$
- 2) $a_g(z) = -a_{g1} \cdot z + (a_{g0} + a_{g1} \cdot H)$

Accelerazione costante

$$s(z) = \frac{\beta}{4} \cdot z + \frac{C}{z} \quad (5.97)$$

dove C rappresenta una costante di integrazione. Per avere significato fisico occorre che

$$C = 0 \quad (5.98)$$

La (5.97) diviene in tal modo:

$$s(z) = \frac{\beta}{4} \cdot z \quad (5.99)$$

Ricordando che:

$$\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{1 - v \cdot a_{g0} \cdot \mu} \quad (5.100)$$

si ha:

$$s = \frac{\lambda \cdot \mu}{2(1 - v \cdot a_{g0} \cdot \mu)} \cdot z \quad (5.101)$$

Accelerazione lineare

$$s(z) = \frac{C}{z} + \frac{\lambda \cdot \mu}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot v^2 \cdot \mu^2} \cdot (a_{g1} \cdot z \cdot v \cdot \mu + (-1 + v \cdot \mu \cdot a_g(0)) \text{Log}[1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z)]) \quad (5.102)$$

Ponendo la condizione al contorno:

$$s(0) = 0 \quad (5.103)$$

si ottiene:

$$s(z) = \frac{\lambda \cdot \mu}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \mu} \cdot \left(a_{g1} \cdot z + \left(-\frac{1}{v \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z)}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right] \right) \quad (5.104)$$

5.2.6 Equilibrio alla traslazione tangenziale di E:

Si consideri ora l'elemento E posizionato alla quota generica z sulla parete del silos parallela alla direzione di ingresso del sisma.

Si indichino con τ_h le tensioni tangenziali orizzontali che si scambiano il toro esterno di cereale e le pareti del silos parallele alla direzione di ingresso del sisma. Sotto l'ipotesi della teoria, per il singolo elemento E, l'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale in direzione tangenziale (cioè secondo la tangente orizzontale alla superficie esterna dell'elemento E) fornisce:

$$\tau_h \cdot A_E = a_g(z) \cdot \gamma \cdot (V_E + dB \cdot ds \cdot z) \quad (5.105)$$

Sostituendo la (5.82) e la (5.83) nella (5.105) si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau_h \cdot dB \cdot dz &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot (s \cdot dB \cdot dz + dB \cdot ds \cdot z) \\ \tau_h &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot \left(s + \frac{ds}{dz} \cdot z \right) \end{aligned} \quad (5.106)$$

Tenendo conto della (5.95) si ottiene:

$$\tau_h = a_g(z) \cdot \gamma \frac{\beta(z)}{2} \cdot z \quad (5.107)$$

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z)}{(1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z))} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \quad (5.108)$$

5.2.7 Limiti di validità

5.2.7.1 Esistenza della porzione B1

Affinché la porzione B1 di cereale esista deve essere soddisfatta la relazione seguente:

$$\boxed{r_B = A - s_{B,z=H} > 0} \quad (5.109)$$

che fornisce:

$$A > s_{B,z=H} \quad (5.110)$$

Accelerazione costante

Tenendo presente la (5.101) si ha:

$$A > \frac{\beta}{4} \cdot H \quad (5.111)$$

che fornisce:

$$\boxed{\Delta = \frac{H}{2A} < \frac{1 - v \cdot a_g \cdot \mu}{\mu \cdot \lambda} = \left(\frac{H}{2A} \right)_{\max-B} = \Delta_{\max-B}} \quad (5.112)$$

Accelerazione lineare

Tenendo presente la (5.104) si ha:

$$A > \frac{\lambda \cdot \mu}{H \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \mu} \cdot \left(a_{g1} \cdot H + \left(-\frac{1}{v \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(H)}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right] \right) \quad (5.113)$$

che fornisce:

$$\boxed{\Delta = \frac{H}{2A} < \frac{H \cdot a_{g1}^2 \cdot v \cdot \mu}{2\lambda \cdot \mu \cdot \left(a_{g1} + \frac{1}{H} \left(-\frac{1}{v \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(H)}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right] \right)} = \left(\frac{H}{2A} \right)_{\max-B} = \Delta_{\max-B}} \quad (5.114)$$

L'equazioni (5.112) e (5.114) riportano il valore limite massimo del rapporto altezza/diametro, $\Delta_{\max-B} = \left(\frac{H}{2A} \right)_{\max-B}$, del silos affinché lo spessore massimo della porzione di cereale sostenuto verticalmente dalle pareti del silos sia minore della dimensione del silos e quindi affinché la notazione adottata rimanga valida.

5.2.7.2 Esistenza della porzione B2

Affinché esista la porzione B2 spingente sulle pareti deve essere verificata la seguente relazione:

$$\boxed{s(z) > 0} \quad (5.115)$$

Accelerazione costante

Tenendo presente la (5.101) si ha:

$$\frac{\lambda \cdot \mu}{2(1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu)} \cdot z > 0 \quad (5.116)$$

Essendo che:

$$\begin{aligned} z &\geq 0 \\ \lambda \cdot \mu &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.117)$$

si deve avere:

$$1 - \nu \cdot a_{g0} \cdot \mu > 0 \quad (5.118)$$

da cui si ottiene:

$$\boxed{a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu}} \quad (5.119)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza si ha:

$$\frac{\lambda \cdot \mu}{z \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \mu} \cdot \left(a_{g1} \cdot z + \left(-\frac{1}{\nu \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z)}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right] \right) > 0 \quad (5.120)$$

che fornisce:

$$\boxed{a_{g1} \cdot z > \left(\frac{1}{\nu \cdot \mu} - a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z)}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right]} \quad (5.121)$$

5.2.7.3 Esistenza delle sollecitazioni

Con riferimento alla (5.91) e alla (5.108) per aver assicurata l'esistenza delle pressioni orizzontali e delle tensioni tangenziali è necessario porre:

$$1 - \nu \cdot a_g(z) \cdot \mu \neq 0 \quad (5.122)$$

che fornisce:

$$\nu \cdot a_g(z) \cdot \mu \neq 1 \quad (5.123)$$

$$a_g(z) \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.124)$$

Accelerazione costante

Nel caso di accelerazione costante si ottiene:

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.125)$$

Accelerazione lineare

Nel caso si abbia accelerazione variabile linearmente con l'altezza si ha:

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.126)$$

5.2.8 Riassunto delle limitazioni

Esistenza porzione B1:

Accelerazione costante

$$\Delta = \frac{H}{2A} < \frac{1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu}{\mu \cdot \lambda} \quad (5.127)$$

Accelerazione lineare

$$\Delta = \frac{H}{2A} > \frac{H \cdot a_{g1}^2 \cdot \nu \cdot \mu}{2\lambda \cdot \mu \cdot \left(a_{g1} + \frac{1}{H} \left(-\frac{1}{\nu \cdot \mu} + a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(H)}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right] \right)} \quad (5.128)$$

Esistenza porzione B2:

Accelerazione costante

$$a_{g0} < \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.129)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g1} \cdot z > \left(\frac{1}{\nu \cdot \mu} - a_g(0) \right) \text{Log} \left[\frac{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(z)}{1 - \nu \cdot \mu \cdot a_g(0)} \right] \quad (5.130)$$

Esistenza delle sollecitazioni:

Accelerazione costante

$$a_{g0} \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.131)$$

Accelerazione lineare

$$a_{g0} + a_{g1} \cdot H \neq \frac{1}{\nu \cdot \mu} \quad (5.132)$$

5.3 Le azioni agenti sull'elemento E : confronto tra casi limite

E' interessante notare come entrambi i casi limite portino alla identificazione delle stesse pressioni aggiuntive orizzontali Δp_h (e pertanto agli stessi valori delle pressioni orizzontali e verticali trasmesse dal cereale alle pareti del silos) fornendo pertanto robustezza al risultato ottenuto.

5.4 Le porzioni in cui può essere suddiviso il cereale in relazione al suo comportamento in condizioni accelerate

Per dare senso fisico ai risultati ottenuti nei paragrafi 5.1 e 5.2 sulle azioni trasmesse dal cereale alle pareti del silos in condizioni accelerate (accelerazione orizzontale e verticale) e quindi per fornire immediata comprensione al progettista di quali siano le porzioni di cereale che vanno a scaricare azioni sulle pareti del silos in condizioni accelerate, risulta opportuno suddividere il cereale in diverse porzioni secondo quanto di seguito riportato:

Caso limite A:

- **Porzione A1:** è la quotaparte di cereale che si appoggia sul cereale sottostante via via fino alla base del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 5.1 e 5.2). Questa porzione di cereale non interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con il tronco di piramide (rovesciato) di asse verticale (rappresentato in giallo in figura 5.7) avente come base minore il rettangolo di lati $2 \cdot [A - s(z)] \cdot [B - s(z)]$ nel piano $z = H$ (quindi alla base del silos) e come base maggiore il perimetro del silos (posizionata alla quota $z = 0$).

- **Porzione A2:** è la quotaparte di cereale sostenuta interamente dalle pareti laterali del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 5.1 e 5.2). Questa porzione di cereale interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con la restante parte di cereale (rappresentata in rosso in figura 5.8) ottenuta sottraendo il tronco di piramide (di cui sopra) dal volume totale.

Caso limite B:

- **Porzione B1:** è la quotaparte di cereale che si appoggia sul cereale sottostante via via fino alla base del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 5.1 e 5.2). Questa porzione di cereale non interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con il prisma di asse verticale (rappresentato in giallo in figura 5.9) che si può ricavare trasladando in direzione z il rettangolo di lati $2 \cdot [A - s(z)] \cdot [B - s(z)]$ disegnato nel piano $z = H$ (quindi alla base del silos).

- **Porzione B2:** è la quotaparte di cereale sostenuta interamente per via diretta dalle pareti laterali del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 5.1 e 5.2). Questa porzione di cereale interagisce con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con la corona prismatica di asse verticale (rappresentata in rosso in figura 5.10) e di spessore $s = s(z)$ variabile in funzione della quota z .

- **Porzione B3:** è la quotaparte di cereale sostenuta interamente per via indiretta (attraverso il cereale della porzione 2) dalle pareti laterali del silos (nei confronti dell'equilibrio alla traslazione sia verticale che orizzontale, in relazione alle condizioni di equilibrio esplicitate nei paragrafi 5.1 e 5.2). Questa porzione di cereale interagisce indirettamente con le pareti del silos. Da un punto di vista geometrico, essa coincide con la corona prismatica di asse verticale (rappresentata in blu in figura 5.11) e di spessore $t = t(z) = s(z = H) - s(z)$ variabile in funzione della quota z . Questa porzione costituisce la parte restante del parallelepipedo di cereale quando si sottraggono la porzione 1 e la porzione 2.

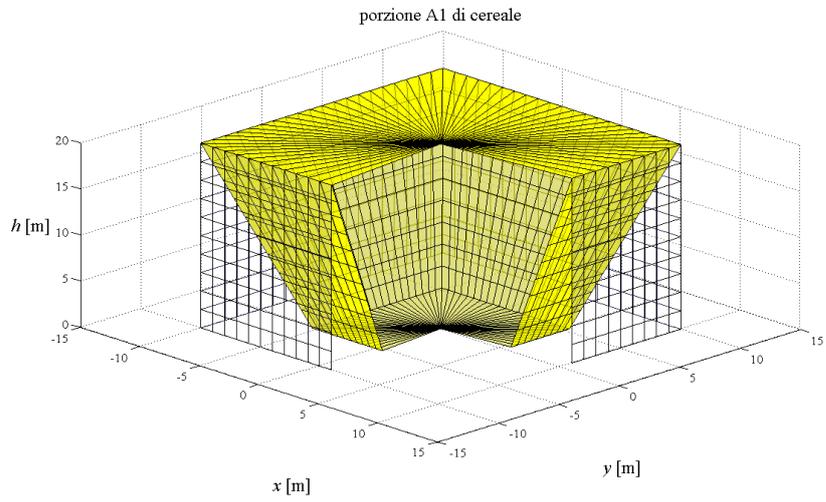
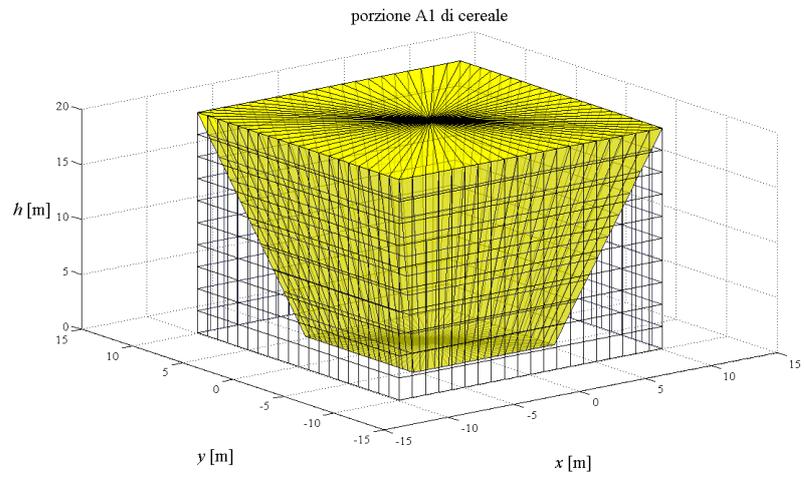


Figura 5.7 Porzione A1 di cereale: vista intera, vista sezionata.

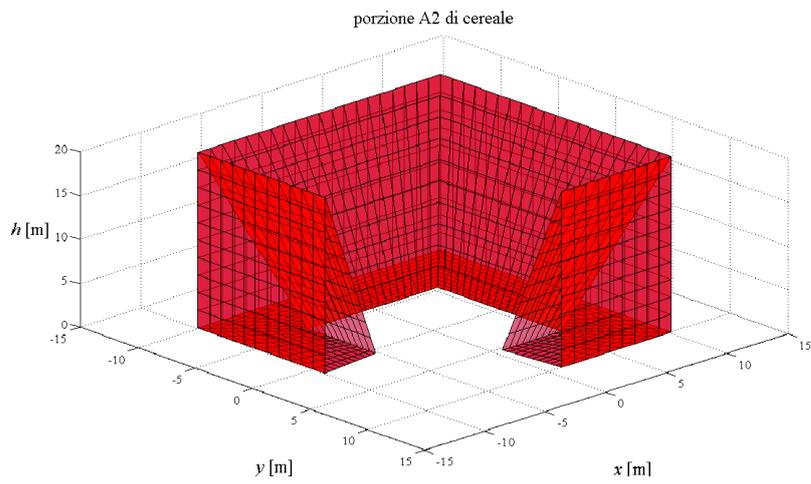
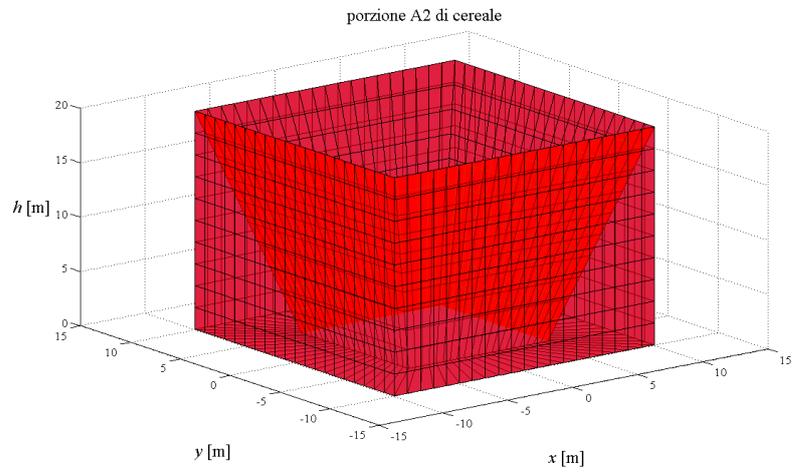


Figura 5.8 Porzione A2 di cereale: vista intera, vista sezionata.

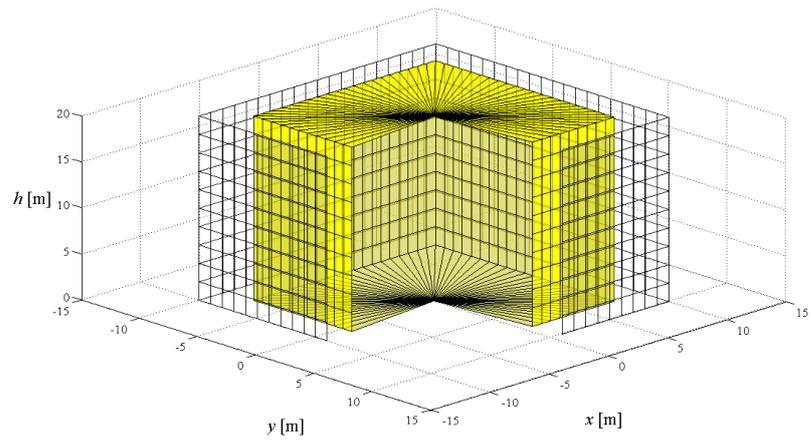
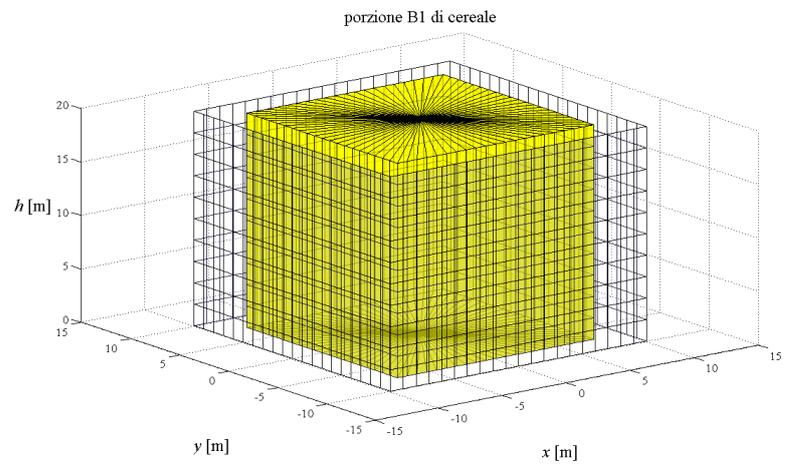


Figura 5.9 Porzione B1 di cereale: vista intera, vista sezionata.

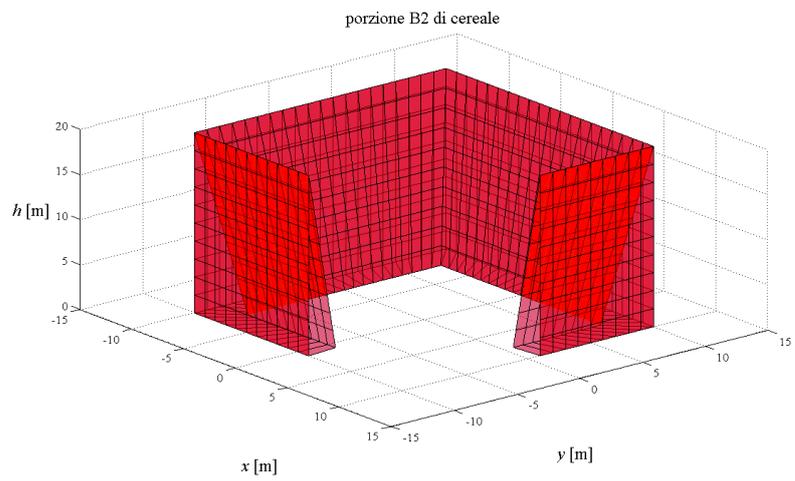
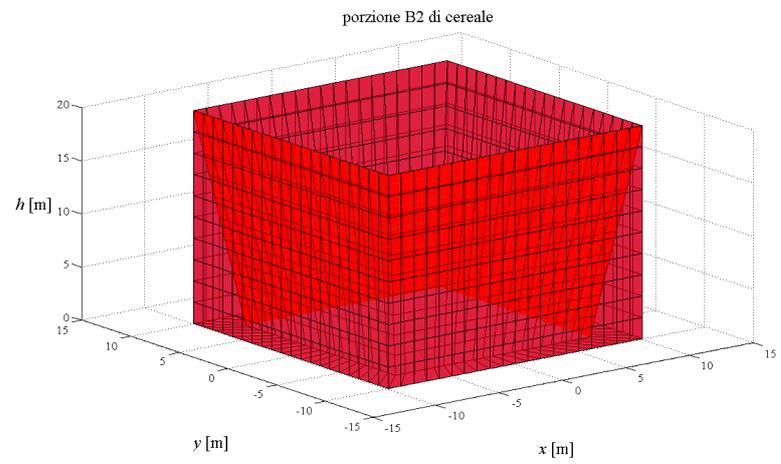


Figura 5.10 Porzione B2 di cereale: vista intera, vista sezionata.

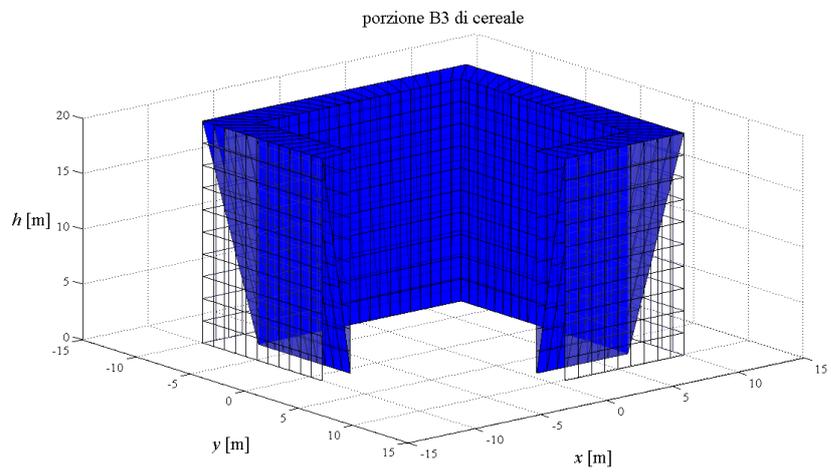
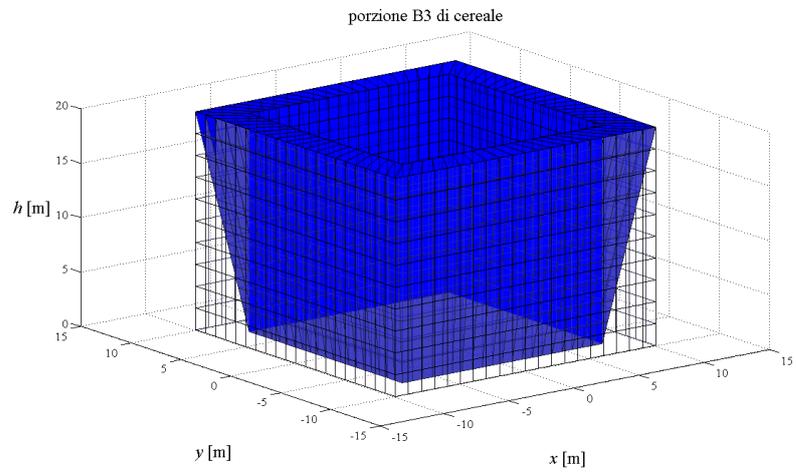


Figura 5.11 Porzione B3 di cereale: vista intera, vista sezionata.

5.5 Calcolo del volume delle porzioni di cereale

In questa sezione, si identificheranno formule analitiche per il calcolo del volume delle porzioni di cereale descritte nella sezione 5.4 e rappresentate in figura 5.12 e in figura 5.13. Tale calcolo può risultare utile per l'interpretazione fisica dei risultati presentati nei paragrafi 5.1 e 5.2.

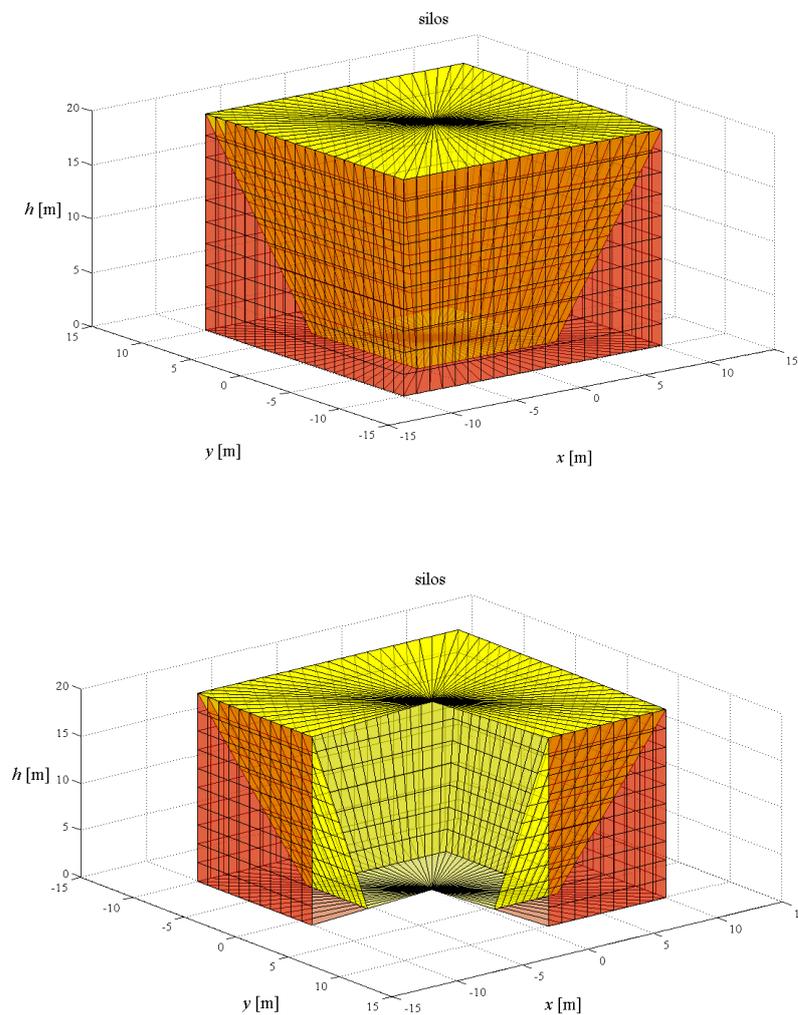


Figura 5.12 Viste tridimensionali della porzione A1 (in giallo) e della porzione A2 (in rosso) del silos cereali a fondo piano: vista intera, vista sezionata.

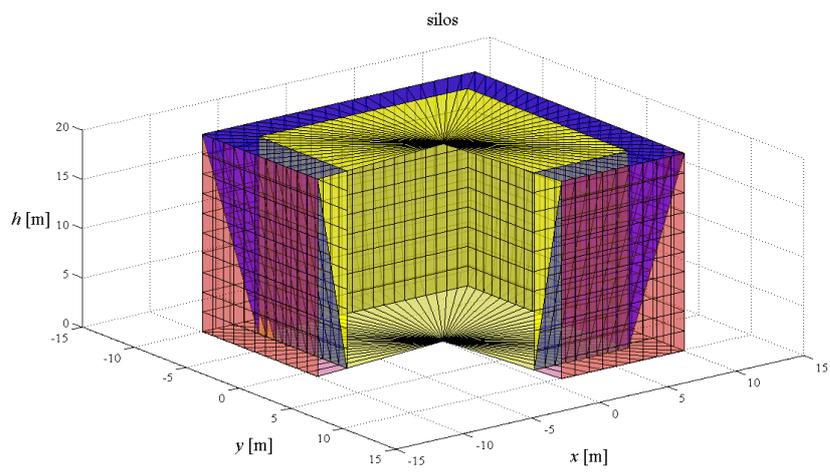
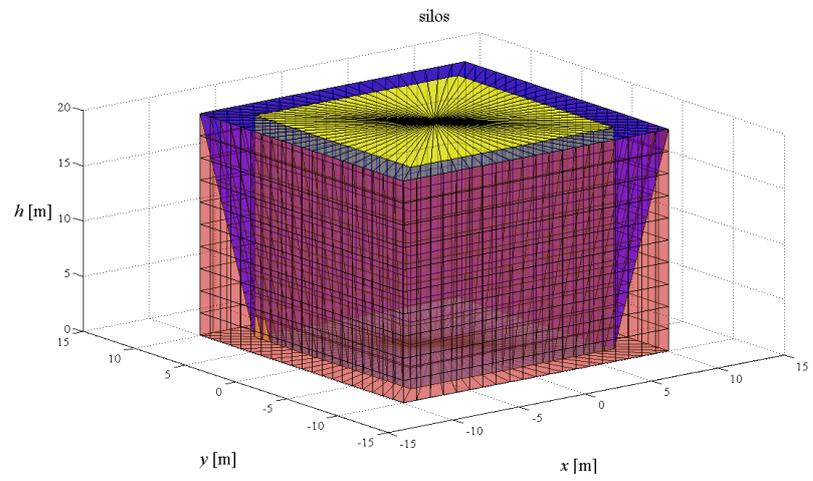


Figura 5.13 *Viste tridimensionali della porzione B1 (in giallo), della porzione B2 (in rosso) e della porzione B3 (in blu) del silos cereali a fondo piano: vista intera, vista sezionata.*

5.5.1 Calcolo del volume della porzione A1

Il volume della porzione A1, V_{A1} , è dato da:

$$\begin{aligned} V_{A1} &= (2A - 2s) \cdot (2B - 2s) \cdot H + \\ &+ 2 \cdot \left[(B - s) \cdot H \cdot s \cdot \frac{1}{2} \right] + 2 \cdot \left[(A - s) \cdot H \cdot s \cdot \frac{1}{2} \right] + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot H \right) \end{aligned} \quad (5.133)$$
$$V_{A1} = 4ABH - 2s(A + B)H + \frac{4}{3}s^2H$$

Essendo:

$$s = \frac{\beta}{2} \cdot z \quad (5.134)$$

si ottiene:

$$V_{A1} = 4ABH - \beta(A + B)H^2 + \frac{\beta^2 H^3}{3} \quad (5.135)$$

dove:

$$\beta = 2 \cdot \frac{\mu \cdot \lambda}{1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu} \quad (5.136)$$

5.5.2 Calcolo del volume della porzione A2

Il volume della porzione A2, V_{A2} , è dato dalla differenza tra il volume totale del silos, V_{tot} , e il volume della porzione A1, V_{A1} :

$$V_{A2} = V_{tot} - V_{A1} \quad (5.137)$$

dove il volume totale del silos vale:

$$V_{tot} = 4ABH \quad (5.138)$$

ed il volume della porzione 1 è dato dalla (5.135).

Pertanto si ha:

$$V_{A2} = 4ABH - 4ABH + 2s(A+B)H - \frac{4}{3}s^2H \quad (5.139)$$

che fornisce:

$$V_{A2} = \beta(A+B)H^2 - \frac{\beta^2H^3}{3} \quad (5.140)$$

5.5.3 Calcolo del volume della porzione B1

Il volume della porzione B1, V_{B1} , è dato da:

$$V_{B1} = (2A - 2s(H)) \cdot (2B - 2s(H)) \cdot H \quad (5.141)$$

Essendo:

$$s = \frac{\beta}{4} \cdot z \quad (5.142)$$

$$V_{B1} = \left(2A - 2\frac{\beta}{4}H\right) \cdot \left(2B - 2\frac{\beta}{4}H\right) \cdot H \quad (5.143)$$

$$V_{B1} = 4ABH - \beta H^2(A+B) + \frac{\beta^2 H^3}{4}$$

dove:

$$\beta = 2 \cdot \frac{\mu \cdot \lambda}{1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu} \quad (5.144)$$

5.5.4 Calcolo del volume della porzione B2

Il volume della porzione B2, V_{B2} , è dato da:

$$\begin{aligned} V_{B2} = & 2 \left[\left(2A - 2s(H) \right) \cdot s(H) \cdot \frac{H}{2} \right] + \\ & + 2 \left[\left(2B - 2s(H) \right) \cdot s(H) H \cdot \frac{H}{2} \right] + 4 \cdot \frac{2}{3} H (s(H))^2 \end{aligned} \quad (5.145)$$

Essendo:

$$s = \frac{\beta}{4} \cdot z \quad (5.146)$$

risulta:

$$\begin{aligned} V_{B2} = & 2 \left[\left(2A - 2 \frac{\beta}{4} H \right) \cdot \frac{\beta}{4} H \cdot \frac{H}{2} \right] + \\ & + 2 \left[\left(2B - 2 \frac{\beta}{4} H \right) \cdot \frac{\beta}{4} H \cdot \frac{H}{2} \right] + 4 \cdot \frac{2}{3} H \left(\frac{\beta}{4} H \right)^2 \end{aligned} \quad (5.147)$$

$$V_{B2} = \frac{\beta H^2}{2} (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{12} \quad (5.148)$$

5.5.5 Calcolo del volume della porzione B3

Il volume della porzione B3, V_{B3} , è dato da:

$$\begin{aligned} V_{B2} = & 2 \left[\left(2A - 2s(H) \right) \cdot s(H) \cdot \frac{H}{2} \right] + \\ & + 2 \left[\left(2B - 2s(H) \right) \cdot s(H) \cdot \frac{H}{2} \right] + 4 \cdot \frac{H}{3} (s(H))^2 \end{aligned} \quad (5.149)$$

$$V_{B2} = 2 \left[\left(2A - 2 \frac{\beta}{4} H \right) \cdot \frac{\beta}{4} H \cdot \frac{H}{2} \right] +$$

$$+ 2 \left[\left(2B - 2 \frac{\beta}{4} H \right) \cdot \frac{\beta}{4} H \cdot \frac{H}{2} \right] + 4 \cdot \frac{H}{3} \left(\frac{\beta}{4} H \right)^2 \quad (5.150)$$

$$V_{B2} = \frac{\beta H^2}{2} (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{6} \quad (5.151)$$

5.5.6 *Calcolo del volume della porzione B2+B3*

Il volume di cereale, V_{B2+B3} , somma dei volumi delle due porzioni B2 e B3, può essere calcolato direttamente come somma dei due volumi V_{B2} e V_{B3} :

$$V_{B2+B3} = V_{B2} + V_{B3} \quad (5.152)$$

$$V_{B2+B3} = \frac{\beta H^2}{2} (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{12} + \frac{\beta H^2}{2} (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{6} \quad (5.153)$$

$$V_{B2+B3} = \beta H^2 (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{4} \quad (5.154)$$

5.5.7 *Considerazioni sui volumi delle porzioni di cereale*

Sulla base dei risultati presentati in questa sezione:

$$\bullet V_{B2} \cong V_{B3} \quad (5.155)$$

$$\bullet V_{B2} + V_{B3} \cong V_{A2} \quad (5.156)$$

$$\bullet V_{B1} \cong V_{A1} \quad (5.157)$$

A seguito di analisi numeriche le equazioni soprastanti possono ritenere valide le uguaglianze con una variazione inferiore ai cinque punti percentuale.

5.5.8 Rapporto tra il volume della porzione A2 o della porzione B2+B3 ed il volume totale

Il rapporto tra il volume della porzione A2 (o, in modo equivalente per la (5.156), della porzione B2+B3) ed il volume totale è pari a:

$$\frac{V_{B2+B3}}{V_{tot}} = \frac{\beta H^2(A+B) - \frac{\beta^2 H^3}{4}}{4ABH} = \frac{4\beta H(A+B) - \beta^2 H^2}{16AB} \quad (5.158)$$

5.6 Le azioni alla base del silos

Il taglio alla base del silos, inteso come la risultante delle azioni orizzontali che si scambiano il toro esterno di cereale e le pareti del silos, può essere valutato nei due modi seguenti:

- mediante proiezione diretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h (paragrafo 5.6.1);
- moltiplicando la massa della porzione A2 (o, in modo equivalente per la (5.156), della porzione B2+B3) per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g (paragrafo 5.6.2).

Analogamente, il momento flettente alla base del silos può essere valutato nei due modi seguenti:

- mediante proiezione diretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h (paragrafo 5.6.3);
- moltiplicando la massa della porzione A2 (o, in modo equivalente per la (5.156), della porzione B2+B3) per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g (paragrafo 5.6.4).

5.6.1 *Calcolo del taglio alla base mediante proiezione diretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h*

Il taglio alla base del silos è dato dall'integrale, sulla superficie laterale del silos, della somma delle proiezioni delle pressioni orizzontali Δp_h , fornite dalla (5.94), e delle proiezioni delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h , fornite dalla (5.108), in direzione x (ossia nella direzione dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale):

$$\begin{aligned}
 T &= 2 \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2B} \Delta p_h(z) \cdot dB + \int_0^{2A} \tau_h(z) \cdot dA \right) \cdot dz \\
 T &= 2 \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2B} a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \cdot dB + \int_0^{2A} a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \cdot dA \right) \cdot dz \quad (5.159) \\
 T &= 2 \cdot \int_0^H \left(a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot z \right) \cdot dz
 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^2 \quad (5.160)$$

Nel caso il silos fosse molto allungato $A \ll B$ si ottiene:

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot B \cdot H^2 \quad (5.161)$$

5.6.2 *Calcolo del taglio alla base mediante il volume della porzione A2 o della porzione B2+B3*

Il taglio alla base del silos è dato dall'integrale si può ottenere anche moltiplicando la massa della porzione B2+B3 per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g . La massa della porzione B2+B3 è data da:

$$m_{B2+B3} = \frac{V_{B2+B3} \cdot \gamma \cdot g}{g} = V_{B2+B3} \cdot \gamma \quad (5.162)$$

dove il volume V_{B2+B3} è dato dalla (5.154):

$$V_{B2+B3} = \left(\beta H^2 (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{4} \right) \cdot \gamma \quad (5.163)$$

si ottiene pertanto:

$$T = \left(\beta H^2 (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{4} \right) \cdot \gamma \cdot a_g \quad (5.164)$$

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^2 \left(1 - \frac{\beta H}{4 \cdot (A + B)} \right)$$

Nel caso il silos fosse molto allungato cambia il volume partecipante:

$$V_{B2+B3} = 2 \cdot (2B \cdot s \cdot H) = \beta \cdot B \cdot H^2 \quad (5.165)$$

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot B \cdot H^2 \quad (5.166)$$

5.6.3 *Calcolo del momento flettente alla base mediante proiezione indiretta delle pressioni Δp_h e delle tensioni tangenziali τ_h*

Il momento flettente alla base del silos è dato dall'integrale, sulla superficie laterale del silos, della proiezione delle pressioni Δp_h , fornite dalla (5.94), e delle proiezioni delle tensioni tangenziali orizzontali τ_h , fornite dalla (5.108), in direzione x (ossia nella direzione dell'accelerazione aggiuntiva orizzontale) moltiplicate per la quota $h = H - z$ a partire dalla base del silos:

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2B} \Delta p_h(z) \cdot dB + \int_0^{2A} \tau_h(z) \cdot dA \right) \cdot (H - z) \cdot dz \\
 M &= 2 \cdot \int_0^H \left(\int_0^{2B} a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \cdot dB + \int_0^{2A} a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \cdot dA \right) \cdot (H - z) \cdot dz \quad (5.167) \\
 M &= a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \int_0^H z \cdot (H - z) \cdot dz \cdot \left(\int_0^{2B} 1 \cdot dB + \int_0^{2A} 1 \cdot dB \right)
 \end{aligned}$$

si ottiene:

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^3}{3} \quad (5.168)$$

Nel caso il silos fosse molto allungato $A \ll B$ si ottiene:

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot B \cdot H^3}{3} \quad (5.169)$$

5.6.4 *Calcolo del momento flettente alla base mediante la massa della porzione A2 o della porzione B2+B3*

Il momento flettente alla base del silos si può ottenere anche moltiplicando la massa della porzione B2+B3 per l'accelerazione aggiuntiva orizzontale a_g e per la quota di applicazione della risultante delle pressioni. La massa della porzione B2+B3 è data dalla (5.162). Le pressioni presentano un diagramma triangolare e

pertanto la quota di applicazione della risultante delle pressioni si trova alla quota

$h = \frac{1}{3}H$ a partire dalla base del silos.

Si ottiene pertanto:

$$M = \left(\beta H^2 (A + B) - \frac{\beta^2 H^3}{4} \right) \cdot \gamma \cdot a_g \cdot \frac{H}{3} \quad (5.170)$$

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^3}{3} \cdot \left(1 - \frac{\beta H}{4 \cdot (A + B)} \right)$$

Nel caso il silos fosse molto allungato cambia il volume partecipante:

$$V_{B2+B3} = 2 \cdot (2B \cdot s \cdot H) = \beta \cdot B \cdot H^2 \quad (5.171)$$

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot B \cdot H^3}{3} \quad (5.172)$$

5.6.5 Calcolo dello sforzo normale

Gli sforzi normali che nascono alla base del silos lungo le pareti (sforzi di meridiano n_x relativi ad una striscia di larghezza unitaria) si ottengono integrando lungo z le p_w fornite dalla (5.86):

$$n_x = \int_0^H p_w(z) \cdot dz = \int_0^H \mu \cdot p_h(z) \cdot dz = \int_0^H \mu \cdot p_h(z) \cdot dz \quad (5.173)$$

$$n_x = \frac{1}{\nu \cdot (1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu)} \mu \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \frac{H^2}{2} \quad (5.174)$$

La pressione di contatto tra il cereale e la base del silos p_v (che si esplica alla base della porzione A1 di impronta $2 \cdot [A - s(z)] \cdot [B - s(z)]$ o B1 di area $2 \cdot [A - s(z)] \cdot [B - s(z)]$) vale:

$$p_v = \gamma \cdot H \cdot (1 + a_{g\text{-vert}}) \quad (5.175)$$

5.6.6 Considerazioni in merito alle sollecitazioni alla base del silos

Il calcolo tradizionale dei silos a fondo piano contenenti cereali condurrebbe alle seguenti azioni alla base del silos:

$$T_{trad} = a_g \cdot \gamma \cdot V_{tot} = 4a_g \cdot \gamma \cdot ABH \quad (5.176)$$

$$M_{trad} = a_g \cdot \gamma \cdot V_{tot} \cdot \frac{1}{2} H = 2a_g \cdot \gamma \cdot ABH^2 \quad (5.177)$$

Per la valutazione immediata dei benefici che la formulazione qui presentata per il calcolo dei silos a fondo piano contenenti cereali fornisce rispetto al calcolo tradizionale, è opportuno definire i seguenti rapporti tra il taglio della formulazione presentata e il taglio ottenuto con il calcolo tradizionale e tra il momento flettente della formulazione presentata e il momento flettente ottenuto con il calcolo tradizionale:

$$\rho_T = \frac{T}{T_{trad}} = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^2}{4a_g \cdot \gamma \cdot ABH} = \frac{\beta H(A + B)}{8AB} \quad (5.178)$$

$$\rho_M = \frac{M}{M_{trad}} = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^3}{3 \cdot 2a_g \cdot \gamma \cdot ABH^2} = \frac{\beta H(A + B)}{6AB} \quad (5.179)$$

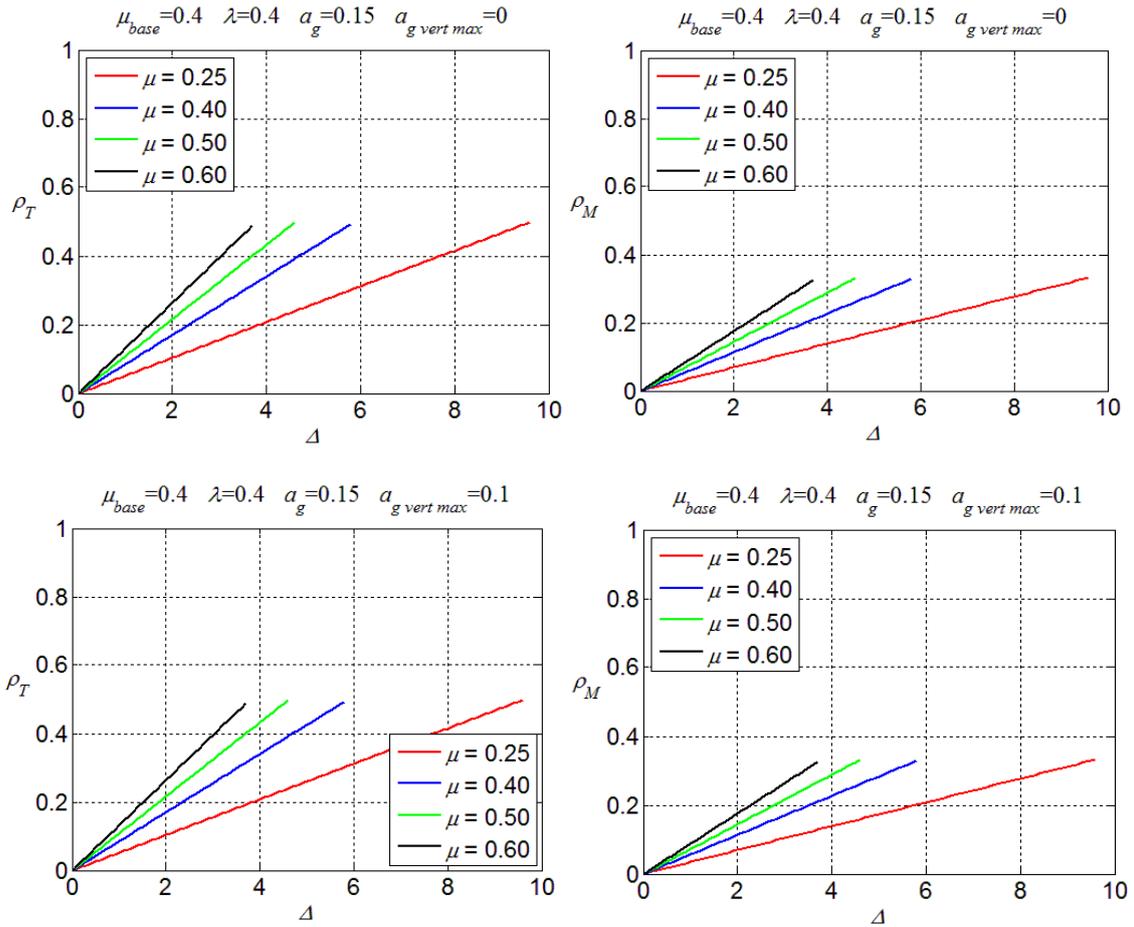
Nel caso il silos fosse molto allungato $A \ll B$ si ottiene:

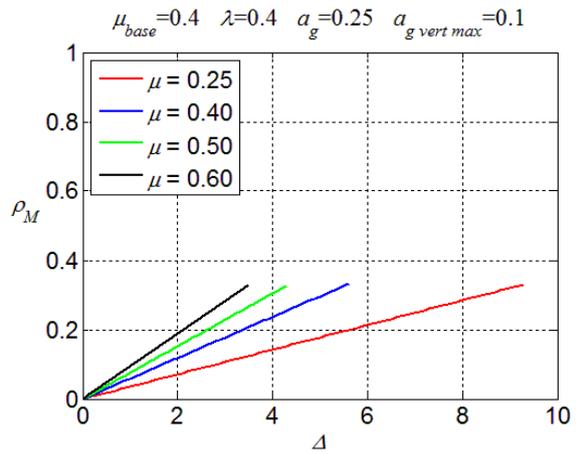
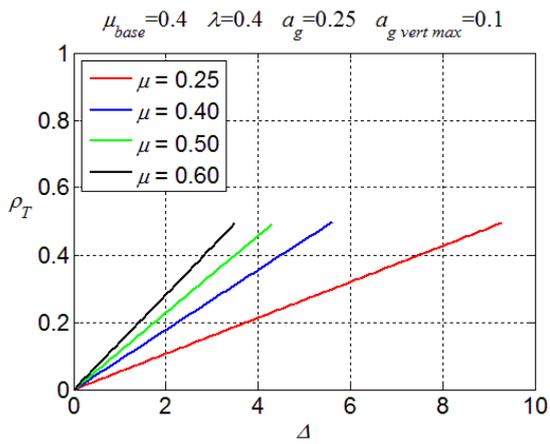
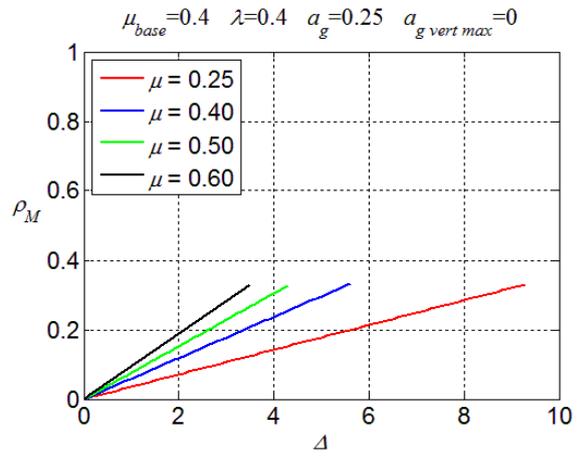
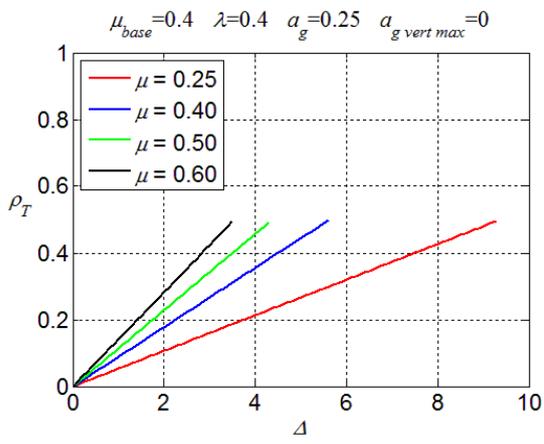
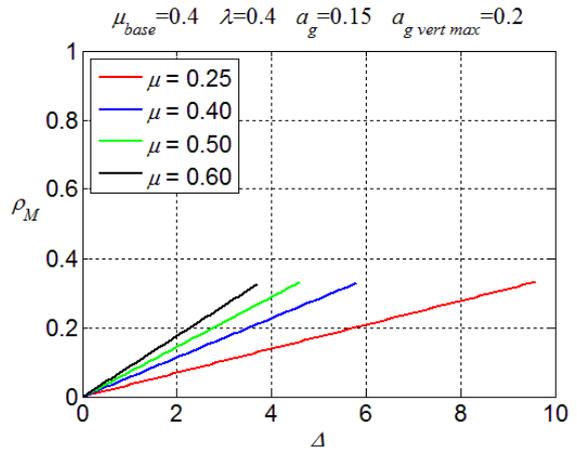
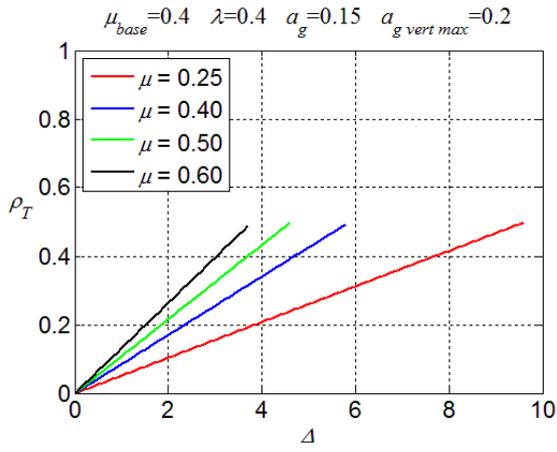
$$\rho_T = \frac{\beta H}{8A} \quad (5.180)$$

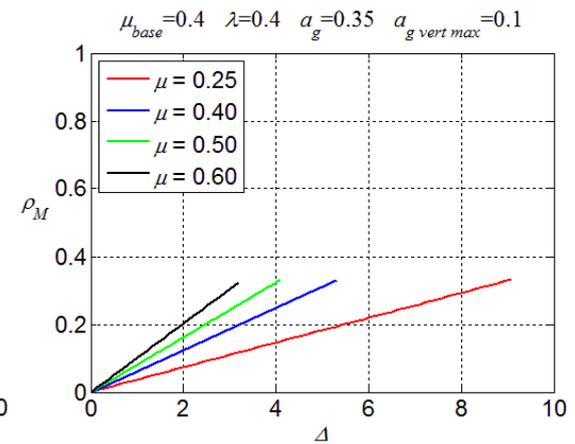
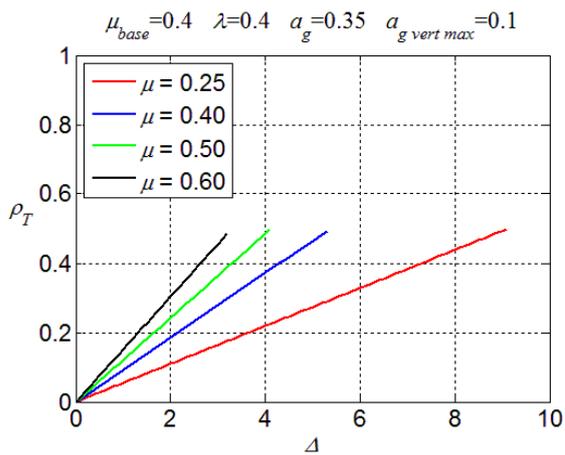
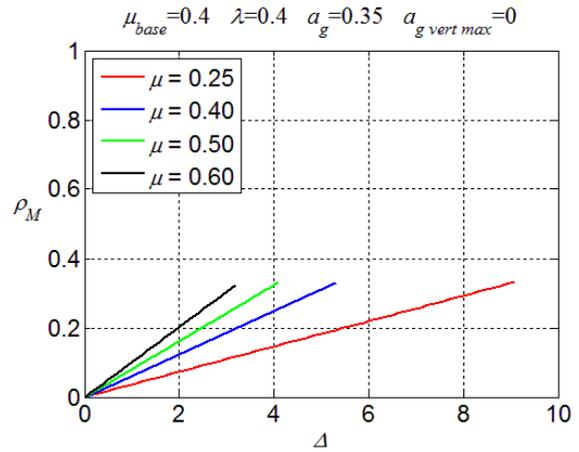
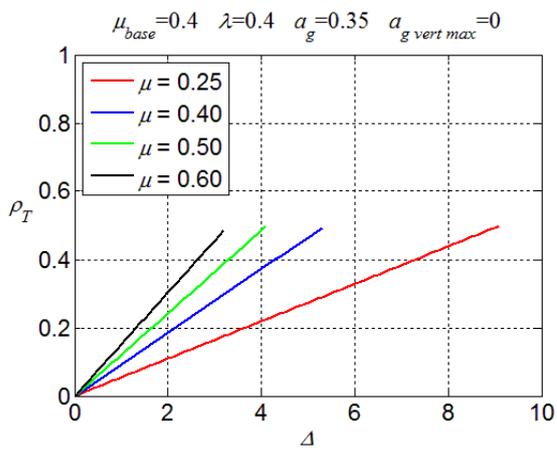
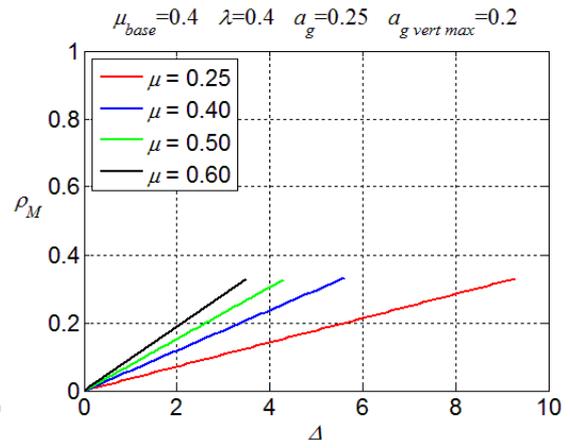
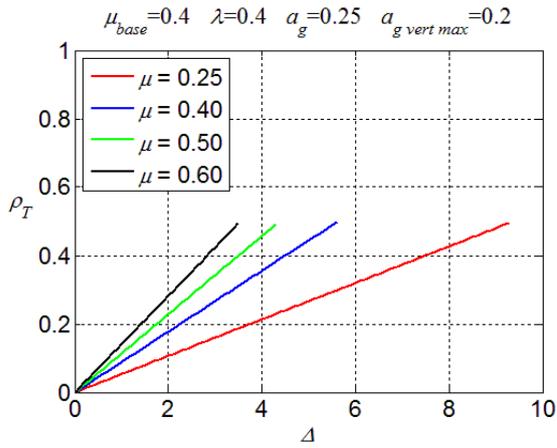
$$\rho_M = \frac{\beta H}{6A} \quad (5.181)$$

A titolo illustrativo, nel seguito (fig. 5.14) viene riportata una serie di grafici dei due rapporti ρ_T e ρ_M , al variare dei parametri λ , μ , a_g ed a_{g-vert} (si ricorda

$$\text{che } v = \frac{1}{1 + a_{g-vert}}).$$







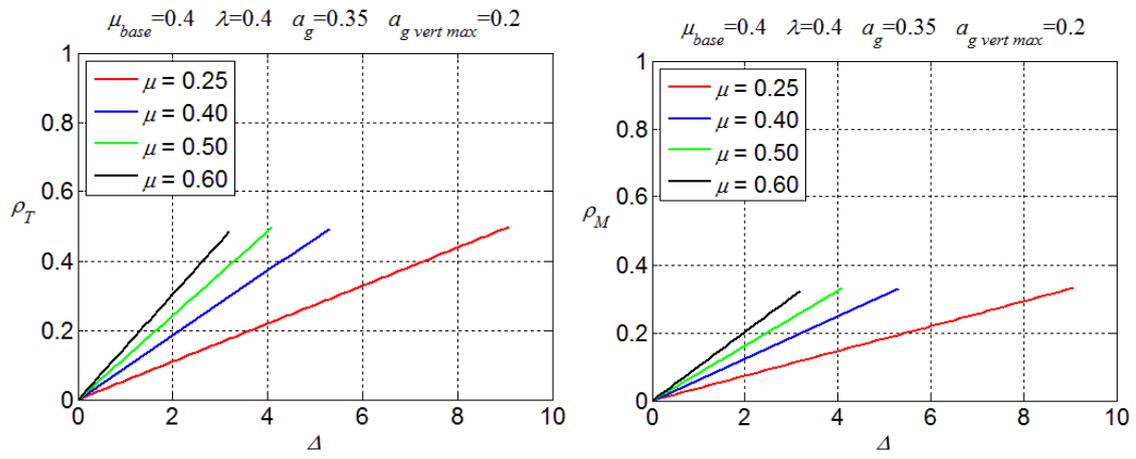


Figura 5.14 Rapporti ρ_T e ρ_M , al variare dei parametri λ , μ , a_g ed $a_{g\text{-vert}}$.

6 PREPARAZIONE DELLA PROVA

6.1 Descrizione della tavola

L' "Earthquake and Large Structures Laboratory"(EQUALS) fa parte dei Bristol Laboratories for Advanced Dynamics Engineering (BLADE), all'interno della Facoltà di Ingegneria di Bristol, nel Regno Unito. Possiede una tavola vibrante a 6 gradi di libertà (GDL), che è sostenuta da una robusta platea e circondata da solidi muri alti 15 m. La tavola vibrante è fornita di un set di 40 attuatori servo-idraulici che possono essere configurati per operare in combinazione con la tavola vibrante, la platea e i muri di contrasto, fornendo una simulazione ad alta adattabilità dinamica che può essere utilizzata per una grande varietà di terremoti e di test di carico dinamico.

La tavola vibrante è formata da una lastra inflessibile di alluminio di 3m x 3m pesante 3,8 tonnellate. La superficie di questa piattaforma è una sovrapposizione di 5 fogli di alluminio con una griglia regolare di fori passanti M12 per consentire l'attacco fra il corpo della piattaforma e i campioni. La piattaforma può accelerare orizzontalmente fino a 3,7g senza carico utile e 1,6g con un carico utile di 10 tonnellate. Le accelerazioni verticali corrispettive sono di 5,6g e 1,2g. I picchi di velocità sono di 1 m/s in tutti gli assi di traslazione, con picchi di spostamento di $\pm 0,15$ m.

La potenza idraulica per la tavola vibrante è data da un set di sei pompe condivise a volume idraulico variabile, che forniscono fino a 900 l/min a una pressione d'esercizio di 205 bar. La capacità di flusso massima può essere aumentata fino a circa 1200 l/min, per un massimo di 16 secondi in caso di esigenza estrema, con l'aggiunta di accumulatori idraulici extra.

Una caratteristica speciale del laboratorio EQUALS è il suo sistema di controllo digitale (DCS), con sistemi all'avanguardia mondiale, incluso un “test ibrido” di capacità (noto anche come ‘dynamic substructuring’) in cui parte del sistema strutturale d'interesse può essere simulato da un modello numerico incorporato nel sistema di controllo digitale, dove solamente una sotto-componente necessita di essere testata fisicamente. È disponibile un'ampia strumentazione, tra cui 256 canali per l'acquisizione dei dati.

Il laboratorio EQUALS è supportato da un gruppo multi-disciplinare di studiosi specializzati nella dinamica avanzata e nei materiali dei campi dell'ingegneria civile, aerospaziale e meccanica, così come nei campi della dinamica non lineare, fornendo agli utenti un supporto costante, fabbricazione e realizzazione di campioni, ed un supporto per le operazioni della tavola vibrante, l'elettronica e la strumentazione. La Facoltà ha a disposizione un'officina per la fabbricazione dei pezzi, equipaggiata con macchine a controllo numerico e tanto altro.

La ricerca basata sulla tavola vibrante dell'EQUALS raccoglie al suo interno la reazione di ponti strallati, interazioni fra la struttura ed il terreno, l'uso di elementi smorzanti discreti nelle strutture degli edifici, sistemi di isolamento alla base, risposta degli edifici alla torsione, di edifici in muratura, di edifici in acciaio e cemento armato, l'eccitamento di supporti multipli, gli effetti ad onda prodotti dalle scosse di terremoto, reazioni di strutture non lineari auto-allineanti, dighe, torri di stoccaggio, muri di contenimento e sistemi di rafforzamento con composti avanzati. La struttura è equipaggiata di due shear box lamellari e flessibili per i test geomeccanici. Una di queste è lunga 6m, profonda 1,5m e larga 1m; l'altra è lunga 1,5m, profonda 1m e larga 1m.

L'EQUALS è particolarmente efficiente nel testare campioni di piccolo e medio calibro per indagare sui fenomeni fondamentali dinamici e sismici. L'EQUALS viene talvolta impiegato per fare esperimenti su larga scala, che verranno poi eseguiti su una tavola vibrante più grande, come quelle del CEA di Saclay o del LNEC di Lisbona. La tavola vibrante può essere potenziata da

attuatori addizionali per attivare l'eccitamento dei supporti multipli o per indagare sugli effetti delle onde viaggianti. L'EQUALS ha una particolare maestria nei test sismici di problemi geotecnici.

Il motivo principale per cui l'EQUALS è maggiormente consigliato nell'effettuare i test dinamici è la capacità specifica della sua tavola vibrante in termini di forza massima (1,6g con un carico utile di 10 tonnellate), il che permette di collocare un campione di taglia considerevole. Inoltre, la disponibilità delle due shear box lamellari e flessibili (utilizzate originariamente per test geomeccanici) può dimostrarsi molto utile nello sviluppo di parametri di test, atti a valutare le pressioni orizzontali esercitate da materiali granulari sotto eccitamento sismico e/o accelerazione orizzontale costante.

6.2 Ipotesi di provini

Secondo le ipotesi alla base della teoria qui proposta ed alle formule ottenute dallo sviluppo della summenzionata teoria, le pressioni dovute al sisma dipendono dall'attrito che si ha tra le pareti del silos ed il materiale granulare: all'aumentare dell'attrito aumenta il volume di materiale che si poggia direttamente o meno alle pareti.

In accordo con questa osservazione, un silos le cui pareti fornissero un basso coefficiente d'attrito, sarebbe soggetto a minor sollecitazioni sismiche poiché gran parte del volume insilato scaricherebbe direttamente sul fondo dello stesso.

Per tale motivo inizialmente si è optato come materiale per i provini l'acciaio piuttosto che il cemento armato in quanto avente un minor coefficiente d'attrito (cfr Tab. 4.1 e Tab. E.1 dell'Eurocodice 1 parte 4).

Per lo stesso motivo come materiale insilato si è scelto il grano poiché a parità di categorie di parete forniva minor attrito rispetto ad altri materiali granulari come per esempio l'orzo.

Le principali caratteristiche di interesse per tale materiale sono:

- γ : peso specifico = 900 kg/m³;
- μ_s : coefficiente d'attrito grano-pareti laterali = 0.27;
- μ_b : coefficiente d'attrito grano-fondo = 0.36;
- λ : coefficiente di spinta laterale = 0.6325;

Nell'appendice B si possono trovare le schede che si sono realizzate per scegliere i provini da proporre all'Università di Bristol.

In tali schede (un gruppo per i provini cilindrici ed uno per quelli prismatici) sono riassunte nella prima pagina la geometria del provino, le caratteristiche dei materiali, un grafico dove è rappresentato il rapporto tra le pressioni totali tra la teoria proposta e la modalità dell'Eurocodice ed una tabella dove sono listati i rapporti tra le pressioni in punti significativi e le azioni alla base.

Nella seconda pagina vi sono due gruppi di figure:

- il primo rappresenta la pressione totale valutata con la nostra procedura e valutata con la procedura dell'Eurocodice;
- il secondo gruppo rappresenta la differenza tra le pressioni totali valutate con le metodologie summenzionate.

I provini scelti da sottoporre all'EQUALS sono stati:

- 1 cilindrico: H=1,5m R=1,5m;
- 2 prismatico: H=1,5m L=1,5m.

A titolo rappresentativo si riporta qui di seguito il grafico delle pressioni totali per il primo provino (H=1.5m e R=1.5m).

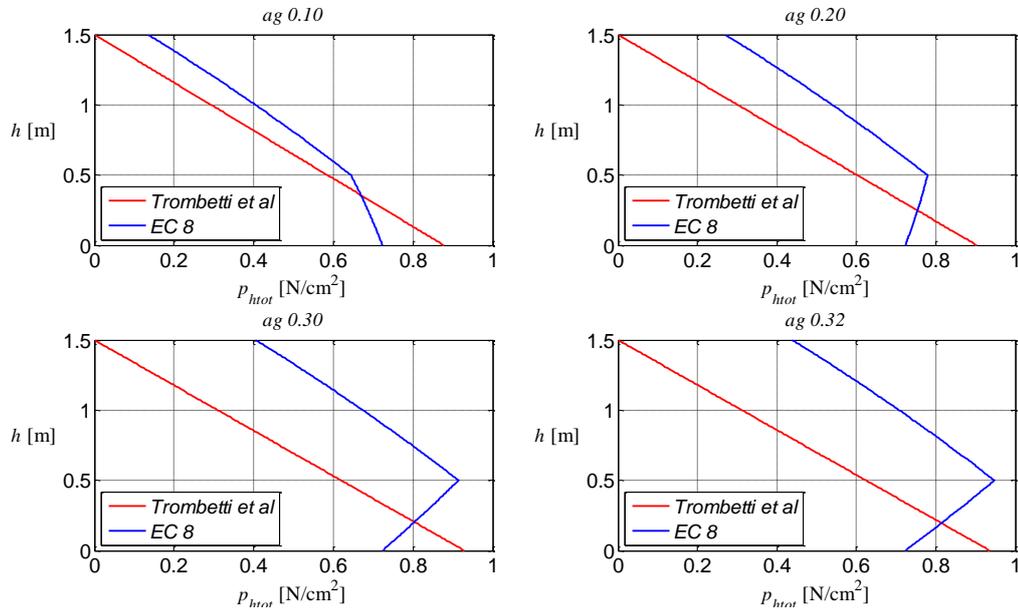


Figura 6.1 Andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

Come si può notare le pressioni massime non arrivano a 1 N/cm², ciò è dovuto alle esigue dimensioni del provino ed alla bassa accelerazione di ingresso (valore massimo pari a 0,3249g).

Con tali valori di sollecitazione ci si aspetta delle deformazioni molto ridotte con rischio che siano al di sotto della precisione di misura della strumentazione del laboratorio che è pari a 2 micro ϵ .

Per tale motivo si è scelto di effettuare delle simulazioni numeriche, oltre che con provini in acciaio, con provini in plexiglass il quale ha un modulo di resistenza notevolmente inferiore a quello dell'acciaio potendo fornire in tal modo delle deformazioni maggiori.

6.2.1 *Provini in acciaio*

Come accennato innanzi, inizialmente sono stati scelti i primi due provini delle due geometrie da proporre all'EQUALS.

Il primo provino è un provino cilindrico alto 1,5 m e largo 3,0 m. Tali dimensioni dipendono dal fatto che per massimizzare le differenze tra le pressioni calcolate secondo le due procedure occorre che il provino sia snello il meno possibile.

La dimensione della base risulta imposta dalla grandezza della piastra vibrante a disposizione (3m x 3m) ed in base a tale misura si è scelta l'altezza andando ad ottenere un coefficiente di snellezza pari a 0,5.

Si riporta di seguito una visione schematica del provino dove si possono notare i dispositivi d'attacco che si sono ipotizzati.

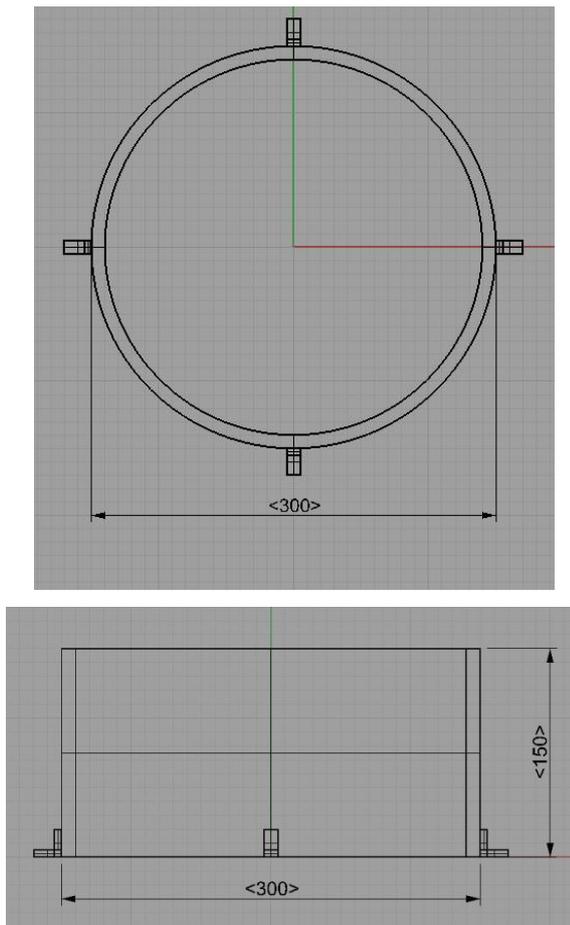


Figura 6.2 *Pianta e vista frontale del provino*

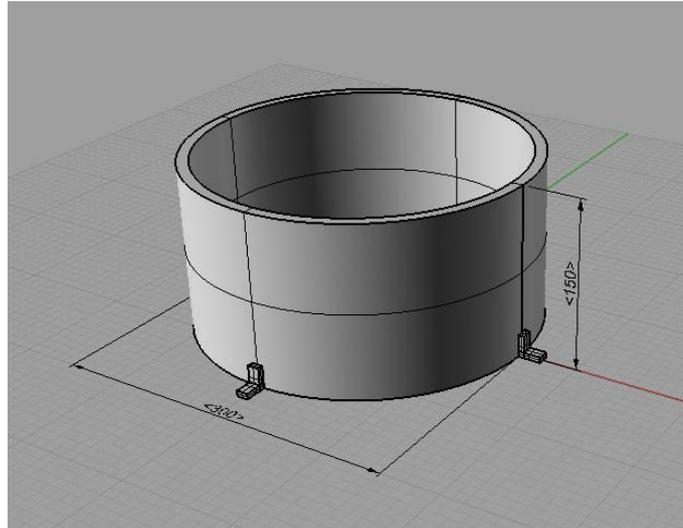


Figura 6.3 Vista assonometrica del provino

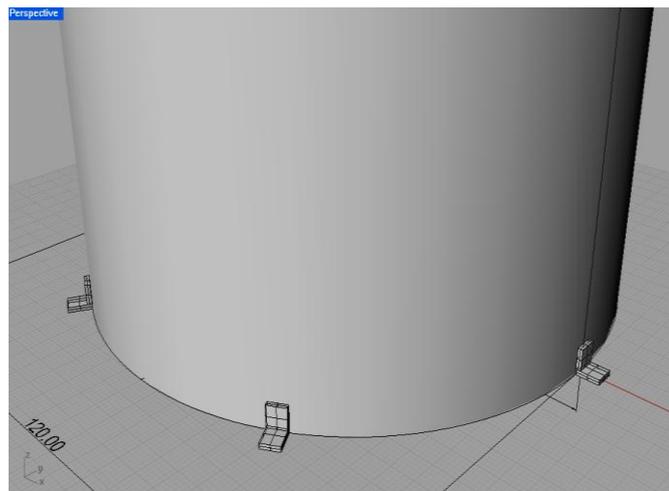


Figura 6.4 Particolare del vincolamento alla base

Si è scelto di fare anche un secondo provino cilindrico di raggio 1,0 m e alto 1,5 m.

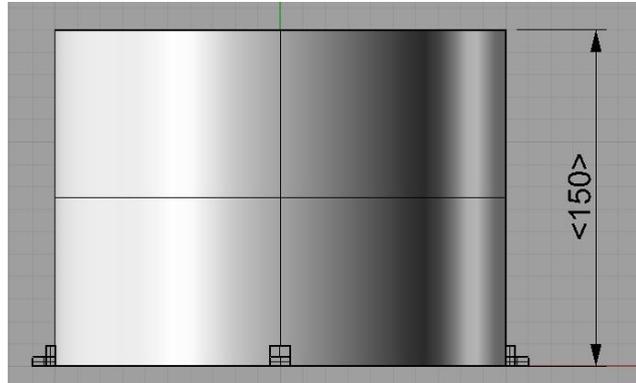


Figura 6.5 Vista frontale del provino

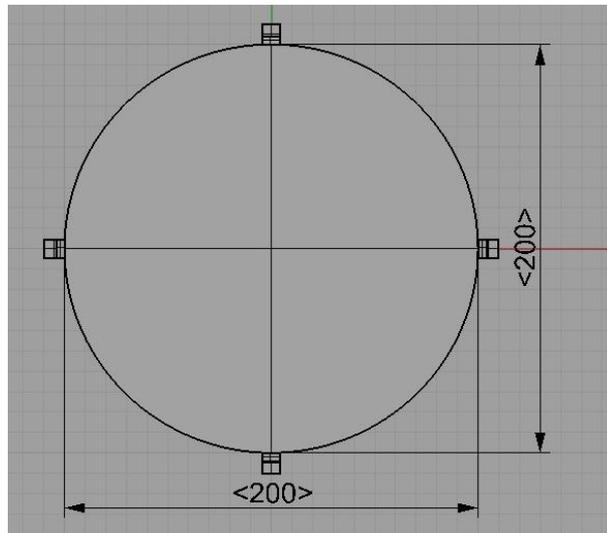


Figura 6.6 Pianta del provino

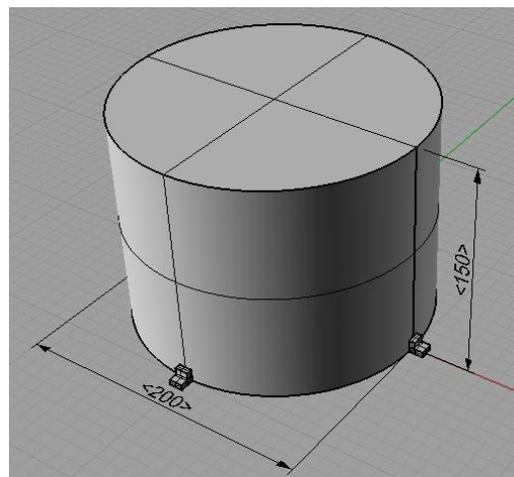


Figura 6.7 Vista assometrica del provino

Il secondo provino è un cubo di lato 1,5 m.

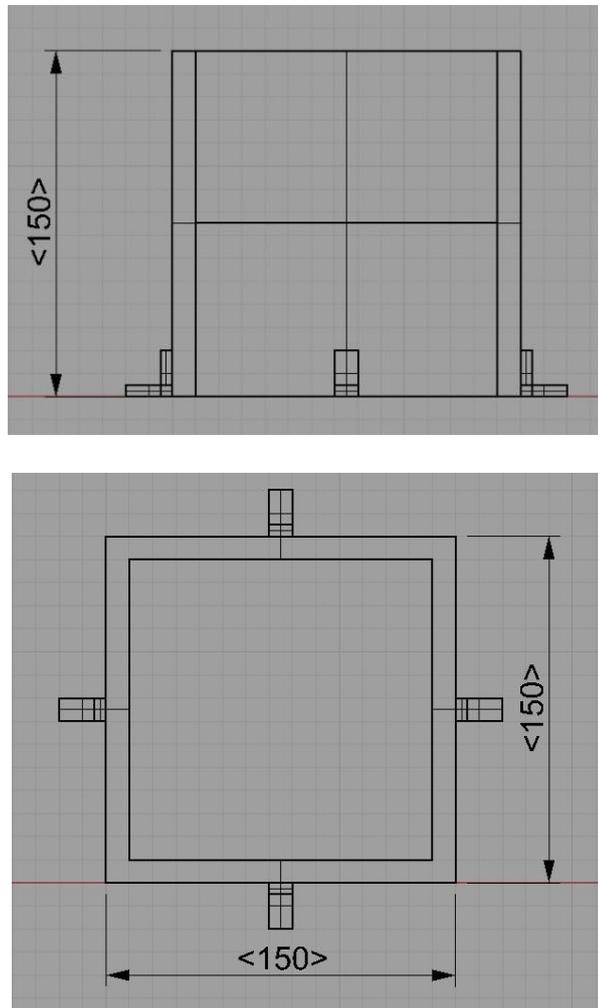


Figura 6.8 Pianta e vista frontale del provino

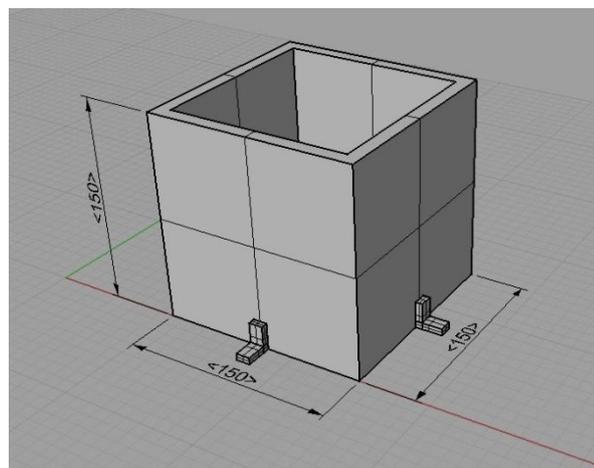


Figura 6.9 Vista assonometrica del provino

Si è proceduto quindi a fare delle simulazioni numeriche tramite modellazione agli elementi finiti utilizzando il programma Strauss 7.

Nella creazione del modello si è scelto di rendere le pareti tramite elementi shell e di non modellizzare l'insilato ma di fornire direttamente i carichi agenti.

Le caratteristiche del materiale utilizzato sono:

- $E = 203943 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,25$;
- $\mu = 0,26$;
- $s = 3 \text{ mm}$.

Per il vincolamento alla base si sono seguite tre strade:

- 1 appoggiato;
- 2 incastrato;
- 3 solidale ad una piastra a cui è impedita la traslazione verticale e che è vincolata rispetto alle altre traslazioni solo nel punto centrale.

Come si vedrà in seguito queste differenti tipologie di vincoli non comportano variazioni significative nei risultati. Tale osservazione può essere fatta anche a priori ricordando la teoria classica dei gusci ove ogni generatrice è trattata come trave su suolo elastico:

$$Bw^{IV} + \beta w = p$$
$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (s^3 w'') + \beta w = p \quad (6.1)$$

dove:

- E = modulo elastico del materiale;
- ν = coefficienti di Poisson;
- s = spessore del cilindro;
- w = spostamento radiale;

- $\beta = \frac{Es}{R^2}$;
- R = raggio del cilindro;
- p = pressione.

Come è ben noto gli effetti locali si smorzano molto velocemente (alla distanza di una lunghezza d'onda λ di 535,5 volte) per cui oltre una certa altezza dal bordo gli effetti (spostamenti, sollecitazioni e deformazioni) dipendono esclusivamente dal carico esterno.

I carichi agenti forniti sono:

- p_h : pressioni orizzontali statiche;
- Δp_h : pressioni orizzontali dovute al sisma;
- p_w : pressioni verticali di taglio dovute all'attrito;
- Δp_w : incremento dovuto al sisma delle pressioni verticali di taglio;
- τ_h : tensioni tangenziale dovute al sisma (non presenti nell'Euro-codice);
- pesi propri;
- accelerazione applicata alla massa delle pareti.

Per semplicità vengono riassunte di seguito le espressioni utilizzate per la trattazione presentata in questo lavoro:

$$p_h = \gamma \lambda (1 + a_{g-vert}) \cdot z \quad (6.2)$$

$$\Delta p_h = a_g \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \gamma \cdot z \quad (6.3)$$

$$p_w = \mu \cdot p_h \quad (6.4)$$

$$\Delta p_w = \mu \cdot \Delta p_h \quad (6.5)$$

$$\tau_h = a_g \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\beta}{2} \cdot \gamma \cdot z \quad (6.6)$$

Ora si riportano le equazioni della trattazione dell'Eurocodice:

$$p_h(z) = \gamma \cdot K \cdot z_0 \left\{ \left[\left(\frac{z - h_0}{z_0 - h_0} \right) + 1 \right]^n \right\} \quad (6.7)$$

$$\Delta p_h = \alpha(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot \cos \vartheta \quad (6.8)$$

$$p_w = \mu \cdot p_h \quad (6.9)$$

$$\Delta p_w = \mu \cdot \Delta p_h \quad (6.10)$$

6.2.1.1 Grafici delle pressioni

Per una maggiore chiarezza espositiva vengono riportati le visualizzazioni del modello caricato con le varie pressioni agenti sulle pareti.

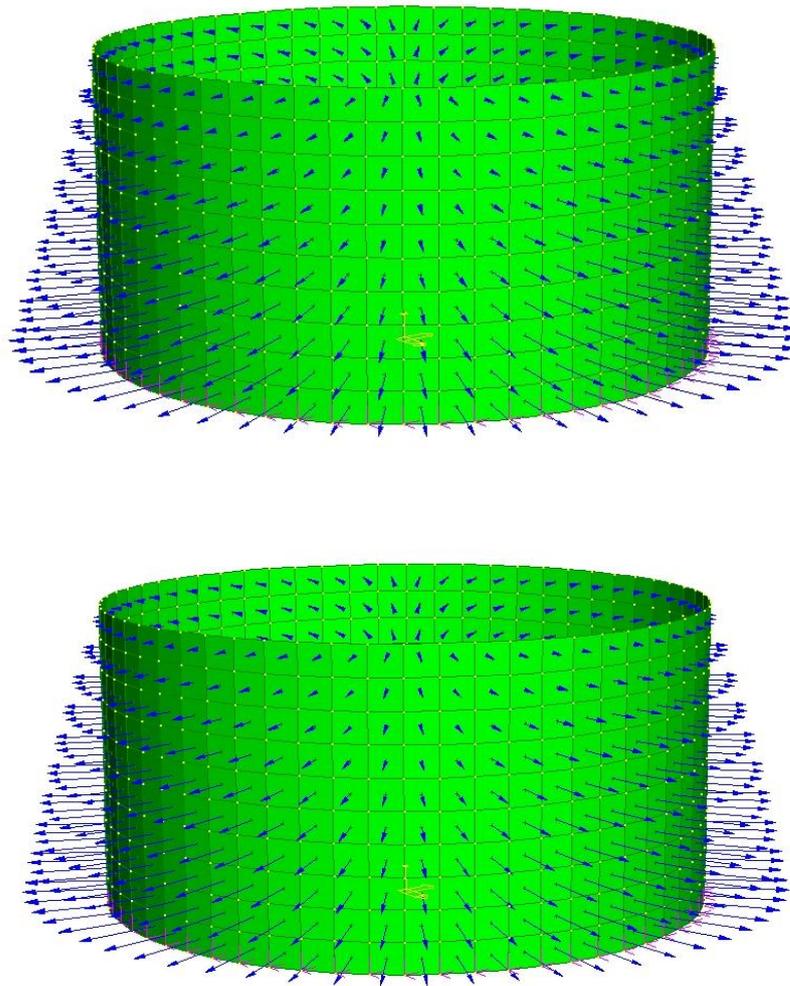


Figura 6.10 Pressioni orizzontali statiche

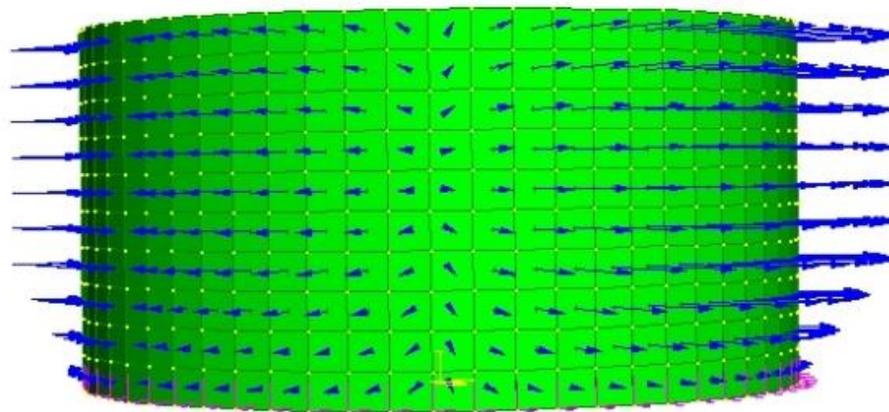
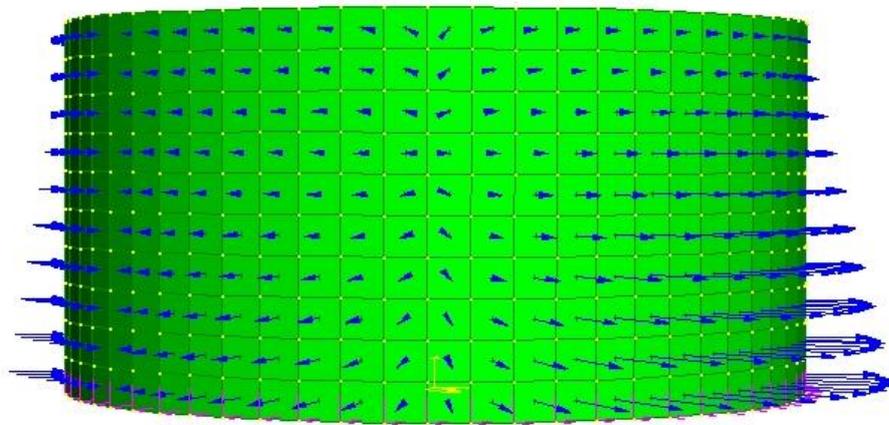


Figura 6.11 Pressioni orizzontali sismiche

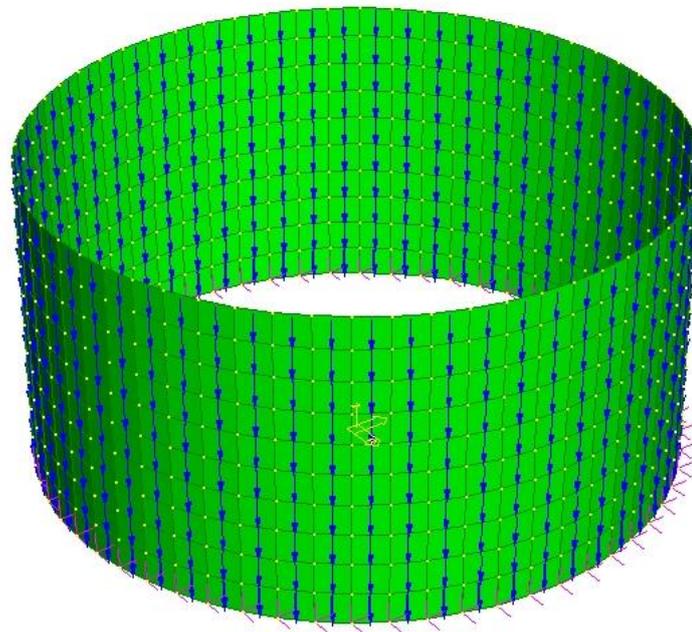
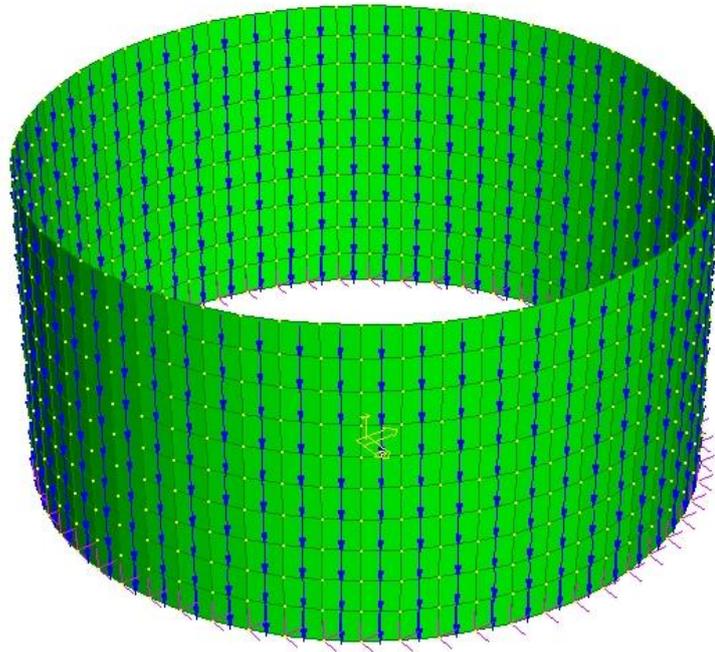


Figura 6.12 Pressioni verticali statiche

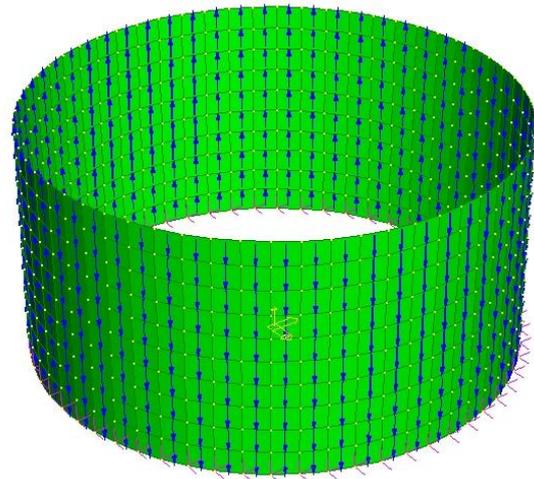
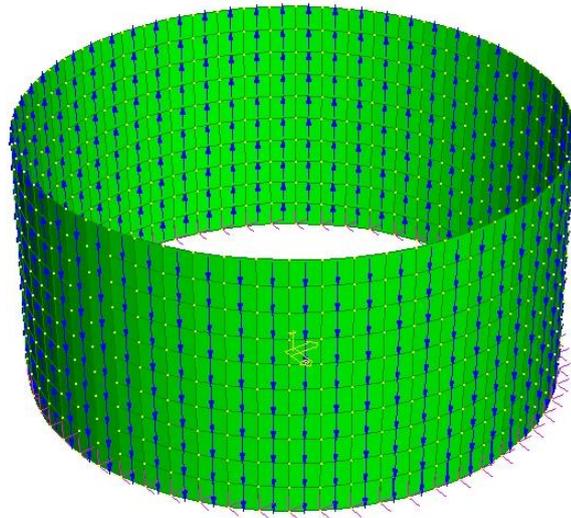


Figura 6.13 Pressioni verticali sismiche

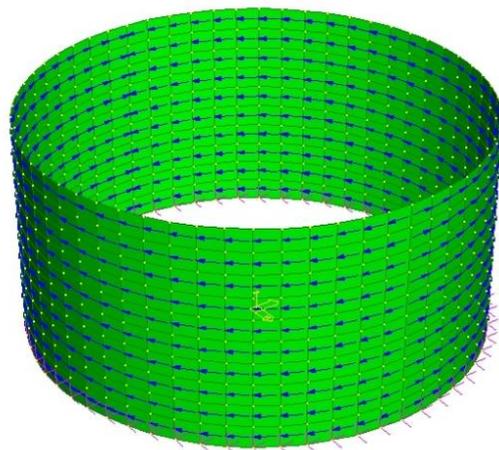


Figura 6.14 Pressioni tangenziali sismiche

Date le esigue dimensioni dei modelli nelle figure 6.10 non è possibile apprezzare il differente andamento delle pressioni nelle due casistiche, tale differenza la si può invece rilevare facilmente nelle figure 6.11 ove sono riportate le sovrappressioni sismiche

Come si può ben notare nella prima immagine della figura 6.11, corrispondente alla teoria proposta, l'andamento delle pressioni è lineare con l'altezza a differenza di quanto si vede nel caso dell'Eurocodice dove le pressioni si mantengono invariate tranne che in prossimità della base.

Per quanto riguarda le pressioni verticali lungo le pareti dovute all'attrito si può notare la differenza che intercorre tra i due casi statici ed i due sismici (rispettivamente figura 6.12 e 6.13): mentre nella statica le pressioni orizzontali sono su tutta la superficie positive durante l'eccitazione sismica su metà della superficie esse cambiano segno e ciò comporta un cambiamento di segno anche per le relative pressioni d'attrito.

Inizialmente potrebbe sembrare controintuitivo ma, avendo posto l'ipotesi di non annullamento delle pressioni, si può osservare che:

$$p_w = \mu \cdot p_h \quad (6.11)$$

ed essendo che:

$$p_h = p_{h0} + \Delta p_h \quad (6.12)$$

si ottiene:

$$p_w = \mu \cdot p_{h0} + \mu \cdot \Delta p_h \quad (6.13)$$

Dovendo, per necessità operative, scindere i due contributi in due carichi distinti risulta che la quota parte sismica ha al suo interno una variazione di segno.

Per completezza di esposizione si riportano anche le figure riportanti i carichi per il provino cubico.

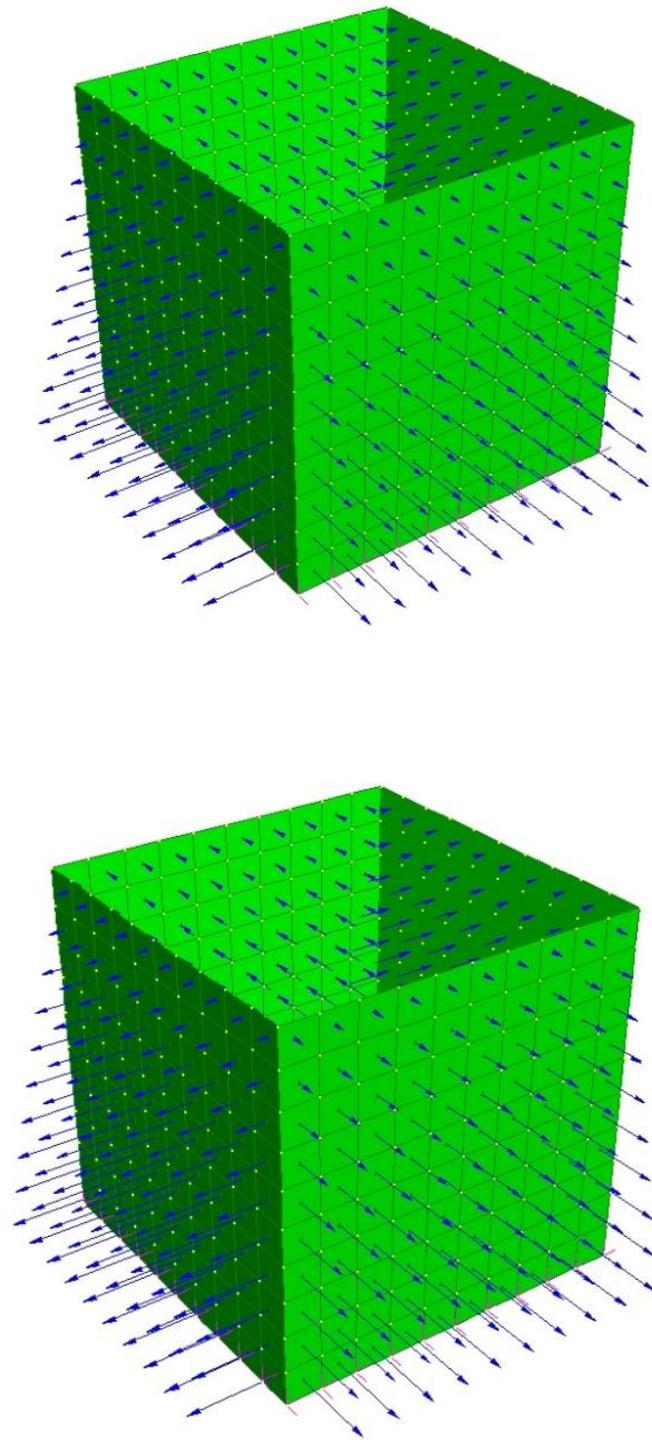


Figura 6.15 Pressioni orizzontali statiche

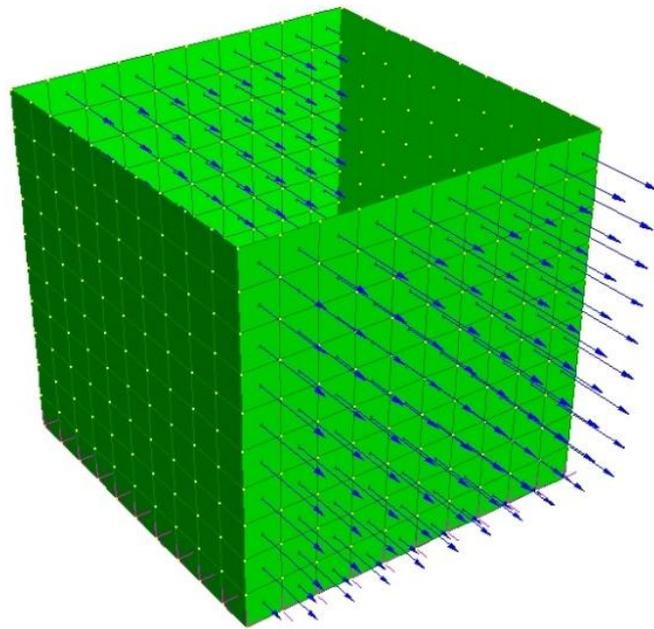
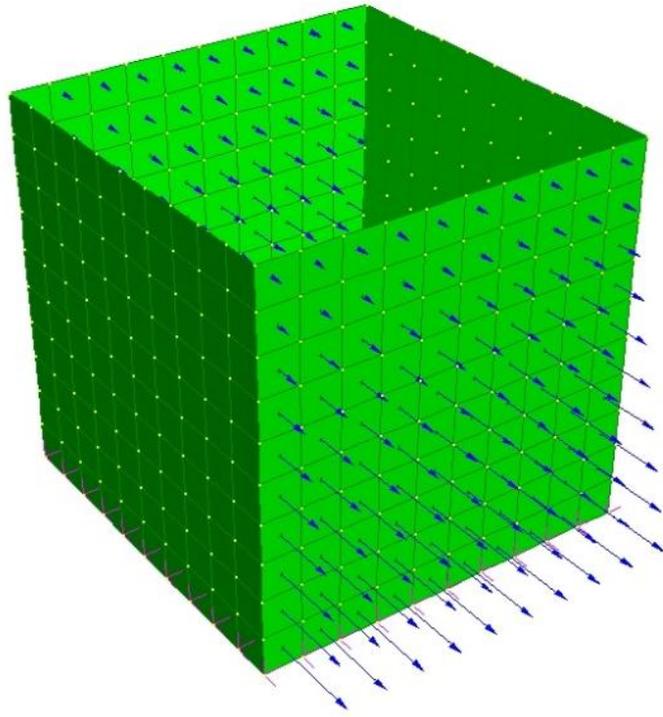


Figura 6.16 Pressioni orizzontali sismiche

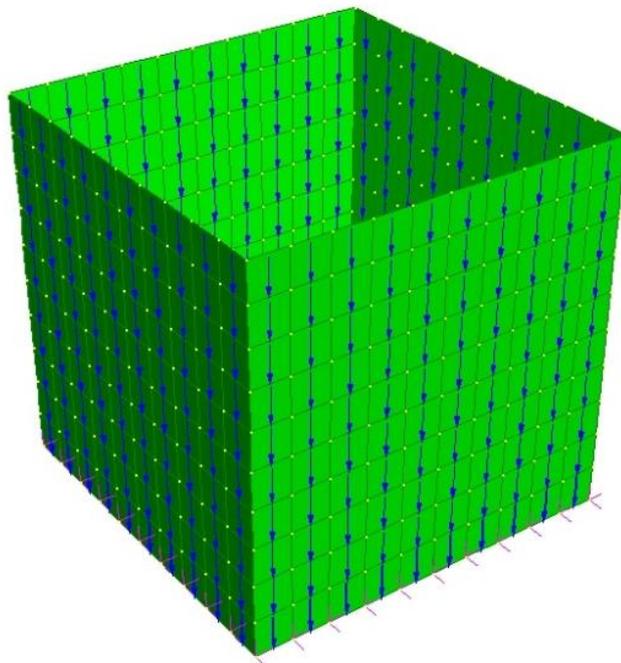
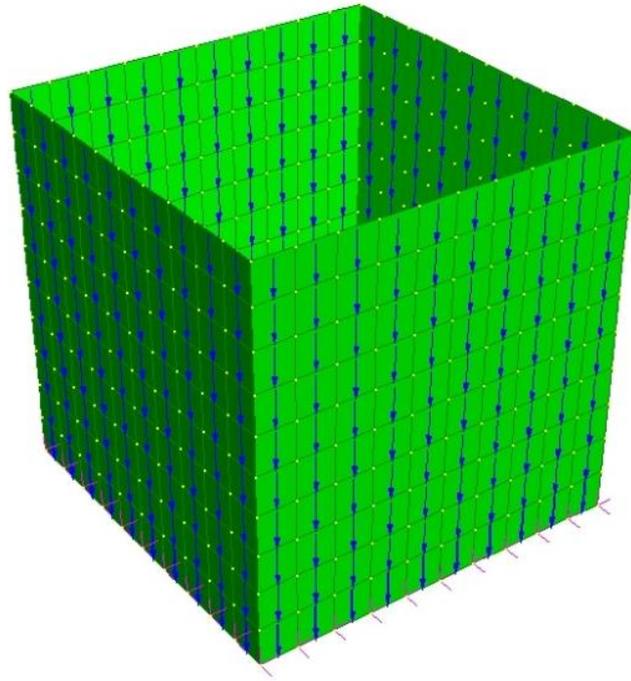


Figura 6.17 Pressioni verticali statiche

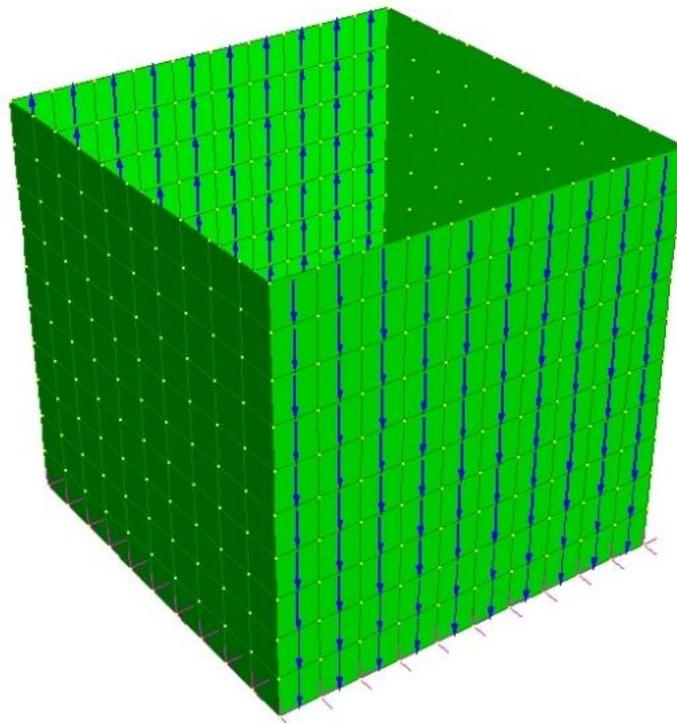
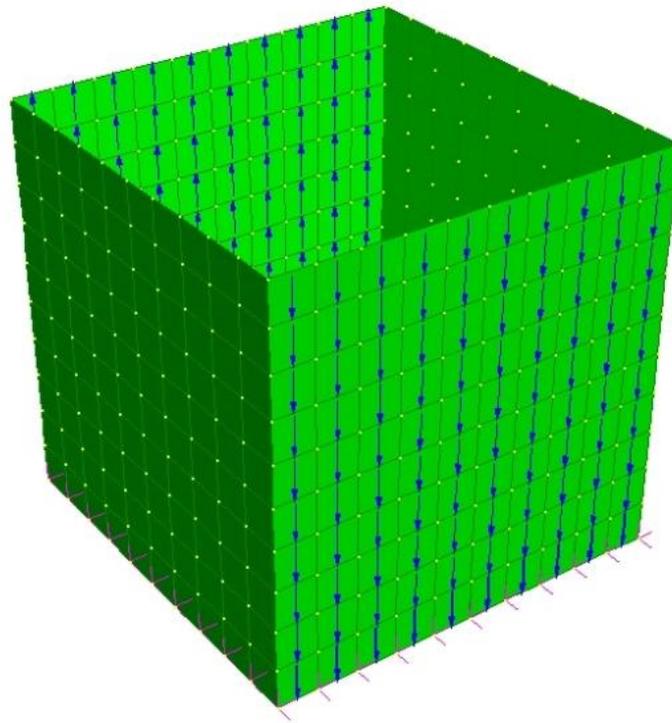


Figura 6.18 Pressioni verticali sismiche

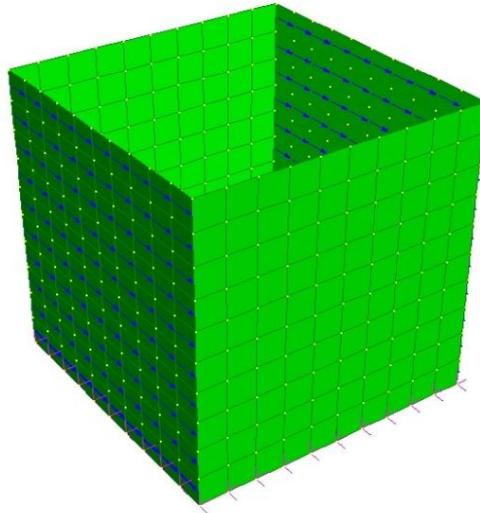


Figura 6.19 Pressioni tangenziali sismiche

Oltre alle osservazioni fatte in precedenza per il modello cilindrico a riguardo di quello rettangolare si può osservare che nelle figure 6.16 non sono presenti pressioni dovute al sisma nelle pareti parallele alla direzione di ingresso dell'accelerazione in quanto su tali pareti agiscono delle pressioni tangenziali (figura 6.19) dovute all'attrito. Questo per quanto riguarda la teoria proposta in quanto l'Eurocodice non specifica nulla a riguardo.

6.2.1.2 Risultati

In questa sezione vengono illustrati e raffrontati i risultati ottenuti tramite la simulazione agli elementi finiti.

Principalmente si andranno ad indagare le tensioni di parallelo e di meridiano che nascono e le relative deformazioni e gli spostamenti lungo l'altezza.

Sono riportate nella parte sinistra del grafico le quantità (tensioni e deformazioni) di meridiano e nella parte destra le quantità di parallelo.

In blu sono rappresentate le curve inerenti al calcolo con gli Eurocodici ed in rosso le curve inerenti al calcolo con la teoria Trombetti *et al.*

Per non appesantire l'esposizione si riportano i grafici riguardanti solamente il caso di silos appoggiato poiché, come si è già ricordato e come si illustrerà meglio in seguito, gli effetti di bordo si smorzano velocemente e quindi le variazioni dei grafici tra i vari casi non sono tali da giustificare la presenza nella presente opera.

Provino 1

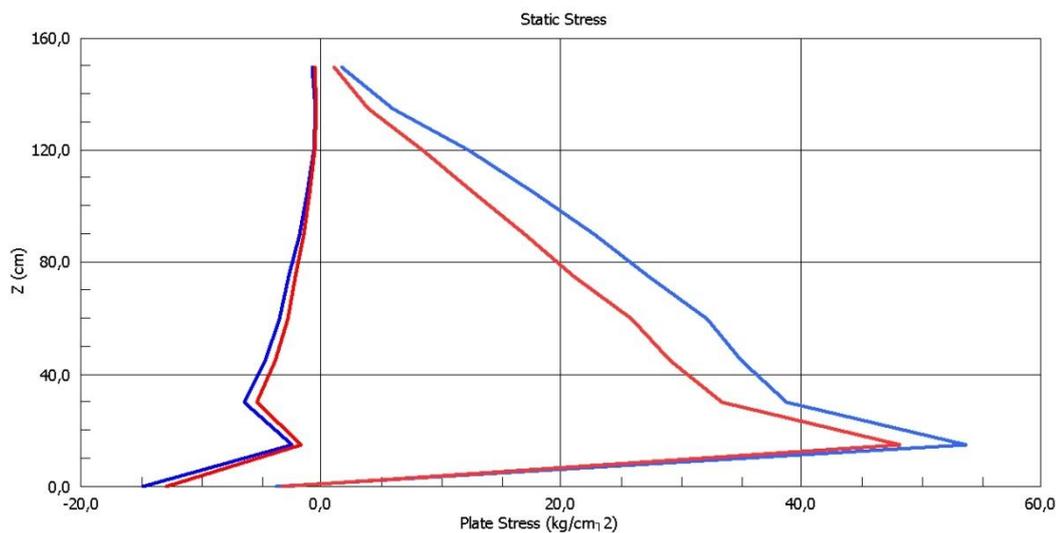


Figura 6.20 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

Nella figura 6.20 si possono osservare gli stress relativi alla condizione statica: come si può notare pur essendoci delle differenze esse sono molto lievi.

Risulta più interessante la visione della figura 6.21 che tratta delle condizioni dinamiche in quanto si può vedere per quanto riguarda le tensioni di parallelo una

differenza di circa 20 kg/cm^2 , differenza che persiste anche nella figura 6.22.

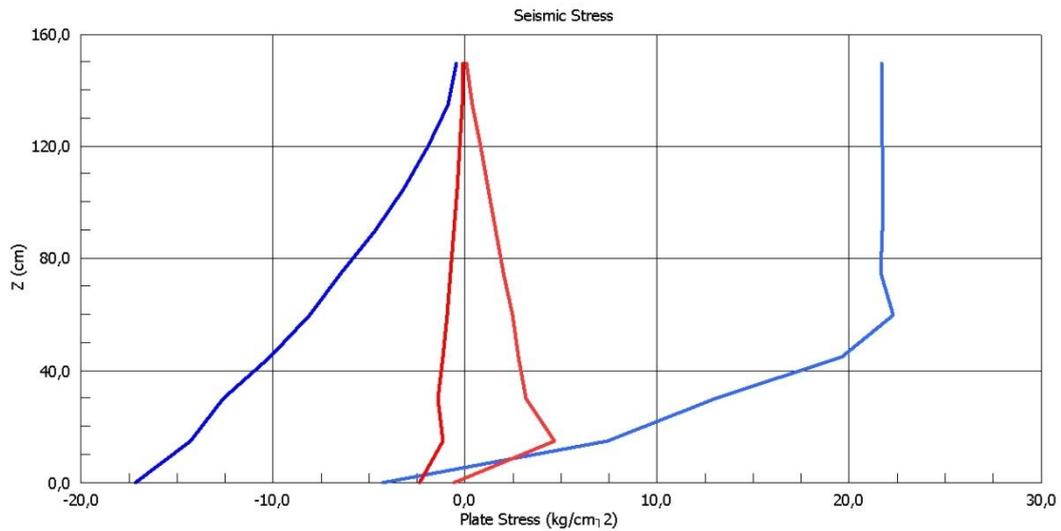


Figura 6.21 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

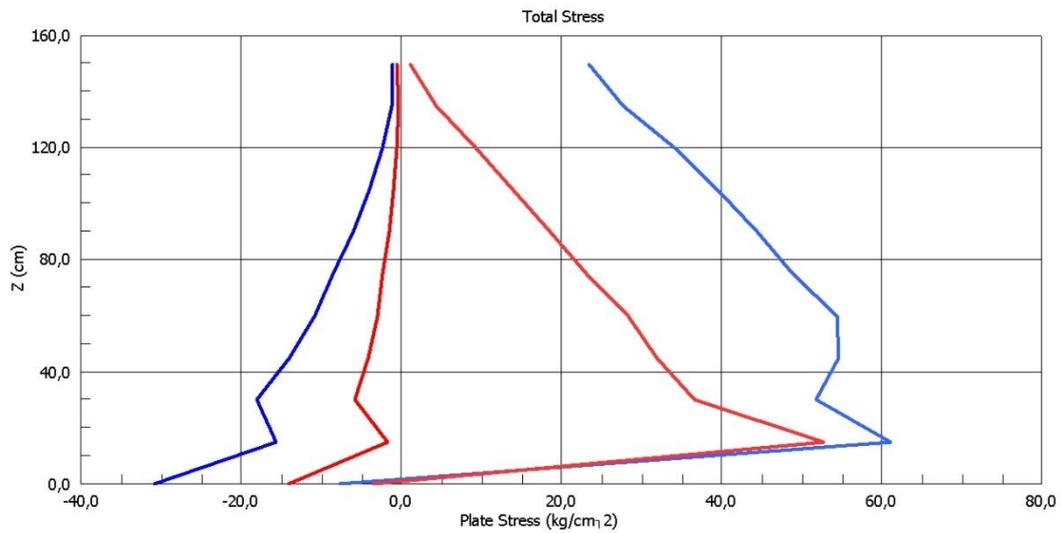


Figura 6.22 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte per quanto riguarda le deformazioni: differenze molto lievi nelle condizioni statiche e molto pronunciate in condizioni dinamiche.

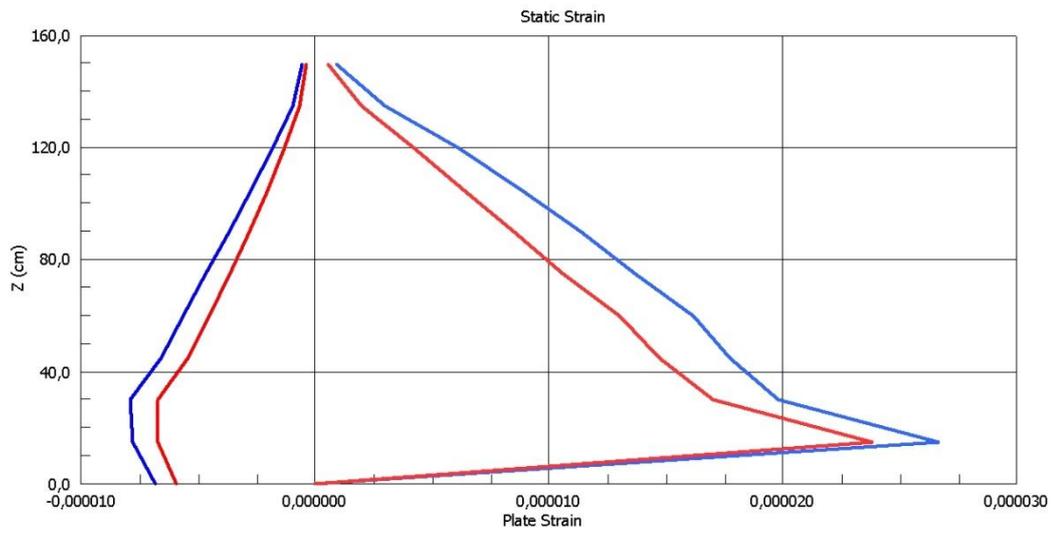


Figura 6.23. Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

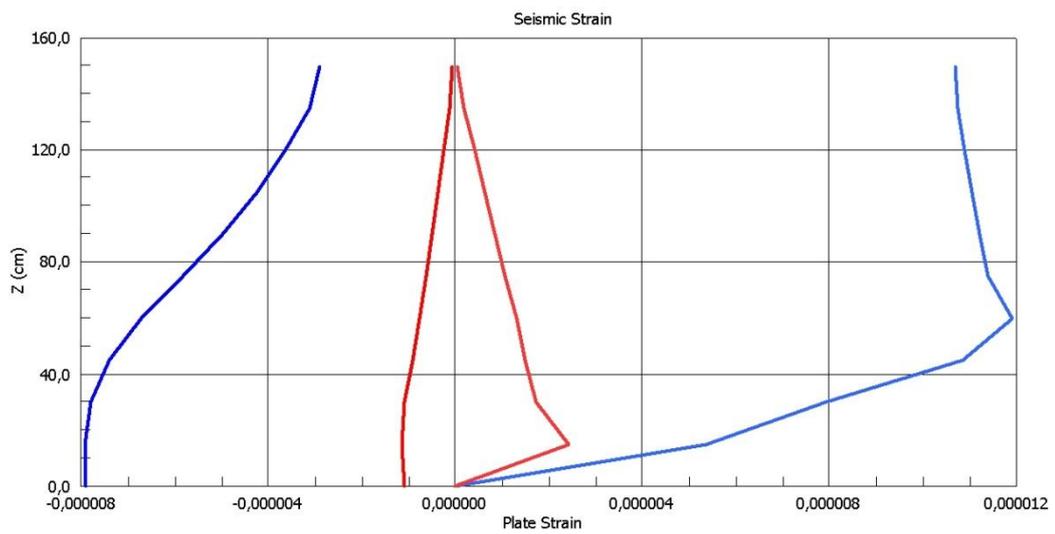


Figura 6.24 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

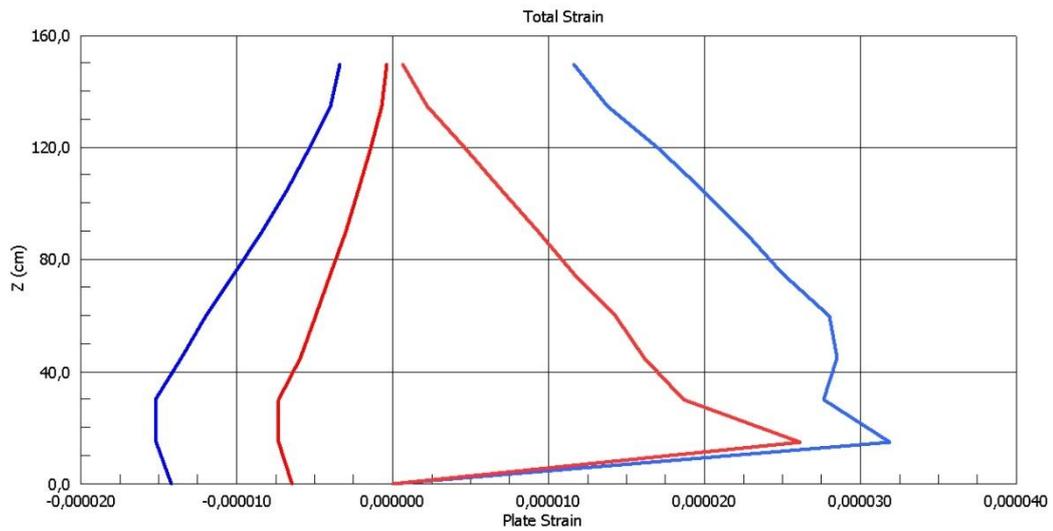


Figura 6.25 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

Per quanto riguarda le deformazioni occorre far notare quanto già accennato in precedenza: l'ordine di grandezza delle deformazioni massime è di 10^{-5} mentre la precisione di misura del laboratorio arriva a 2 micro ε , si rischia quindi incorrere nella eventualità che nell'esecuzione della prova non si ottengano spendibili.

Questa è la motivazione principe che ha fatto prendere in considerazione di cambiare materiale per i provini.

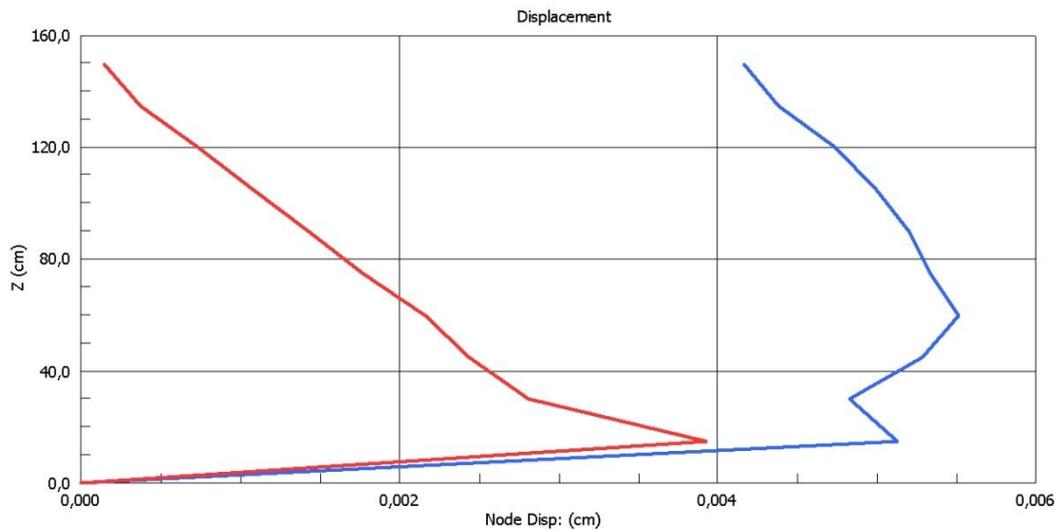
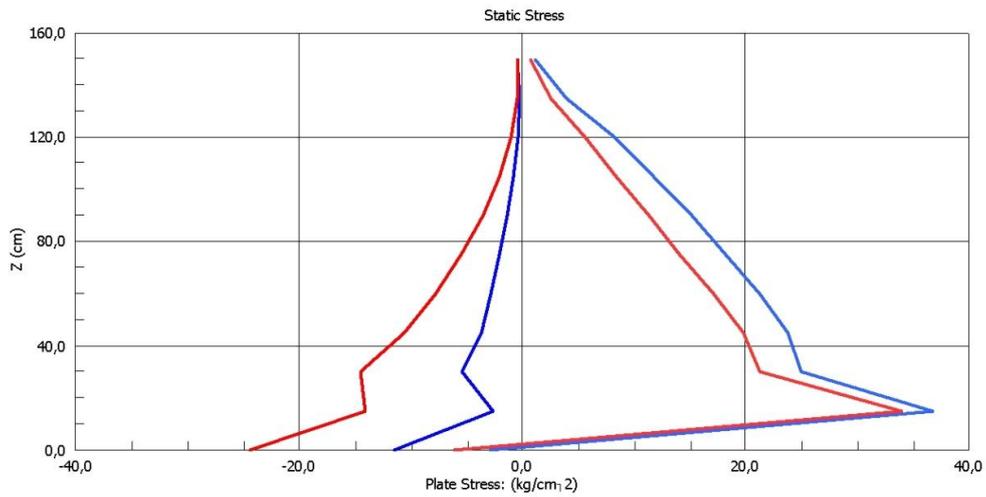


Figura 6.26 Spostamenti totali nelle due teorie.

L'andamento dello spostamento nella direzione di ingresso del sisma nei due casi è fortemente diverso e nasce dal fatto che nel caso della procedura indicata dall'Eurocodice le pressioni sismiche sono non nulle in sommità mentre seguendo la teoria Trombetti *et al* le sovrappressioni sono nulle come anche le pressioni statiche.

Provino 2

Per quanto riguarda il secondo provino le osservazioni che si possono fare sono le medesime esposte per il primo provino.



Figura

6.27 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

A differenza del provino precedente si può osservare che le tensioni di meridiano valutate secondo l'Eurocodice sono minori di quelle valutate secondo la Trombetti *et al.*

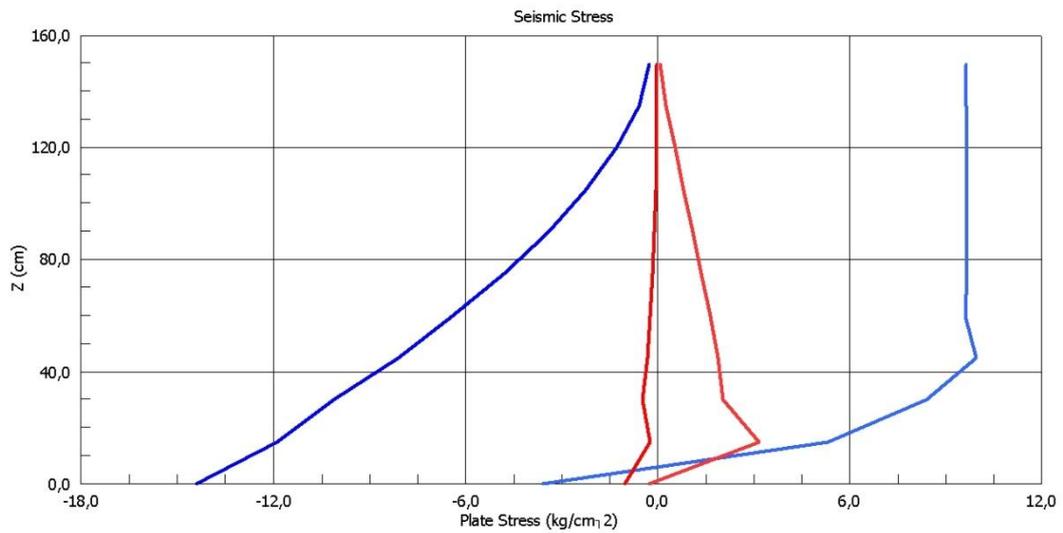


Figura 6.28 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

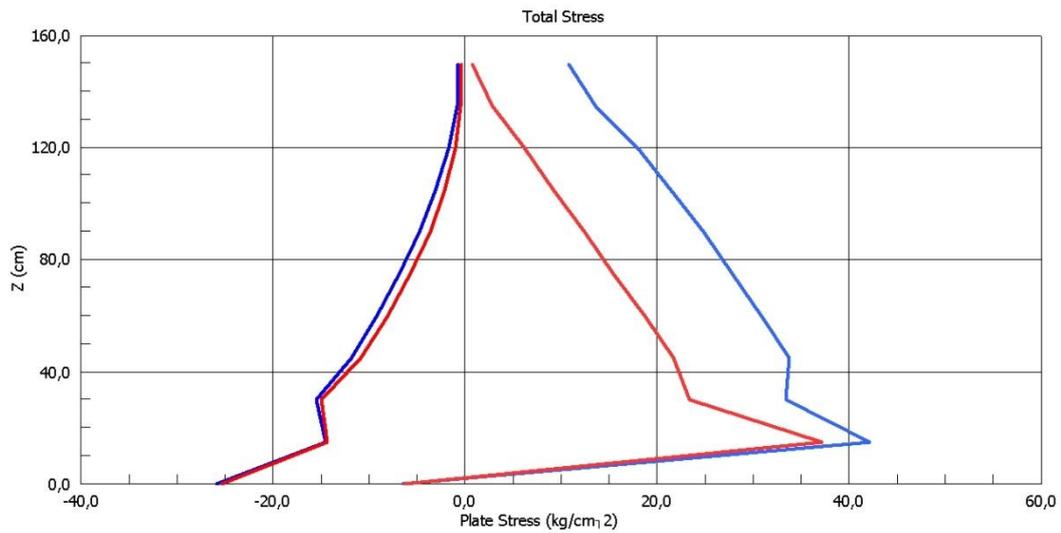


Figura 6.29 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

Come ci si poteva aspettare andando a studiare un provino più snello le differenze tra le due metodologie vanno riducendosi.

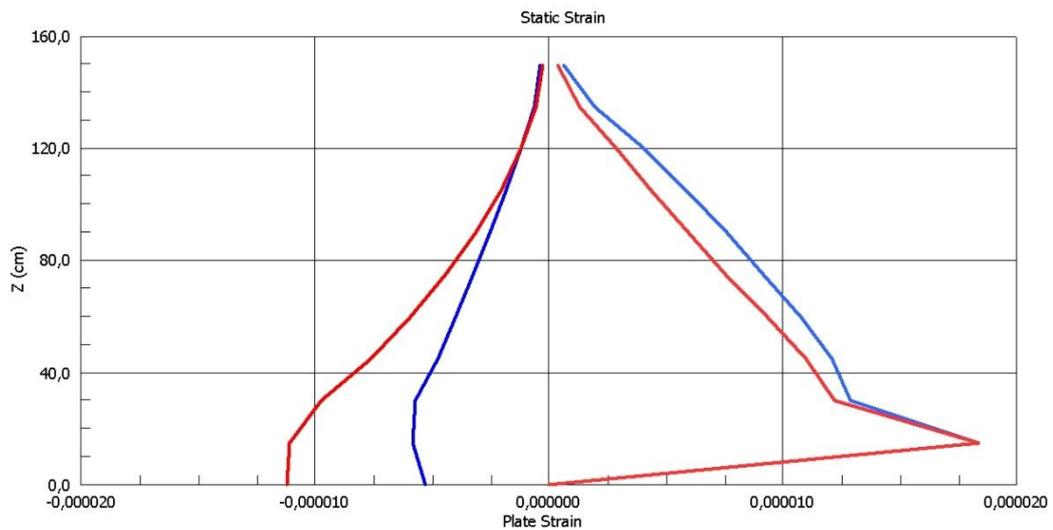


Figura 6.30 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica

In accordo con la figura 6.30 le deformazioni di meridiano riguardanti l'Eurocodice sono minori di quelle riguardanti a teoria presentata.

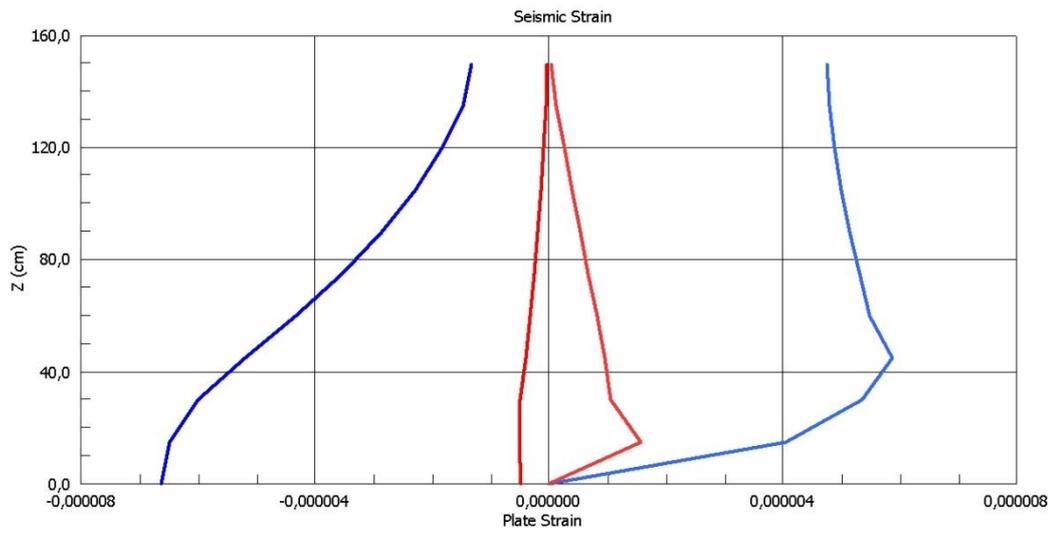


Figura 6.31 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

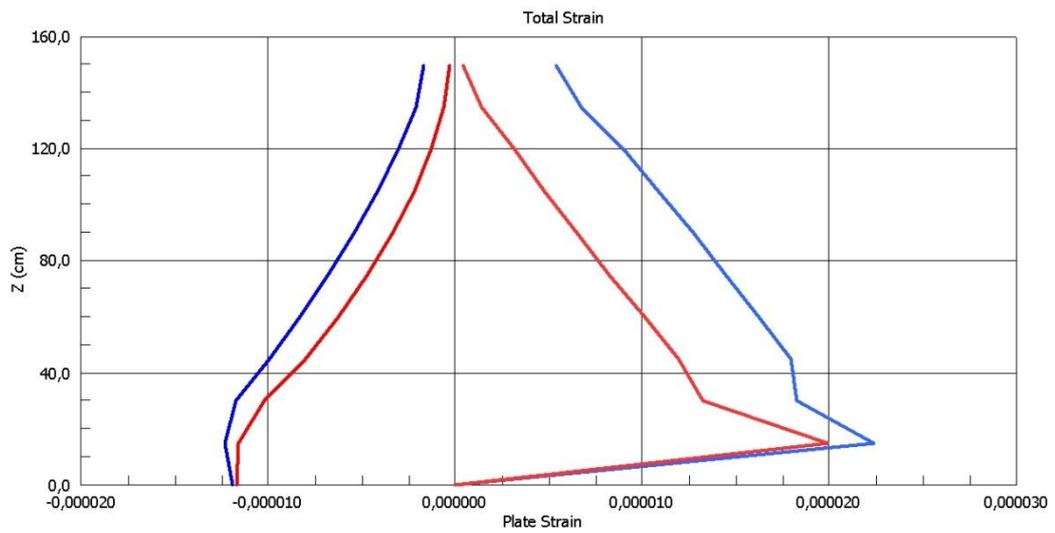


Figura 6.32 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

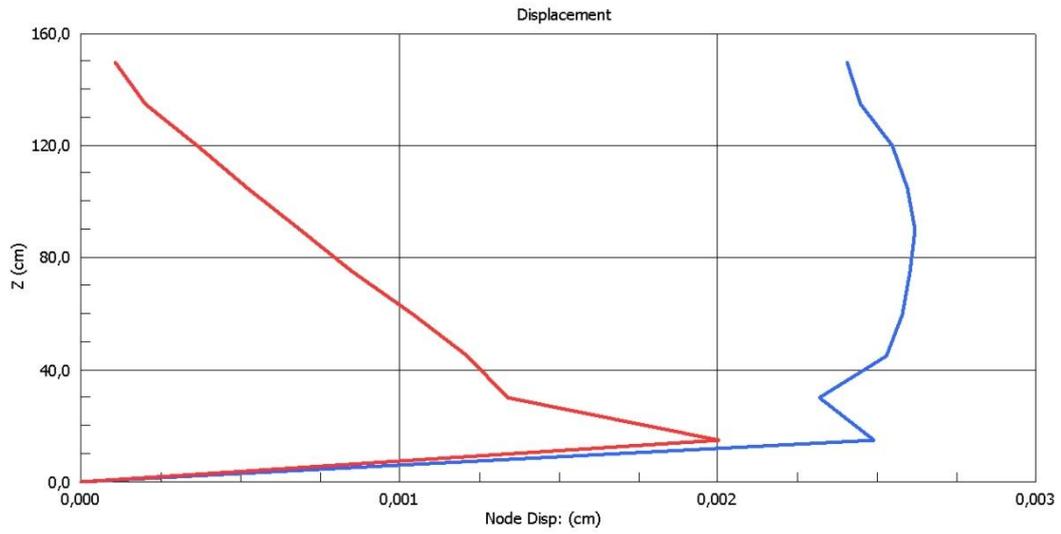


Figura 6.33 *Spostamenti totali nelle due teorie*

Provino 3

Il terzo provino presenta andamenti non chiari dovuti agli effetti di bordo delle pareti laterali. Per eliminare tali effetti sarebbe occorso scegliere una geometria molto allungata ma date le dimensioni della piastra vibrante e della necessità di avere geometrie non snelle non è stato possibile operare in tale direzione.

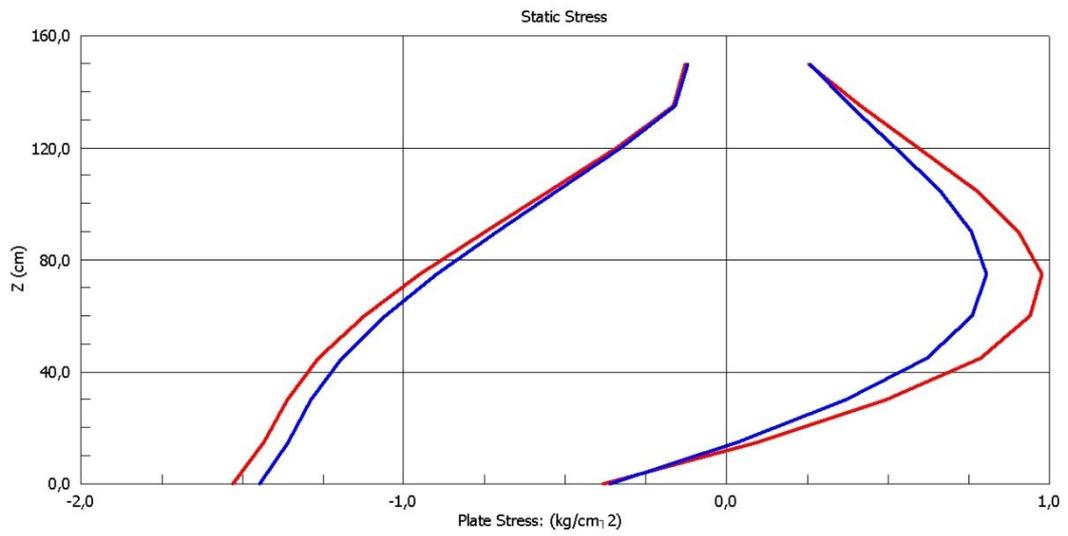


Figura 6.34 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

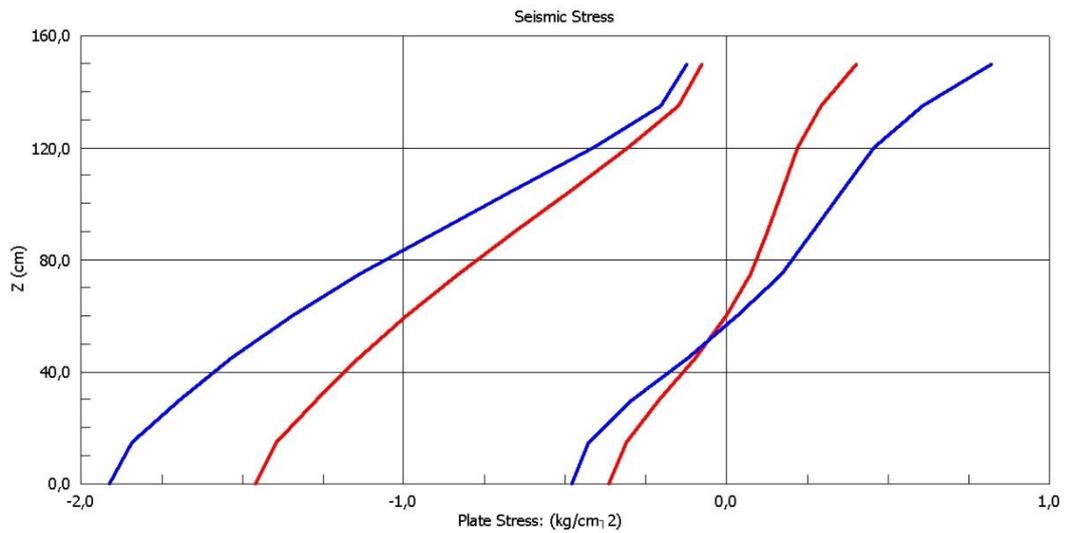


Figura 6.35 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

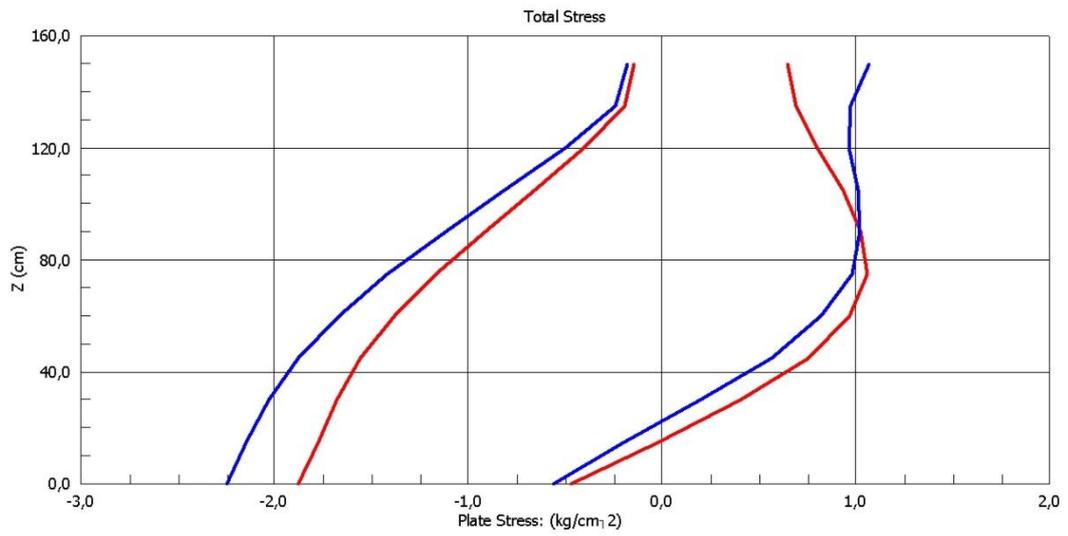


Figura 6.36 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

A differenza poi dei provini cilindrici le tensioni che nascono sono molto basse.

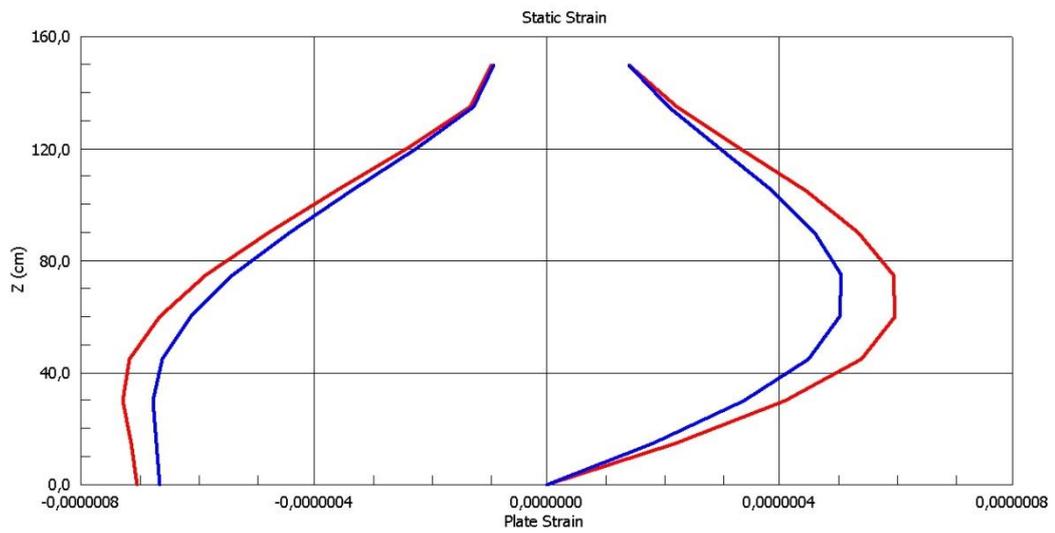


Figura 6.37 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

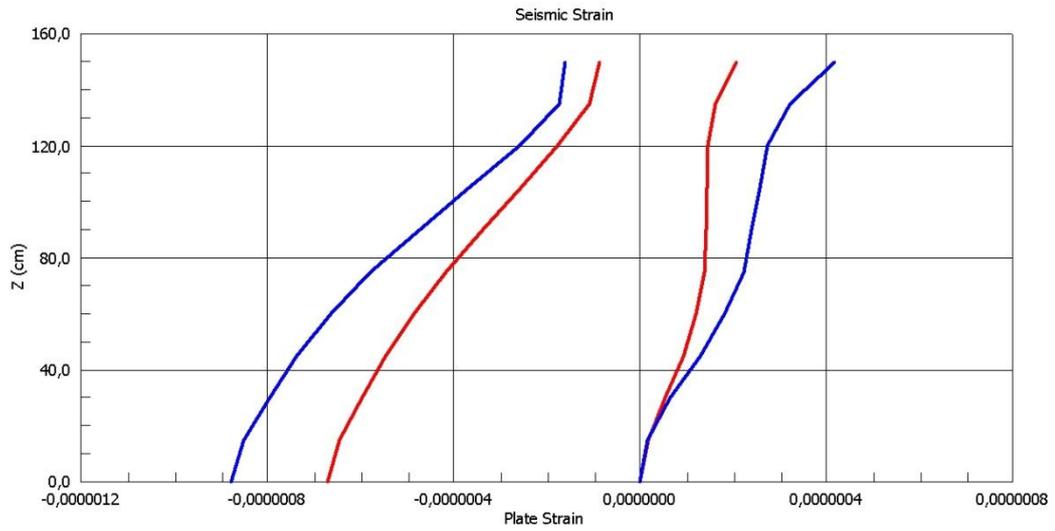


Figura 6.38 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

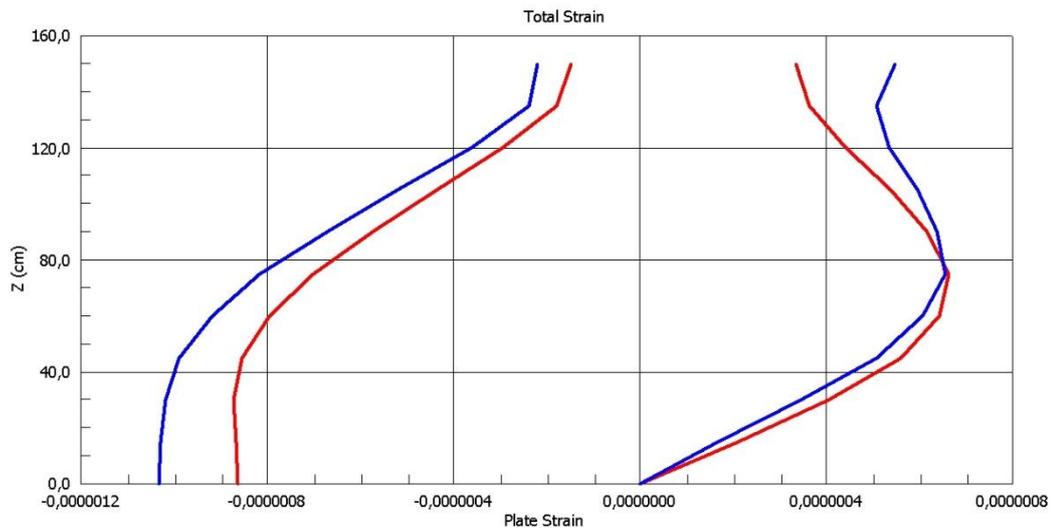


Figura 6.39 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale..

Per quanto riguarda le deformazioni, come si può vedere nelle figure 6.37, 6.38 e 6.39, la loro entità è al di sotto della precisione di misura del laboratorio.

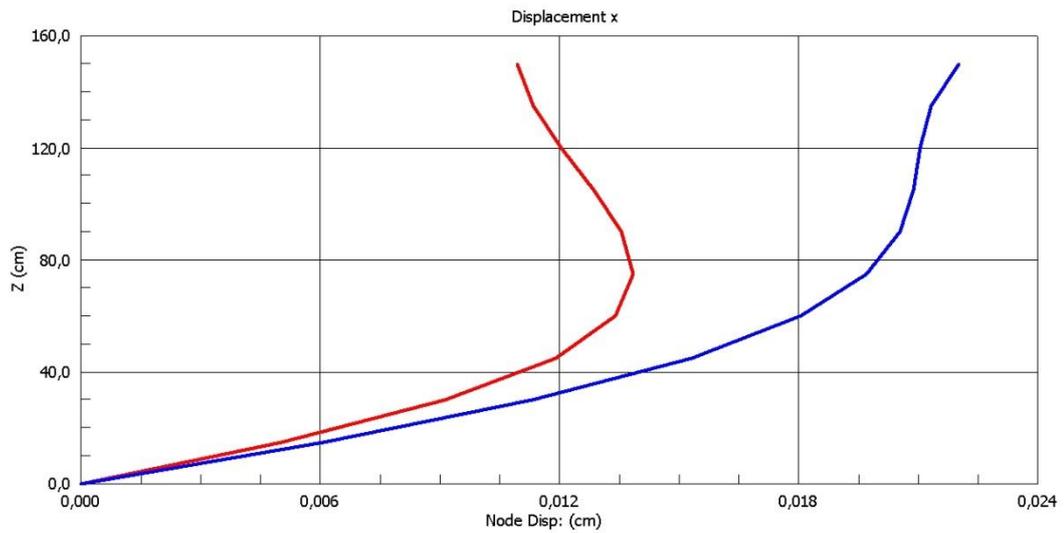


Figura 6.40 *Spostamenti totali nelle due teorie.*

6.2.2 *Provini in plexiglass*

Si sono effettuate simulazioni numeriche anche per provini in plexiglass con la stessa geometria di quelli in acciaio.

In seguito, dopo un confronto con la ditta Essebi s.r.l. riguardante la fattibilità delle geometrie, si è simulato anche la risposta di due differenti provini:

- 1 tubo di policarbonato di 200 cm di altezza e 150 cm di diametro;
- 2 tubo di plexiglass di 75 cm di altezza e 50 cm di diametro.

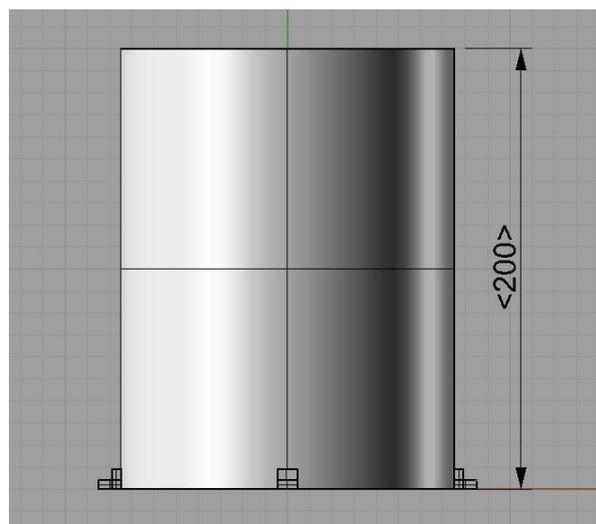


Figura 6.41 *Vista frontale del provino*

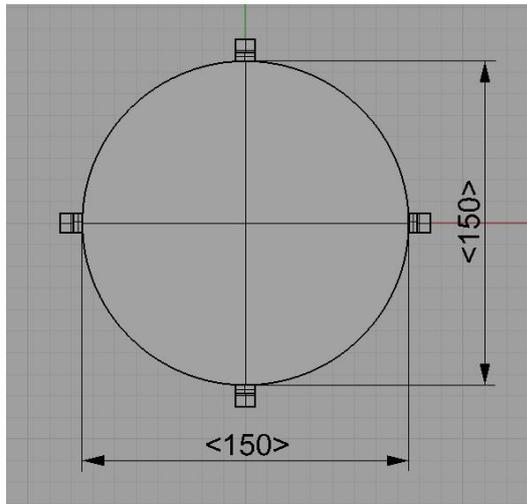


Figura 6.42 Pianta del provino

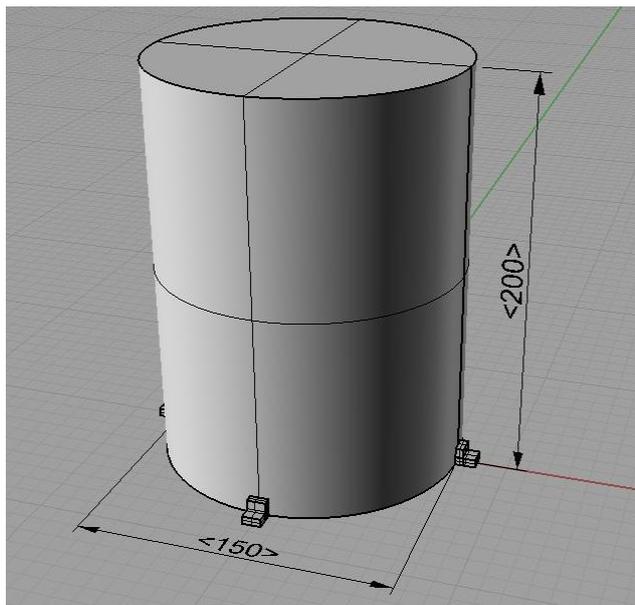


Figura 6.43 Vista assonometrica del provino

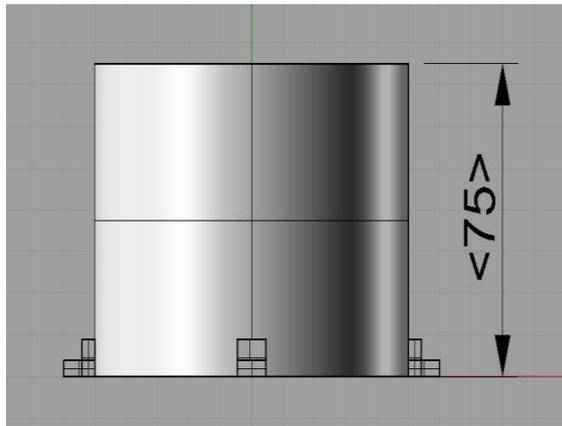


Figura 6.44 Vista frontale del provino

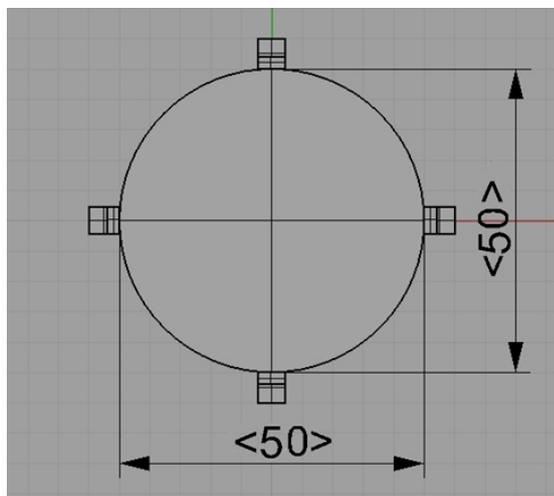


Figura 6.45 Pianta del provino

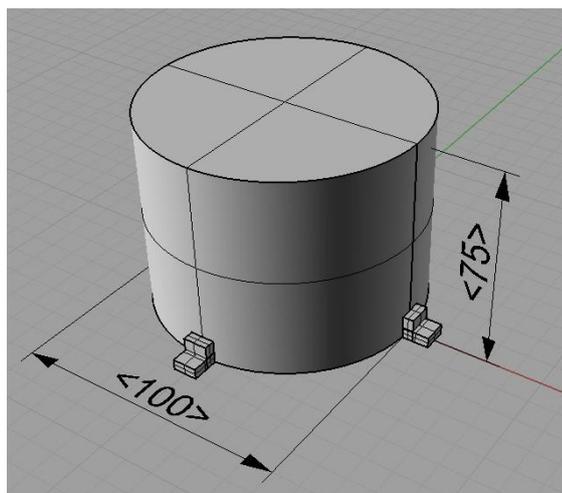


Figura 6.46 Vista assonometrica del provino

Il provino di polycarbonato ha la problematica esecutiva di essere costituito da due metà fissate con rivetti ogni 20 cm sull'altezza.

Le caratteristiche del plexiglass per i primi tre provini sono:

- $E = 3300 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,38$;
- $\mu = 0,45$;
- $s = 4 \text{ mm}$.

Mentre per il quinto provino lo spessore s è di 5 mm.

Le caratteristiche del polycarbonato utilizzato per il quarto provino sono:

- $E = 2400 \text{ Mpa}$;
- $\nu = 0,38$;
- $\mu = 0,45$;
- $s = 3 \text{ mm}$.

Le ditte produttrici di tali materiali non forniscono, giustamente, il coefficiente d'attrito tra plexiglass e grano, per cui il valore utilizzato è stato supposto a partire dall'attrito con l'acciaio. Nel caso venga confermata l'idea di utilizzare tale materiale sarà premura del laboratorio fornire dei valori più realistici.

Per la tipologia di vincolo alla base si sono seguite le tre casistiche già utilizzate per i provini in acciaio.

6.2.2.1 Grafici delle pressioni

Nel presente paragrafo vengono riportate, a titolo esemplificativo, le schematizzazioni di carico utilizzate nel modello numerico. Si riportano solo quelle afferenti al provino in polycarbonato in quanto, essendo il più alto, permette di notare il diverso andamento dei carichi nelle due casistiche.

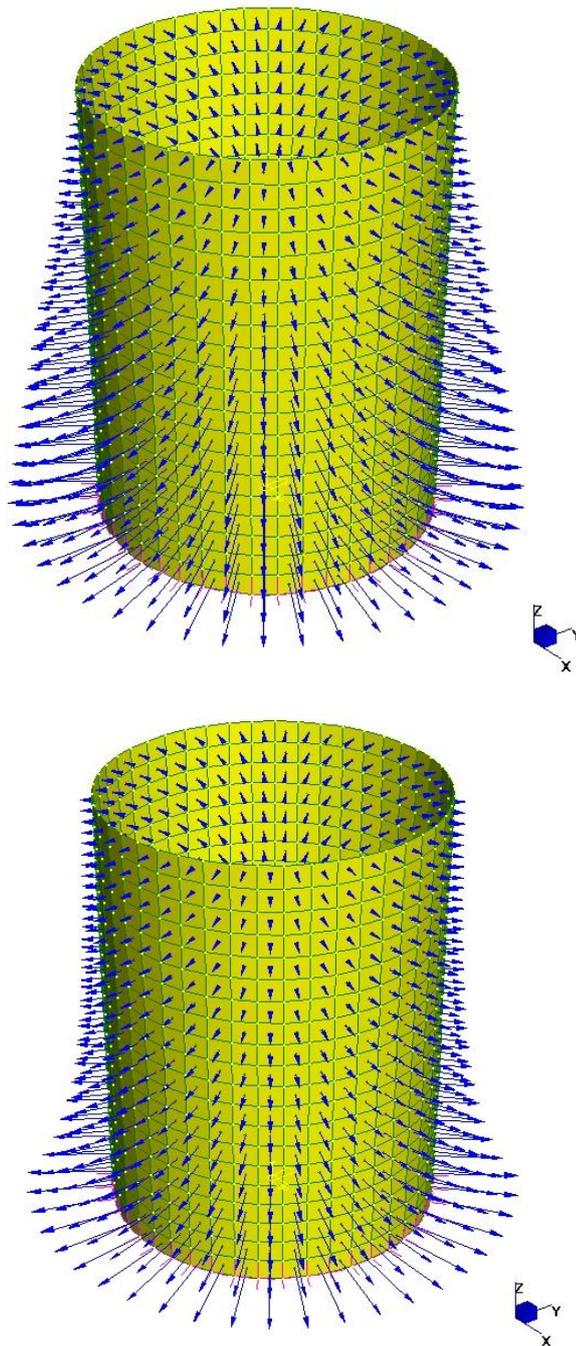


Figura 6.47 Pressioni orizzontali statiche

Già nel caricamento del silos tramite le pressioni orizzontali statiche si può notare una prima diversità tra le due teorie: la teoria sviluppata dal Dipartimento ha un andamento lineare con l'altezza a differenza della teoria dell'Eurocodice che contempla la presenza di un'esponenziale.

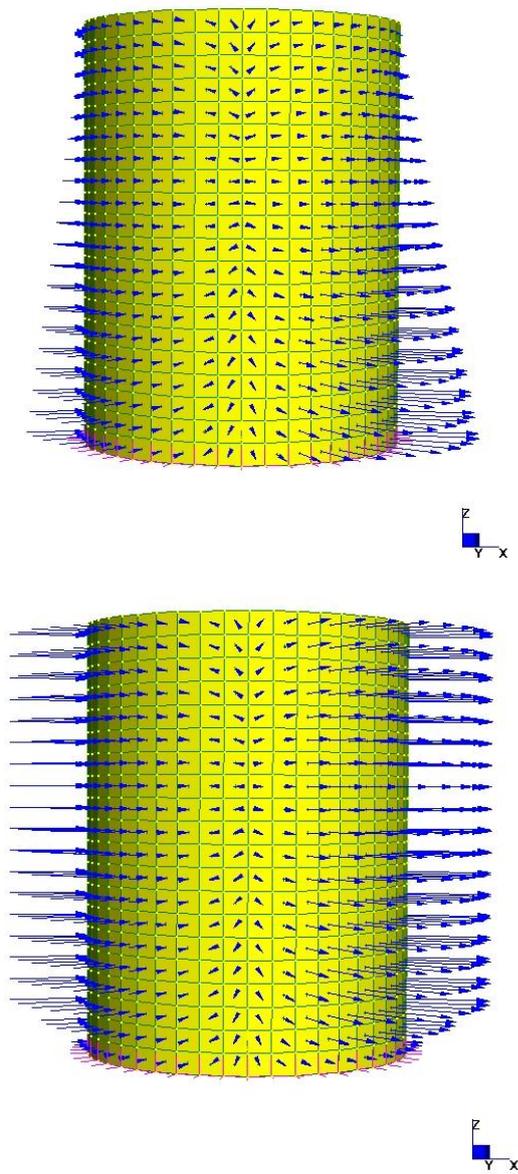


Figura 6.48 Pressioni orizzontali sismiche

Nella figura 6.48 si può notare il cuore della differenza tra le due trattazioni: le sovrappressioni sismiche con la teoria sviluppata ha andamento lineare con l'altezza mentre per l'Eurocodice l'andamento è costante ad eccezione di una fascia alla base.

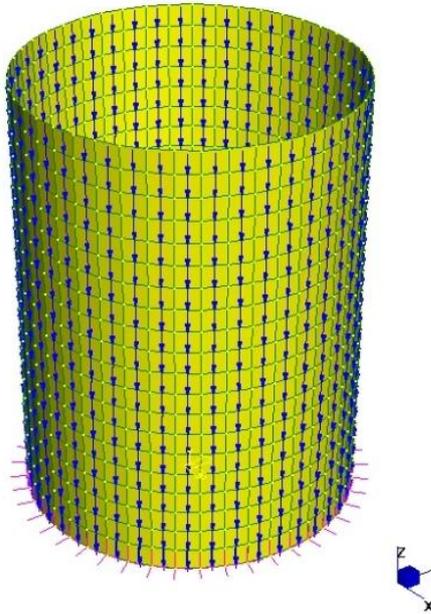
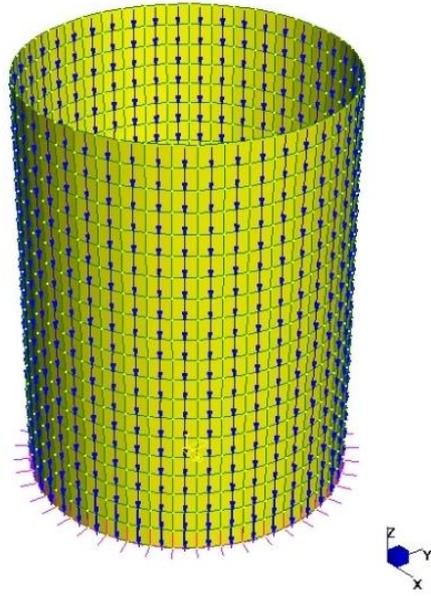


Figura 6.49 Pressioni verticali statiche

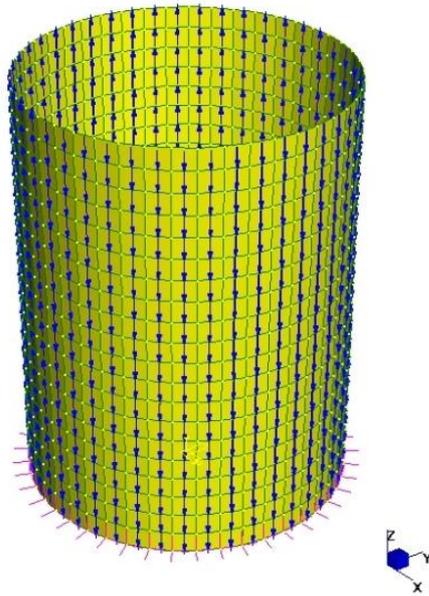
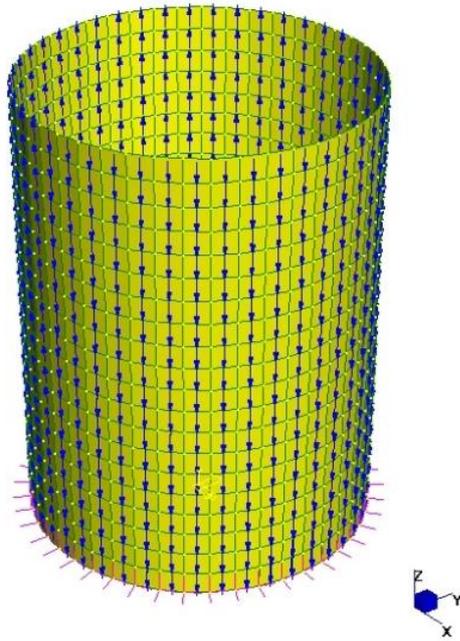


Figura 6.50 Pressioni orizzontali sismiche

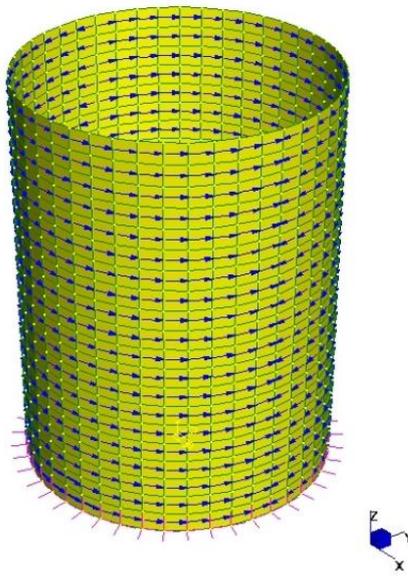


Figura 6.51 Tensioni tangenziali sismiche

Per quanto concerne i carichi dovuti all'attrito le osservazioni sono le medesime di quelle già riportate nel paragrafo 6.2.1.1.

6.2.2.2 Risultati

In questo paragrafo, come nel suo analogo per l'acciaio 6.2.1.2, vengono riportati i risultati delle simulazioni numeriche effettuate sui tre provini di base pensati in plexiglass e su i due provini preventivati dalla Essebi s.r.l.

Provino 1

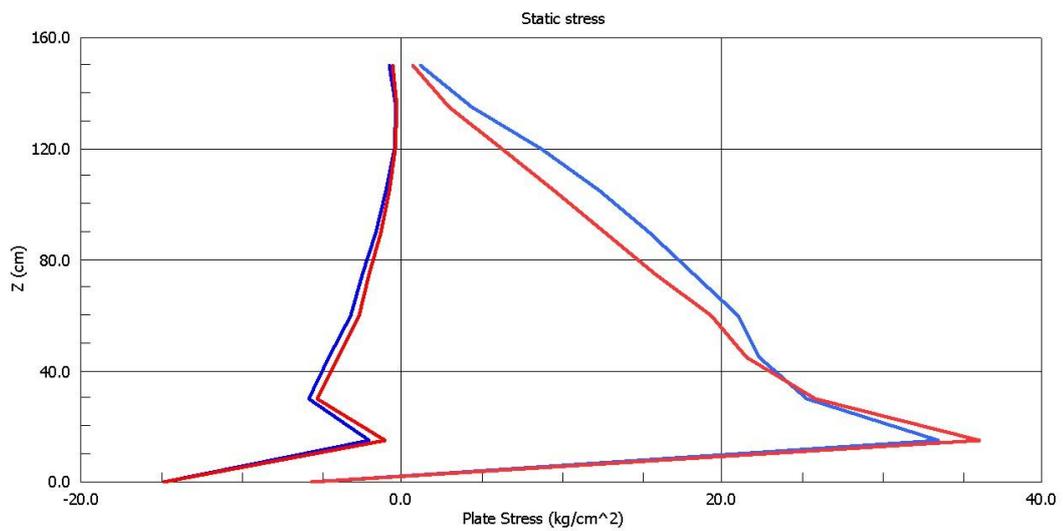


Figura 6.52 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

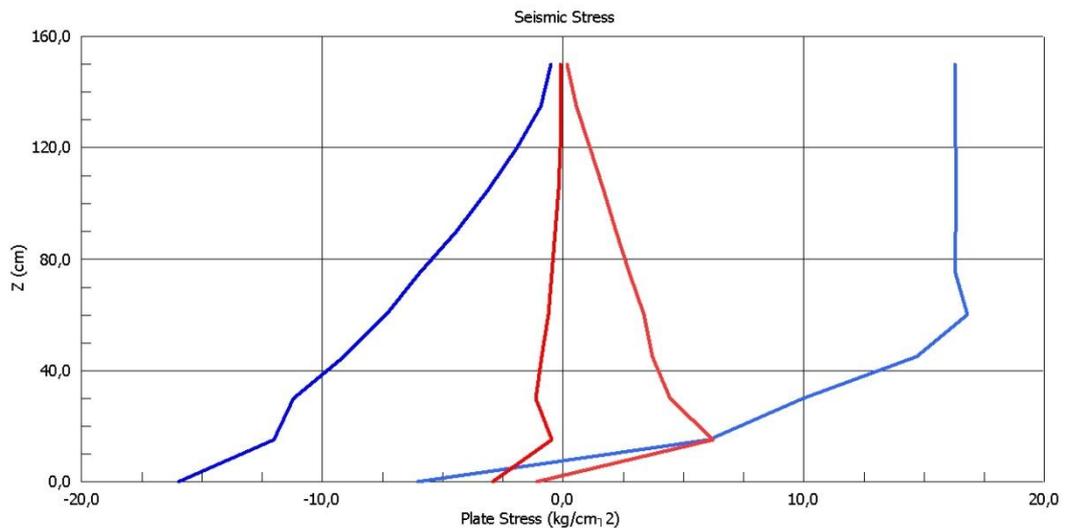


Figura 6.53 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

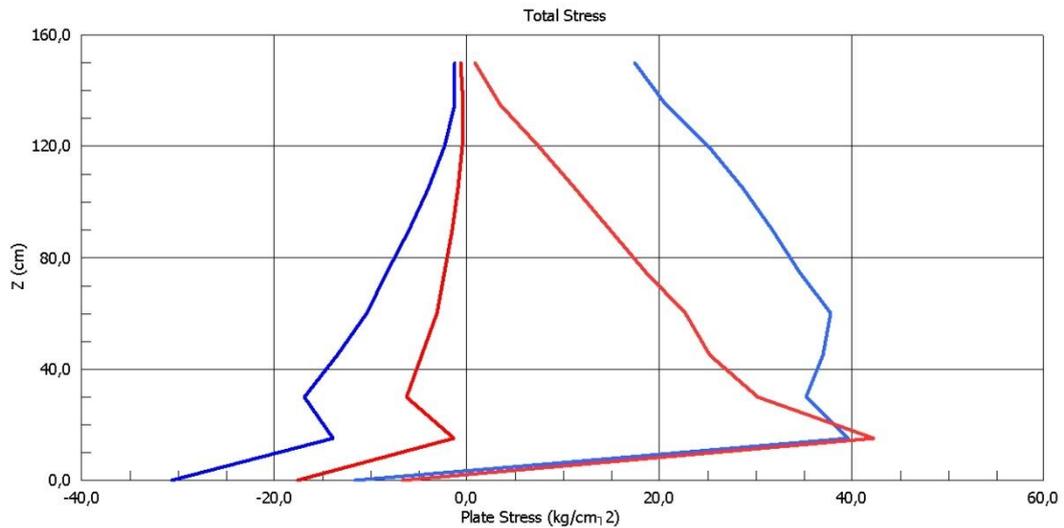


Figura 6.54 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

Come nel caso dell'analogo provino in acciaio, sostanziali differenze tra le due casistiche si possono vedere per la combinazione sismica, e di conseguenza negli effetti totali.

Rispetto però al provino d'acciaio tali discostamenti sono sensibilmente inferiori. Tale effetto era atteso in quanto il coefficiente d'attrito tra le pareti e l'insilato è sensibilmente maggiore e, conseguentemente, risulta maggiore il volume di cereale che va ad agire sulla parete.

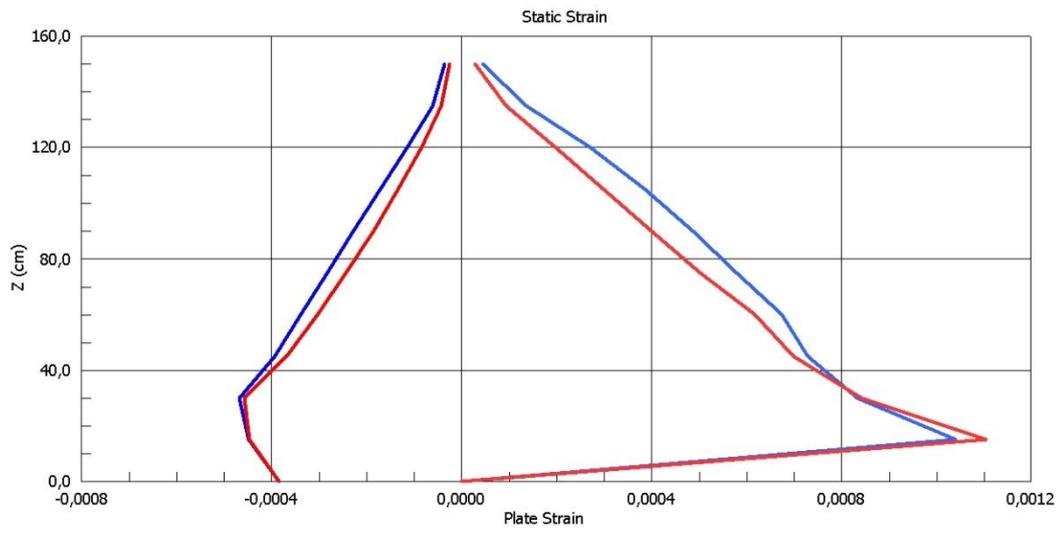


Figura 6.55 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

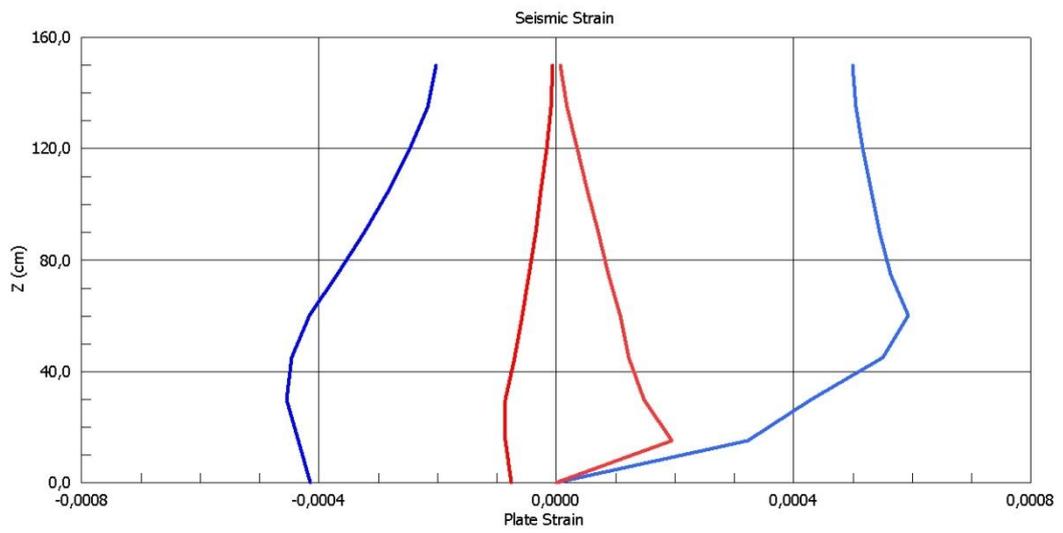


Figura 6.56 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

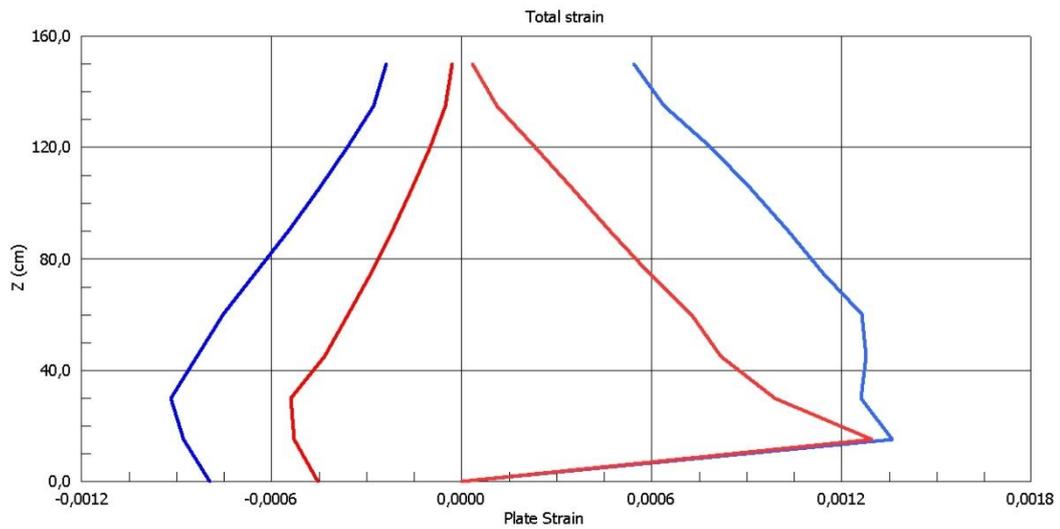


Figura 6.57 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

Le osservazioni di carattere qualitativo che si possono ottenere dalle figure soprastanti inerenti alle deformazioni sono le analoghe a quelle già esposte per il provino in acciaio.

La differenza sostanziale che intercorre tra i due provini risiede nell'entità delle deformazioni: si è passati da un ordine di grandezza del 10^{-5} ad un 10^{-4} .

Vi è la possibilità di aumentare ancora l'entità delle deformazioni, aiutando quindi l'interpretazione dei risultati, andando a ridurre lo spessore delle pareti del provino. Per operare in tale direzione occorrerà informarsi accuratamente su tale possibilità presso la ditta produttrice che verrà scelta per la fornitura in quanto, per i materiali come il plexiglass, lo spessore delle lastre è fortemente vincolato dai raggi di curvatura richiesti e dalle macchine di produzione.

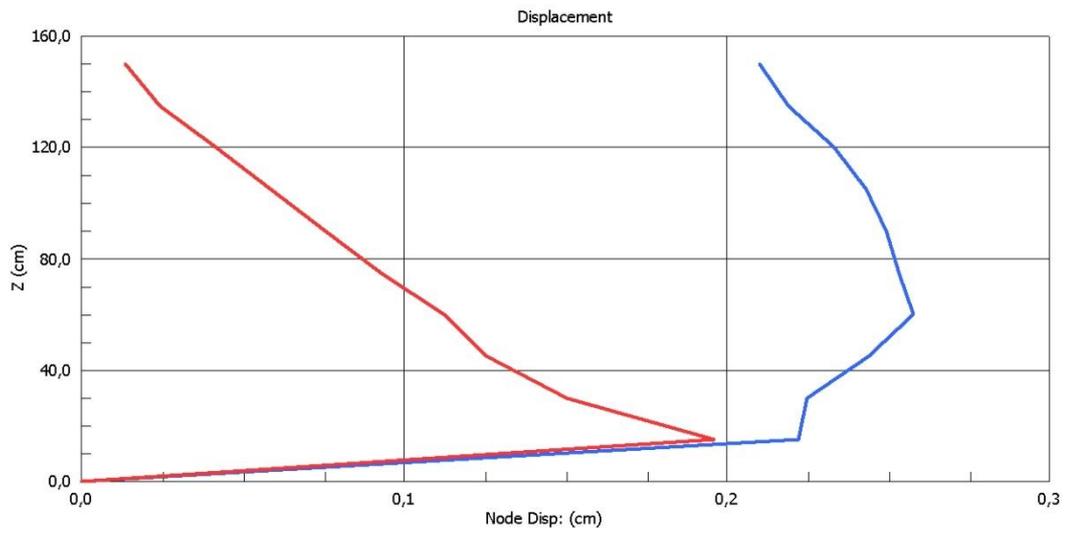


Figura 6.58 Spostamenti totali nelle due teorie.

Provino 2

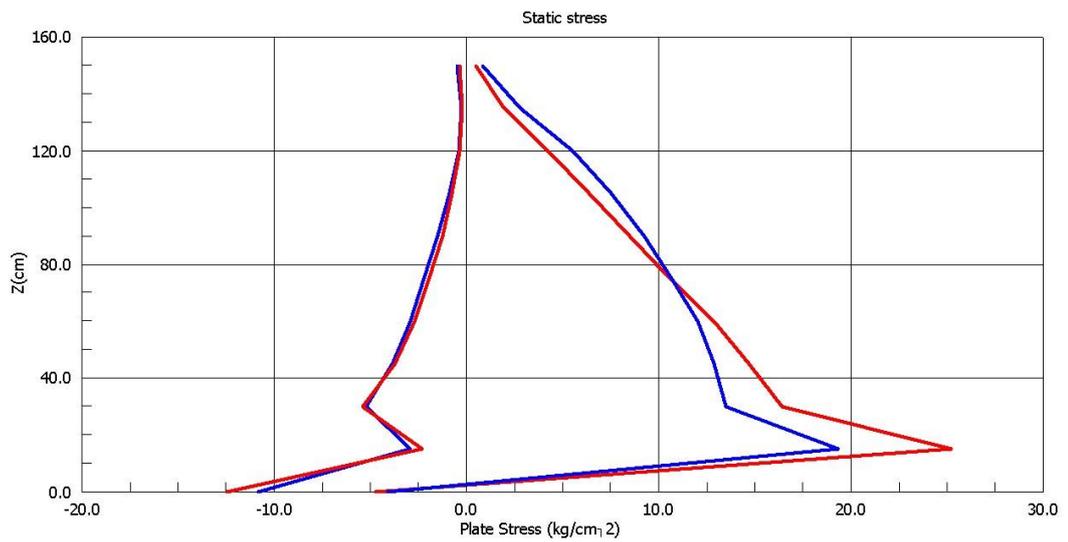


Figura 6.59 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

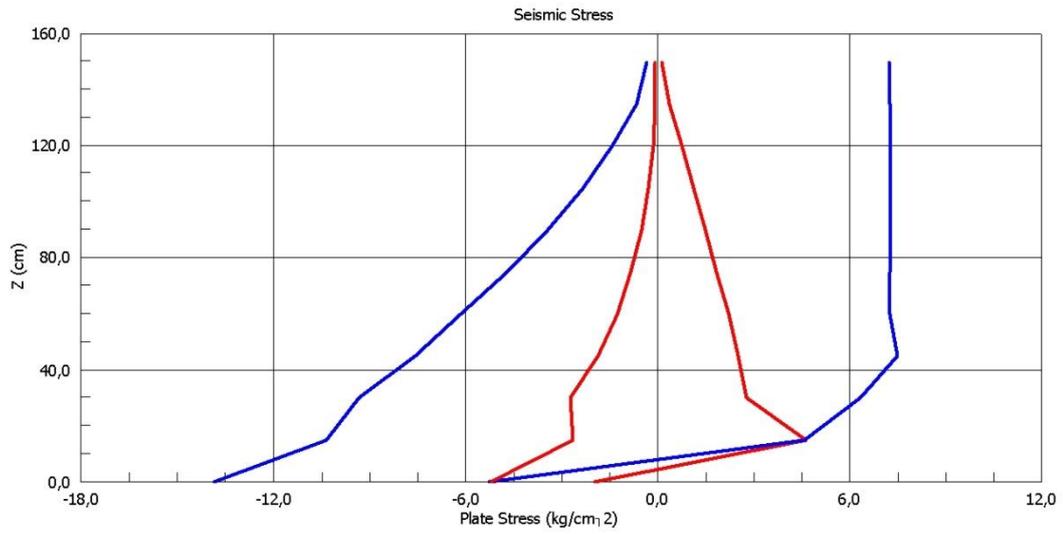


Figura 6.60 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

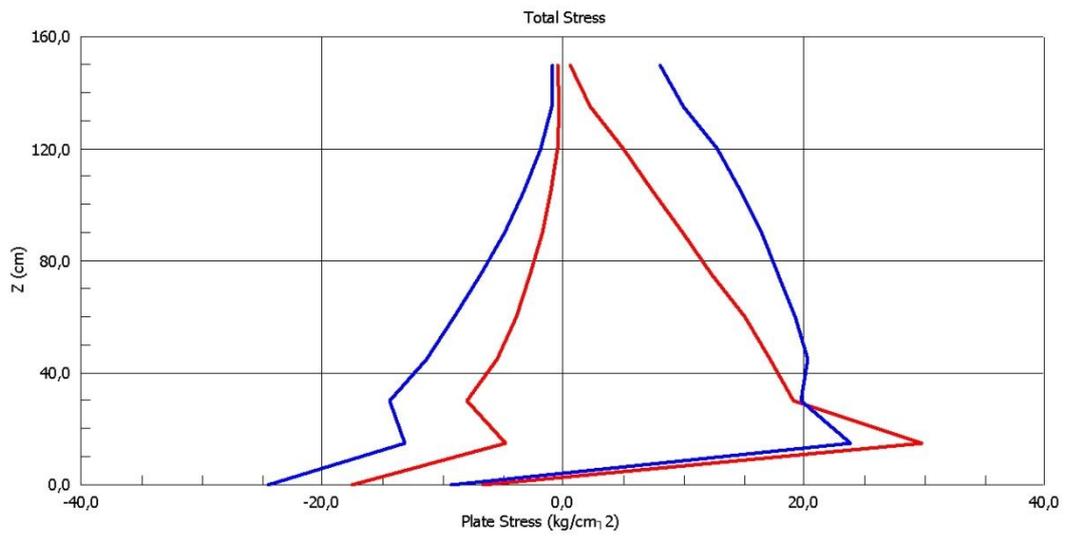


Figura 6.61 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale

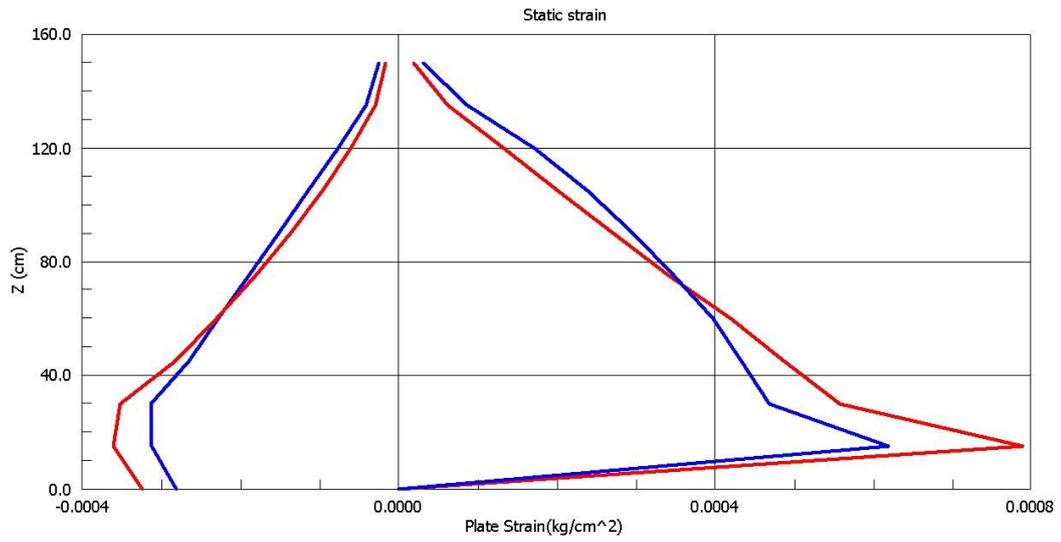


Figura 6.62 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica

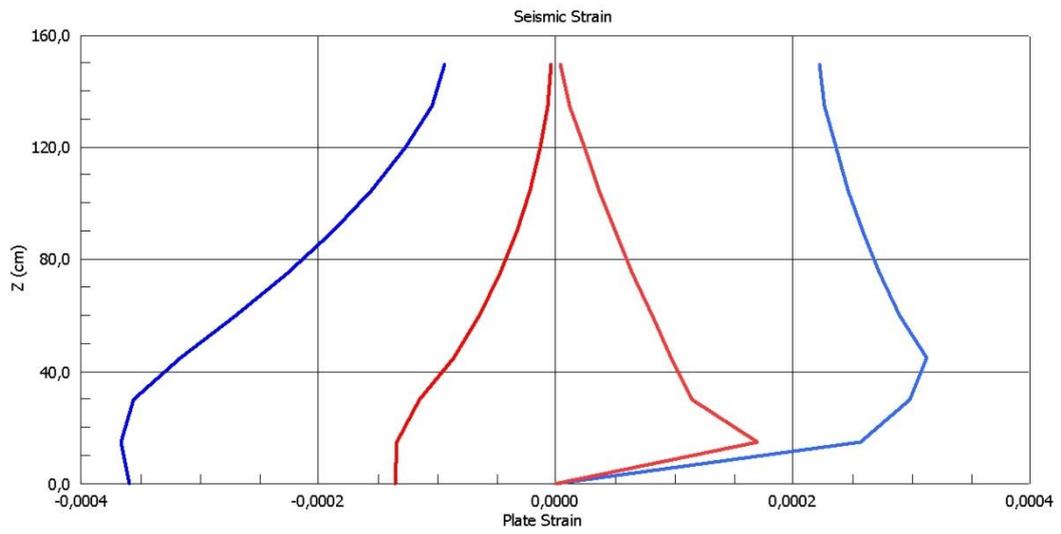


Figura 6.6 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

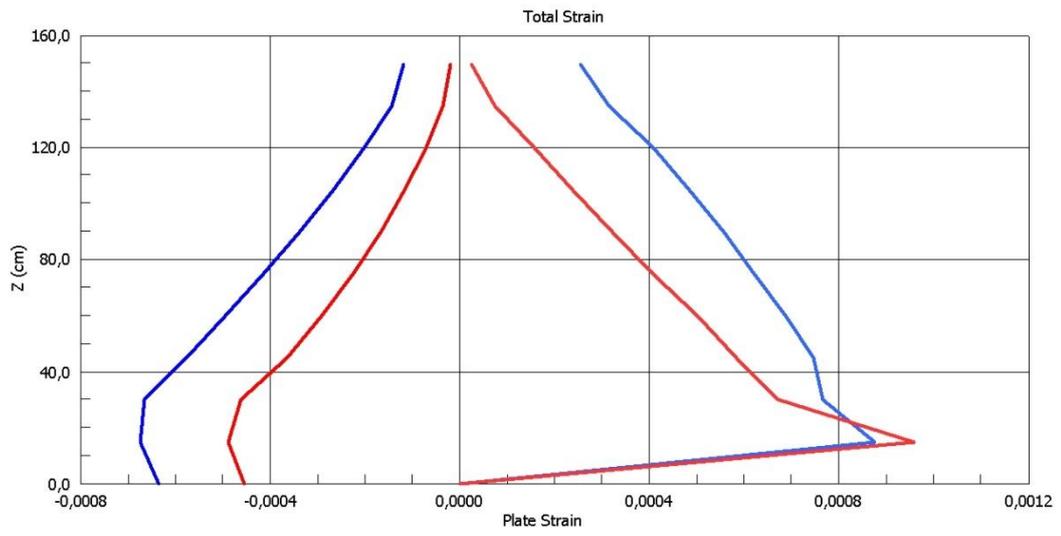


Figura 6.64 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totae.

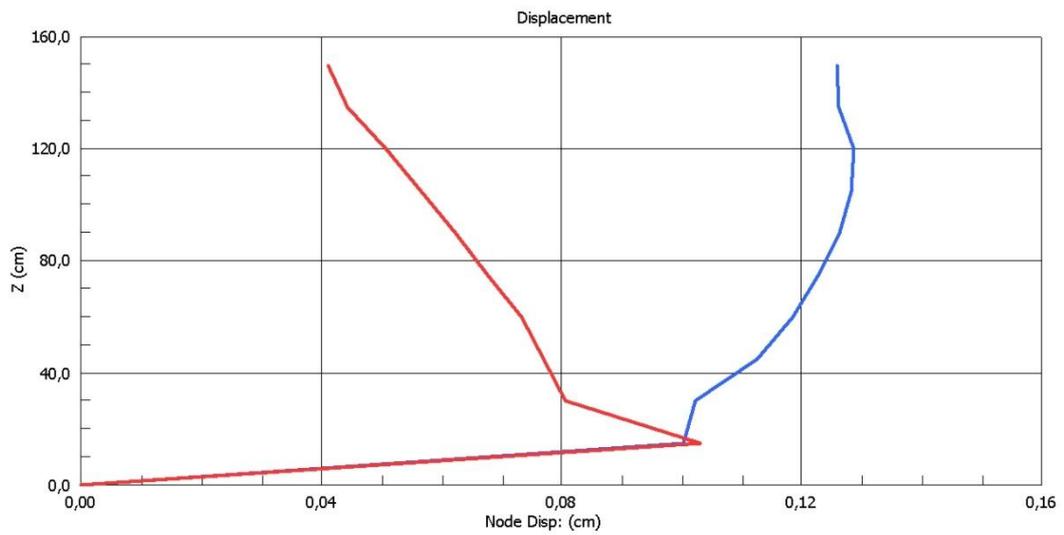


Figura 6.65 Spostamenti totali nelle due teorie.

Provino 3

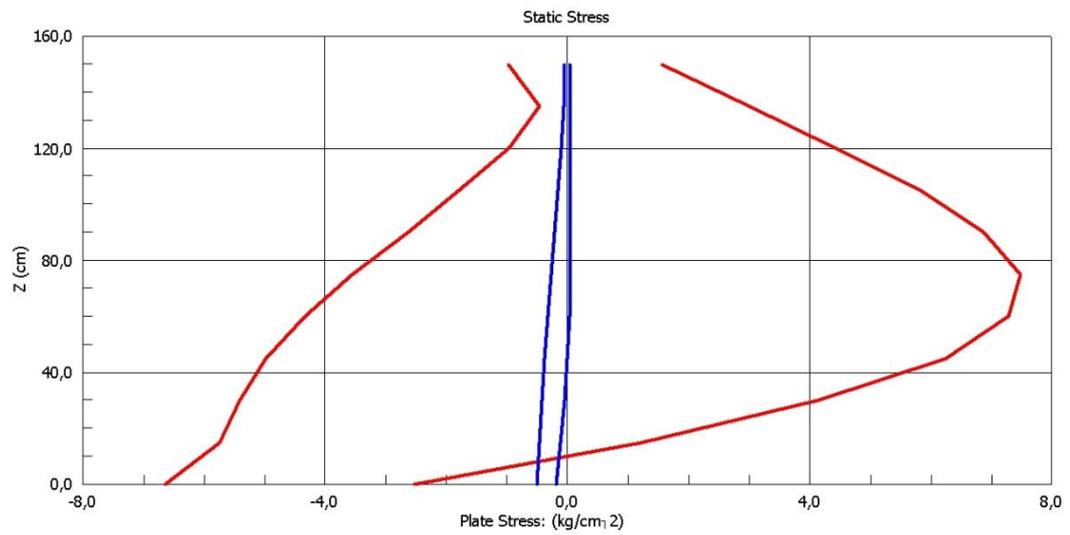


Figura 6.66 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica

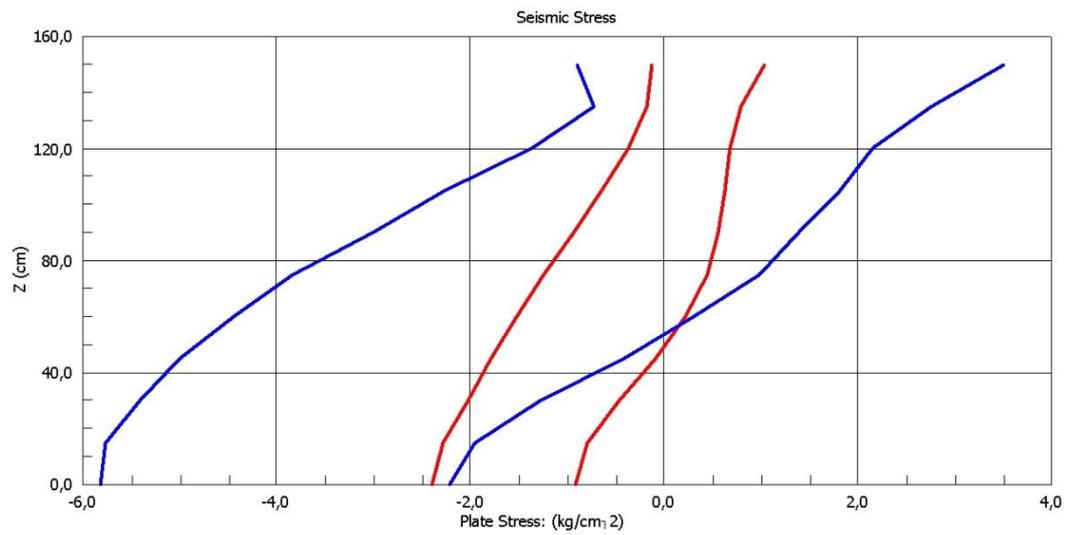


Figura 6.67 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

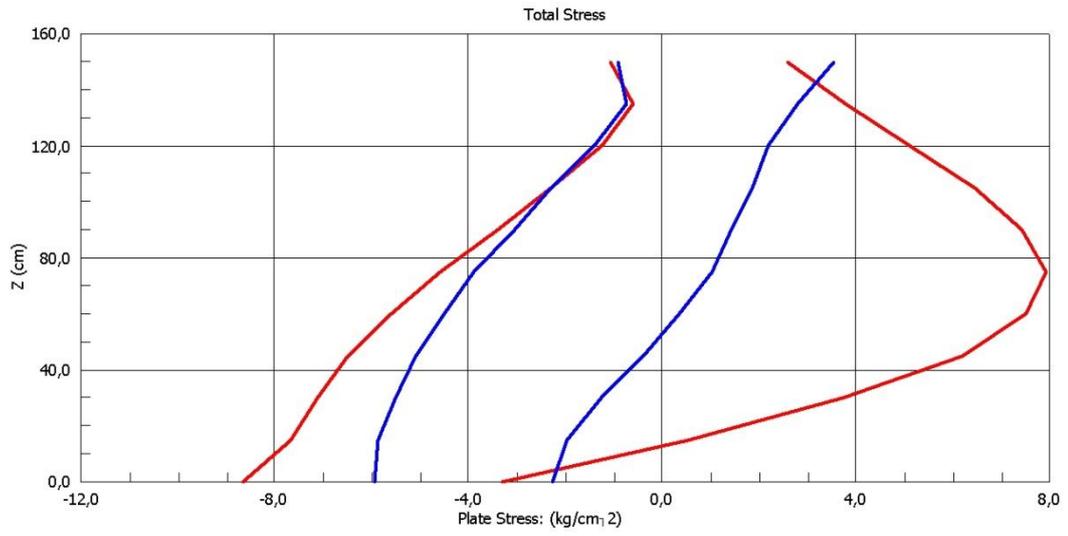


Figura 6.68 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

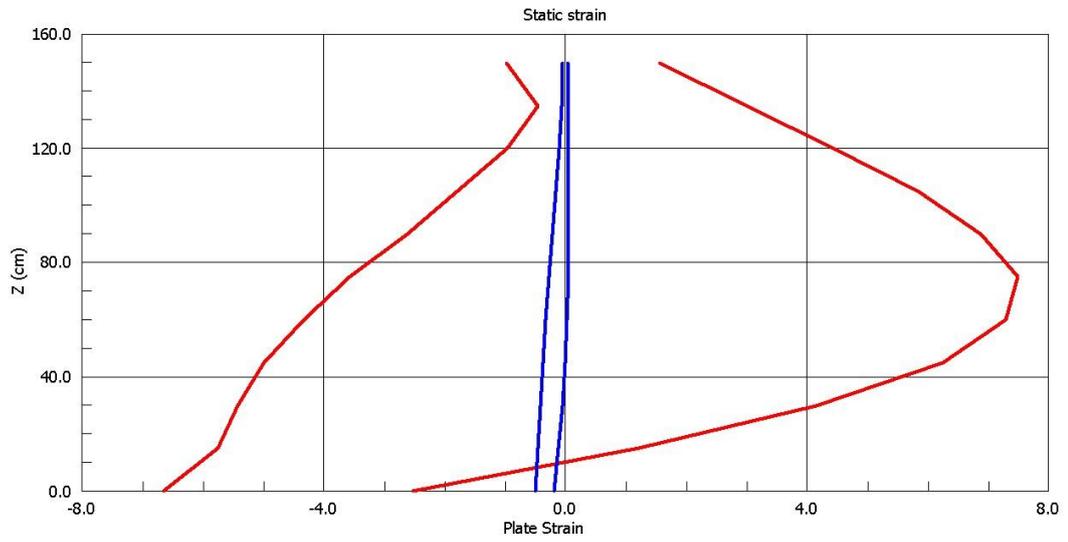


Figura 6.69 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

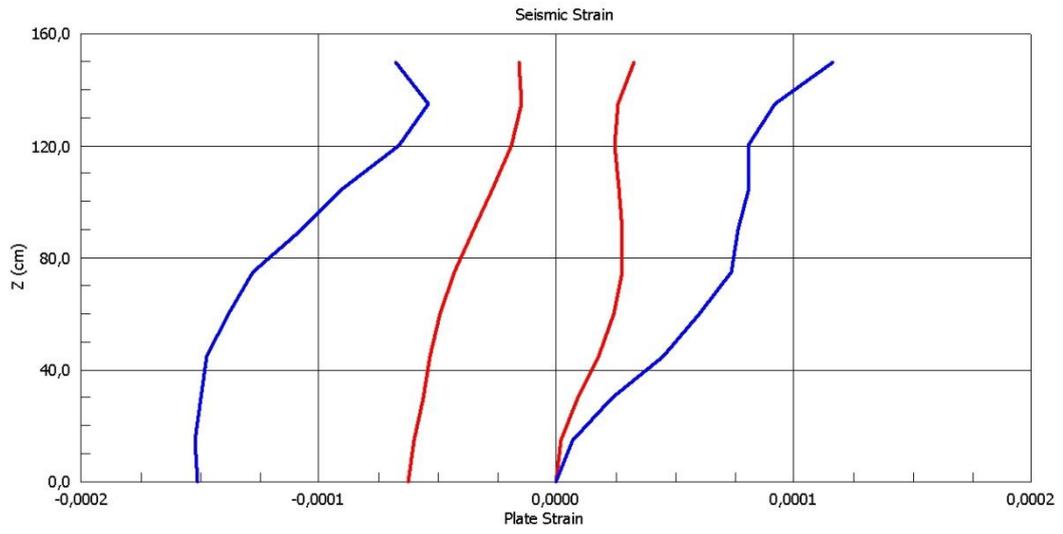


Figura 6.70 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

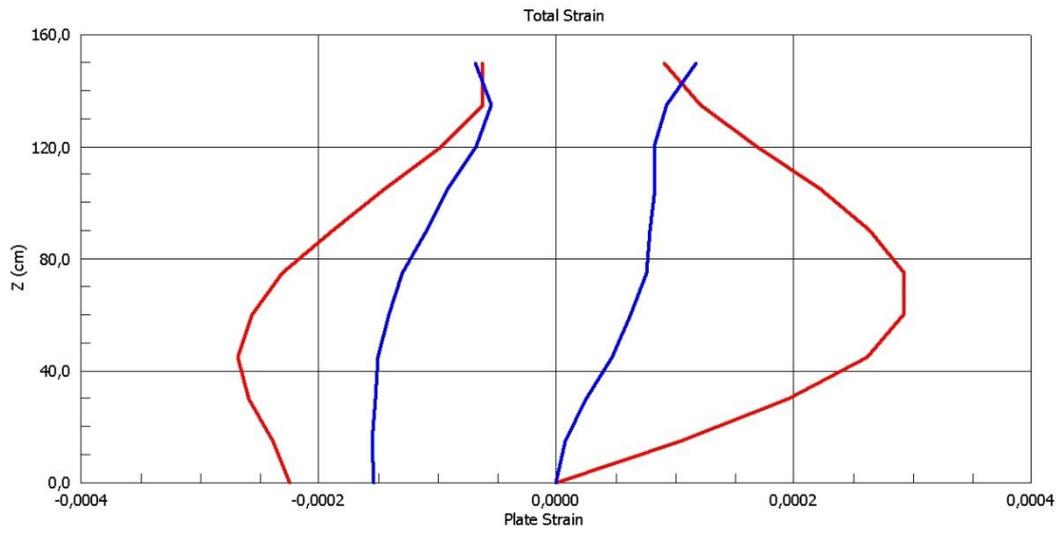


Figura 6.71 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

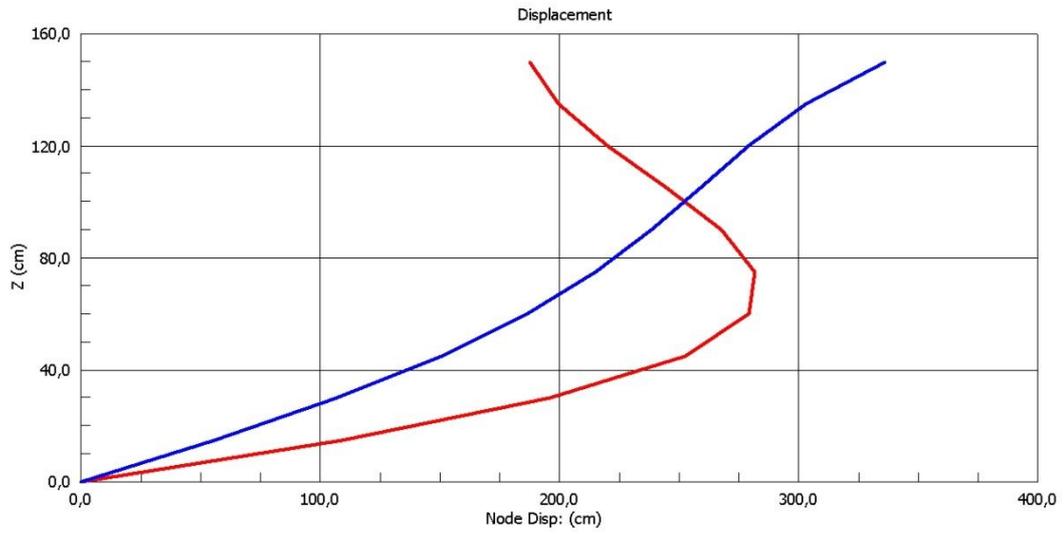


Figura 6.72 Spostamenti totali nelle due teorie.

Le osservazioni di carattere qualitativo che si possono ottenere dai primi tre provini sono le stesse che sono già state espone per i provini d'acciaio.

Le uniche differenze sostanziali sono già state rilevate nei commenti ai risultati per il provino 1: l'entità delle sollecitazioni diminuiscono mentre aumentano le deformazioni.

Provino 4

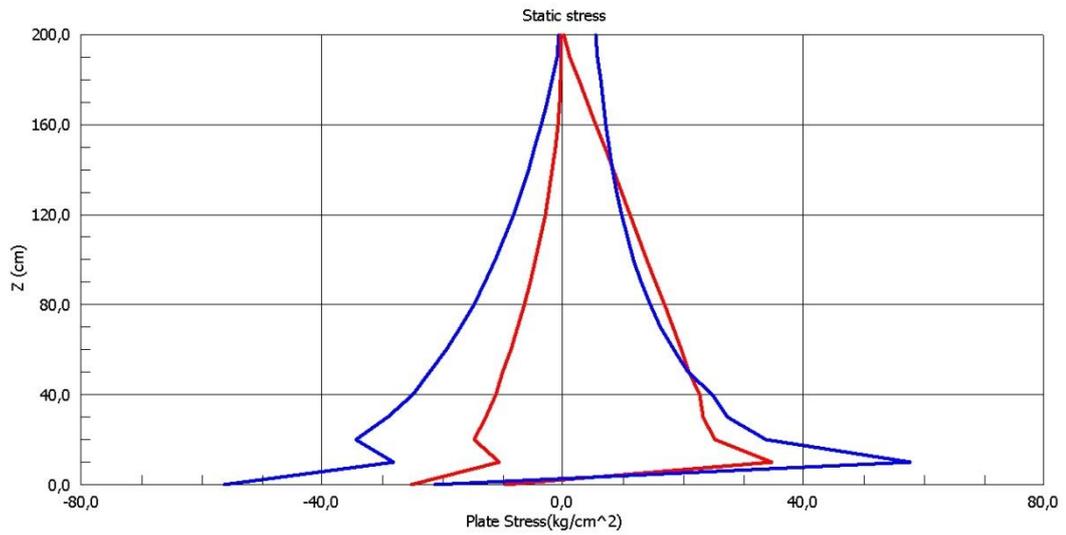


Figura 6.73 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

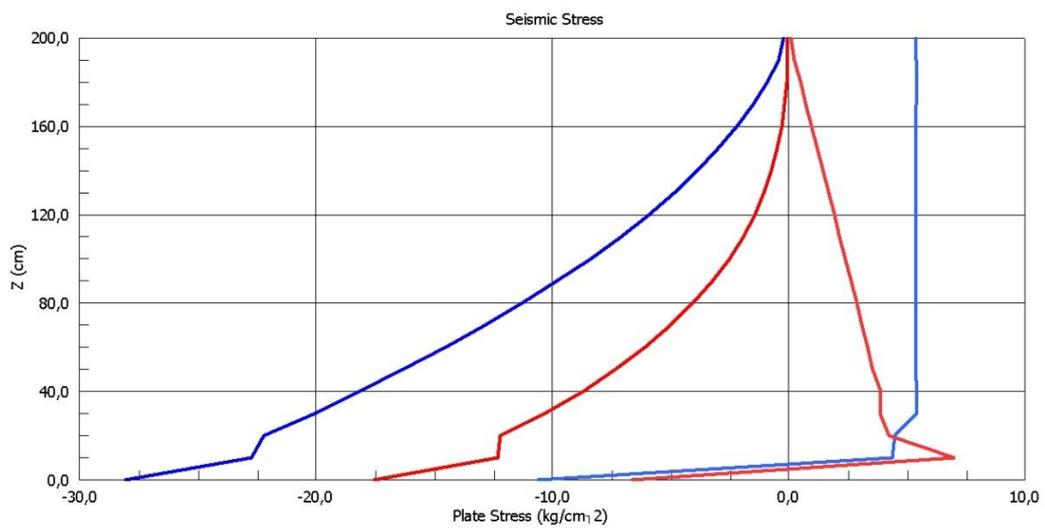


Figura 6.74 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

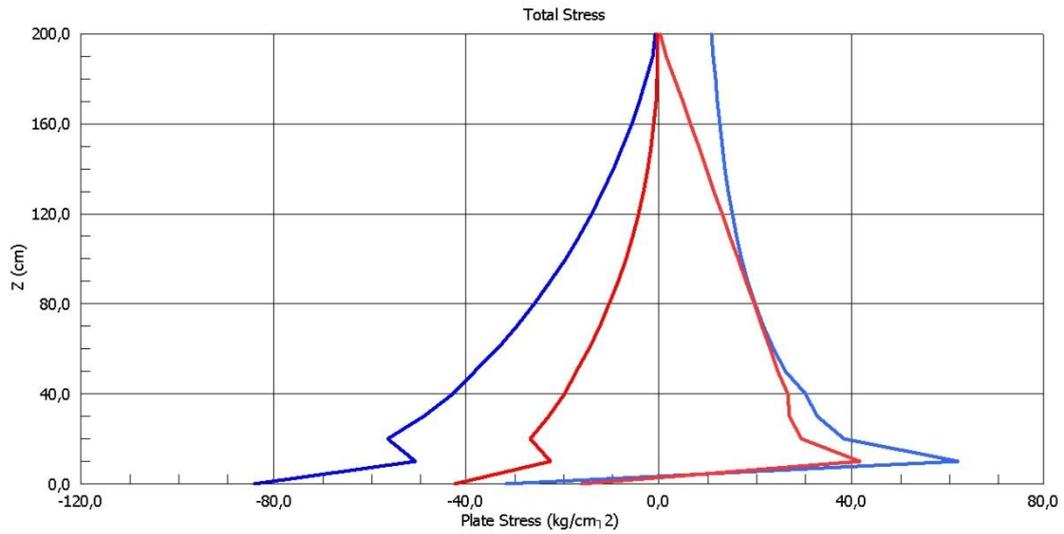


Figura 6.75 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

Come ci si poteva aspettare data l'elevata snellezza del provino ($\Delta = 1,33$ contro $\Delta \leq 1$ degli altri provini) e dell'elevato coefficiente d'attrito, le differenze tra i risultati delle due teorie sono marginali, soprattutto per quanto riguarda le tensioni di parallelo.

Anche le deformazioni (riportate nelle figure seguenti) seguono tale comportamento.

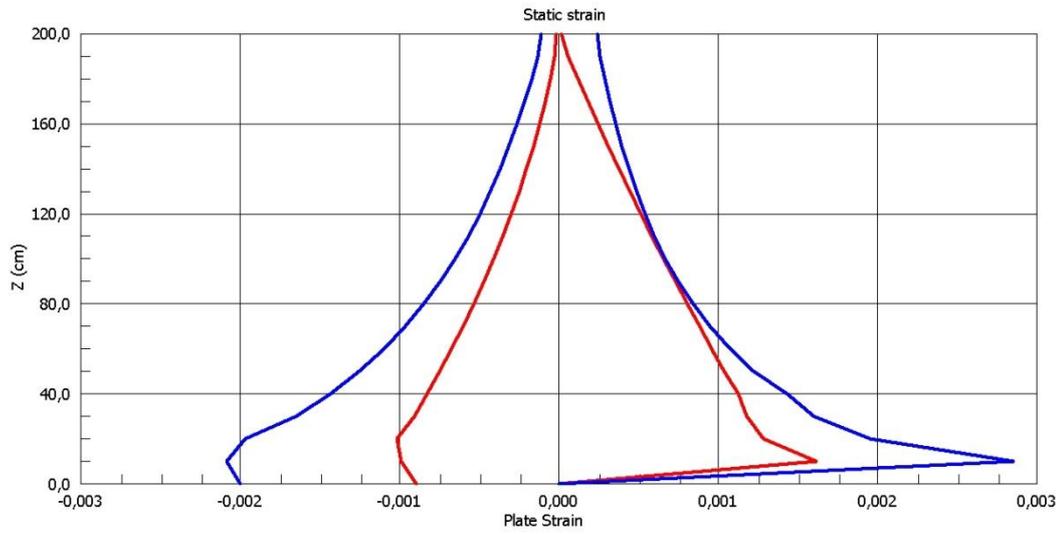


Figura 6.76 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

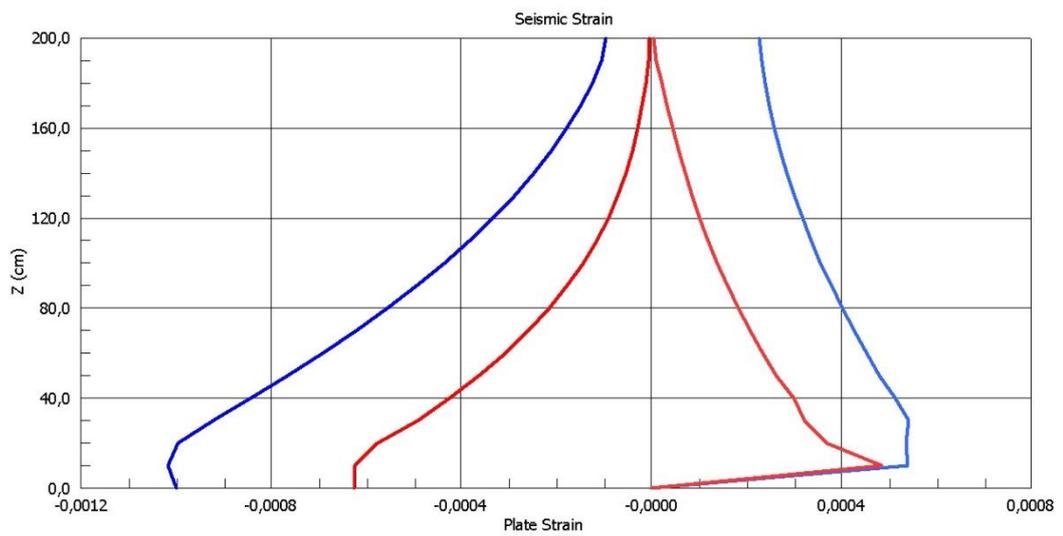


Figura 6.77 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

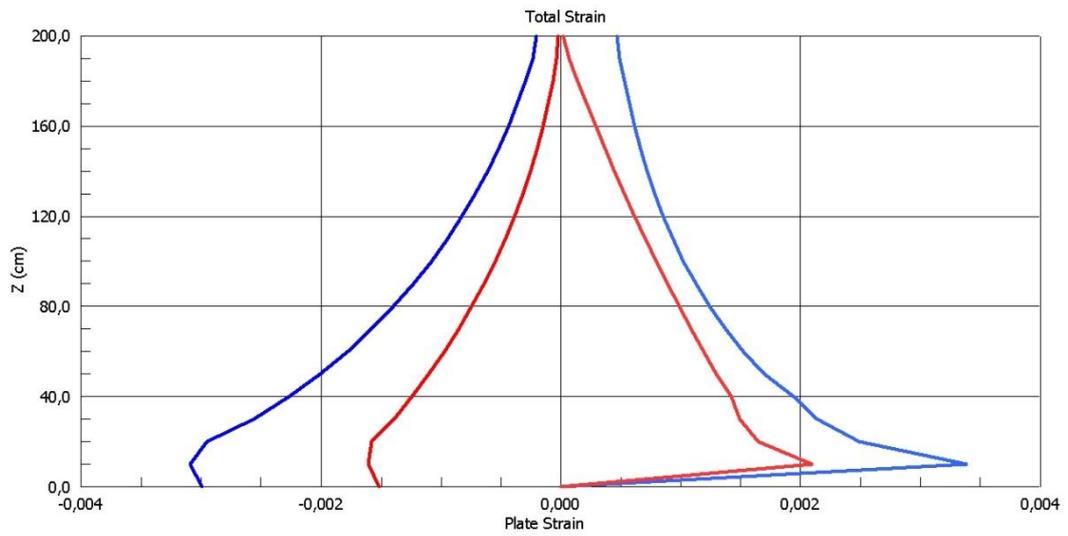


Figura 6.78 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

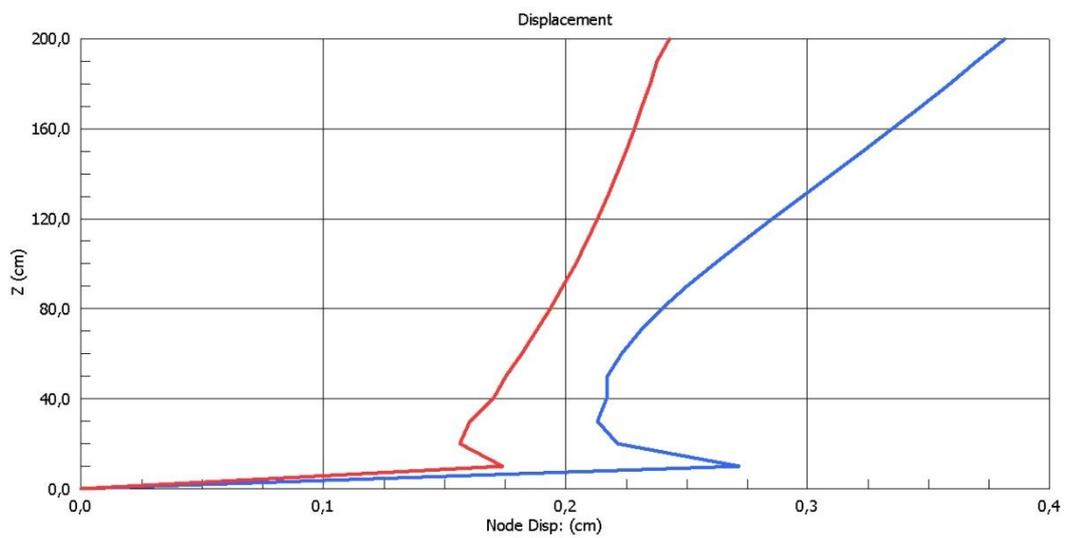


Figura 6.79 Spostamenti totali nelle due teorie.

In figura 6.79 è visibile un aumento rilevante degli spostamenti in sommità.

Provino 5

Anche in tale provino i risultati risentono fortemente della snellezza della geometria ($\Delta = 1,5$) facendo in modo che gli scostamenti tra le curve diminuiscano ancora andando anche a cambiare di segno come è rilevabile per le tensioni totali di parallelo in figura 6.80

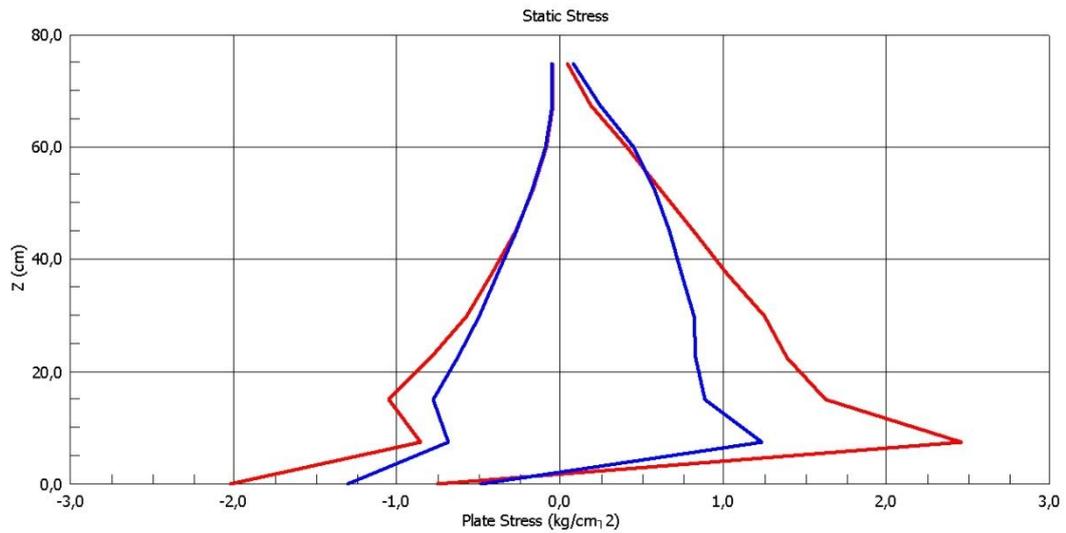


Figura 6.80 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

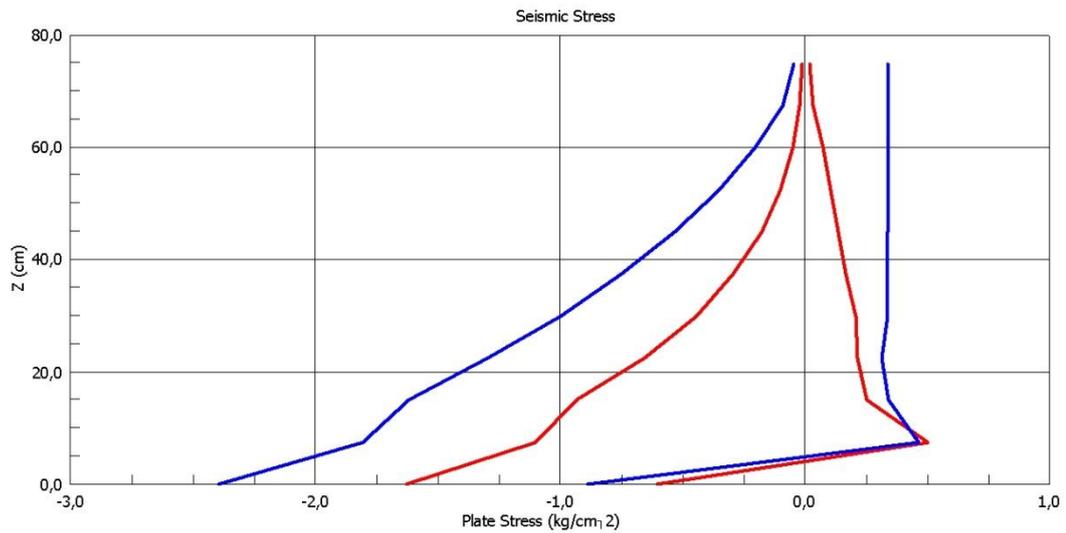


Figura 6.81 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

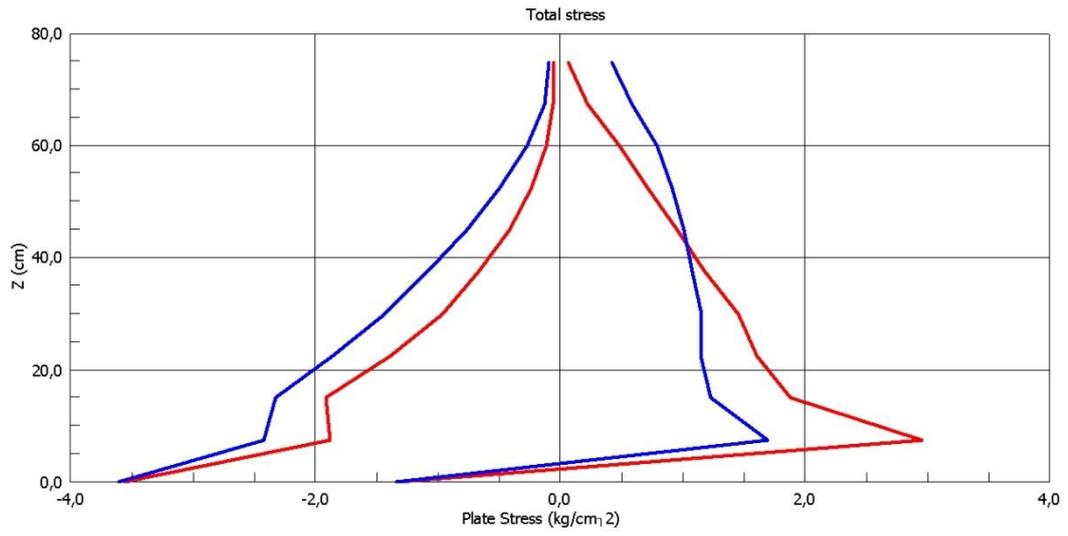


Figura 6.82 Tensioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

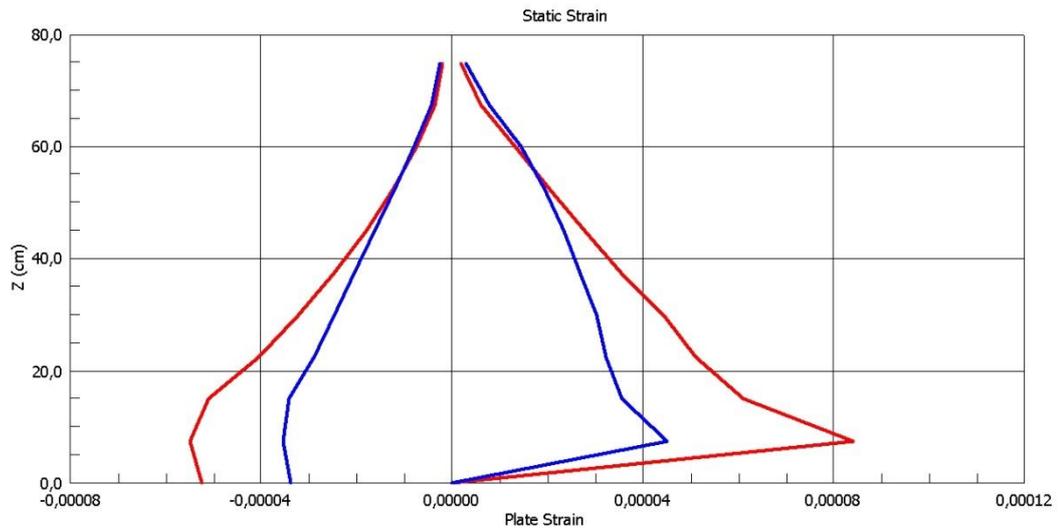


Figura 6.83 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione statica.

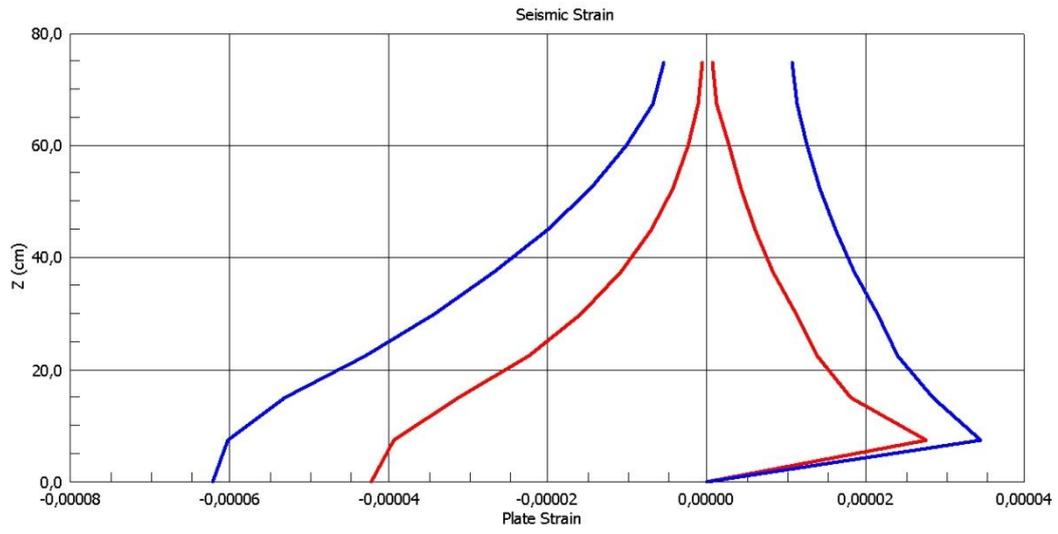


Figura 6.84 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione sismica.

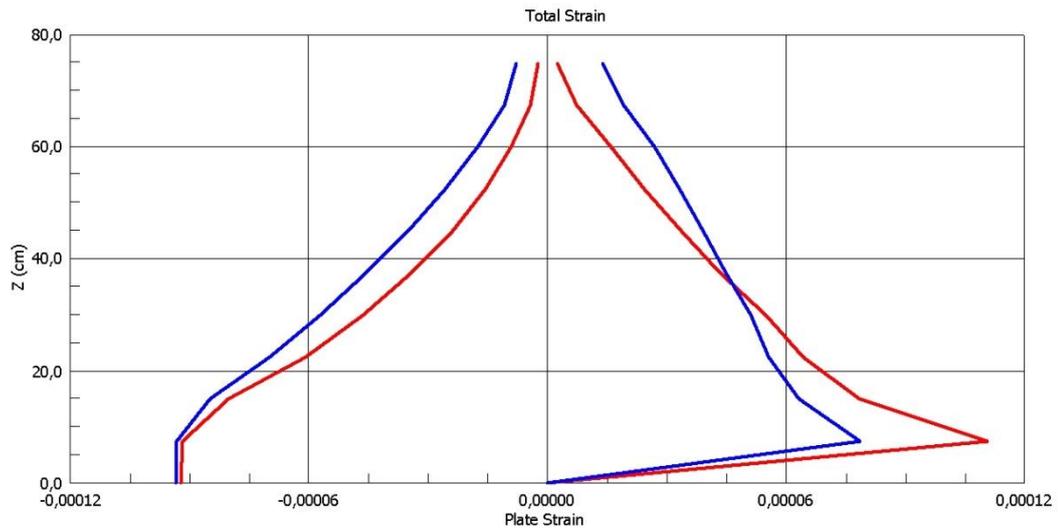


Figura 6.85 Deformazioni di meridiano e di parallelo nelle due teorie., combinazione totale.

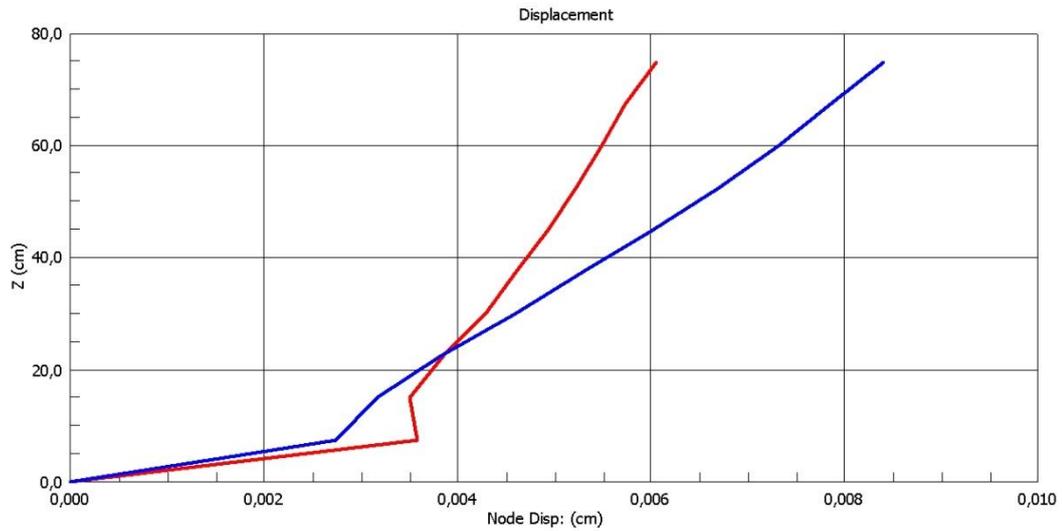


Figura 6.86 Spostamenti totali nelle due teorie

Gli spostamenti di questo provino leggibili in figura 6.86 hanno la stessa tendenza ad aumentare verso la sommità che era presente anche per il provino 5.

6.2.3 Validazione analitica

In questa sezione vengono confrontati i risultati ottenuti tramite analisi F.E.M. e quelli ottenuti tramite semplici passaggi analitici.

Riprendendo quanto già accennato al paragrafo 6.4.1 per un tubo cilindrico di raggio medio R , di spessore s , soggetto a pressione p sulla parete l'equazione differenziale della linea elastica della striscia unitaria (ossia di ogni generatrice) con spessore costante e variabile è rispettivamente:

$$Bw^{IV} + \beta w = p \quad (6.14)$$

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (s^3 w'') + \beta w = p \quad (6.15)$$

dove:

- E = modulo elastico del materiale;
- ν = coefficienti di Poisson;
- s = spessore del cilindro;
- w = spostamento radiale;
- $\beta = \frac{Es}{R^2}$;
- R = raggio del cilindro;
- p = pressione.

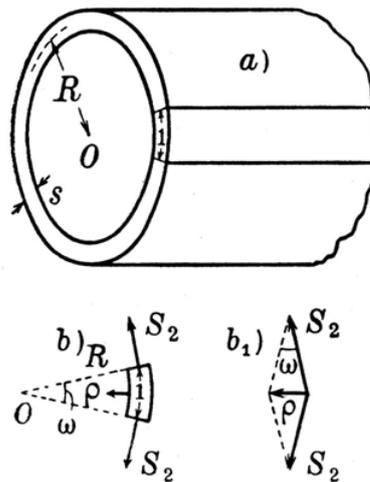


Figura 6.87 Schema del cilindro.

Ottenuta l'espressione di w le altre quantità si deducono per derivazione:

$$S_2 = \left(\frac{Es}{R} \right) w \quad (6.16)$$

$$\varphi = -w' \quad (6.17)$$

$$M = Bw'' \quad (6.18)$$

$$T = Bw''' \quad (6.19)$$

Si tratta rispettivamente di:

- Sforzo di parallelo;
- Rotazione;
- Momento nella direzione della generatrice;
- Taglio.

Il momento M genera un momento $M_2 = \nu M$ nella direzione dei paralleli.

Per risolvere la (6.14) occorre fare la posizione:

$$\begin{aligned}\alpha^4 &= \frac{\beta}{4B} \\ \alpha &= \sqrt[4]{\frac{\beta}{4B}} = \sqrt[4]{\frac{Es/R^2}{4Es^3/12(1-\nu^2)}} \\ \alpha &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rs}}\end{aligned}\quad (6.20)$$

ottenendo in tal modo:

$$w^{IV} + 4\alpha^4 w = p/B \quad (6.21)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (6.21) sarà figlia dell'integrale particolare e dell'integrale dell'omogenea associata.

Per quanto concerne l'integrale particolare esso rappresenta l'effetto della sola pressione p agente sulla parete del tubo.

Se la pressione varia lungo il tubo con legge $p = cz^n$ con $n < 4$ l'integrale particolare è

$$w = \frac{c}{4\alpha^4 B} z^n = \frac{c}{\beta} z^n = \frac{cz^n R^2}{Es} = \frac{pR^2}{Es} \quad (6.22)$$

Le pressioni statiche agenti con la procedura Trombetti *et al* hanno andamento lineare con l'altezza per cui la soluzione particolare diviene

$$w = \frac{\gamma\lambda(1 + a_{g\text{-vert}})zR^2}{Es} \quad (6.23)$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea $w^{IV} + 4\alpha^4 w = 0$ si può esprimere nella forma

$$w = C_1 e^{\alpha z} \sin \alpha z + C_2 e^{\alpha z} \cos \alpha z + C_3 e^{-\alpha z} \sin \alpha z + C_4 e^{-\alpha z} \cos \alpha z \quad (6.24)$$

Nel caso di tubi di lunghezza infinita, ed anche praticamente nel caso dei tubi non molto corti, ponendo l'origine degli assi coordinati al bordo caricato appare chiaro che le costanti moltiplicanti i termini con esponenziali positivi devono annullarsi per fornire senso fisico alla soluzione.

La soluzione, quindi, si riduce ad essere

$$w = C_3 e^{-\alpha z} \sin \alpha z + C_4 e^{-\alpha z} \cos \alpha z \quad (6.25)$$

Si nota che w varia con legge sinusoidale smorzata la cui lunghezza d'onda λ è definita da $\alpha\lambda = 2\pi$ da cui

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{Rs} \quad (6.26)$$

Per la (6.26) la lunghezza d'onda λ è proporzionale a Rs . Pertanto, lo smorzamento è tanto più rapido quanto minori sono lo spessore s e il raggio R .

In corrispondenza del bordo inferiore caricato si ha $e^{-\alpha z} = e^{-\alpha 0} = 1$. Alla distanza $z = \lambda/2$ si ha $\alpha x = \alpha \lambda/2 = \pi$, $e^{-\pi} = 0,043214$ ed alla distanza $z = \lambda$ si ha $\alpha x = \alpha \lambda = 2\pi$, $e^{-2\pi} = 0,001867$.

Perciò alle distanze di mezza lunghezza d'onda e di una lunghezza d'onda, le varie quantità diventeranno all'incirca 1/23 e 1/535, rispettivamente dei valori che hanno al bordo.

Il motivo fisico di tale smorzamento è dovuto al fatto che la deformazione delle strisce longitudinali del tubo richiede che aumenti o diminuisca il raggio delle strisce anulari, le quali perciò reagiscono, opponendosi alla deformazione delle prime e smorzandola a breve distanza dalla causa esterna isolata che la produce.

Per tali motivi usualmente, in letteratura, la distinzione tra tubi corti e di altezza considerevole viene fatta confrontando l'altezza H del silos e la lunghezza d'onda λ :

- tubi corti $H < \lambda/2$;
- tubi alti $H > \lambda$.

A seconda di quale condizione si ritrovi il caso in esame sarà lecito usare o la (6.24) o la (6.25).

Un ulteriore motivo squisitamente sperimentale di interesse nella valutazione del λ sta nel fatto che al di sotto di tale altezza le misurazioni effettuate risentiranno degli effetti locali di bordo risultando in tal modo "sporcate".

Nel caso di tubi alti la soluzione diviene:

$$w = \frac{\gamma\lambda(1+a_{g\text{-vert}})R^2}{Es}(H-x) + e^{-\alpha x}(C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z) \quad (6.27)$$

dove x è la coordinata verticale misurata a partire dal bordo inferiore.

Le costanti si ottengono imponendo le condizioni di vincolo al bordo inferiore, nel caso di serbatoio incastrato ed appoggiato si ottiene rispettivamente:

- $C_3 = -\gamma\lambda(1-a_{g\text{-vert}})\frac{\alpha H - 1}{\alpha\beta}$, $C_4 = -\gamma\lambda(1-a_{g\text{-vert}})\frac{H}{\beta}$;
- $C_3 = 0$, $C_4 = -\gamma\lambda(1-a_{g\text{-vert}})\frac{H}{\beta}$.

Essendo note tutte le caratteristiche è possibile ottenere le grandezze volute.

La validazione può essere condotta direttamente sugli spostamenti in quanto le tensioni sono proporzionali ad esse.

Nei grafici che sono riportati nelle pagine seguenti è riportato l'andamento degli spostamenti radiali di provino articolato alla base per quanto riguarda il modello numerico mentre per gli spostamenti ottenuti tramite le relazioni analitiche si sono riportati sia il caso di provino incastrato sia di provino

articolato. Tale scelta è stata fatta per rendere evidente che gli scostamenti tra le due casistiche scompaiono velocemente.

6.2.3.1 Acciaio

In questo paragrafo si effettua la validazione analitica per quanto concerne i provini in acciaio.

Provino 1

$$\alpha = 0,1930;$$

$$\beta = 27,1924;$$

$$\lambda = 32,5472 \text{ cm} < H;$$

può quindi essere trattato come un tubo alto

$$C_{3_incastrato} = -0,0030;$$

$$C_{4_incastrato} = C_{4_appoggiato} = -0,0031;$$

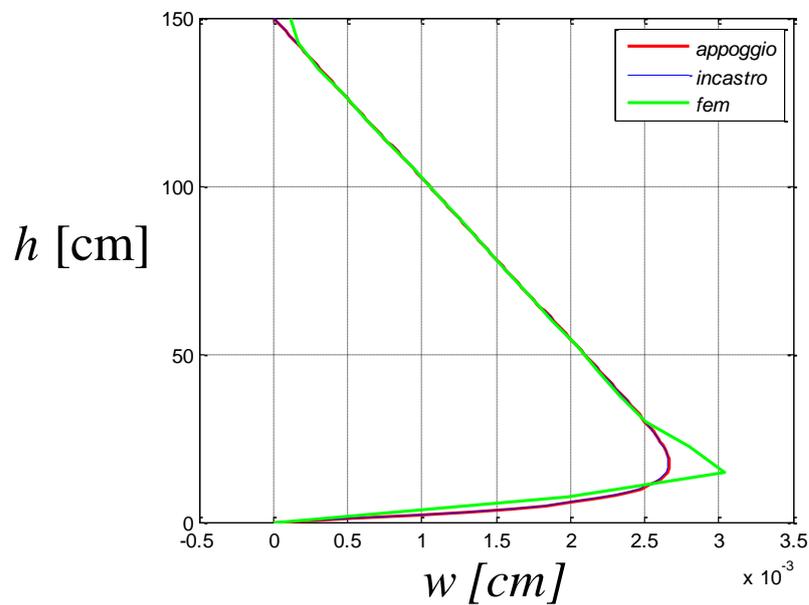


Figura 6.88 Confronto tra gli spostamenti radiali.

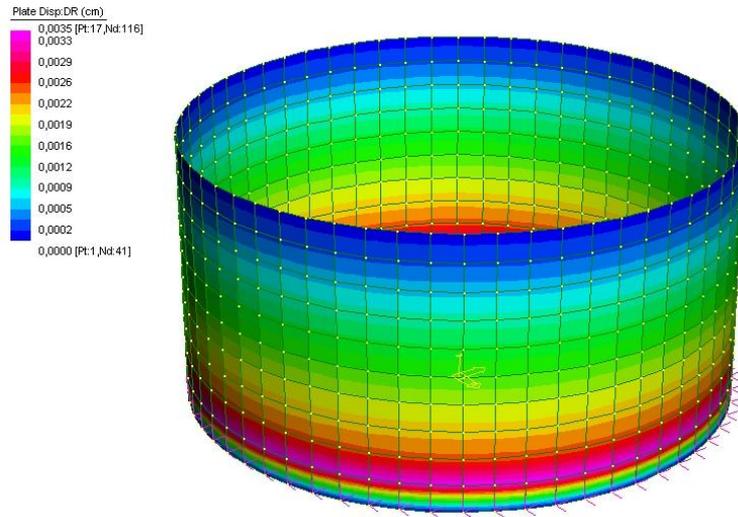


Figura 6.89 Spostamenti radiali

x [cm]	w [cm]	w [cm] F.E.M.
150	0,000000000	0,000114408
142,5	0,000157006	0,000166860
135	0,000314012	0,000301120
127,5	0,000471018	0,000467484
120	0,000628024	0,000628025
112,5	0,000785030	0,000784376
105	0,000942036	0,000940720
97,5	0,001099042	0,001097490
90	0,001256048	0,001254327
82,5	0,001413054	0,001411121
75	0,001570058	0,001567861
67,5	0,001727059	0,001724634
60	0,001884043	0,001881871
52,5	0,002040955	0,002039480
45	0,002197560	0,002193115
37,5	0,002352854	0,002337212
30	0,002502557	0,002506270
22,5	0,002628430	0,002805573
15	0,002652811	0,003042902
7,5	0,002245197	0,001985161
0	0	0

Tabella 6.1 Validazione del modello: andamento degli spostamenti radiali lungo l'altezza.

Provino 2

$$\alpha = 0,2364;$$

$$\beta = 61,1830;$$

$$\lambda = 26,57,46 \text{ cm} < H;$$

può quindi essere trattato come un tubo alto

$$C_{3_incastrato} = -0,0014;$$

$$C_{4_incastrato} = C_{4_appoggiato} = -0,0014;$$

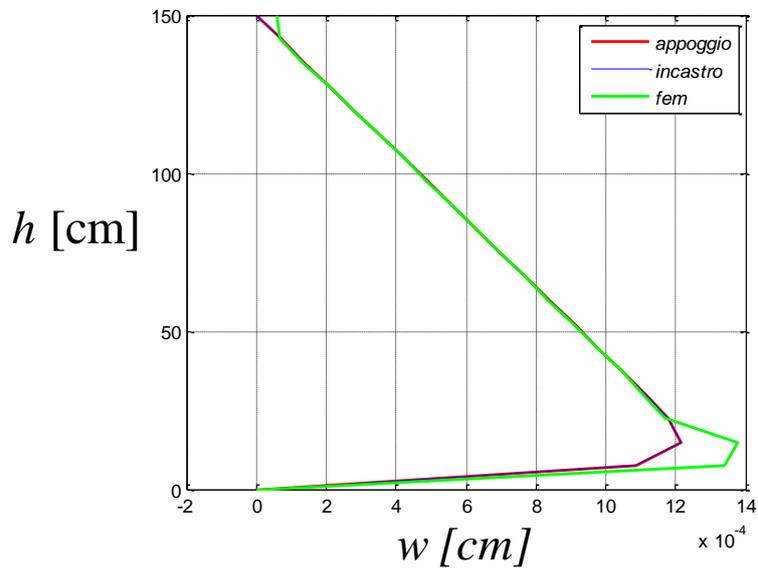


Figura 6.90 Confronto tra gli spostamenti radiali.

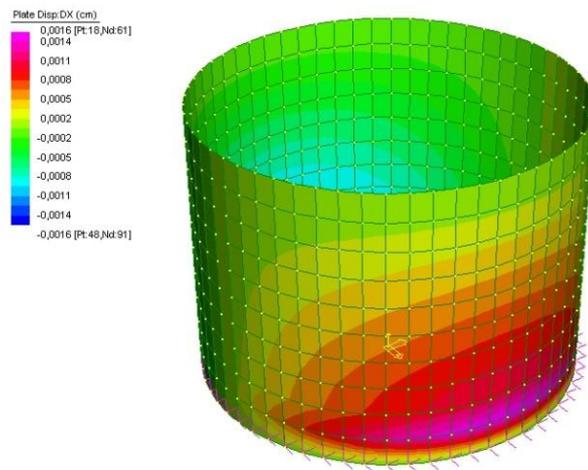


Figura 6.91 Spostamenti radiali

x [m]	w [cm]	w [cm] F.E.M.
150	0,000000000	0,000061106
142,5	0,000069780	0,000066824
135	0,000139561	0,000134240
127,5	0,000209341	0,000209882
120	0,000279122	0,000279077
112,5	0,000348902	0,000348319
105	0,000418683	0,000418092
97,5	0,000488463	0,000487804
90	0,000558244	0,000557479
82,5	0,000628024	0,000627161
75	0,000697804	0,000696847
67,5	0,000767585	0,000766554
60	0,000837364	0,000836203
52,5	0,000907140	0,000905672
45	0,000976893	0,000976050
37,5	0,001046512	0,001047449
30	0,001115336	0,001106663
22,5	0,001179467	0,001168960
15	0,001215897	0,001375494
7,5	0,001088999	0,001341367
0	0	0

Tabella 6.2 Validazione del modello: andamento degli spostamenti radiali lungo l'altezza.

I risultati ottenuti con le due metodologie sono pienamente concordanti. I maggiori scostamenti si hanno in prossimità del vincolo e sono comunque nell'ordine del 10^{-3} cm e pertanto trascurabili.

Un ulteriore fenomeno, che risulta subito evidente dalle figure 6.88 e 6.90, è l'andamento irregolare della curva relativa all'analisi F.E.M. in prossimità del vincolo inferiore e presso il bordo superiore. Tale andamento è imputabile ad effetti di bordo non considerati analiticamente e che probabilmente richiederebbero un'analisi locale più raffinata.

Si può concludere che i risultati numerici sono validati dalle relazioni analitiche definite dalla teoria classica dei gusci cilindrici.

6.2.3.2 Plexiglass

In questo paragrafo si effettua la validazione analitica per quanto concerne i provini in plexiglass.

Provino 1

$$\alpha = 0,1634 ;$$

$$\beta = 0,5867 ;$$

$$\lambda = 38,4510 \text{ cm} < H ;$$

può quindi essere trattato come un tubo alto

$$C_{3_incastrato} = -0,1396 ;$$

$$C_{4_incastrato} = C_{4_appoggiato} = -0,1455 ;$$

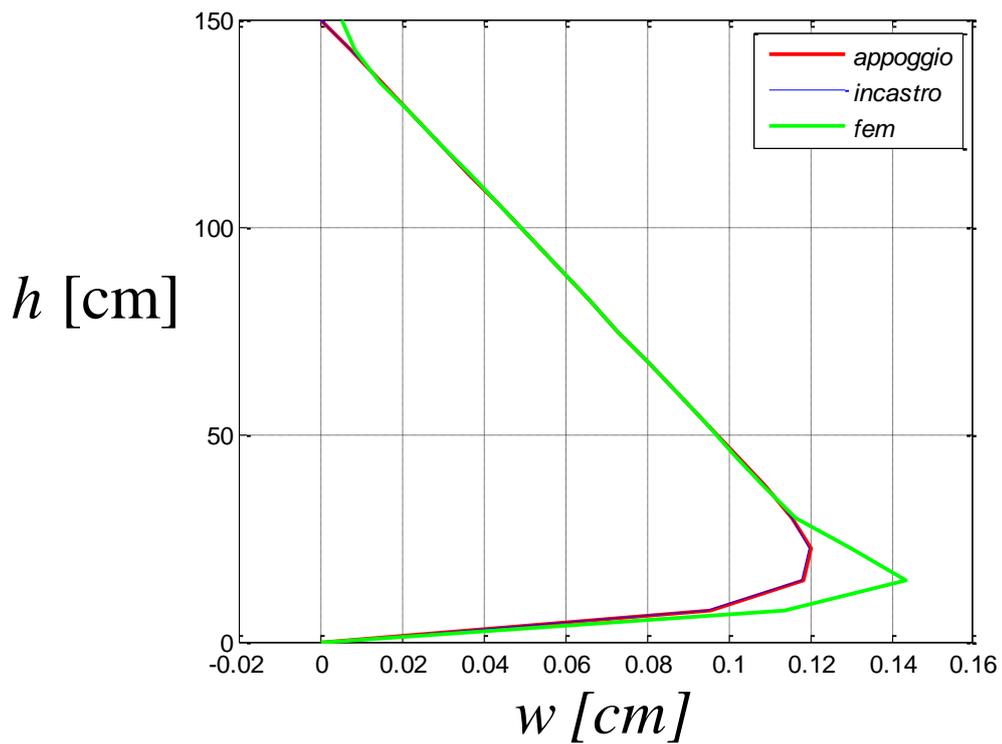


Figura 6.9 Confronto tra gli spostamenti radiali.

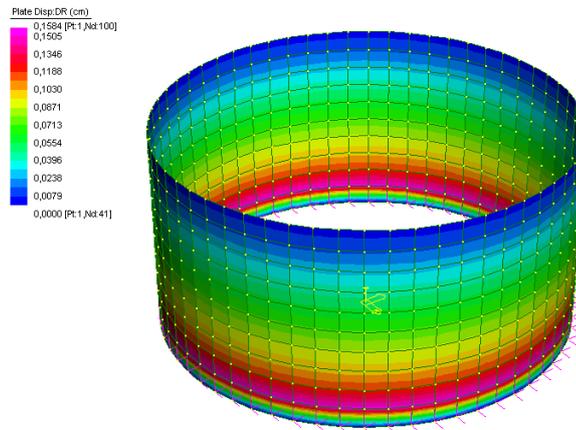


Figura 6.93 Spostamenti radiali

x [m]	w [cm]	w [cm] F.E.M.
150	0,000000000	0,005000787
142,5	0,007277344	0,008116774
135	0,014554687	0,014110772
127,5	0,021832031	0,021645972
120	0,029109375	0,029138202
112,5	0,036386717	0,036427097
105	0,043664058	0,043667230
97,5	0,050941389	0,050919783
90	0,058218692	0,058181540
82,5	0,065495896	0,065443105
75	0,072772761	0,072703845
67,5	0,080048466	0,079974953
60	0,087320207	0,087269459
52,5	0,094578408	0,094530339
45	0,101790364	0,101534980
37,5	0,108844474	0,108260238
30	0,115360043	0,116425498
22,5	0,120039062	0,129913023
15	0,118457897	0,143249484
7,5	0,095547615	0,113556891
0	0	0

Tabella 6.3 Validazione del modello: andamento degli spostamenti radiali lungo l'altezza.

Provino 2

$$\alpha = 0,2001;$$

$$\beta = 1,3200;$$

$$\lambda = 31,3951 \text{ cm} < H;$$

può quindi essere trattato come un tubo alto

$$C_{3_incastrato} = -0,0625;$$

$$C_{4_incastrato} = C_{4_appoggiato} = -0,0647;$$

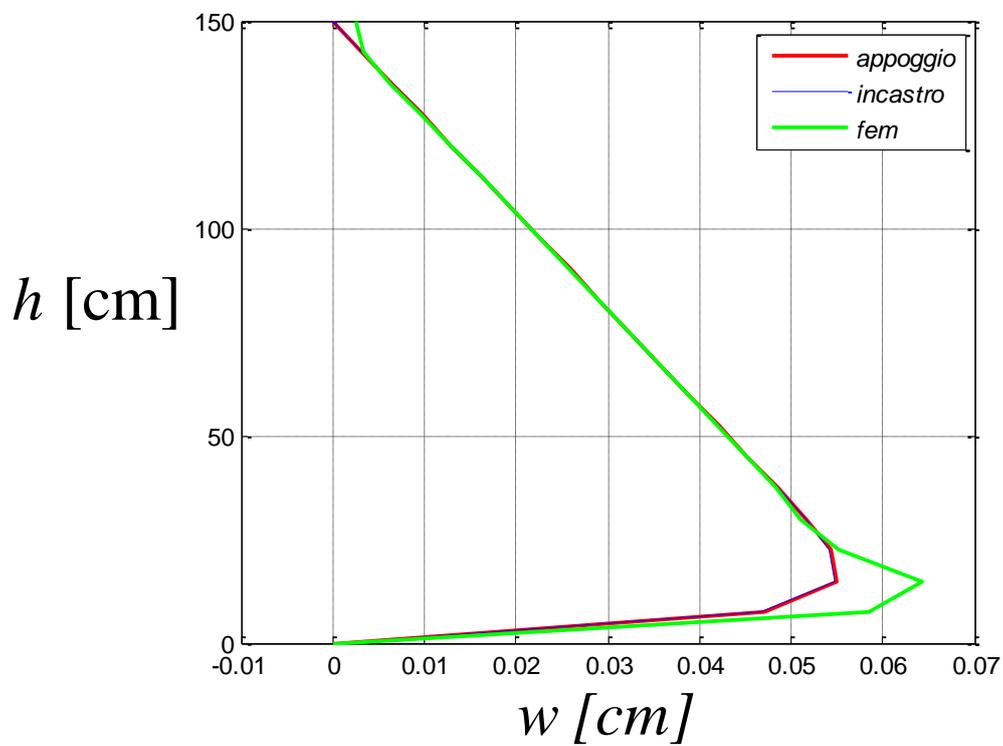


Figura 6.94 Confronto tra gli spostamenti radiali.

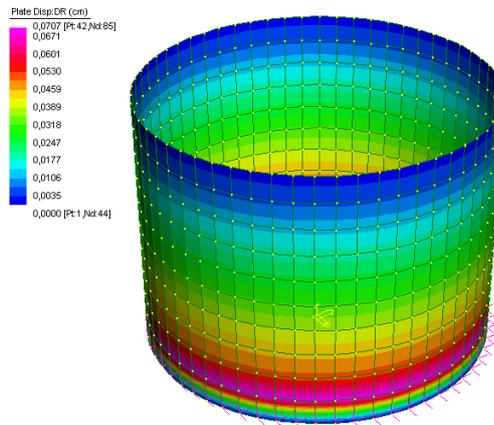


Figura 6.95 Spostamenti radiali

x [m]	w [cm]	w [cm] F.E.M.
150	0,000000000	0,002620226
142,5	0,003234375	0,003288732
135	0,006468750	0,006198953
127,5	0,009703125	0,009680129
120	0,012937500	0,012944393
112,5	0,016171875	0,016151189
105	0,019406250	0,019377332
97,5	0,022640625	0,022609396
90	0,025874999	0,025839714
82,5	0,029109371	0,029069580
75	0,032343731	0,032299882
67,5	0,035578040	0,035528684
60	0,038812114	0,038754165
52,5	0,042045136	0,041995169
45	0,045273412	0,045274181
37,5	0,048480330	0,048400037
30	0,051591169	0,051094476
22,5	0,054270115	0,055282902
15	0,055008963	0,064374560
7,5	0,047038696	0,058539332
0	0	0

Tabella 6.4 Validazione del modello: andamento degli spostamenti radiali lungo l'altezza.

Provino 4

$$\alpha = 0,2668;$$

$$\beta = 1,2800;$$

$$\lambda = 23,5463 \text{ cm} < H;$$

può quindi essere trattato come un tubo alto

$$C_{3_incastrato} = -0,0873;$$

$$C_{4_incastrato} = C_{4_appoggiato} = -0,0889;$$

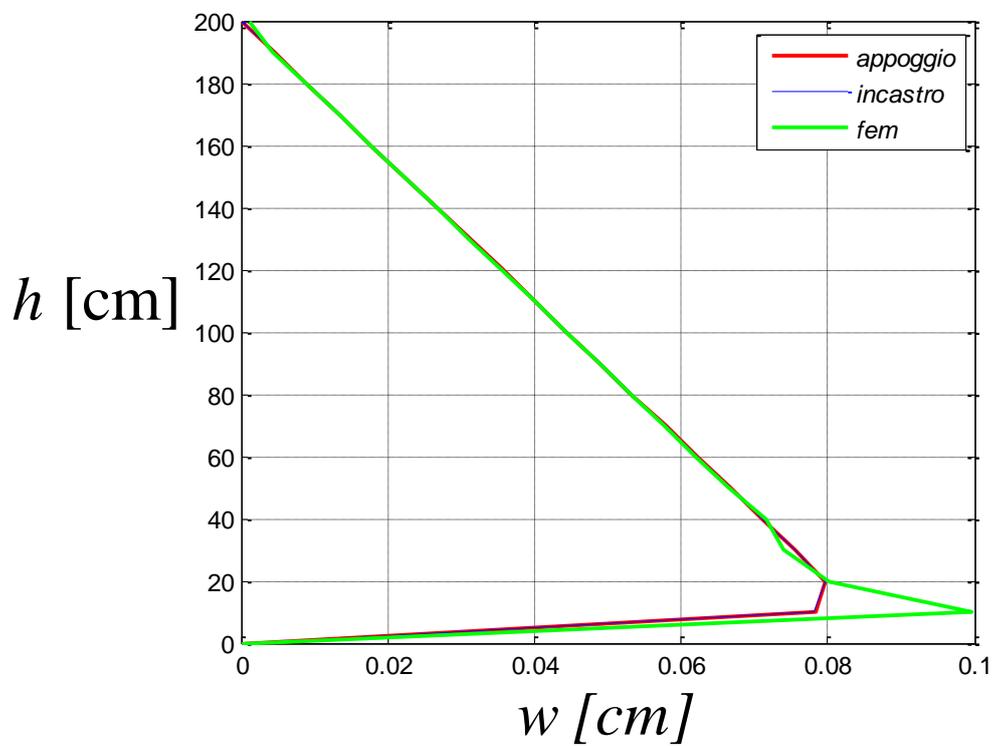


Figura 6.97 Confronto tra gli spostamenti radiali.

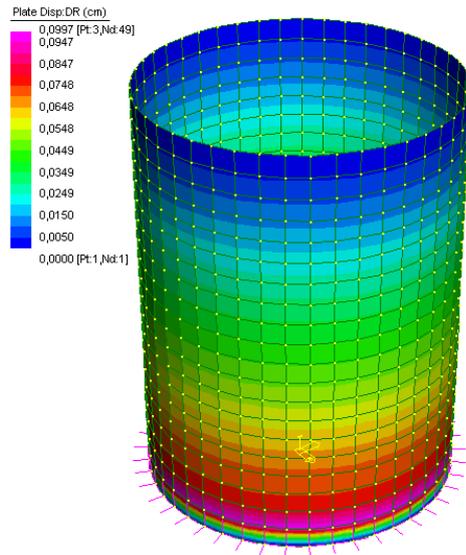


Figura 6.96 Spostamenti radiali

x [m]	w [cm]	w [cm] F.E.M.
200	0,000000000	0,001294933
190	0,004447266	0,004211576
180	0,008894531	0,008868778
170	0,013341797	0,013329933
160	0,017789063	0,017736536
150	0,022236328	0,022184687
140	0,026683594	0,026618196
130	0,031130859	0,031054994
120	0,035578125	0,035491510
110	0,040025391	0,039927920
100	0,044472656	0,044363993
90	0,048919922	0,048802040
80	0,053367187	0,053234090
70	0,057814452	0,057675368
60	0,062261709	0,062137512
50	0,066708845	0,066373366
40	0,071154227	0,071612827
30	0,075574125	0,074005355
20	0,079624729	0,080135815
10	0,078335433	0,099699328
0	0	0

Tabella 6.5 Validazione del modello: andamento degli spostamenti radiali lungo l'altezza.

Provino 5

$$\alpha = 0,4003;$$

$$\beta = 21,1200;$$

$$\lambda = 15,6975 \text{ cm} < H;$$

può quindi essere trattato come un tubo alto

$$C_{3_incastrato} = -0,0020;$$

$$C_{4_incastrato} = C_{4_appoggiato} = -0,0020;$$

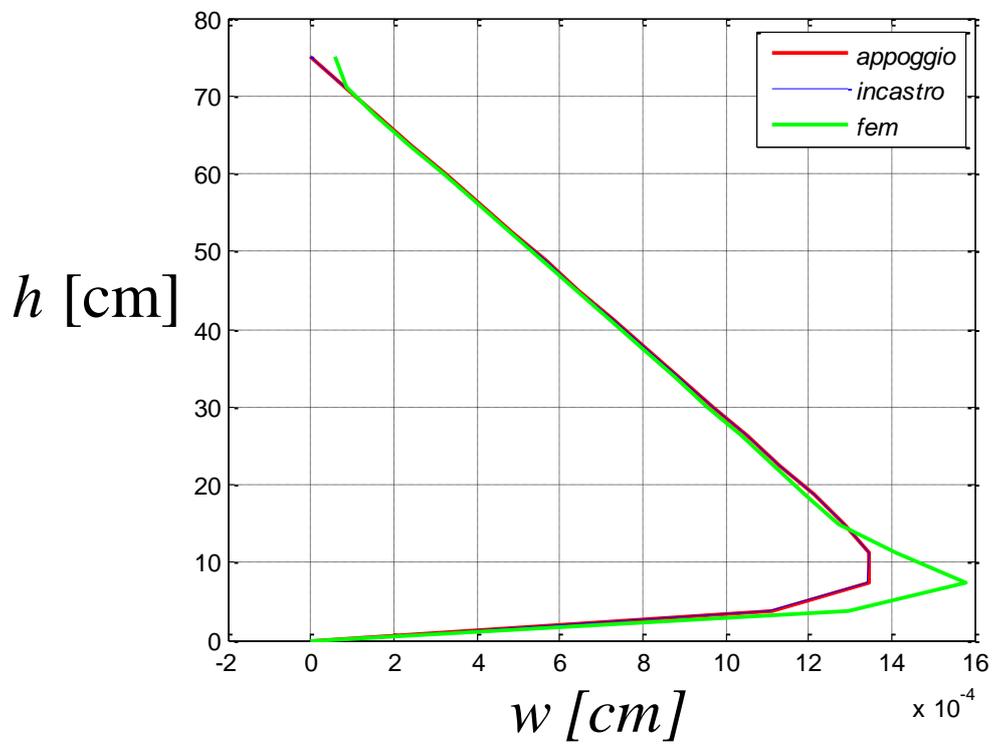


Figura 6.98 Confronto tra gli spostamenti radiali.

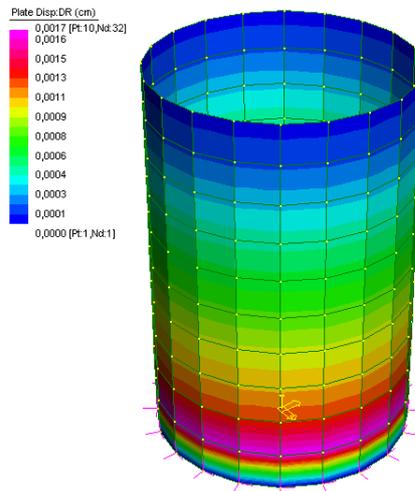


Figura 6.99 Spostamenti radiali

x [m]	w [cm]	w [cm] F.E.M.
75	0,000000000	0,000056637
71,25	0,000080859	0,000086745
67,5	0,000161719	0,000153651
63,75	0,000242578	0,000237667
60	0,000323437	0,000319744
56,25	0,000404297	0,000399586
52,5	0,000485156	0,000479204
48,75	0,000566016	0,000559023
45	0,000646875	0,000638906
41,25	0,000727734	0,000718774
37,5	0,000808591	0,000798613
33,75	0,000889444	0,000878477
30	0,000970278	0,000958565
26,25	0,001051040	0,001038827
22,5	0,001131523	0,001117363
18,75	0,001210939	0,001191186
15	0,001286257	0,001272206
11,25	0,001345867	0,001409489
7,5	0,001345270	0,001581129
3,75	0,001114061	0,001297519
0	0	0

Tabella 6.6 Validazione del modello: andamento degli spostamenti radiali lungo l'altezza.

Anche per quanto riguarda il raffronto effettuato per i provini in plexiglass sono valide le stesse considerazioni effettuate per i provini in acciaio ed anche gli scostamenti rimangono nell'ordine di 10^{-3} cm e pertanto trascurabili.

La conclusione, anche per questi provini, è che i risultati analitici sono validati dal calcolo analitico.

6.3 Possibile realizzazione dei provini

Occorre pensare come operativamente si dovranno realizzare i provini avendo attenzione alla metodologia di acquisizione dei risultati.

Al momento attuale si sono valutate tre strade:

- 1 Misurazione delle pressioni agenti;
- 2 Misurazione delle deformazioni;
- 3 Metodo delle bande.

Per quanto riguarda la misurazione delle pressioni agenti si pongono alcuni problemi di carattere operativo che si vanno ad illustrare.

Le pressioni agenti sono fortemente dipendenti dall'attrito tra il materiale granulare e la superficie con cui si trova a contatto: andando a porre sulla parete dei trasduttori di dimensioni finite si creano dei punti di discontinuità sia per quanto riguarda meramente il coefficiente d'attrito sia perché varia la geometria con cui viene a contatto il materiale granulare.

Una soluzione pensata è quella di realizzare dei fori sulla parete del silos ove porre la strumentazione di misura in modo che non vari la geometria dell'interfaccia con l'insilato.

Un'altra soluzione meno "invasiva" si poggia sull'utilizzo di un sistema sviluppato dalla ditta Tekscan. Tale opzione non prevede solo il sensore ma anche il software a suo supporto.

Il punto di forza di del sistema della Tekscan risiede nel fatto che i sensori forniti hanno uno spessore di circa 0,2 mm ed hanno la possibilità di misurare pressioni molto ridotte.

Un'altra soluzione è rappresentata dalla terza via sopra elencata e prende spunto dalle shear box a disposizione dell'EQUALS; tale strada verrà esposta in maniera più estesa nel paragrafo seguente.

Per quanto concerne la misura delle deformazioni si ha il problema della bassa entità di quest'ultime che, considerata la precisione di misurazione del laboratorio ($2\mu\epsilon$), si avrebbe il rischio di non coglierle.

Come accennato in precedenza per sopperire a tale bisogna si pensa di fare le prove su provini in plexiglass.

6.3.1 METODO DELLE BANDE

Come innanzi accennato per l'interpretazione della prova e dei suoi risultati si è pensato ad un ulteriore metodologia.

L'idea alla base, prendente spunto da una shear box, è quella di costruire il modello come l'unione di tanti anelli posti uno sull'altro e porre a lato due profilati metallici sui quali installare dei trasduttori, uno per ogni fascia creata.

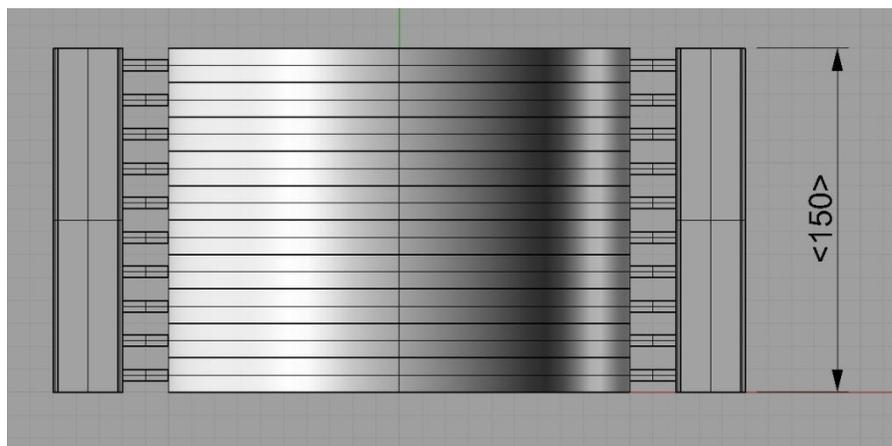


Figura 6.101 Vista frontale dell'apparecchiatura

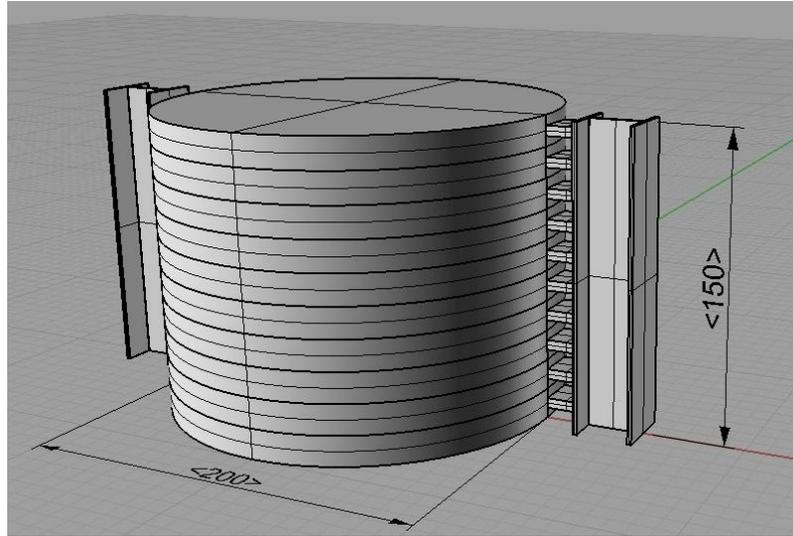


Figura 6.102 Vista assonometrica dell'apparecchiatura

In tal modo, potendo scorrere reciprocamente, le varie bande andrebbero ad agire sulle celle di misurazione fornendo così direttamente un valore di forza da confrontare con la risultante delle pressioni.

Un pregio di questa metodologia è quello di poter tarare, agendo sulla geometria del profilato e del silos, la rigidità del sistema per renderla simile a quella di un silos reale.

Si procede quindi alla valutazione analitica degli andamenti di queste risultanti sia per la teoria proposta che per l'Eurocodice in modo da poter confrontare facilmente i risultati sperimentali.

Valutazione risultanti

Trombetti et al.

Ad ogni quota z è associabile la seguente risultante delle forze:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} (\Delta p_h \cdot \cos \vartheta + \tau_h \cdot \sin \vartheta) \cdot R \cdot d\vartheta \quad (6.28)$$

Essendo che :

$$\Delta p_h = \frac{a_g(z) \cdot \cos \vartheta \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \quad (6.29)$$

e

$$\tau_h = \left[\frac{a_g(z) \cdot \sin \vartheta}{(1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \cdot \mu \quad (6.30)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \cdot \cos^2 \vartheta + \frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \cdot \sin^2 \vartheta \right) \cdot R \cdot d\vartheta \\ f(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \cdot R \cdot d\vartheta \\ f(z) &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dal momento che:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - v \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot \cos \vartheta} \right] d\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}} \quad (6.32)$$

si ottiene:

$$f(z) = a_g(z) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}} \quad (6.33)$$

$$f(z) = 2\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \frac{a_g(z) \cdot z}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}} \quad (6.34)$$

Con tale formula si può facilmente ottenere l'andamento delle forze lungo l'altezza con un'accelerazione comunque variabile.

Considerando i due casi di accelerazione già considerati nella presente tesi

- i. $a_g(z) = a_{g0}$;
- ii. $a_g(z) = a_{g0} + a_{g1}(H - z)$:

si può esplicitare la (6.34) come:

$$f(z) = a_{g0} \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{g0}^2}}; \quad (6.35)$$

$$f(z) = (a_{g0} + a_{g1}(H - z)) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z \cdot R \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H - z))^2}} \quad (6.36)$$

Avendo però un numero finito di trasduttori (uno per ogni banda) per poter ottenere un risultato immediatamente confrontabile con i risultati della prova occorrerebbe integrare la (6.34) su ogni fascia.

Poiché tale operazione potrebbe risultare di difficile soluzione si adottano due ipotesi semplificative:

- 1) andamento della $a_g(z)$ lineare lungo la fascia;
- 2) utilizzo del valor medio della $a_g(z)$ nella i -esima fascia.

Suddividendo quindi il silos in n bande, per la i -esima banda si può scrivere:

$$F_i = \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} \frac{2\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_g(z) \cdot z}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_g(z)^2}} \cdot dz$$

$$F_i = \frac{2\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_{gm,i}}{\sqrt{1 - v^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} z \cdot dz \quad (6.37)$$

avendo posto:

$$\Delta z = \frac{H}{n} \quad (6.38)$$

$$a_{gm,i} = \frac{a_g(i \cdot \Delta z) + a_g((i-1) \cdot \Delta z)}{2} \quad (6.39)$$

dove:

- Δz è l'altezza di ogni banda;
- H l'altezza totale del silos;
- $a_{gm,i}$ l'accelerazione media nella i -esima banda;
- $a_g(i \cdot \Delta z)$ l'accelerazione valutata alla fine della banda;
- $a_g((i-1) \cdot \Delta z)$ l'accelerazione valutata all'inizio della banda.

Con tali posizioni si ottiene:

$$F_i = \frac{\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_{gm,i}}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \cdot (i^2 \cdot \Delta z^2 - (i-1)^2 \cdot \Delta z^2) \quad (6.40)$$

$$F_i = \frac{\pi \cdot R \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot a_{gm,i}}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \cdot \Delta z^2 \cdot (2i-1)$$

$$F_i = a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R \cdot \Delta z^2 \cdot (2i-1) \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{\sqrt{1 - \nu^2 \cdot \mu^2 \cdot a_{gm,i}^2}} \right) \quad (6.41)$$

Nel caso di accelerazione costante per tutta l'altezza del silos la (6.41) corrisponde all'integrazione esatta della funzione.

Eurocodice

Ad ogni quota z è associabile la seguente risultante delle forze:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} (\Delta p_{h,s0} \cdot \cos \vartheta) \cdot R \cdot d\vartheta \quad (6.42)$$

Essendo che :

$$\Delta_{ph,s0} = a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \quad (6.43)$$

dove:

$$r_s^* = \min\left(h_b, \frac{d_c}{2}\right)$$

hb: è l'altezza dell'insilato;

dc: è la dimensione del silos parallela alla componente orizzontale dell'azione sismica;

x: la distanza verticale dal fondo piano.

si ottiene:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{2\pi} \left[a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \right] \cdot \cos \vartheta \cdot R \cdot d\vartheta \\ f(z) &= a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot R \cdot \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \cdot d\vartheta \end{aligned} \quad (6.44)$$

La risultante di piano la si può quindi scrivere come:

$$f(z) = 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot R \quad (6.45)$$

A seconda delle caratteristiche geometriche del silos e della quota z si avrà:

$$f(z) = \begin{cases} 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot R^2 & \text{o } 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot R \cdot H \\ 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot R \cdot 3x \end{cases} \quad (6.46)$$

Anche in questo caso è possibile ottenere l'andamento delle forze lungo l'altezza con un'accelerazione comunque variabile.

Andando comunque ad esplicitare per le due casistiche prese in esame:

$$\begin{aligned} f(z) &= \begin{cases} 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R^2 & \text{o } 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot H \\ 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot 3x \end{cases} \\ f(z) &= \begin{cases} 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R^2 & \text{o } 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R \cdot H \\ 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R \cdot 3x \end{cases} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Andando ad integrare le (6.47) per i due casi di accelerazione considerati si ottiene rispettivamente:

$$F_i = \begin{cases} 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \Delta z & \text{o } 4 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot H \cdot \Delta z \\ 12 \cdot a_{g0} \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z \cdot \left[H - \frac{\Delta z}{2} \cdot (2i-1) \right] \end{cases} \quad (6.48)$$

$$F_i = \begin{cases} 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \Delta z & \text{o } 4 \cdot (a_{g0} + a_{g1}(H-z)) \cdot \gamma \cdot R \cdot H \cdot \Delta z \\ 12 \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z \cdot \left[H(a_{g0} + a_{g1}H) - \Delta z \cdot (2i-1) \left(\frac{a_{g0}}{2} + a_{g1}H \right) + \Delta z^2 \left(\frac{a_{g1}}{3} + i^2 a_{g1} - i a_{g1} \right) \right] \end{cases} \quad (6.49)$$

Per una semplicità di calcolo, per poter integrare su ogni fascia considerando un'accelerazione qualsiasi, si ricorre alle tre ipotesi precedentemente illustrate.

Suddividendo quindi il silos in n bande, per la i-esima banda si può scrivere:

$$F_i = \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} 4 \cdot a_g(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x) \cdot R \cdot dz$$

$$F_i = 4 \cdot \gamma \cdot a_{gm,i} \cdot R \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} \min(r_s^*; 3x) \cdot dz \quad (6.50)$$

avendo posto:

$$\Delta z = \frac{H}{n} \quad (6.51)$$

$$a_{gm,i} = \frac{a_g(i \cdot \Delta z) + a_g((i-1) \cdot \Delta z)}{2} \quad (6.52)$$

Diversificando le varie possibilità poste in essere dall'eurocodice:

$$F_i = \begin{cases} 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \Delta z & \text{o } 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot H \cdot \Delta z \\ 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} 3x \cdot dz \end{cases} \quad (6.53)$$

Visto che la coordinata x è duale alla z , la terza equazione della (6.54) assume la forma:

$$F_i = 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \int_{(i-1)\Delta z}^{i\Delta z} 3 \cdot (H - z) dz$$

$$F_i = 12 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \left[H \cdot \Delta z - \frac{\Delta z^2}{2} \cdot (2i - 1) \right] \quad (6.55)$$

$$F_i = 12 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z \cdot \left[H - \frac{\Delta z}{2} \cdot (2i - 1) \right] \quad (6.56)$$

In maniera equivalente si potrebbe operare andando ad integrare in x cambiando l'indice di integrazione:

$$F_k = 4 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \int_{(k-1)\Delta z}^{k\Delta z} 3 \cdot x \cdot dx$$

$$F_k = 6 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \left(k^2 \cdot \Delta z^2 - (k-1)^2 \cdot \Delta z^2 \right) \quad (6.57)$$

$$F_k = 6 \cdot a_{gm,i} \cdot \gamma \cdot R \cdot \Delta z^2 \cdot (2k - 1) \quad (6.58)$$

Dove k indica la numerazione delle bande a partire dal basso, la relazione che lega la k alla i è la seguente:

$$k = n - i + 1 \quad (6.59)$$

Sostituendo la (6.59) nella (6.58) e svolgendo il calcolo si ottiene nuovamente la (6.56).

Si riportano i grafici di tali forze per i provini ipotizzati, ognuno suddiviso in 10 fasce.

Acciaio

Provino 1

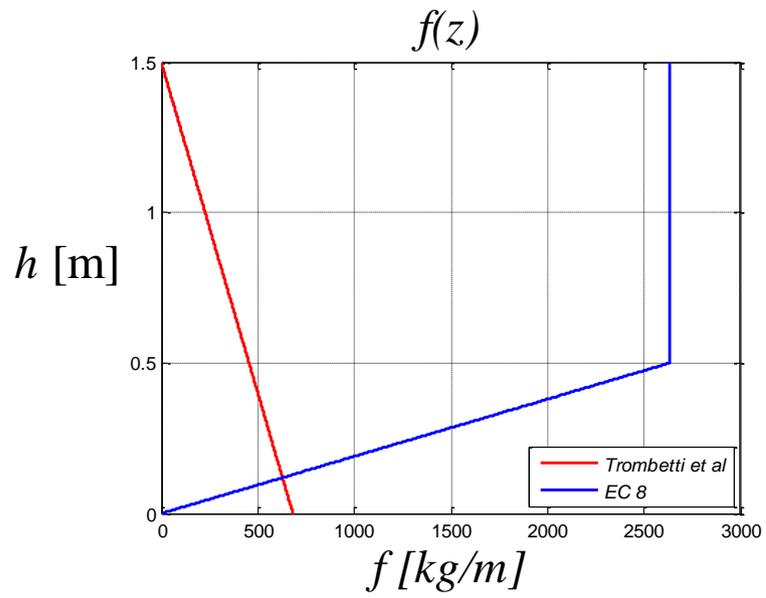


Figura 6.102 Risultanti di piano

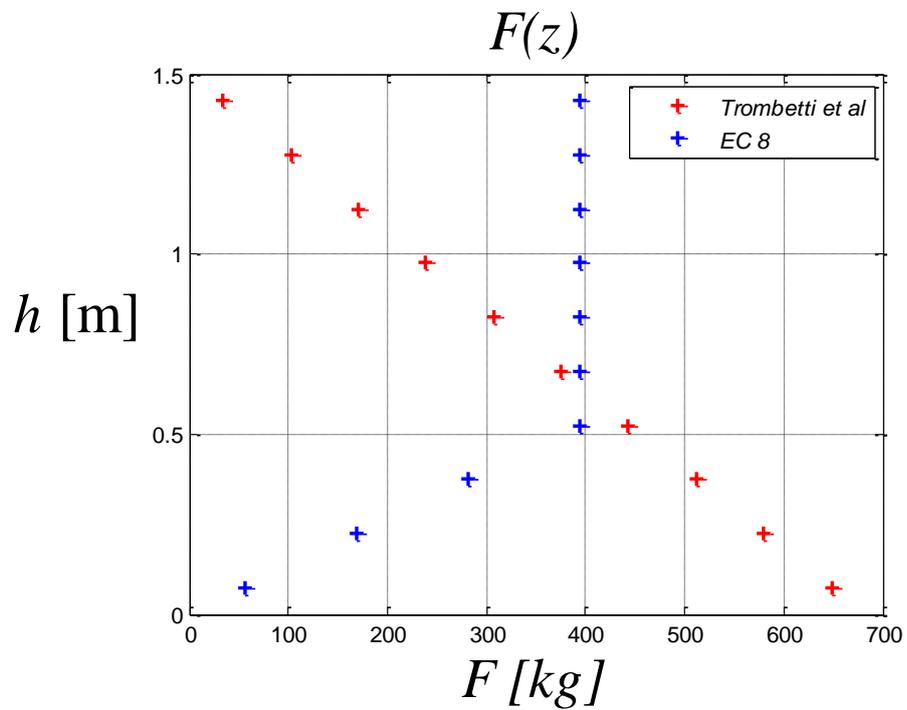


Figura 6.102 Risultanti di banda

Provino 2

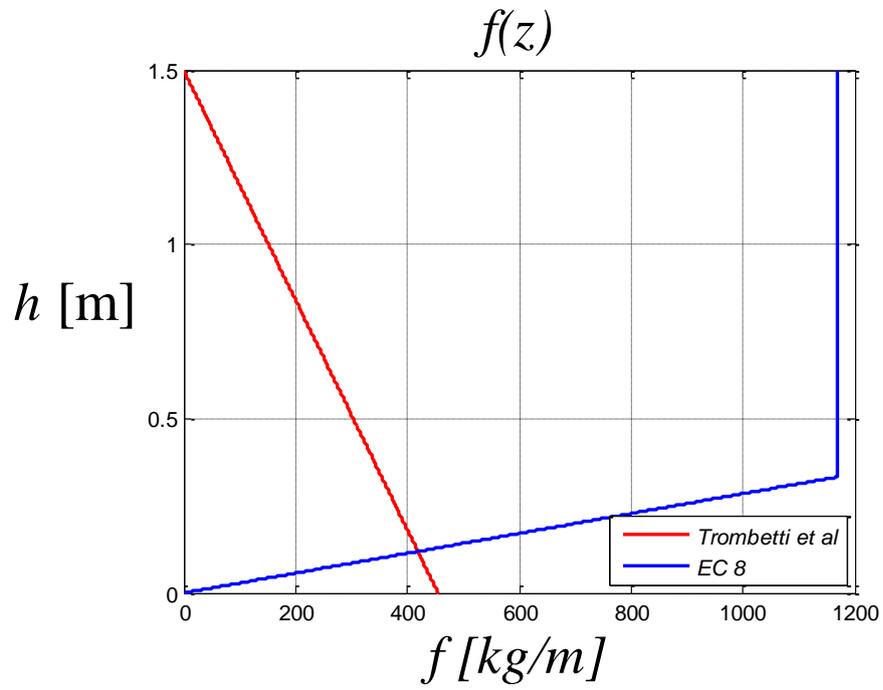


Figura 6.103 Risultanti di piano

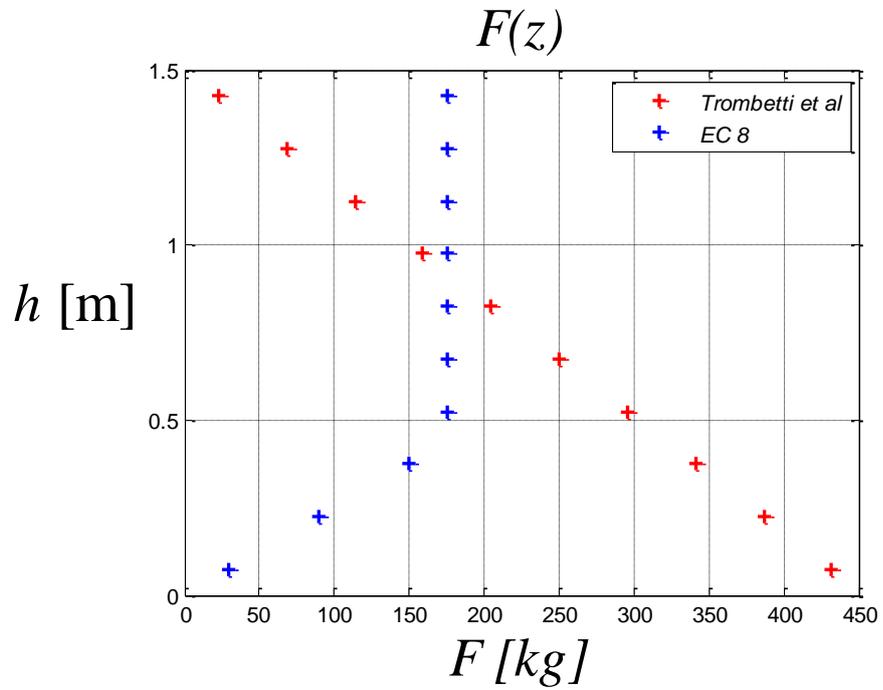


Figura 6.104 Risultanti di banda

Provino 3

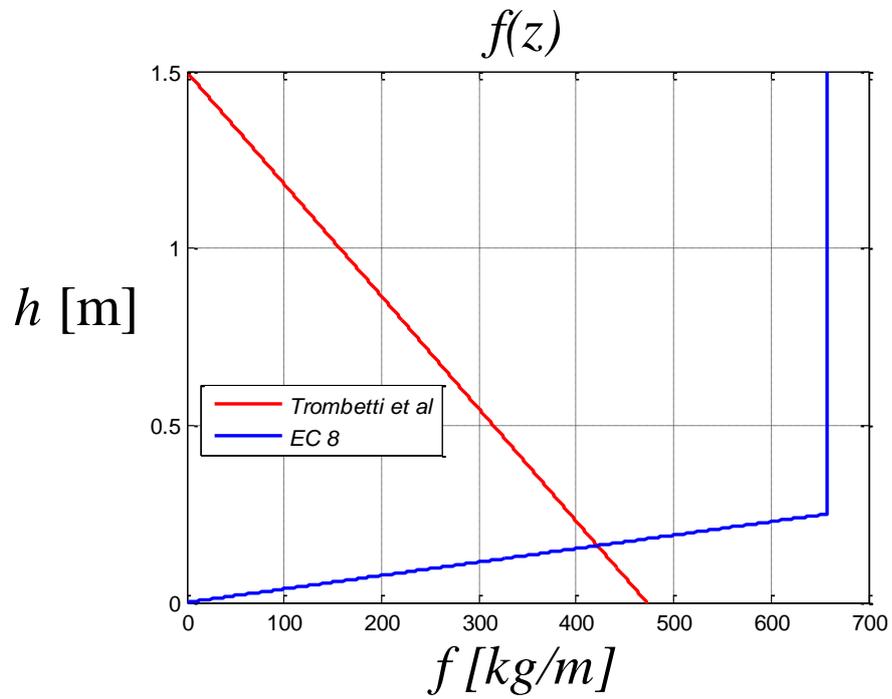


Figura 6.105 Risultanti di piano

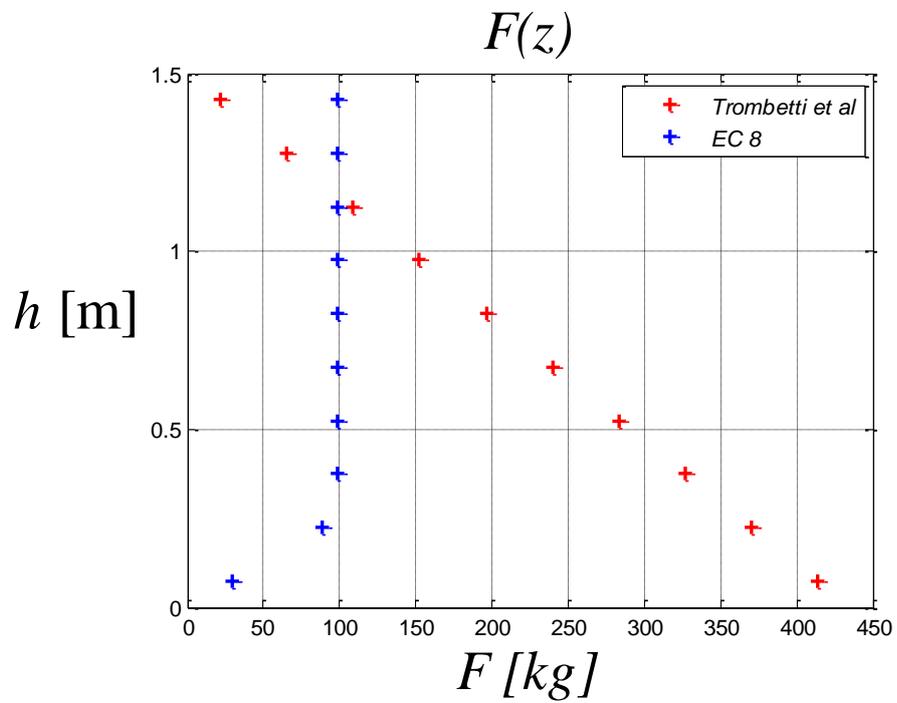


Figura 6.106 Risultanti di banda

Come si può notare dalle figure 6.102 6.104 6.106 le risultanti per ogni fascia sono fortemente influenzate dalla snellezza del provino come d'altronde ci si aspettava

Plexiglass

Provino 1

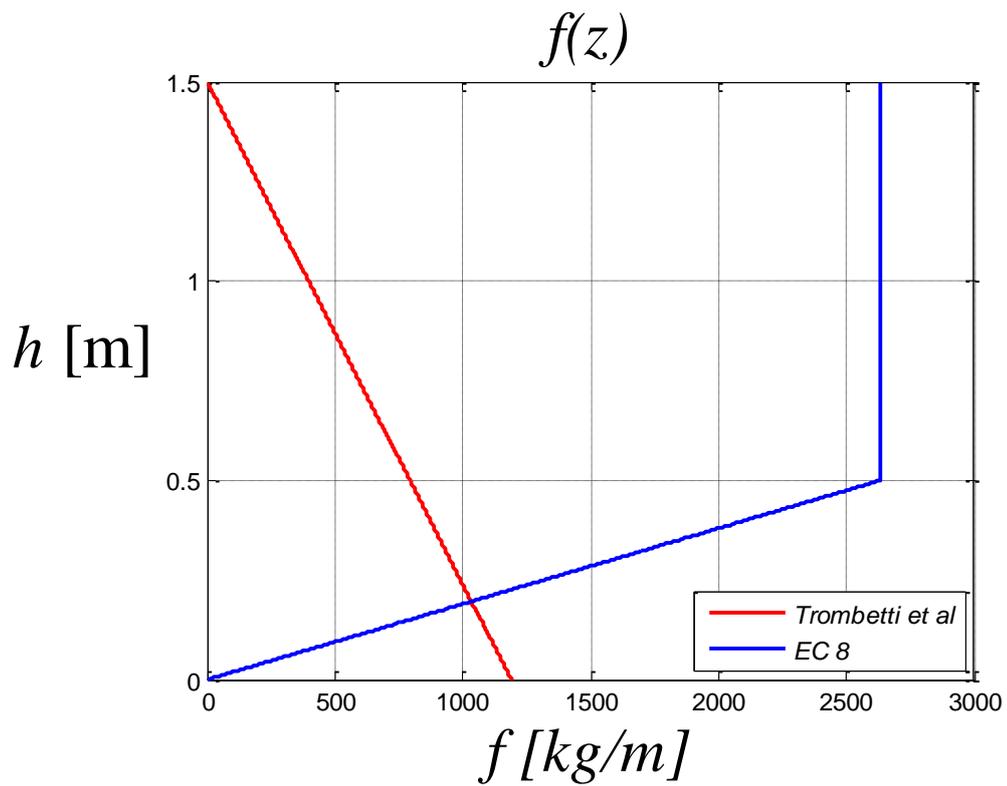


Figura 6.107. Risultanti di piano

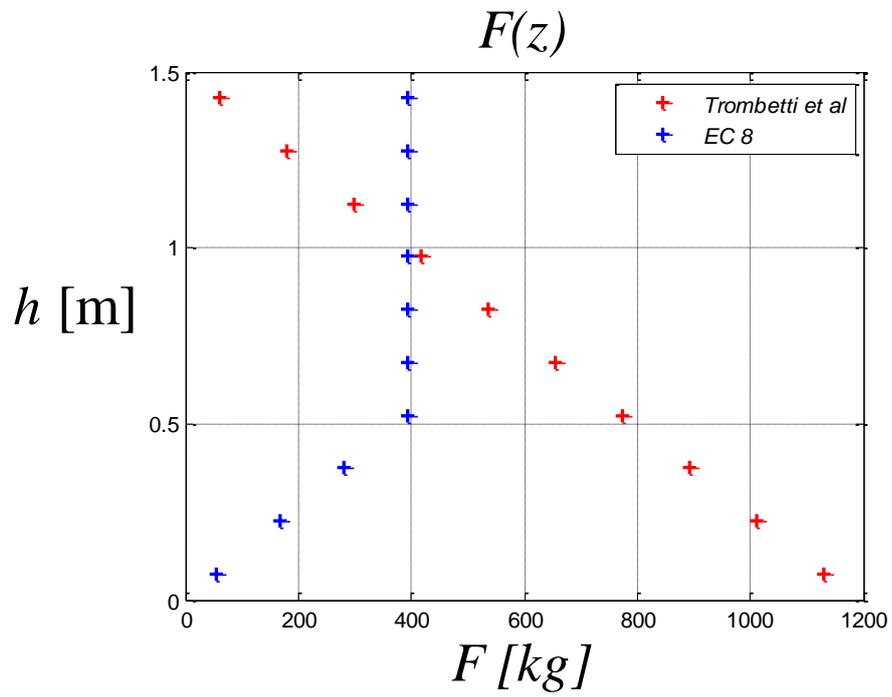


Figura 6.108 Risultanti di banda

Provino 2

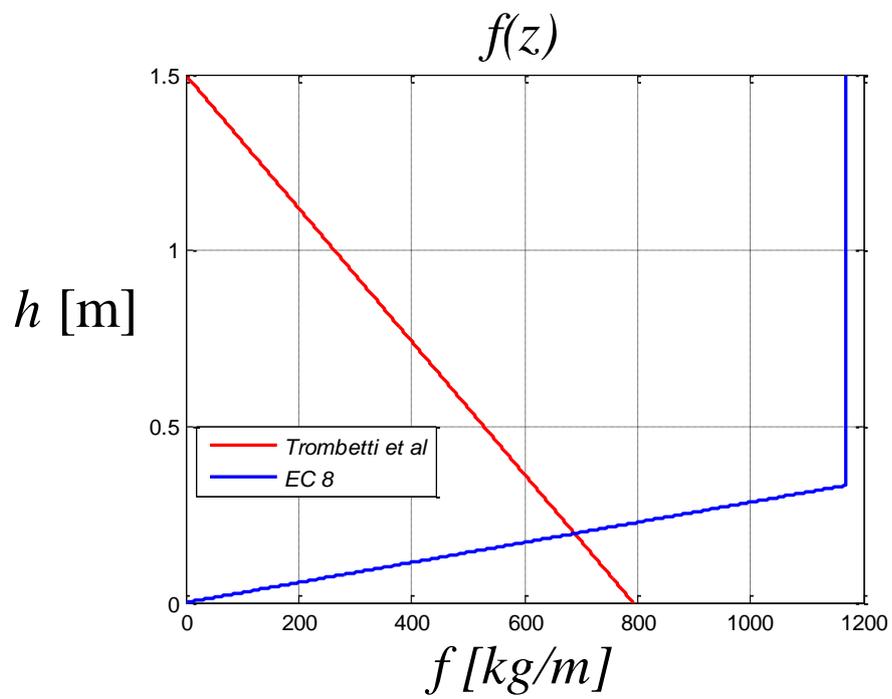


Figura 6.109 Risultanti di piano

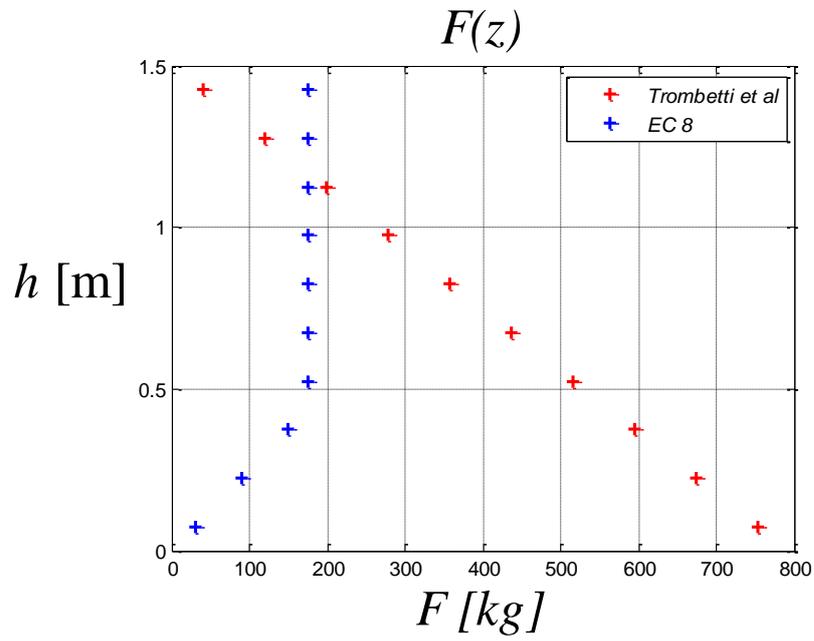


Figura 6.110 Risultanti di banda

Provino 3

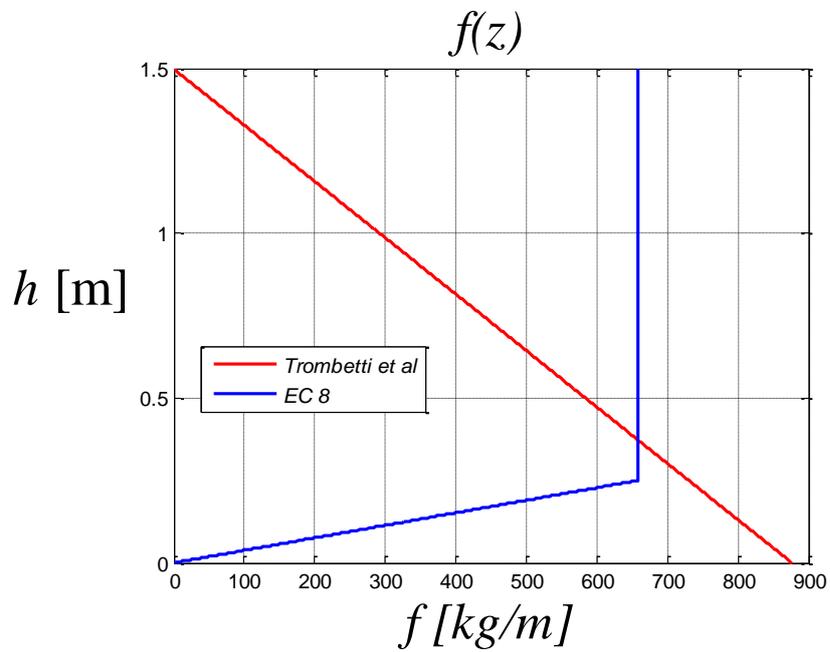


Figura 6.111 Risultanti di piano

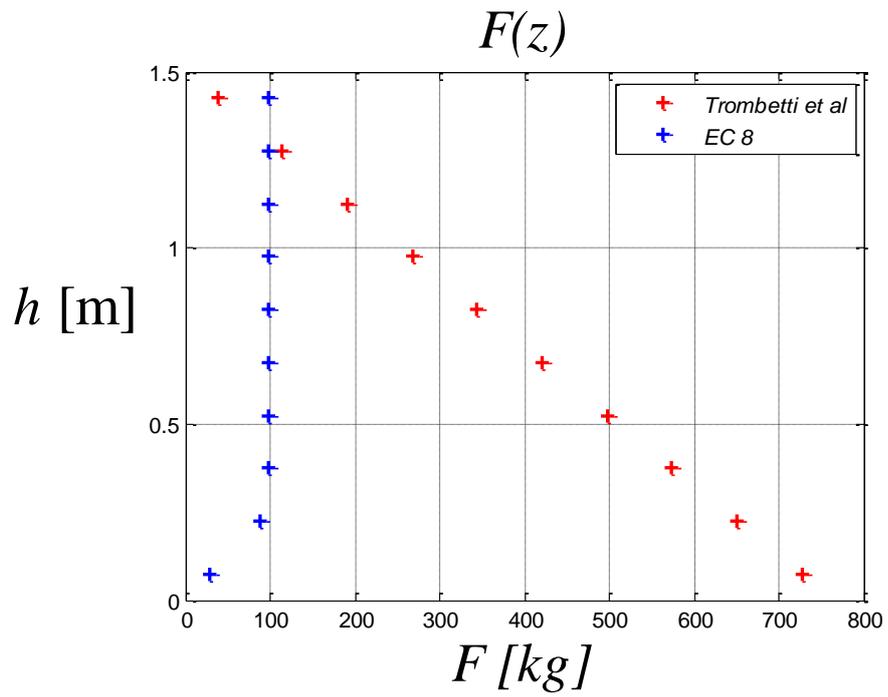


Figura 6.112 Risultanti di banda

Provino 4

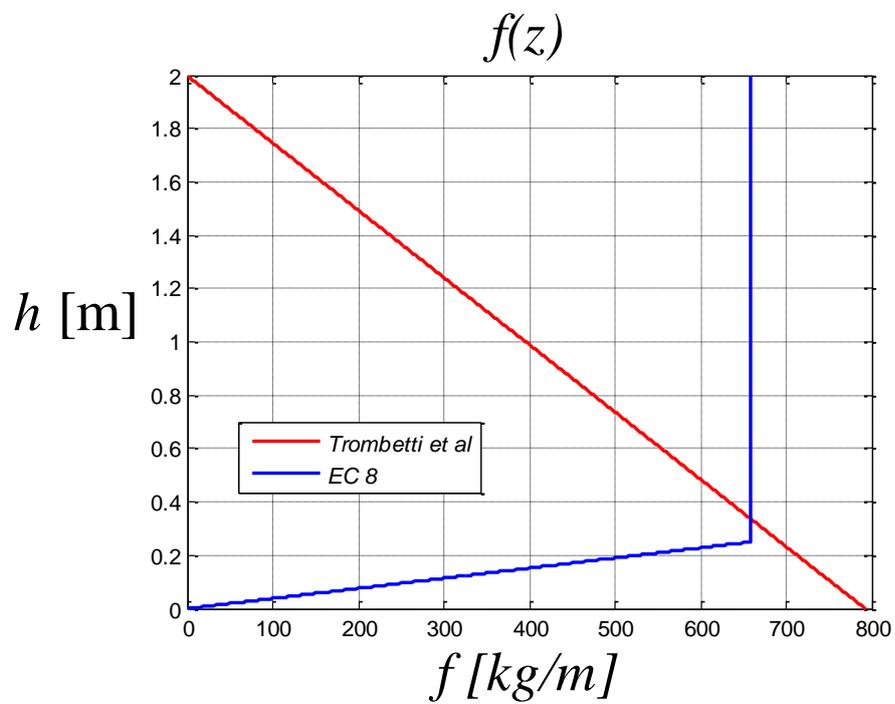


Figura 6.113 Risultanti di piano

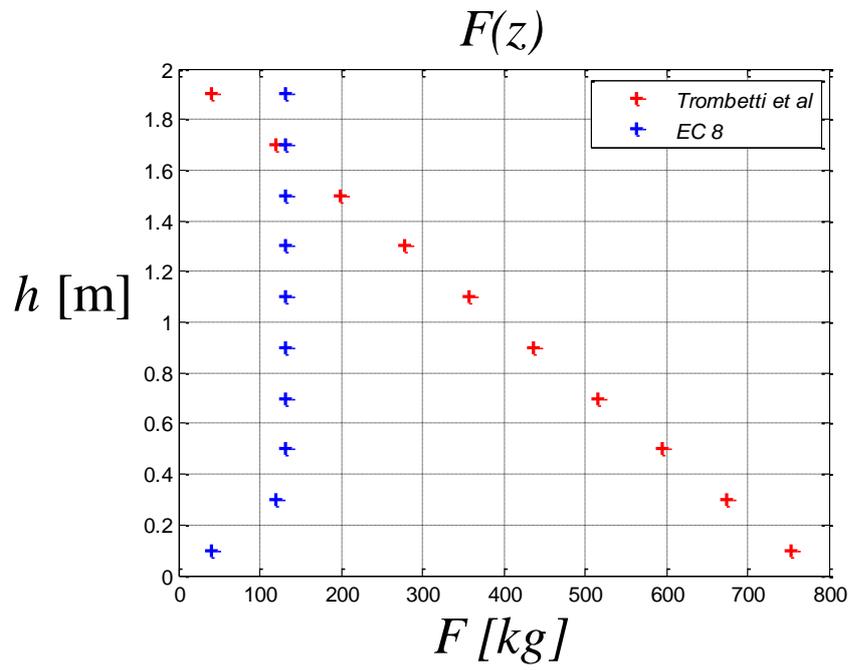


Figura 6.114 Risultanti di banda

Provino 5

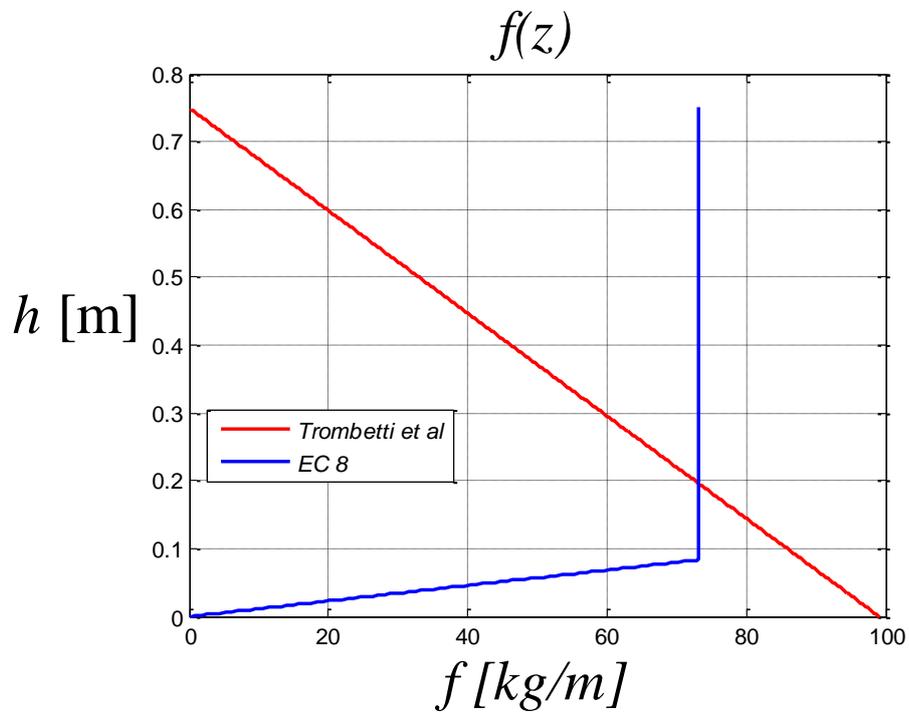


Figura 6.115 Risultanti di piano

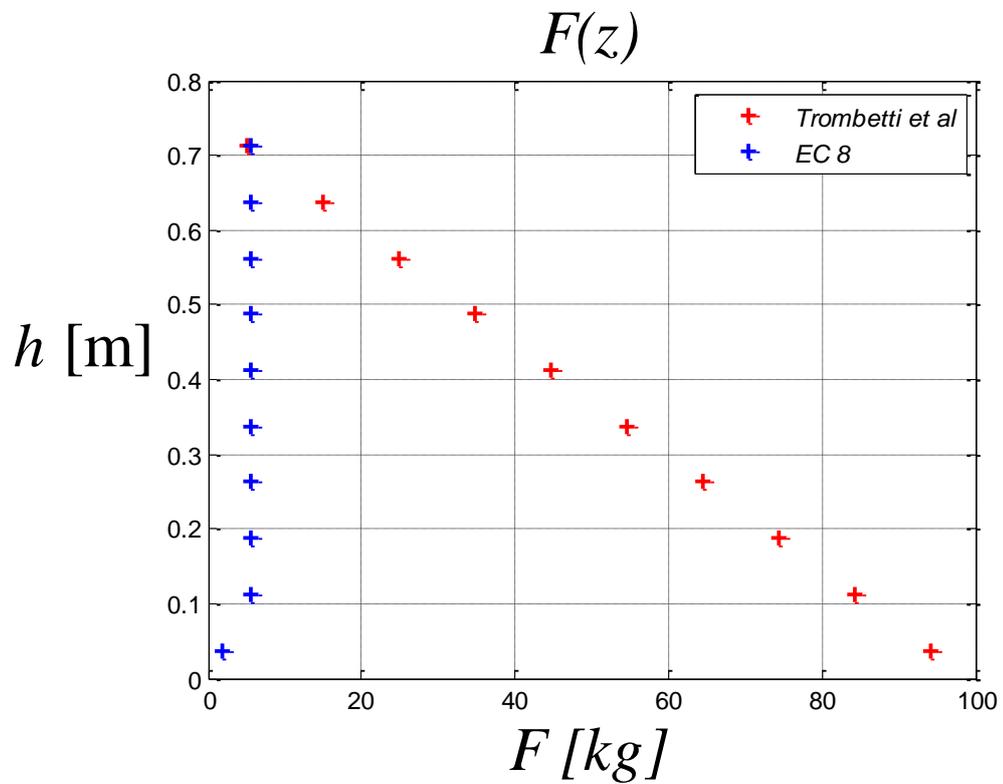


Figura 6.116 Risultanti di banda

Quello che si può osservare dalle figure ottenute in questa sezione sebbene il plexiglass offra maggior visibilità alle deformazioni, l'aver un coefficiente d'attrito maggiore rispetto a quello dell'acciaio fa in modo che siano minori le risultanti di ogni banda valutate con la procedura dell'Eurocodice.

7 CONCLUSIONI

7.1 Analisi condotte

Le analisi qui riportate:

1. sono state sviluppate simulando il sisma con una accelerazione orizzontale ed una accelerazione verticale costanti nel tempo (non si sono svolte analisi dinamiche di tipo time-history);

2. per mezzo di semplici considerazioni di equilibrio in regime dinamico con riferimento alle accelerazioni sopra riportate (ma che tengono debitamente conto delle specifiche azioni mutue che nascono nei grani insilati) pervengono alla suddivisione del materiale insilato in tre diverse porzioni in funzione dell'interazione con il contenitore.

Si identificano così:

- a. due porzioni che spingono (con diverse modalità) sulle pareti del silos
- b. una porzione che non spinge sulle pareti del silos

3. vengono sintetizzate in una metodologia di progetto che consente di valutare le azioni orizzontali sulle pareti del silos a partire dal calcolo (attraverso una semplice formulazione analitica) di opportune masse efficaci (inferiori sotto certe condizioni alla massa totale del cereale contenuto nel silos) rappresentative dei granuli che vanno effettivamente a spingere sulle pareti laterali.

Dopo aver sviluppato e codificato la teoria vi è stato un iniziale approccio analitico atto ad individuare le geometrie ed i materiali che potessero massimizzare le differenze tra le pressioni agenti valutate con la procedura dell'Eurocodice e con la procedura Trombetti *et al.*

Una volta individuate le possibili geometrie si è passati ad eseguire delle analisi agli elementi finiti per ottenere maggiori informazioni possibili sul comportamento ideale del provino in modo che, una volta che sarà eseguita la

prova a Bristol, si potranno confrontare i risultati ottenuti con i risultati delle simulazioni.

Tali simulazioni eseguite al calcolatore sono state opportunamente accompagnate da una validazione analitica dei risultati che ha confermato la bontà delle analisi e del comportamento fisico stimato.

7.2 Risultati ottenuti

I risultati ottenuti hanno confermato quanto già si ipotizzava inizialmente: la procedura degli Eurocodici fornisce buoni risultati per silos snelli mentre rischia di essere molto approssimativa ed eccessivamente conservativa per i silos tozzi, ciò riguarda soprattutto il comportamento sotto sollecitazione sismica in quanto è verosimile una riduzione della massa partecipante.

Al momento attuale questi risultati sono frutto soltanto delle ipotesi di comportamento poste alla base delle due teorie, per una conferma di carattere sperimentale occorrerà attendere i risultati delle prove sebbene una conferma in questa direzione ci sia già.

Si tratta di una ricerca svolta da Holler e Meskouris i quali hanno effettuato simulazioni numeriche di materiale granulare insilato sottoposto a eccitazione dinamica ed effettuato una validazione sperimentale su piastra vibrante (“Granular Material Silos under Dynamic Excitation: Numerical Simulation and Experimental Validation” Holler e Meskouris, 2006).

Nelle conclusioni si può leggere:

“the provisions given in the Eurocode yield good results for the slender silos, while for squat silos the results were too conservative.

It follows that the Eurocode provisions for slender silos are quite good while for squat silos a reduction of the active mass assumed would be in order (Holler e Meskouris, 2006)”.

Tale ricerca però non fornisce alla base una teoria che permetta la valutazione degli effetti del sisma.

7.3 Sviluppi futuri

Gli sviluppi che ora attendono questa ricerca sono di due categorie temporalmente sequenziali:

- 1 precedente alla prova;
- 2 seguente alla prova.

A riguardo della prima categoria gli sviluppi per ora programmati sono:

- portare a completezza il metodo delle bande andando a parametrizzare opportunamente il metodo in modo che, dato un silos reale, il modello possa fornire la stessa rigidità;
- definire come vada, a livello esecutivo, realizzato il modello, con le apparecchiature di acquisizione dati, del metodo delle bande;
- riuscire a modellizzare il comportamento del materiale granulare in modo da ricavarne una teoria che meglio approssimi la realtà e che rappresenti, nel modo più veritiero, l'effettivo comportamento sotto azione sismica;
- definire i particolari della prova.

Per quanto concerne il periodo posteriore alla prova occorrerà in un primo momento confrontare i dati ottenuti con le simulazioni eseguite e successivamente usare i dati per raffinare la teoria proposta per renderla sempre più aderente alla realtà.

BIBLIOGRAFIA

Normative

- [1] Decreto Ministeriale 14/01/2008: “Norme tecniche per le costruzioni”
- [2] Circolare 2/02/2009, n. 617 del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici
- [3] UNI EN 1991-4: Eurocodice 1. Azioni sulle strutture. Parte 4: Azioni su silos e serbatoi
- [4] UNI EN 1998-1: Eurocodice 8. Progettazione delle strutture per la resistenza sismica. Parte 1: Regole generali, azioni sismiche e regole per gli edifici
- [5] UNI EN 1998-4: Eurocodice 8. Progettazione delle strutture per la resistenza sismica. Parte 4: Silos, serbatoi e condotte

Libri di testo

- [6] Ghali A., (1979): “*Circular Storage Tanks and Silos*”, Taylor&Francis Group, London and New York.
- [7] Chopra, A.K., (1995): *Dynamics of Structures, Theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [8] Clough, R.W., Penzien, J., (1993): *Dynamics of Structures*, 2nd edition - McGraw-Hill International Editions, Civil Engineering Series, New York.
- [9] Pozzati P., (1992): “*Raccolta di scritti*”, Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Bologna.
- [10] Belluzzi O., (1941): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 1, Zanichelli, Bologna.
- [11] Belluzzi O., (1950): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 2, Zanichelli, Bologna.
- [12] Belluzzi O., (1961): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 3, Zanichelli, Bologna.
- [13] Belluzzi O., (1955): “*Scienza delle Costruzioni*” Vol. 4, Zanichelli, Bologna.

- [14] Brown C.J., Nielsen, Taylor&Francis, (1998): “*Silos, fundamentals of theory, behaviour and design*”, London and New York
- [15] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 1, UTET, Torino.
- [16] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 2*, UTET, Torino.
- [17] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 2**, UTET, Torino.
- [18] Pozzati, P., Ceccoli, C., (1972): “*Teoria e Tecnica delle Strutture*” Vol. 3*, UTET, Torino.
- [19] Viola E., (2010): “Teoria delle Strutture. Volume secondo: Gusci di rivoluzione”, Pitagora, Bologna.

Publicazioni scientifiche

- [20] Capellari A. (2010): “Analisi lineare e non lineare di silos spiralati in acciaio per il contenimento di materiali sciolti”, Bologna, Tesi di Laurea presso D.I.C.A.M..
- [21] Lenzi M. e Gambi A., (2005): “Strutture cilindriche soggette ad azioni orizzontali: un approccio unitario”, *ACMAR Report*, Ravenna.
- [22] Holler S. and Konstantin M., (2006): “Granular Material Silos under Dynamic Excitation: Numerical Simulation and Experimental Validation”, *Journal of structural engineering*, **Ottobre 2006**, 1573-1579.
- [23] Trombetti T., Silvestri S, Giada S., (2005): “Sviluppi analitici per la valutazione dell’azione indotta dai cereali su silos a fondo piano a seguito di input sismico”, D.I.S.T.A.R.T., Bologna.

APPENDICI

A SCHEDE RIASSUNTIVE DELLE PROCEDURE

Eurocode accurate procedure

STATIC CONDITIONS

The evaluation of the horizontal pressure in static conditions follows the Janssen's theory (§ 5.2 Eurocode 1 Part 4).

STEP 1

$$z_0 = \frac{1}{K\mu} \frac{A}{U}$$

where:

- A: plan cross-sectional area of the silos
- U: internal perimeter of the plan cross-section of the of the silos
- K: characteristic value of lateral pressure ratio =
 $K = a_K K_m = a_K \cdot 1.1 \cdot (1 - \sin \varphi_{im})$
- μ : characteristic value of coefficient of wall friction for a vertical wall

STEP 2

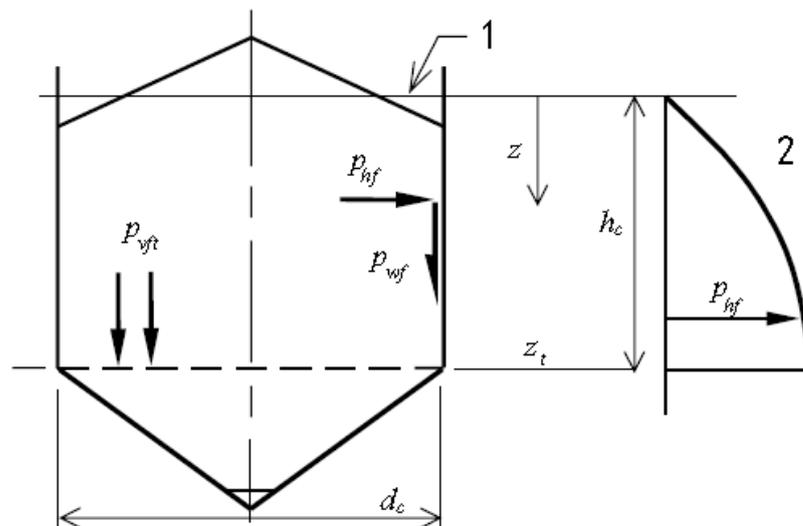
$$p_{h0} = \gamma \cdot K \cdot z_0$$

where:

- γ : is the characteristic value of the unit weight

STEP 3

$$p_{hf} = p_{h0} \cdot \left(1 - e^{-z/z_0}\right)$$



SEISMIC CONDITIONS

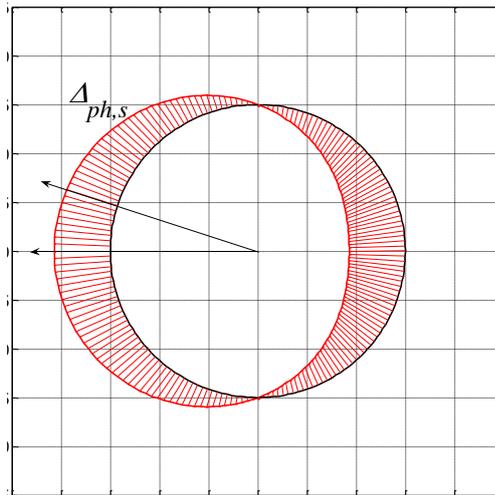
The seismic action may be represented through an additional normal horizontal pressure on the walls (§ 3.3 Eurocode 8 Part 4).

STEP 4

For circular silos: $\Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \cdot \cos \vartheta$

where:

- $\Delta_{ph,s0} = \alpha(z) \cdot \gamma \cdot \min(r_s^*; 3x)$ plan cross-sectional area of the silos
- ϑ : is the angle ($0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$) between the radial line to the point of interest on the wall and the direction of the horizontal component of the seismic action
- $\alpha(z)$: is the ratio of the response acceleration of the silos at vertical distance z from the equivalent surface of the stored contents, to the acceleration of gravity
- $r_s^* = \min\left(h_b, \frac{d_c}{2}\right)$
- h_b : is the overall height of the silos
- d_c : is the inside dimension of the silos parallel to the horizontal component of the seismic action
- x : vertical distance from a flat bottom or the apex of a conical or pyramidal hopper



For rectangular silos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{for leeward walls: } \Delta_{ph,s} = \Delta_{ph,s0} \\ \text{for windward walls: } \Delta_{ph,s} = -\Delta_{ph,s0} \\ \text{for parallel walls } \Delta_{ph,s} = 0 \end{array} \right.$

STEP 5

The total base shear and total base bending moment (at the silos foundation) can be assessed as follows:

For circular silos:

$$T = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \left(H - \frac{R}{6} \right)$$

$$M = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \left(H^2 - \frac{R^2}{27} \right)$$

For rectangular silos:

$$T = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H - \frac{A}{6} \right)$$

$$M = 2 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot A \cdot B \cdot \left(H^2 - \frac{A^2}{27} \right)$$

where:

- A: half-width of the base of the rectangular silos
- B: half-length of the base of the rectangular silos

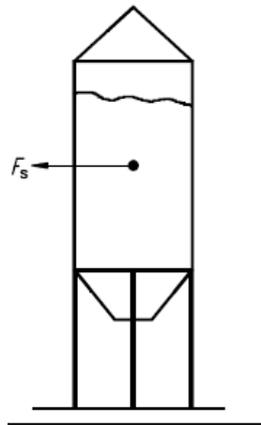
Eurocode simplified procedure

SEISMIC CONDITIONS

In a simplified way, the seismic action can be calculated:

- assuming that the particulate contents move together with the silos shell
- modelling them with their effective mass at their centre of gravity and its rotational inertia with respect to it.

The contents of the silos may be taken to have an effective mass equal to 80% of the total mass (§ 3.3 Eurocode 8 Part 4).



The base shear and base bending moment (at the silos foundation) can be assessed respectively as follows:

For circular silos:

$$T = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8$$
$$M = \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (\pi \cdot R^2 \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}$$

For rectangular silos:

$$T = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8$$
$$M = 4 \cdot \frac{a_g}{g} \cdot \gamma \cdot (A \cdot B \cdot H) \cdot 0.8 \cdot \frac{H}{2}$$

where:

- A: half-width of the base of the rectangular silos
- B: half-length of the base of the rectangular silos

Trombetti *et al.* procedure

According to this procedure, the portion of grain mass that interacts with the silos walls turns out to be lower than the total mass of the grain in the silos.

The seismic action may be represented through an additional normal horizontal pressure on the walls.

For circular silos:

$p_h = p_{h0}^* + \Delta p_h = \left[\frac{1}{\nu(1 - \nu \cdot a_g \cos \theta \cdot \mu)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z$	total horizontal pressure
$p_{h0}^* = (1 + a_{g\text{-vert}}) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z$	static pressure (considering also vertical seismic action)
$\Delta p_h = a_g \cdot \cos \vartheta \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z$	additional horizontal pressure due to horizontal seismic action
$\tau_h = \left[\frac{a_g \cdot \sin \vartheta}{1 - \nu \cdot a_g \cdot \cos \vartheta \cdot \mu} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot \mu \cdot z$	horizontal tangential stresses
$T = a_g \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R \cdot H^2 \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$	total base shear which arrives to the foundation through the walls
$M = \frac{1}{3} \cdot a_g \cdot \gamma \cdot \pi \cdot R \cdot H^3 \cdot \left(\frac{\lambda \cdot \mu}{1 - \nu^2 \cdot a_g^2 \cdot \mu^2} \right)$	total base bending moment which arrives to the foundation through the walls

where:

- $\beta = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \mu}{(1 - \nu \cdot a_g \cdot \cos \theta \cdot \mu)}$
- ϑ : is the angle ($0^\circ \leq \vartheta \leq 360^\circ$) between the radial line to the point of interest on the wall and the direction of the horizontal component of the seismic action
- λ : characteristic value of lateral pressure ratio
- μ : characteristic value of coefficient of wall friction for a vertical wall
- a_g : is the ratio of the response acceleration of the silos at vertical distance z from the equivalent surface of the stored contents, to the acceleration of gravity
- $\nu = \frac{1}{1 + a_{g_vert}}$
- a_{g_vert} : is the vertical component of seismic acceleration

For rectangular silos:

$$p_h = p_{h0}^* + \Delta p_h = \left[\frac{1}{\nu (1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu)} \right] \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \quad \text{total horizontal}$$

pressure

$$p_{h0}^* = (1 + a_{g_vert}) \cdot \gamma \cdot \lambda \cdot z \quad \text{static pressure}$$

(considering also vertical seismic action)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{for leeward walls:} & \Delta_{ph} = a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \\ \text{for windward walls:} & \Delta_{ph} = -a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \\ \text{for parallel walls} & \Delta_{ph} = 0 \end{array} \right. \quad \text{additional horizontal}$$

pressure due to horizontal seismic action

$$\tau_h = a_g \cdot \gamma \cdot \frac{\beta}{2} \cdot z \quad \text{horizontal tangential stresses}$$

$$T = a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^2$$

total base shear which
arrives to the
foundation through the
walls

$$M = \frac{a_g \cdot \gamma \cdot \beta \cdot (A + B) \cdot H^3}{3}$$

total base bending
moment which arrives
to the foundation
through the walls

where:

$$\beta = \frac{2 \cdot \mu \cdot \lambda}{1 - \nu \cdot a_g \cdot \mu}$$

- A: half-width of the base of the rectangular silos
- B: half-length of the base of the rectangular silos

B SCHEDE DI PRESENTAZIONE DEI PROVINI

Legend for the following pages

Every tentative specimens is described in two pages.

In the first page test there is a simple description of the specimen:

- geometry of the silos
- material's characteristic such as: typology; unit price; unit weight; coefficient of wall friction; lateral pressure ratio
- acceleration with which we can perform the test
- volume of the grain
- weight of the grain
- total price of the grain
- slenderness ratio of the silos

In the table of the first page you can find:

- In the first five lines, the ratio between the total pressure as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the total pressure as evaluated in the Eurocode accurate procedure
- the ratio between the base shear as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base shear as evaluated in the Eurocode accurate procedure
- the ratio between the base bending moment as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base bending moment as evaluated in the Eurocode accurate procedure
- the ratio between the base shear as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base shear as evaluated in the Eurocode simplified procedure
- the ratio between the base bending moment as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base bending moment as evaluated in the Eurocode simplified procedure
- the ratio between the volume that take part in the seismic response as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the volume that take part in the seismic response as evaluated in the Eurocode simplified procedure

The figure of the first page plots the ratio of the total pressure as function of the height of the silos.

In the second page there are two groups of figures:

- the first group represents the total pressure as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the total pressure as evaluated in the Eurocode accurate procedure, as functions of the height of the silos
- the second group represents the difference between the total pressure as evaluated in the Eurocode accurate procedure and the total pressure as evaluated with the Trombetti et al. procedure, as functions of the height of the silos

Tentative specimen n. 1

Geometry

$$R = 1.5 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$

Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

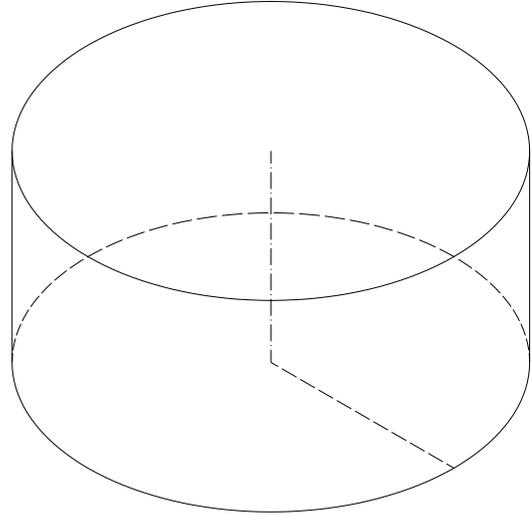
$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 10.6029 \text{ m}^3;$$

$$P_{tot} = 9543 \text{ kg}$$

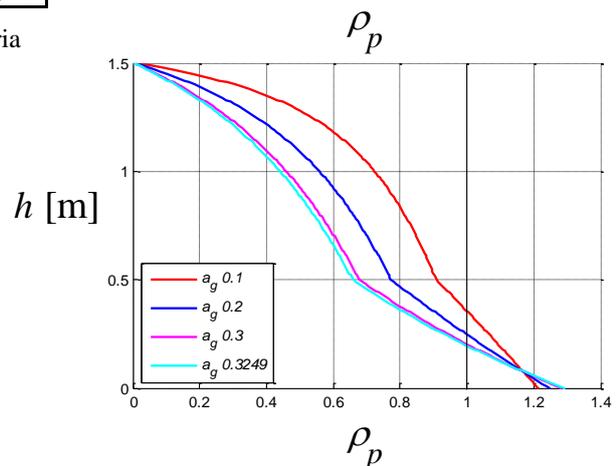
$$\text{Total price} = 2385,65 \text{ €}$$



$$\Delta = 0.5000 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,25	0,14	0,10	0,10
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,67	0,50	0,41	0,39
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	0,83	0,68	0,58	0,56
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	0,96	0,85	0,76	0,75
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,17	1,17	1,17	1,17
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,21	0,21	0,21	0,21
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,12	0,12	0,12	0,12
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,21	0,21	0,21	0,22
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,14	0,14	0,14	0,14
V_{part}/V_{tot}	0,17	0,17	0,17	0,17

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



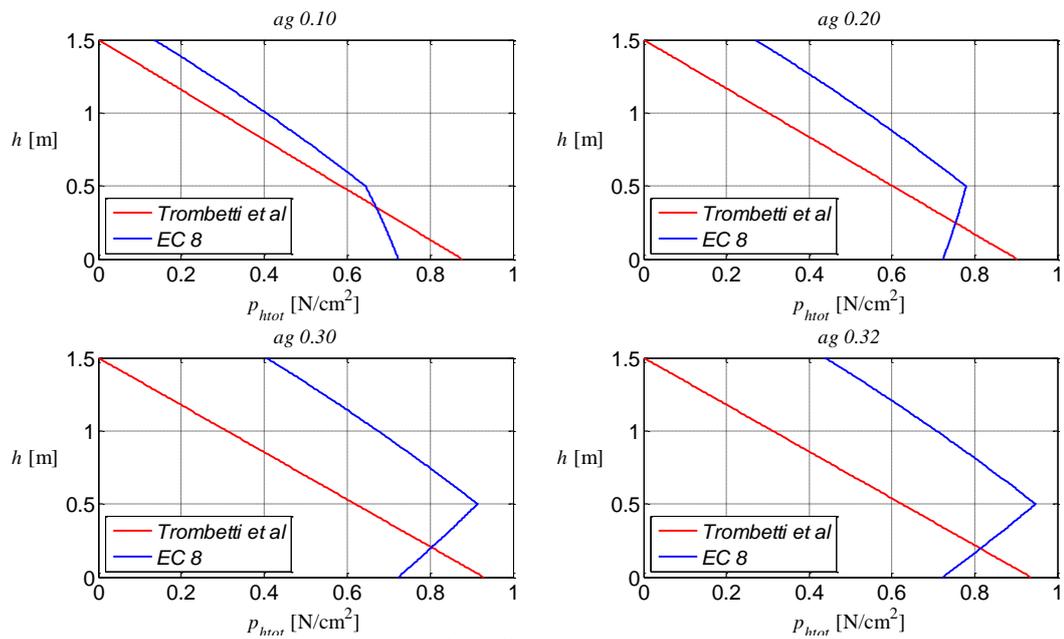


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

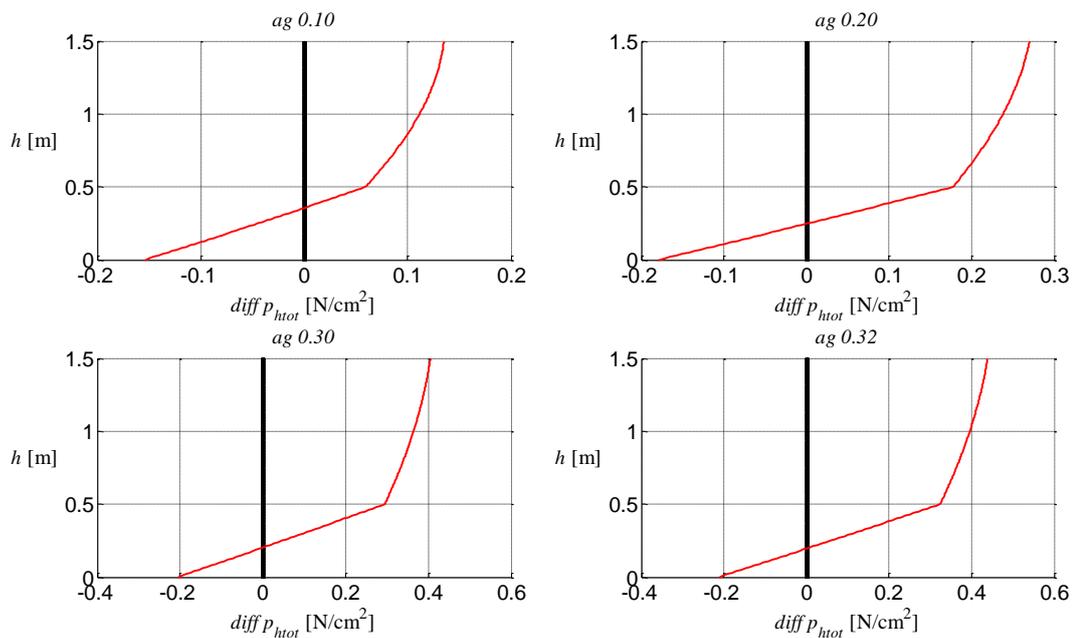


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 2

Geometry

$$R = 1.3 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$

Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

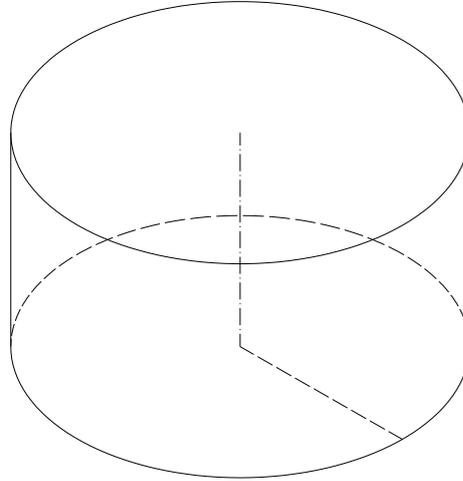
$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 7.9639 \text{ m}^3;$$

$$P_{tot} = 7168 \text{ kg}$$

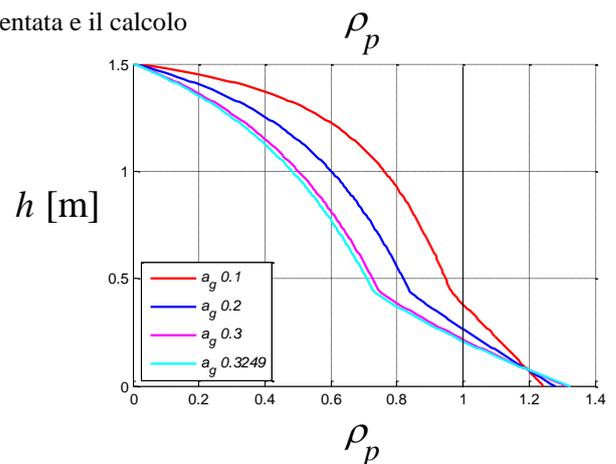
$$\text{Total price} = 1791,9 \text{ €}$$



$$\Delta = 0.5769 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,28	0,16	0,12	0,11
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,71	0,54	0,45	0,43
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	0,87	0,73	0,63	0,61
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	0,98	0,86	0,77	0,75
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,20	1,20	1,20	1,20
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,23	0,23	0,23	0,23
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,14	0,14	0,14	0,14
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,25	0,25	0,25	0,25
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,16	0,16	0,17	0,17
V_{part}/V_{tot}	0,20	0,20	0,20	0,20

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



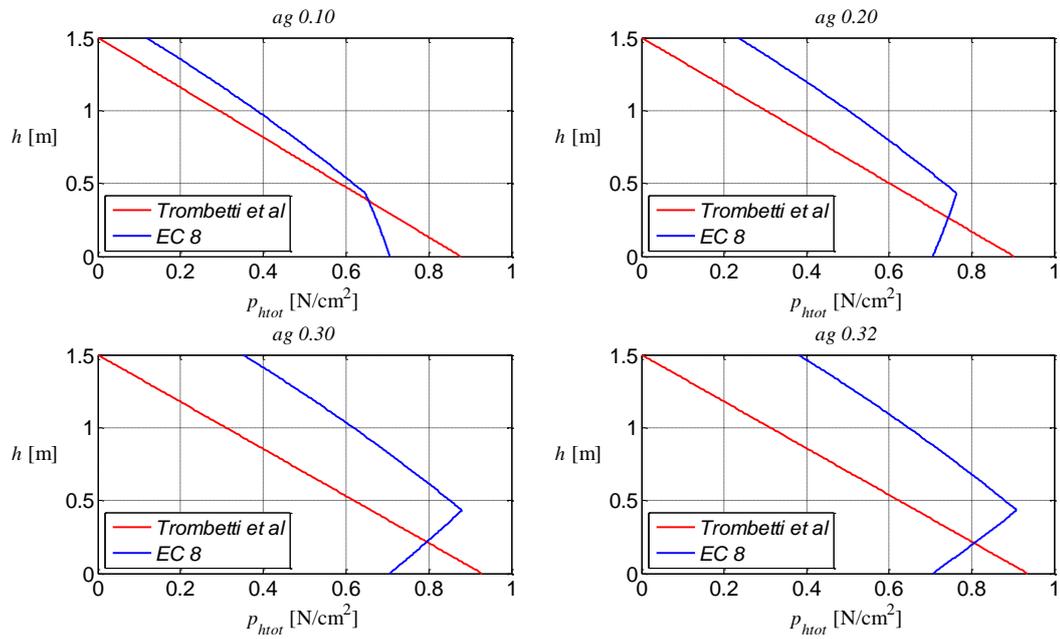


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

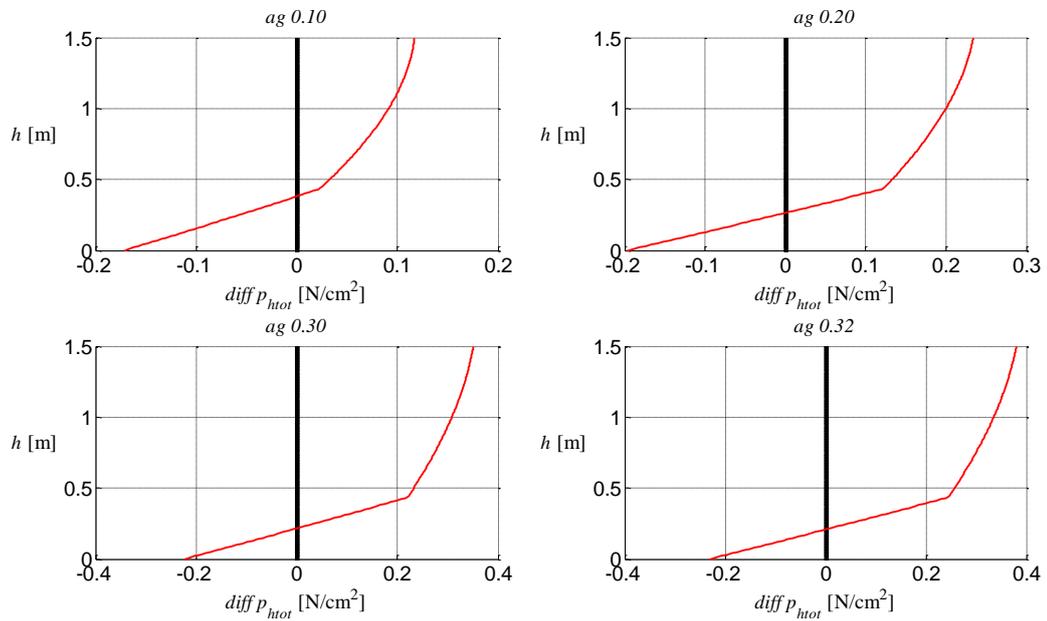


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 3

Geometry

$$R = 1.00 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$

Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

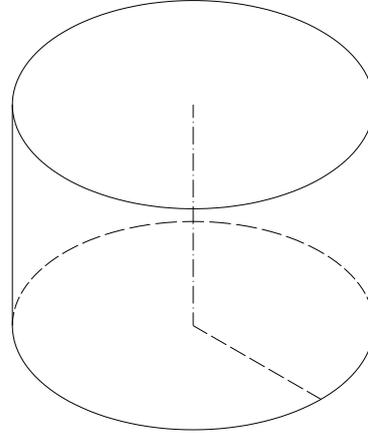
$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 4.7124 \text{ m}^3;$$

$$P_{tot} = 4241 \text{ kg}$$

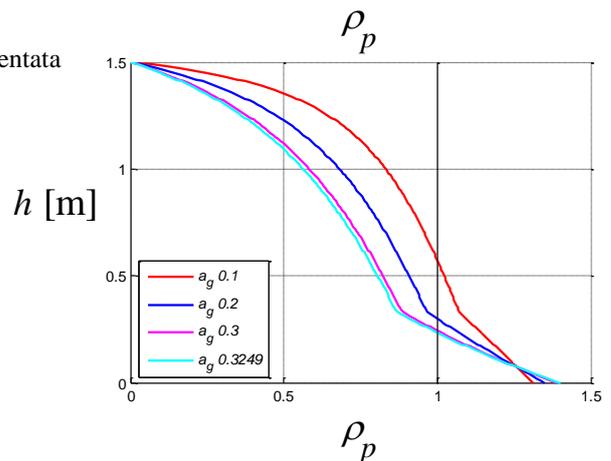
$$\text{Total price} = 1060,29 \text{ €}$$



$$\Delta = 0.7500 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,33	0,20	0,15	0,14
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,78	0,62	0,52	0,50
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	0,94	0,81	0,72	0,70
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,05	0,94	0,86	0,84
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,26	1,26	1,26	1,26
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,29	0,29	0,29	0,29
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,17	0,17	0,17	0,17
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,32	0,32	0,32	0,32
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,21	0,21	0,21	0,22
V_{part}/V_{tot}	0,26	0,26	0,26	0,26

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



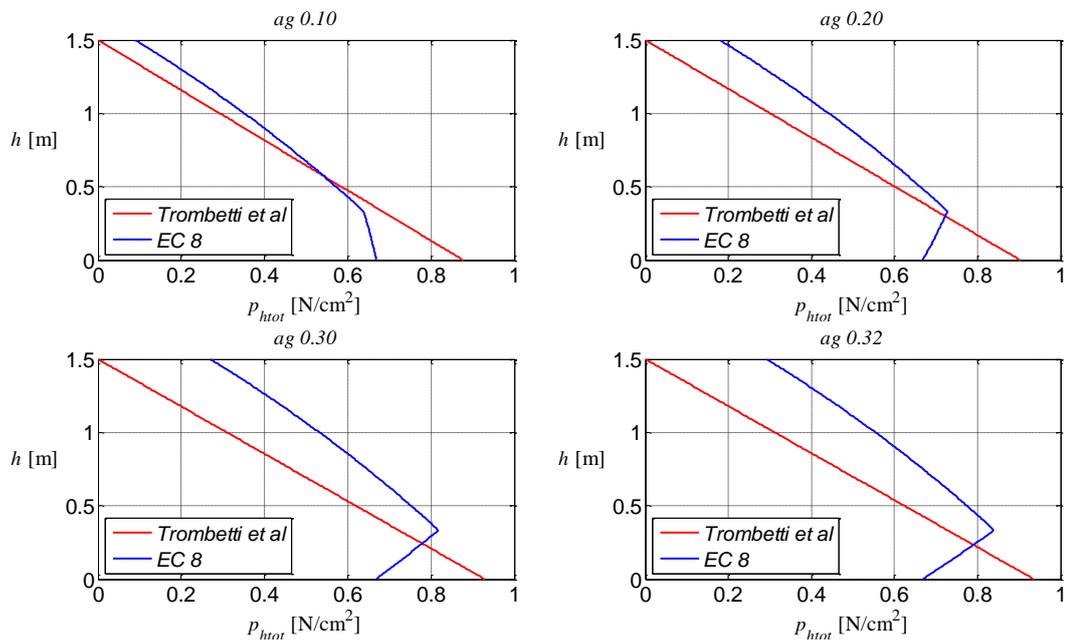


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

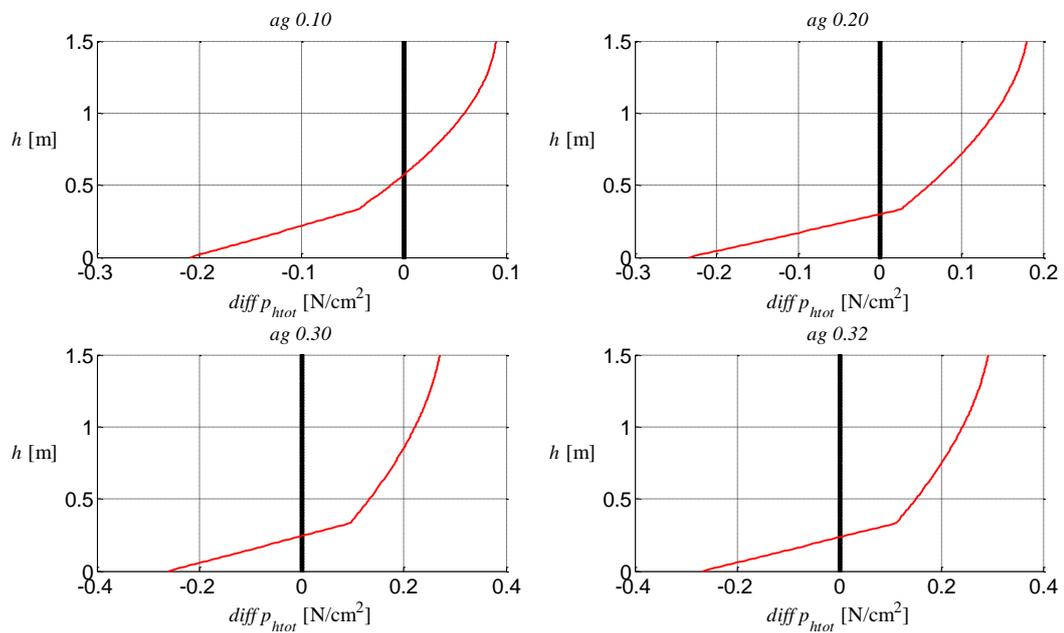


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 4

Geometria

$$R = 0.8 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$

Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

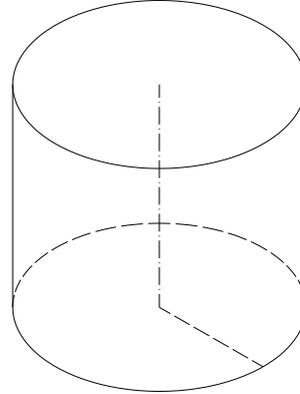
$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 3.0159 \text{ m}^3;$$

$$P_{tot} = 2714 \text{ kg}$$

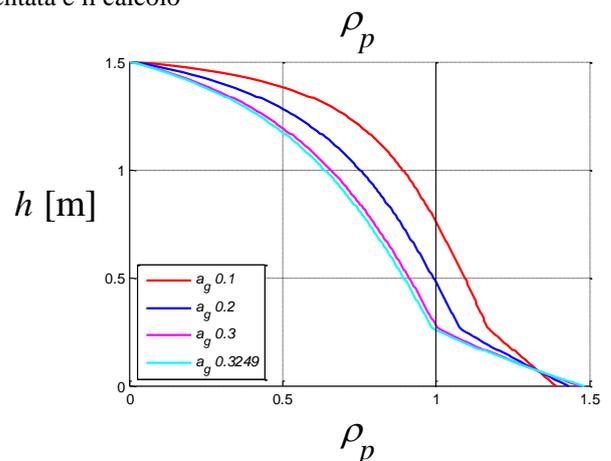
$$\text{Total price} = 678,58 \text{ €}$$



$$\Delta = 0.9375 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,38	0,24	0,18	0,17
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,84	0,69	0,59	0,57
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,00	0,89	0,80	0,78
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,12	1,02	0,95	0,93
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,33	1,32	1,32	1,32
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,35	0,35	0,35	0,35
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,22	0,22	0,22	0,22
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,40	0,40	0,40	0,40
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,27	0,27	0,27	0,27
V_{part}/V_{tot}	0,32	0,32	0,32	0,32

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



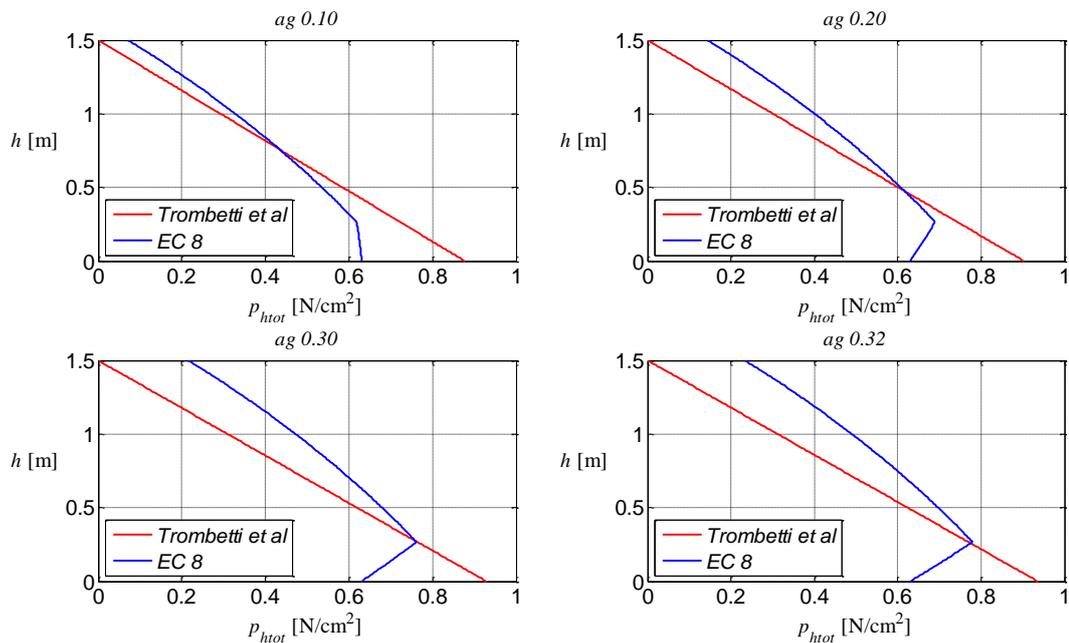


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

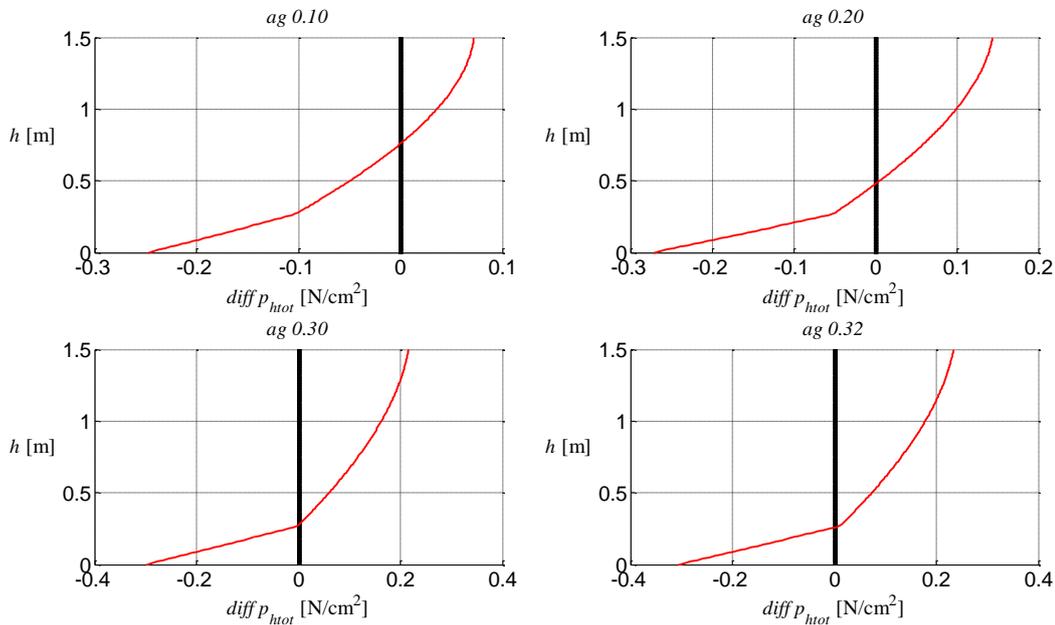


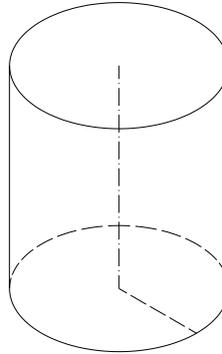
Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 5

Geometry

$$R = 0.6 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 1.6965 \text{ m}^3;$$

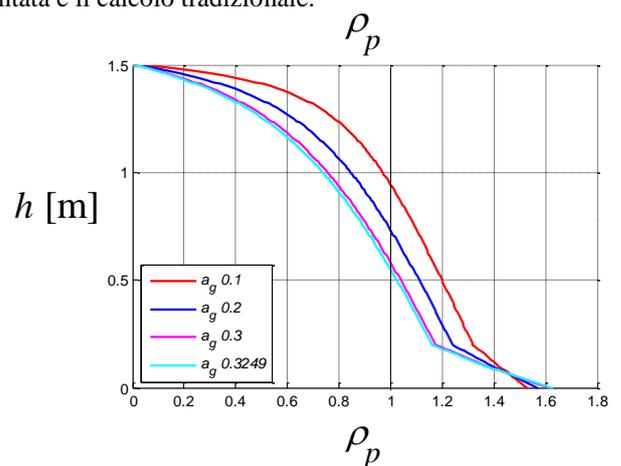
$$P_{tot} = 1526.8 \text{ kg};$$

Total price = 381,70 €

$$\Delta = 1.2500 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,46	0,30	0,23	0,22
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,92	0,78	0,69	0,67
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,09	0,99	0,91	0,89
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,23	1,15	1,08	1,07
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,45	1,44	1,43	1,43
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,46	0,46	0,46	0,46
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,29	0,29	0,29	0,29
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,53	0,54	0,54	0,54
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,36	0,36	0,36	0,36
V_{part}/V_{tot}	0,43	0,43	0,43	0,43

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



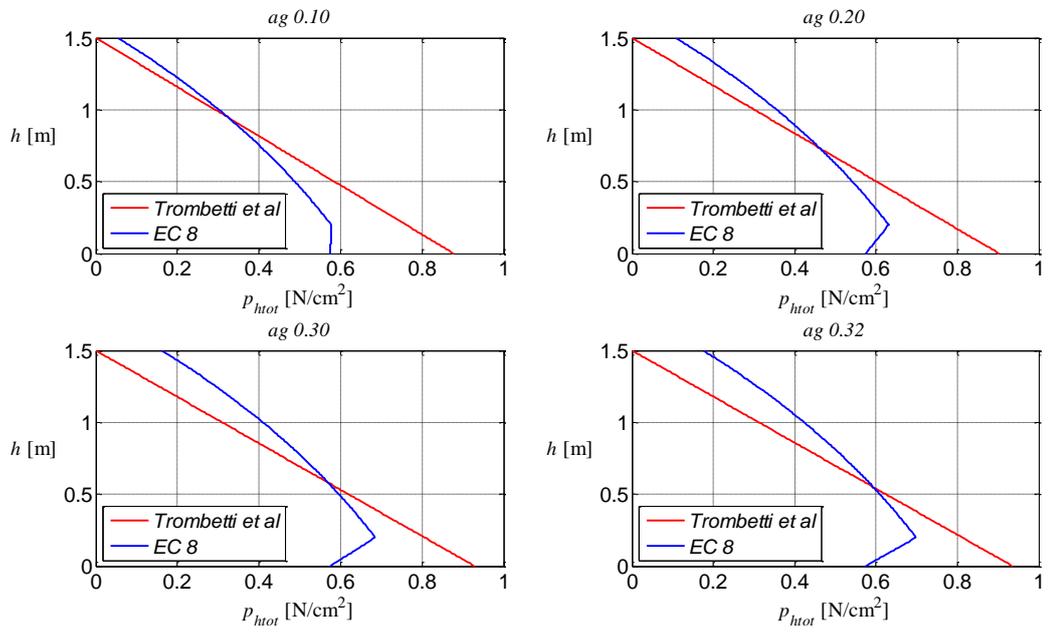


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

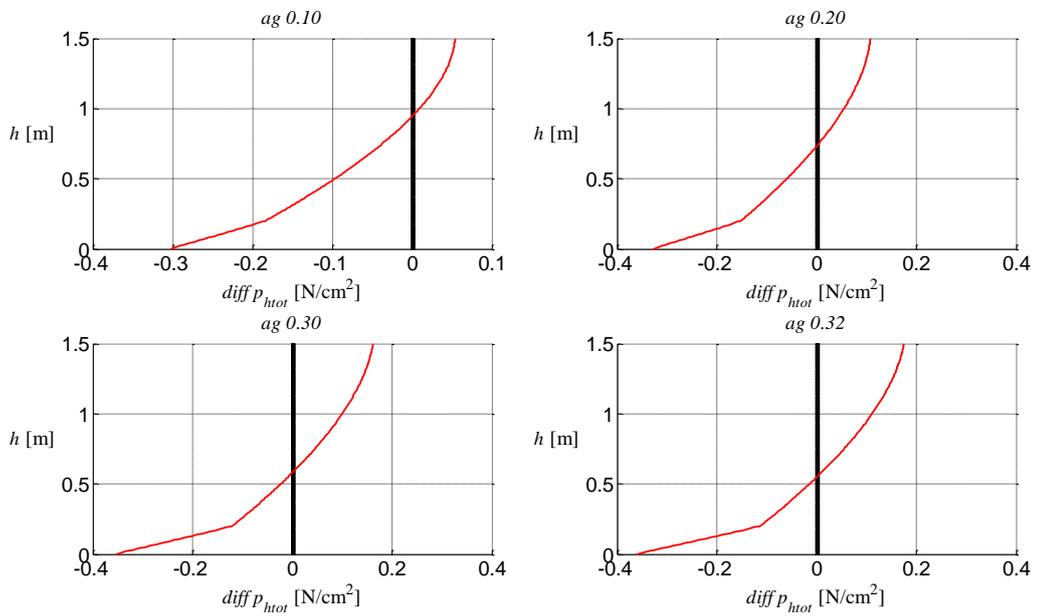


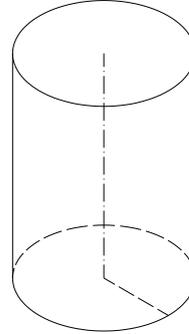
Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 6

Geometry

$$R = 0.5 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 1,1781 \text{ m}^3;$$

$$P_{tot} = 1060 \text{ kg};$$

$$\text{Total price} = 265,07 \text{ €}$$

$$\Delta = 1.5000 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,51	0,34	0,26	0,25
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,97	0,84	0,75	0,73
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,16	1,06	0,99	0,97
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,32	1,24	1,18	1,16
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,55	1,53	1,52	1,52
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,54	0,54	0,55	0,55
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,34	0,34	0,35	0,35
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,64	0,64	0,64	0,65
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,43	0,43	0,43	0,43
V_{part}/V_{tot}	0,51	0,51	0,51	0,51

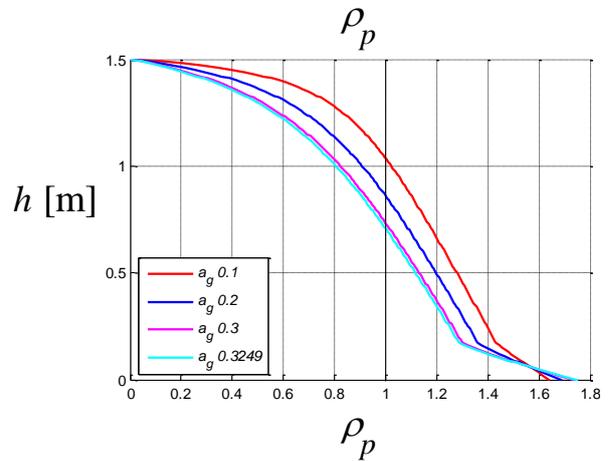


Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.

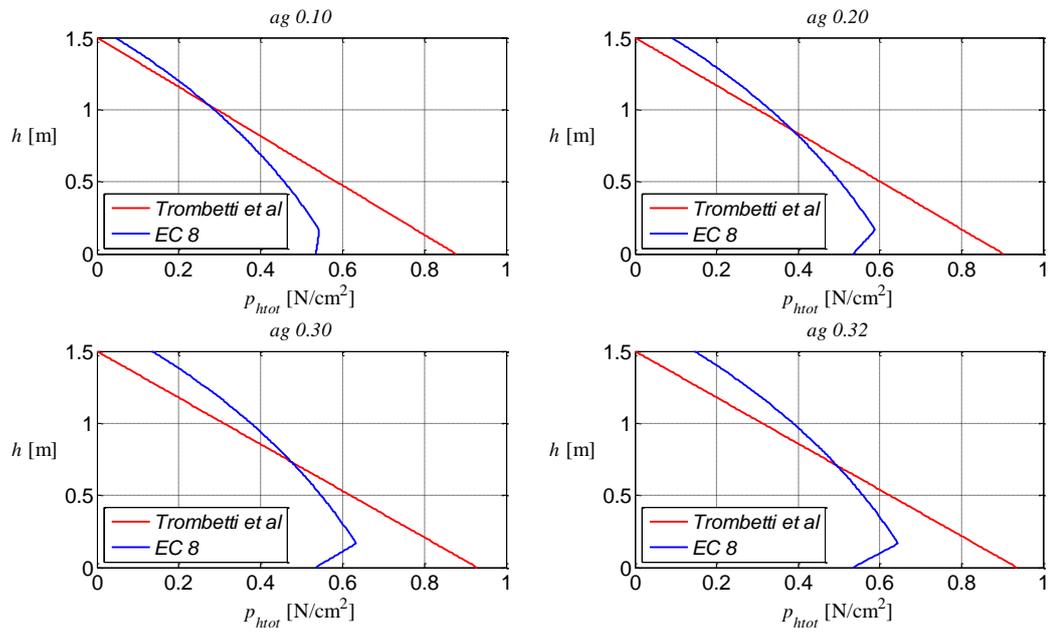


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

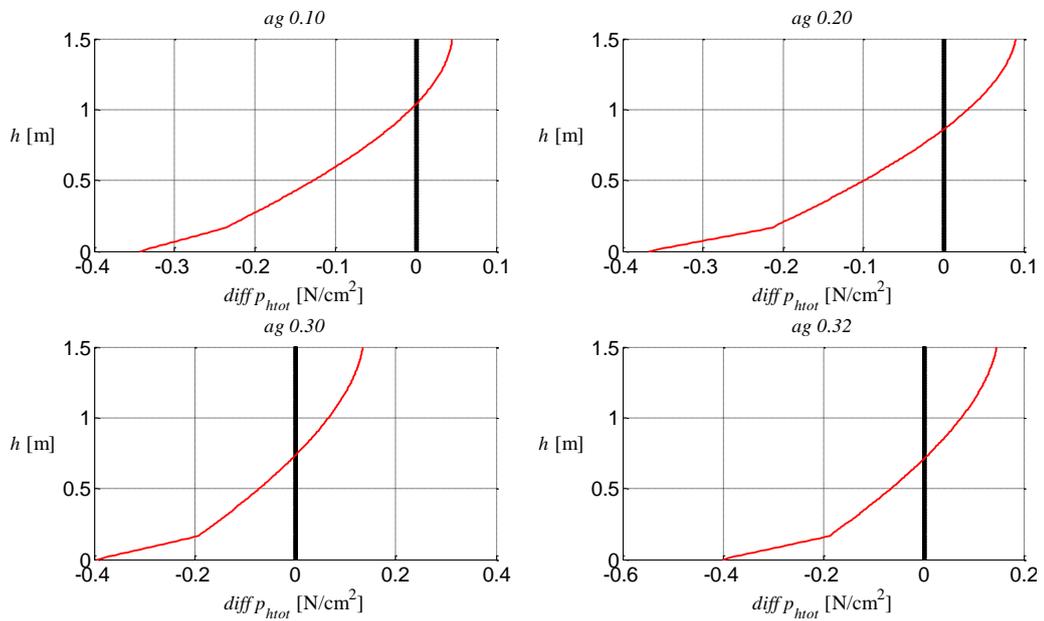


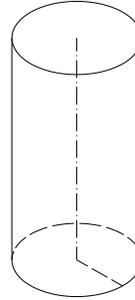
Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare.

Tentative specimen n. 7

Geometry

$$R = 0.35 \text{ m};$$

$$H = 1.5 \text{ m};$$



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$\mu_s = 0.27;$$

$$\mu_b = 0.36;$$

$$\lambda = 0.6325;$$

$$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249];$$

$$a_{g_max} = 0.3249;$$

$$V_{tot} = 0.5773 \text{ m}^3;$$

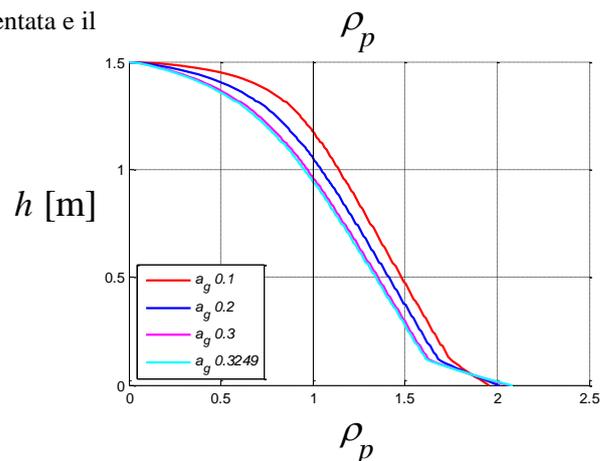
$$P_{tot} = 519.54 \text{ kg};$$

$$\text{Total price} = 129,89 \text{ €}$$

$$\Delta = 2.1429 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,60	0,43	0,34	0,33
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	1,07	0,97	0,89	0,87
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,31	1,23	1,17	1,16
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,54	1,47	1,42	1,40
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,82	1,79	1,77	1,76
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,76	0,76	0,77	0,77
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,49	0,49	0,49	0,49
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,92	0,92	0,92	0,92
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,61	0,61	0,61	0,61
V_{part}/V_{tot}	0,73	0,73	0,73	0,73

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



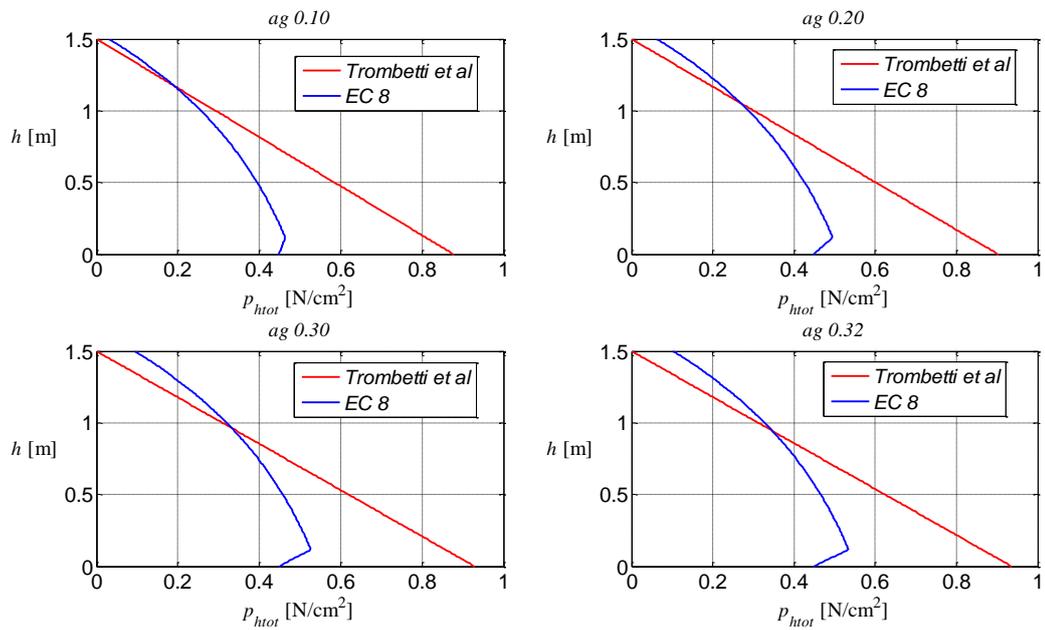


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

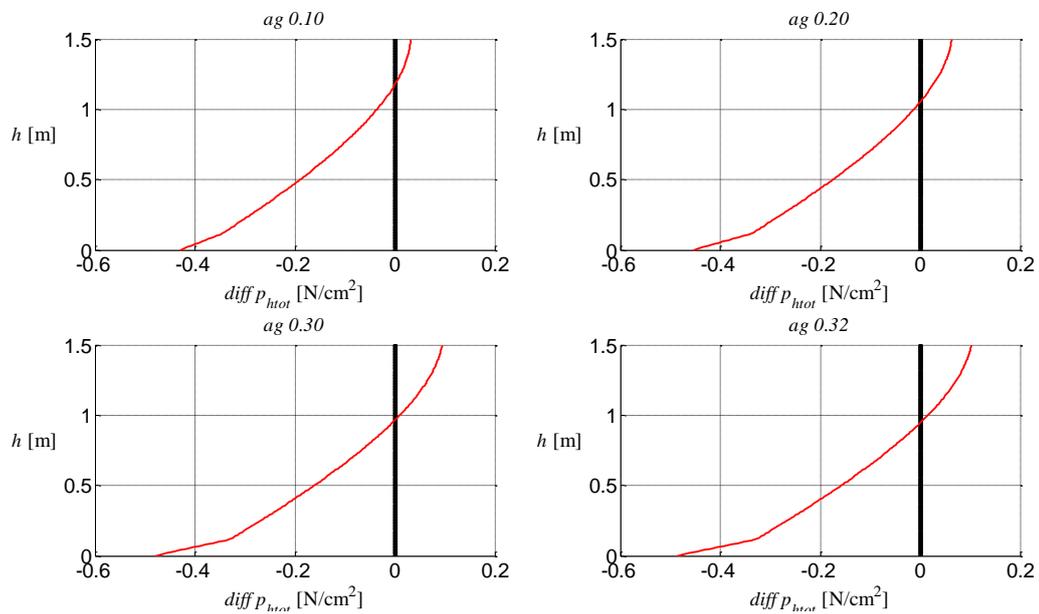


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Legend for the following pages

Every tentative specimens is described in two pages.

In the first page test there is a simple description of the specimen:

- geometry of the silos
- material's characteristic such as: typology; unit price; unit weight; coefficient of wall friction; lateral pressure ratio
- acceleration with which we can perform the test
- volume of the grain
- weight of the grain
- total price of the grain
- slenderness ratio of the silos

In the table of the first page you can find:

- In the first five lines, the ratio between the total pressure as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the total pressure as evaluated in the Eurocode accurate procedure
- the ratio between the base shear as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base shear as evaluated in the Eurocode accurate procedure
- the ratio between the base bending moment as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base bending moment as evaluated in the Eurocode accurate procedure
- the ratio between the base shear as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base shear as evaluated in the Eurocode simplified procedure
- the ratio between the base bending moment as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the base bending moment as evaluated in the Eurocode simplified procedure
- the ratio between the volume that take part in the seismic response as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the volume that take part in the seismic response as evaluated in the Eurocode simplified procedure

The figure of the first page plots the ratio of the total pressure as function of the height of the silos.

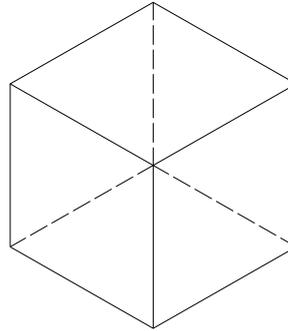
In the second page there are two groups of figures:

- the first group represents the total pressure as evaluated with the Trombetti et al. procedure and the total pressure as evaluated in the Eurocode accurate procedure, as functions of the height of the silos
- the second group represents the difference between the total pressure as evaluated in the Eurocode accurate procedure and the total pressure as evaluated with the Trombetti et al. procedure, as functions of the height of the silos

Tentative specimen n. 8

Geometry

H = 1.0 m;
A = 0.5 m;
B = 0.5 m;



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$;

$\mu_s = 0.27$;

$\mu_b = 0.36$;

$\lambda = 0.6325$;

$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]$;

$a_{g_max} = 0.3249$;

$V_{tot} = 1 \text{ m}^3$;

$P_{tot} = 900 \text{ kg}$;

Total price = 225 €

$\Delta = 1 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710$ slenderness ratio verified

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95\text{H}$	0,40	0,25	0,19	0,18
$\rho_p \text{ h}=0,725\text{H}$	0,83	0,69	0,60	0,58
$\rho_p \text{ h}=0,50\text{H}$	0,95	0,86	0,78	0,76
$\rho_p \text{ h}=0,275\text{H}$	1,03	0,96	0,90	0,88
$\rho_p \text{ h}=0,05\text{H}$	1,17	1,17	1,17	1,17
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,38	0,39	0,41	0,41
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,24	0,25	0,25	0,25
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,44	0,45	0,46	0,47
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,29	0,30	0,31	0,31
V_{part}/V_{tot}	0,32	0,33	0,34	0,34

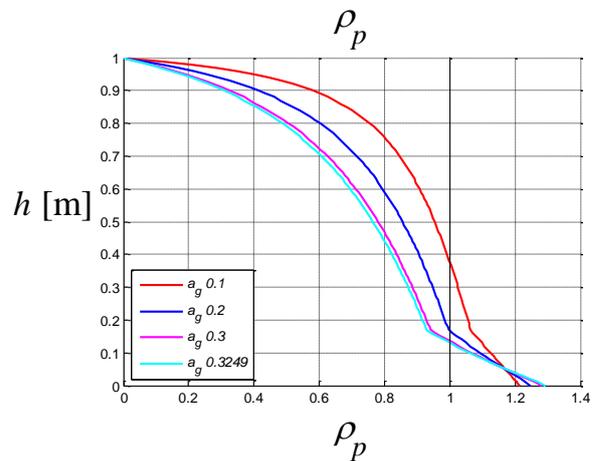


Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.

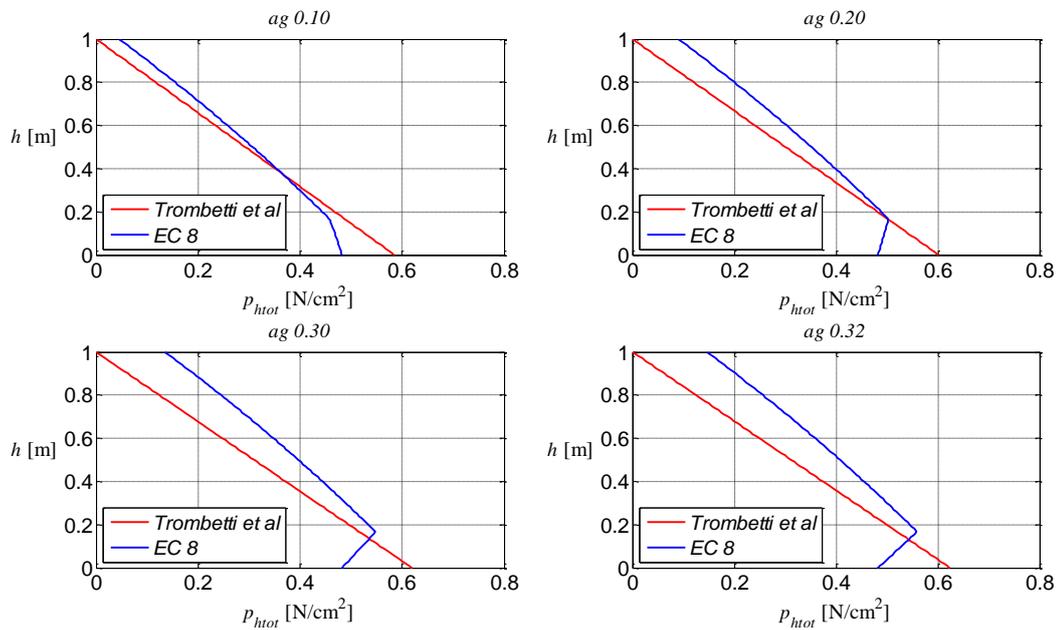


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

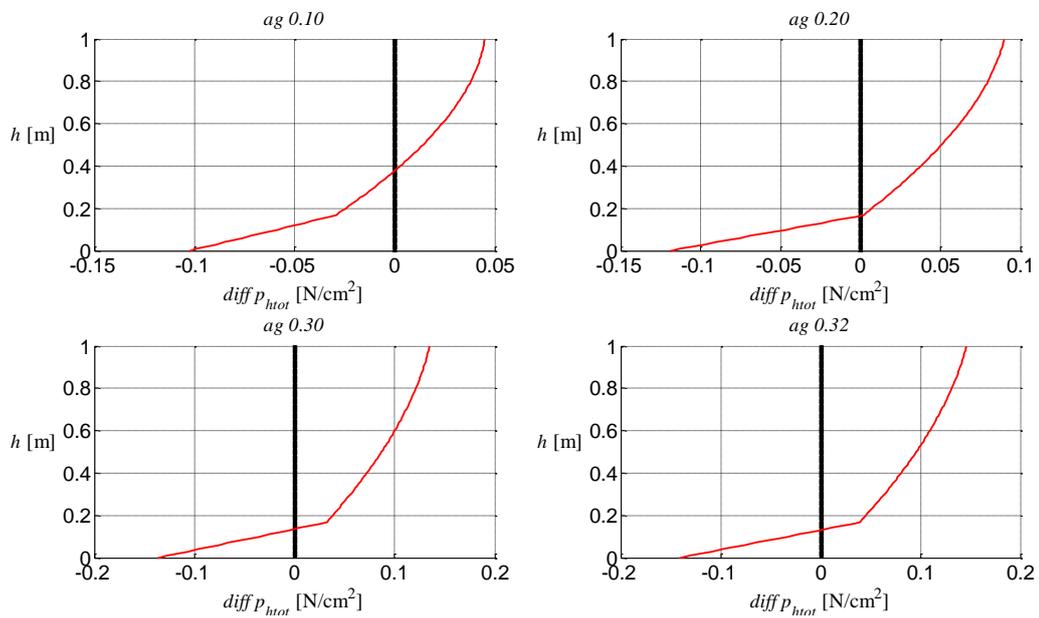
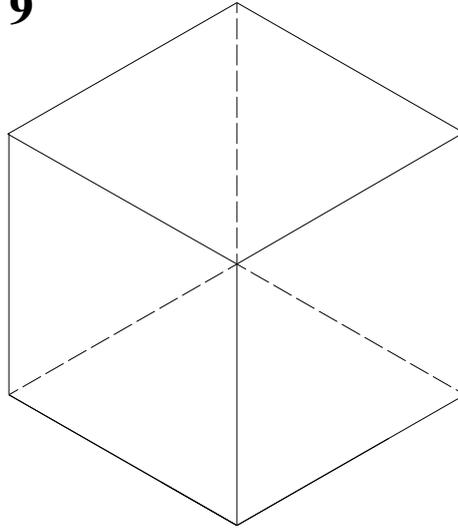


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 9

Geometry

H = 1.5 m;
 A = 0.75 m;
 B = 0.75 m;



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t
 $\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$;
 $\mu_s = 0.27$;
 $\mu_b = 0.36$;
 $\lambda = 0.6325$;

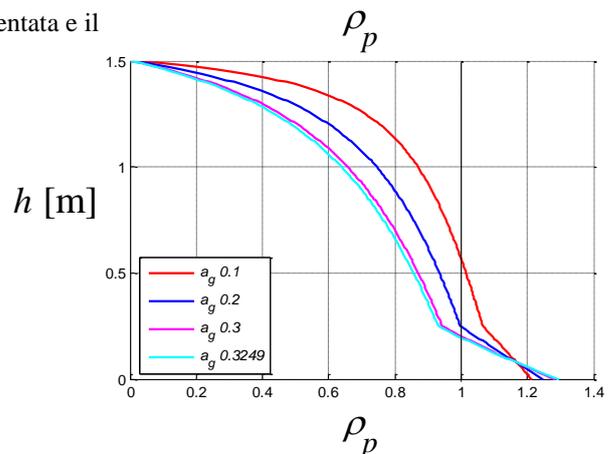
$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]$;
 $a_{g_max} = 0.3249$;

$V_{tot} = 3.375 \text{ m}^3$;
 $P_{tot} = 3037.5 \text{ kg}$;
 Total price = 759,38 €

$\Delta = 1 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710$ slenderness ratio verified

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95\text{H}$	0,40	0,25	0,19	0,18
$\rho_p \text{ h}=0,725\text{H}$	0,83	0,69	0,60	0,58
$\rho_p \text{ h}=0,50\text{H}$	0,95	0,86	0,78	0,76
$\rho_p \text{ h}=0,275\text{H}$	1,03	0,96	0,90	0,88
$\rho_p \text{ h}=0,05\text{H}$	1,17	1,17	1,17	1,17
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,38	0,39	0,41	0,41
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,24	0,24	0,25	0,25
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,44	0,45	0,46	0,47
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,29	0,30	0,31	0,31
V_{part}/V_{tot}	0,32	0,33	0,34	0,34

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



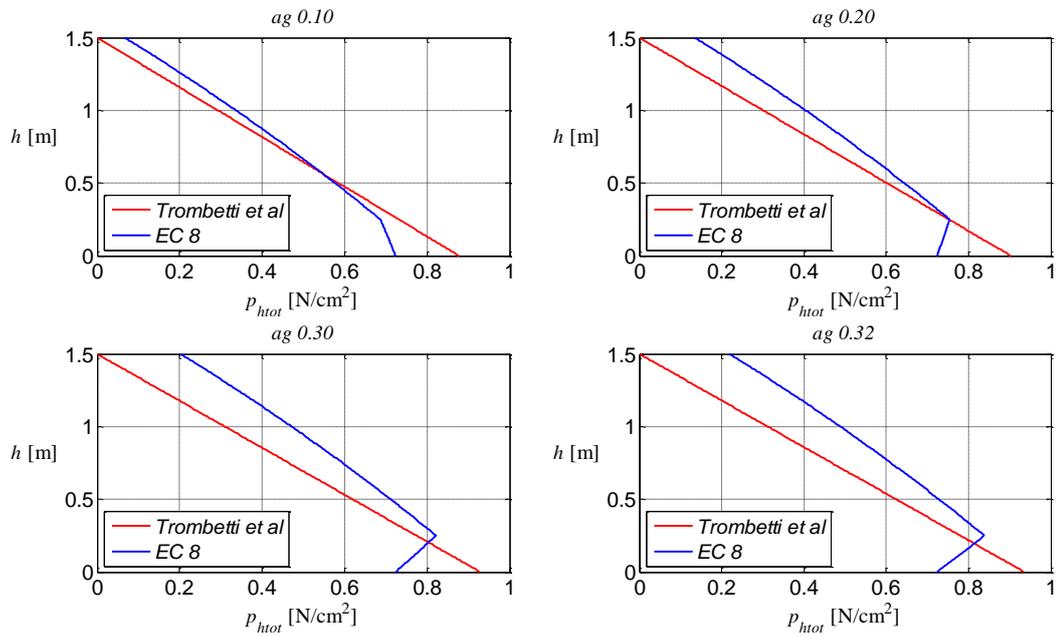


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

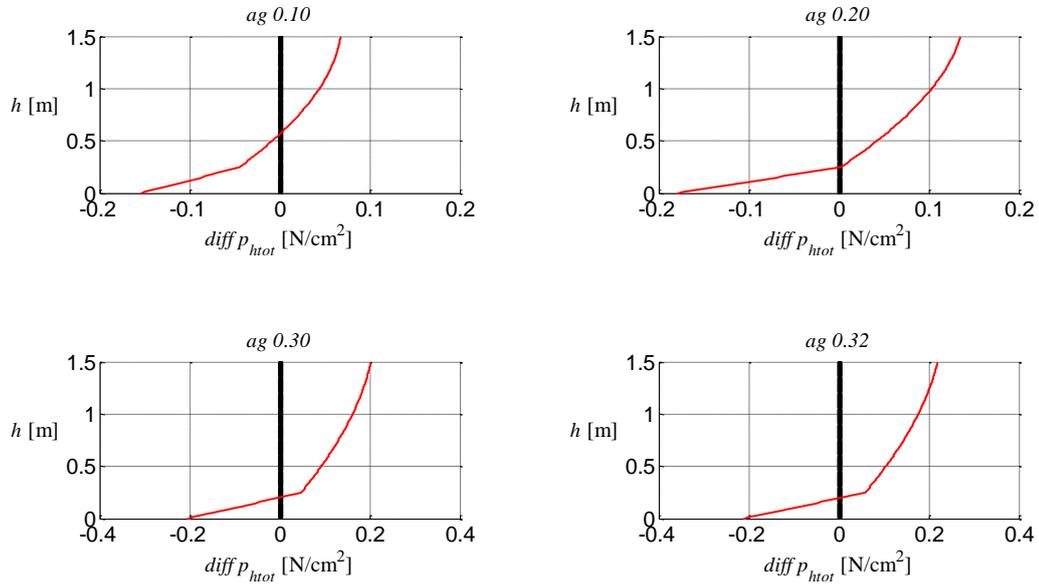
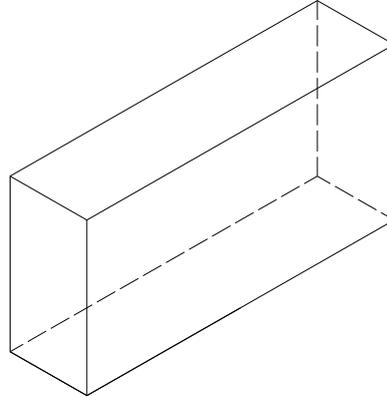


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 10

Geometry

H = 1.0 m;
 A = 0.325 m;
 B = 1.3 m;



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t
 $\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$;
 $\mu_s = 0.27$;
 $\mu_b = 0.36$;
 $\lambda = 0.6325$;

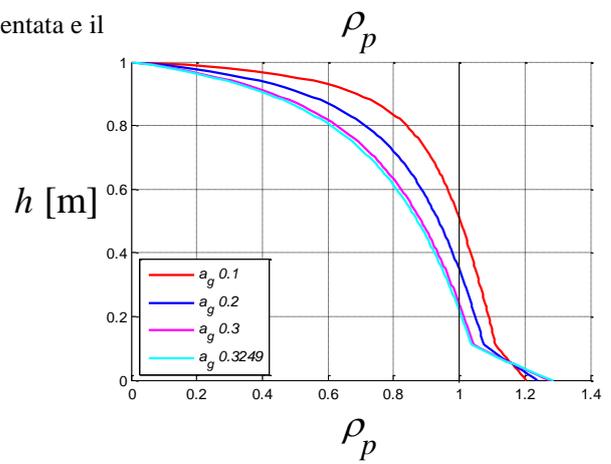
$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]$;
 $a_{g_max} = 0.3249$;

$V_{tot} = 1.69 \text{ m}^3$;
 $P_{tot} = 1521 \text{ kg}$;
 Total price = 380,25 €

$\Delta = 1.5385 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710$ slenderness ratio verified

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95\text{H}$	0,51	0,35	0,27	0,25
$\rho_p \text{ h}=0,725\text{H}$	0,90	0,79	0,72	0,70
$\rho_p \text{ h}=0,50\text{H}$	1,00	0,94	0,88	0,87
$\rho_p \text{ h}=0,275\text{H}$	1,07	1,02	0,99	0,98
$\rho_p \text{ h}=0,05\text{H}$	1,16	1,16	1,17	1,17
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,36	0,37	0,38	0,38
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,23	0,23	0,24	0,24
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,42	0,43	0,45	0,45
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,28	0,29	0,30	0,30
V_{part}/V_{tot}	0,32	0,33	0,34	0,34

Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.



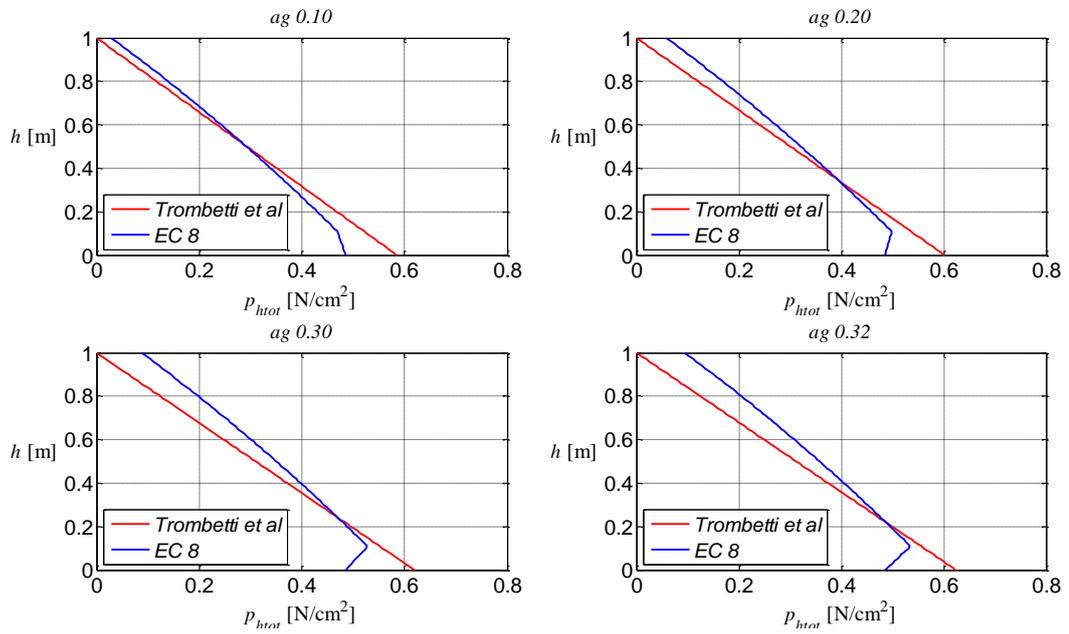


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

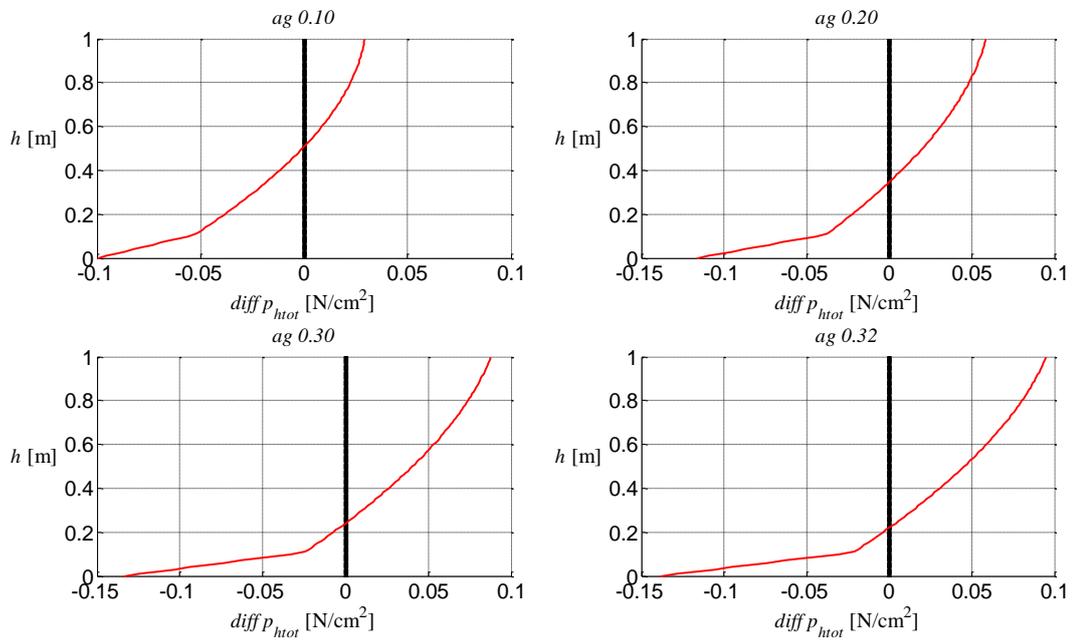
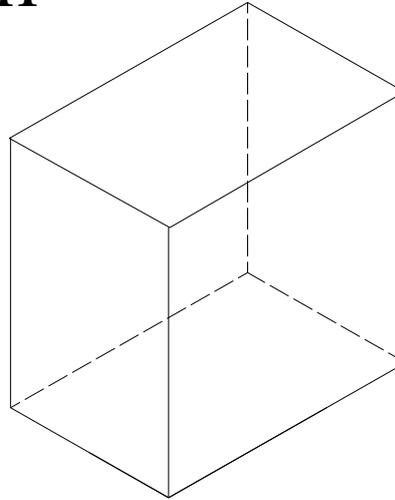


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 11

Geometry

H = 1.5 m;
 A = 0.5 m;
 B = 0.75 m;



Materials

Wheat:

Unit cost: 250 €/t
 $\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$;
 $\mu_s = 0.27$;
 $\mu_b = 0.36$;
 $\lambda = 0.6325$;

$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]$;
 $a_{g_max} = 0.3249$;

$V_{tot} = 2.2500 \text{ m}^3$;
 $P_{tot} = 2025 \text{ kg}$;
 Total price = 506,25 €

$\Delta = 1.5000 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710$ slenderness ratio verified

	a_g			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,50	0,34	0,26	0,25
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,91	0,80	0,72	0,70
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,02	0,95	0,89	0,88
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,10	1,05	1,01	1,00
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,21	1,21	1,21	1,21
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,46	0,48	0,49	0,50
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,29	0,30	0,31	0,31
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,55	0,56	0,58	0,58
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,37	0,38	0,39	0,39
V_{part}/V_{tot}	0,39	0,40	0,41	0,42

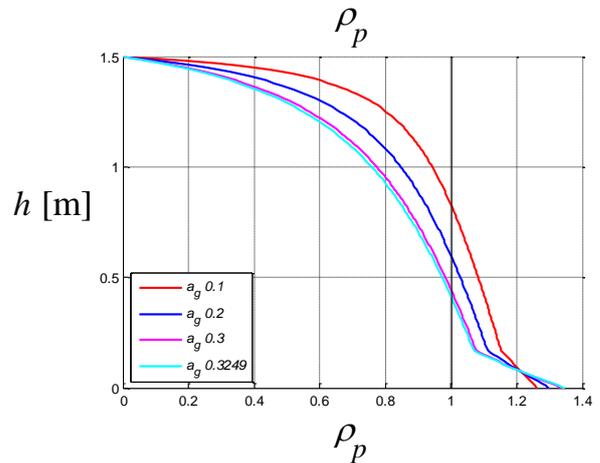


Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.

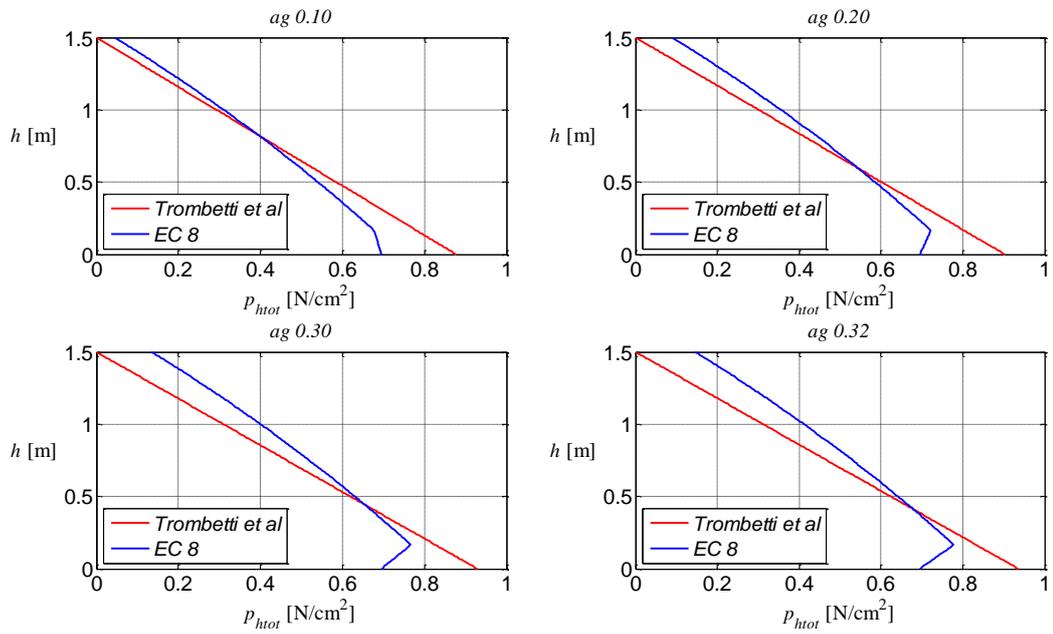


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

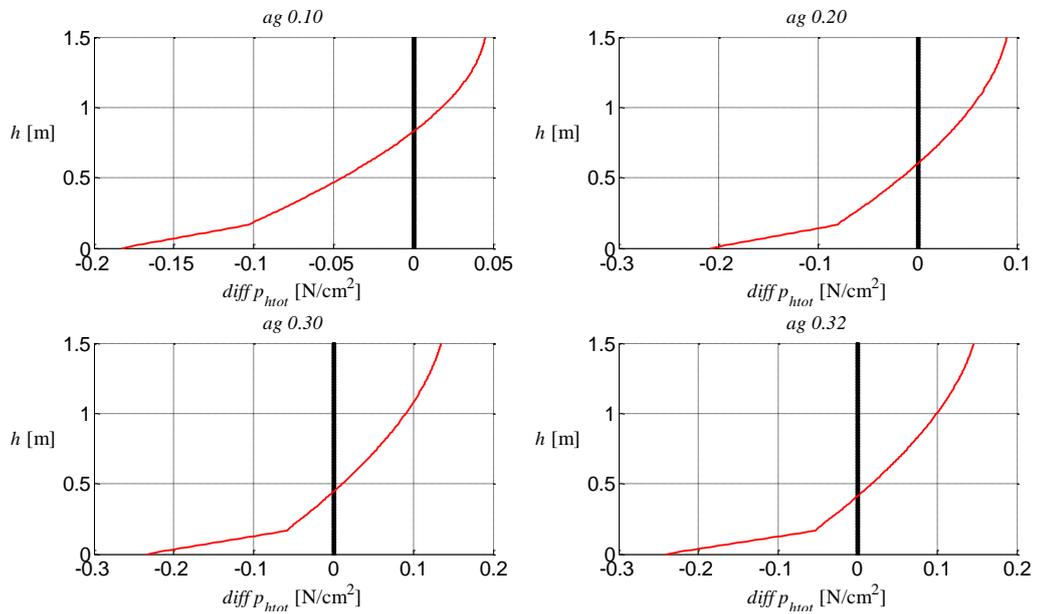
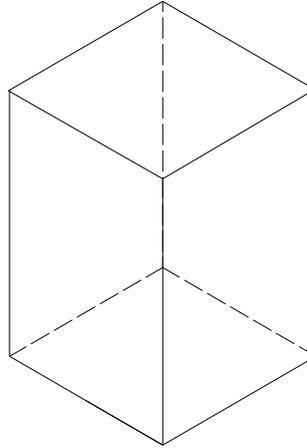


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 12

Geometry

H = 1.5;
A = 0.5;
B = 0.5;



Material

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$;

$\mu_s = 0.27$;

$\mu_b = 0.36$;

$\lambda = 0.6325$;

$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]$;

$a_{g_max} = 0.3249$;

$V_{tot} = 1.5000 \text{ m}^3$;

$P_{tot} = 1350 \text{ kg}$;

Total price = 337,50 €

$\Delta = 1.5000 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710$ slenderness ratio verified

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95\text{H}$	0,50	0,34	0,26	0,25
$\rho_p \text{ h}=0,725\text{H}$	0,91	0,80	0,72	0,70
$\rho_p \text{ h}=0,50\text{H}$	1,04	0,97	0,91	0,90
$\rho_p \text{ h}=0,275\text{H}$	1,13	1,08	1,03	1,02
$\rho_p \text{ h}=0,05\text{H}$	1,26	1,26	1,26	1,26
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,56	0,57	0,59	0,59
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,35	0,36	0,37	0,38
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,66	0,68	0,70	0,70
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,44	0,45	0,46	0,47
V_{part}/V_{tot}	0,46	0,47	0,48	0,48

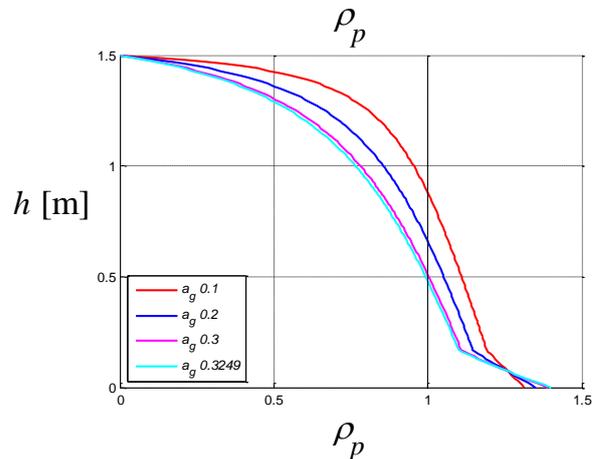


Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.

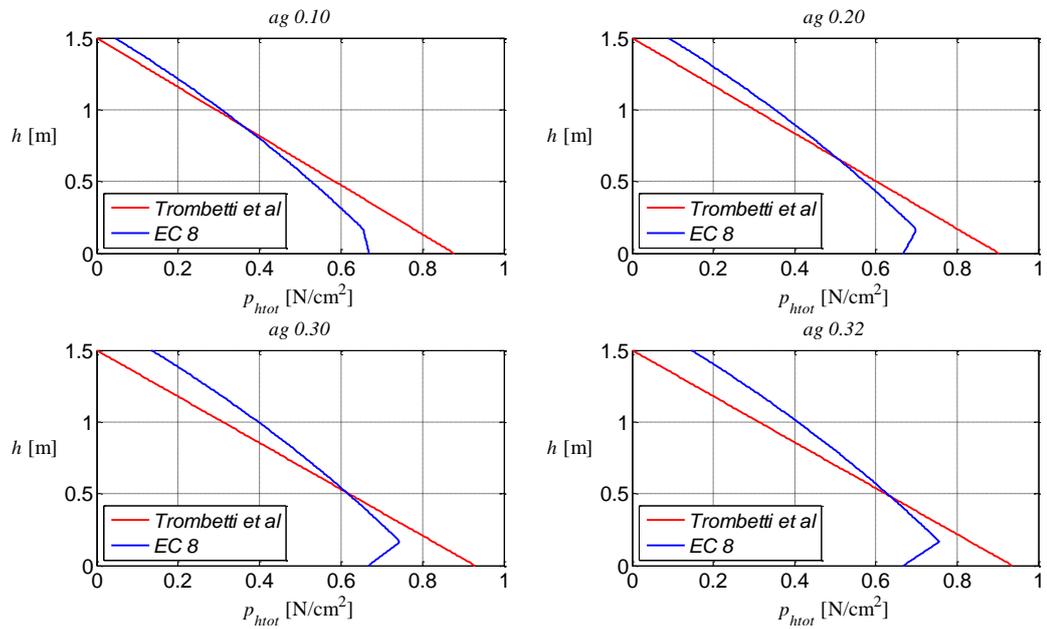


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

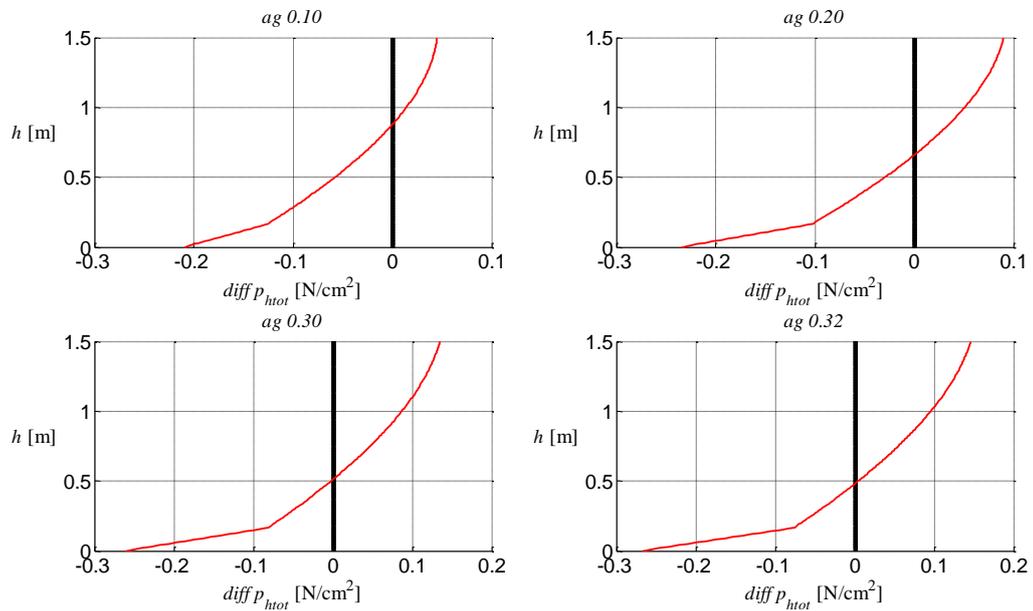
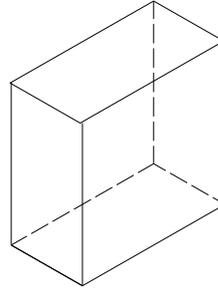


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 13

Geometry

H = 1.0 m;
A = 0.25 m;
B = 0.5 m;



Materials

Wheat:

Unit price: 250 €/t

$\gamma = 900 \text{ kg/m}^3$;

$\mu_s = 0.27$;

$\mu_b = 0.36$;

$\lambda = 0.6325$;

$a_g = [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]$;

$a_{g_max} = 0.3249$;

$V_{tot} = 0.5000 \text{ m}^3$;

$P_{tot} = 450 \text{ kg}$;

Total price = 112,50 €

$\Delta = 2 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710$ slenderness ratio verified

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,58	0,41	0,32	0,31
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,95	0,87	0,80	0,78
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,07	1,02	0,97	0,96
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,16	1,12	1,09	1,08
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,26	1,26	1,26	1,26
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,55	0,57	0,58	0,59
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,35	0,36	0,38	0,38
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,66	0,68	0,70	0,70
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,44	0,45	0,46	0,47
V_{part}/V_{tot}	0,46	0,48	0,49	0,49

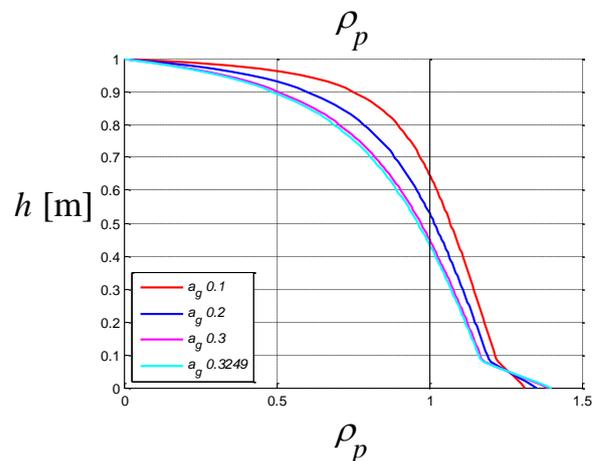


Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.

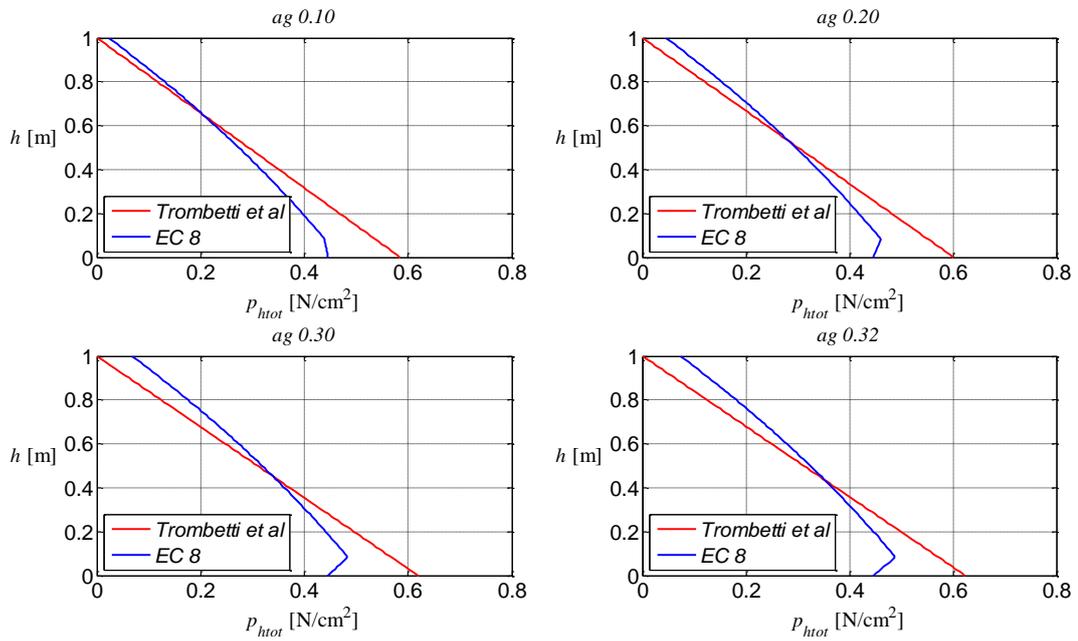


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

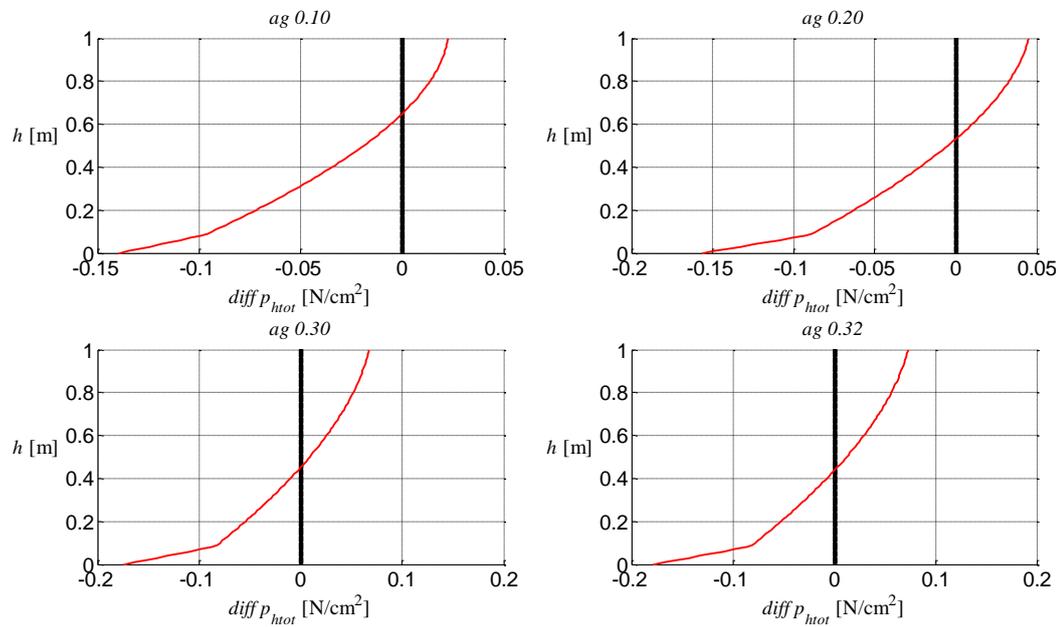


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.

Tentative specimen n. 14

Geometry

$$\begin{aligned} H &= 1; \\ A &= 0.25; \\ B &= 1; \end{aligned}$$

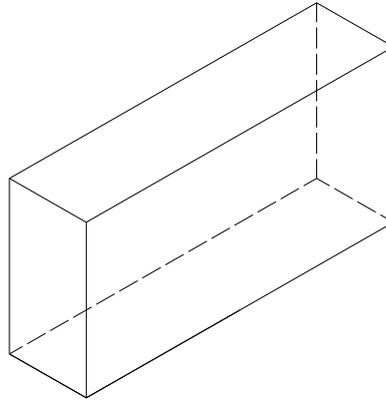
Materials

Wheat:

$$\begin{aligned} \text{Unit cost: } &220 \text{ €/t} \\ \gamma &= 900 \text{ kg/m}^3; \\ \mu_s &= 0.27; \\ \mu_b &= 0.36; \\ \lambda &= 0.6325; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_g &= [0.1, 0.2, 0.3, 0.3249]; \\ a_{g_max} &= 0.3249; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{tot} &= 1.000 \text{ m}^3; \\ P_{tot} &= 900 \text{ kg}; \\ \text{Total price} &= 225 \text{ €} \end{aligned}$$



$$\Delta = 2 < 2.8488 \quad 2.7697 \quad 2.6907 \quad 2.6710 \text{ slenderness ratio verified}$$

	ag			
	0,1	0,2	0,3	0,32
$\rho_p \text{ h}=0,95H$	0,58	0,41	0,32	0,31
$\rho_p \text{ h}=0,725H$	0,95	0,86	0,79	0,78
$\rho_p \text{ h}=0,50H$	1,05	1,00	0,96	0,95
$\rho_p \text{ h}=0,275H$	1,12	1,09	1,06	1,06
$\rho_p \text{ h}=0,05H$	1,21	1,21	1,21	1,21
$\rho_{T \text{ acc}}$	0,46	0,47	0,48	0,49
$\rho_{M \text{ acc}}$	0,30	0,30	0,31	0,31
$\rho_{T \text{ simpl}}$	0,55	0,56	0,58	0,58
$\rho_{M \text{ simpl}}$	0,37	0,38	0,39	0,39
V_{part}/V_{tot}	0,41	0,42	0,43	0,43

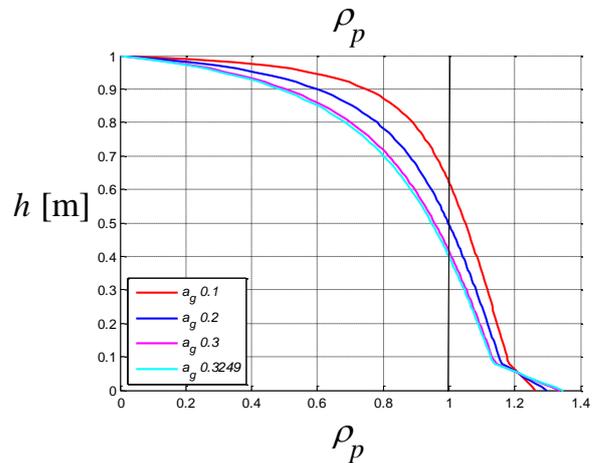


Tabella: rapporti tra le grandezze della teoria presentata e il calcolo tradizionale.

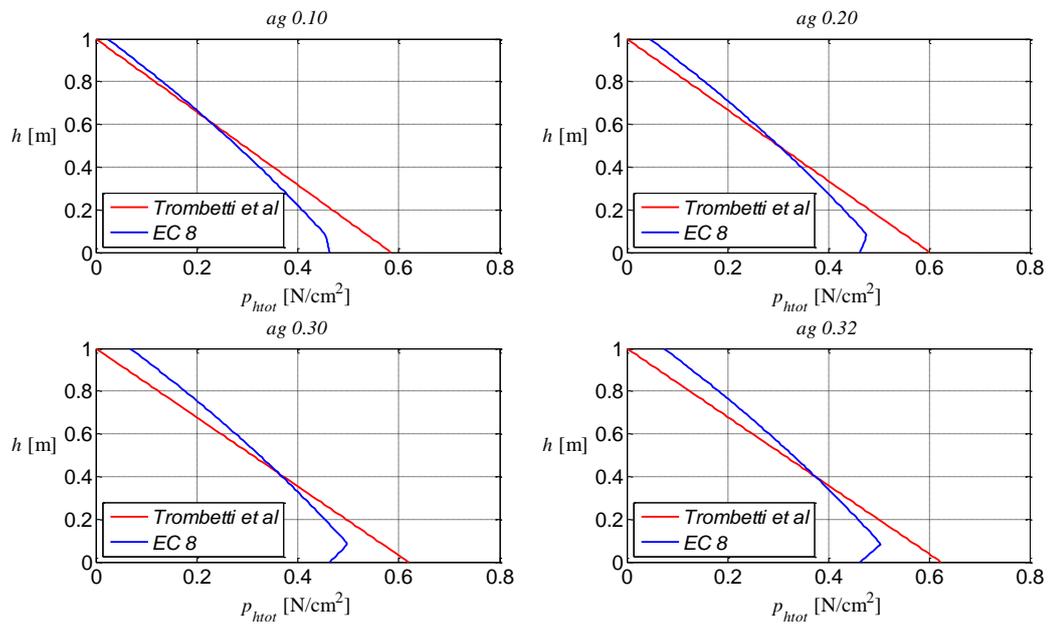


Figura 1: andamento pressioni totali al variare dell'altezza nelle due teorie.

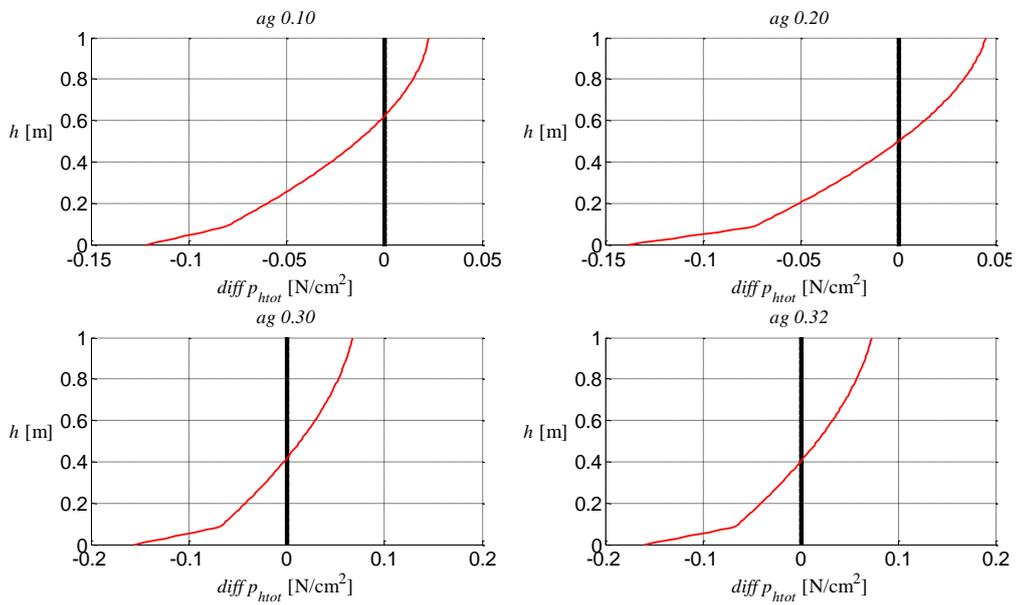


Figura 2: differenza tra le pressioni totali nella teoria tradizionale e nella teoria presentata al variare dell'altezza.