

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

Variazione di energia gravitazionale  
a seguito di eventi dislocativi  
in un semispazio elastico

Relatrice:  
Prof.ssa Maria Elina  
Belardinelli

Presentata da:  
Clara Naldesi

Correlatore:  
Prof. Maurizio Bonafede

Anno Accademico 2018/2019

# Abstract

In questa tesi analizziamo due tipi di dislocazioni in configurazione di deformazione piana ed in prossimità della superficie: la dislocazione tensile e quella di bordo. Ci concentriamo in particolare sullo studio di queste dal punto di vista energetico: in entrambi i casi arriviamo, infatti, all'espressione della variazione di energia gravitazionale dovuta al processo di frattura. Per quanto riguarda la dislocazione tensile confrontiamo l'energia gravitazionale rilasciata con l'energia trasportata dalle onde sismiche.

Nel primo capitolo riportiamo le principali nozioni teoriche necessarie per affrontare il problema. Nel secondo ricaviamo l'espressione del campo di spostamento per i due tipi di dislocazioni analizzati. Il terzo capitolo, infine, è dedicato al calcolo della variazione di energia gravitazionale, anch'esso nel caso della dislocazione tensile e di quella di bordo.

# Indice

<b>1</b>	<b>Elementi di teoria delle dislocazioni</b>	<b>4</b>
1.1	Dislocazioni elastiche piane . . . . .	4
1.1.1	Dislocazioni “a vite” (Screw dislocations) . . . . .	5
1.1.2	Dislocazioni di bordo (Edge dislocations) . . . . .	6
1.1.3	Dislocazioni tensili . . . . .	9
1.1.4	Dislocazioni rettilinee chiuse . . . . .	11
1.2	Problemi in semispazi con superficie libera . . . . .	12
1.3	Il metodo delle Immagini . . . . .	13
1.4	Il vettore di Galerkin . . . . .	14
1.4.1	La strain function di Love . . . . .	15
1.4.2	Problemi statici in semispazi elastici . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Dislocazione tensile e di bordo in prossimità della superficie</b>	<b>21</b>
2.1	Dislocazione tensile in prossimità della superficie . . . . .	21
2.2	Dislocazione di bordo in prossimità della superficie . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Calcolo dell’energia gravitazionale</b>	<b>32</b>
3.1	Introduzione . . . . .	32
3.2	Dislocazione di bordo . . . . .	34
3.2.1	Variazione di energia gravitazionale ed energia trasmessa dalle onde sismiche . . . . .	38
3.3	Dislocazione tensile . . . . .	39

# Introduzione

Un terremoto è un processo di rottura che si verifica all'interno della Terra.

In particolare, le regioni della litosfera terrestre ai margini delle placche tettoniche sono sottoposte a sforzi crescenti nel tempo, causati soprattutto dal moto delle placche stesse. Quando si supera la resistenza del materiale, si crea una frattura lungo la superficie di faglia. I due blocchi adiacenti alla superficie vanno incontro ad un processo di dislocazione: sono soggetti, cioè, ad uno spostamento relativo che li porta in una diversa configurazione finale.

Se la dislocazione si verifica spontaneamente, l'energia finale del sistema deve essere inferiore rispetto a quella iniziale. L'energia potenziale che si sprigiona nel processo è principalmente composta da due contributi: energia potenziale elastica dovuta agli sforzi tettonici ed energia potenziale gravitazionale. Questa quantità di energia viene in parte trasmessa sotto forma di energia cinetica dalle onde sismiche ed in parte si dissipa, ad esempio vincendo l'attrito presente tra i due blocchi adiacenti al piano di faglia.

Poiché la frazione di energia dissipata non è direttamente quantificabile tramite metodi sismologici, è importante studiare la variazione di energia potenziale per poter comprendere quale frazione di energia si trasmette tramite le onde sismiche e quale, invece, si dissipa.

In questo lavoro di tesi ci concentreremo sull'analisi della variazione di energia gravitazionale nel caso di due tipi di dislocazioni in configurazione di "deformazione piana" in prossimità della superficie: la dislocazione tensile e quella di bordo.

Nel primo capitolo riportiamo le principali nozioni teoriche necessarie per affrontare il problema.

Nel secondo ricaviamo l'espressione del campo di spostamento dovuto al processo di frattura per i due tipi di dislocazioni analizzati.

Il terzo capitolo, infine, è dedicato al calcolo della variazione di energia gravitazionale, anch'esso nel caso della dislocazione tensile e di quella di bordo.

# Capitolo 1

## Elementi di teoria delle dislocazioni

In questo capitolo introdurremo alcuni elementi di teoria delle dislocazioni. Per un'analisi più approfondita si veda [1].

### 1.1 Dislocazioni elastiche piane

Per alcune importanti questioni, fra cui la formulazione di una teoria dei fenomeni di frattura, è importante lo studio delle dislocazioni in condizioni di deformazione piana (per esempio  $u_x = u_x(x, y), u_y = u_y(x, y), u_z = 0$ ) o antipiana ( $u_z = u_z(x, y), u_x = u_y = 0$ ). In tali casi, semplici considerazioni di invarianza traslazionale lungo l'asse  $z$  portano a ritenere che la linea di dislocazione debba essere parallela all'asse  $z$ .

Consideriamo una dislocazione piana definita sul semipiano  $\Sigma = \{(x, z); x > 0, -\infty < z < +\infty\}$  delimitato dalla linea di dislocazione  $\mathcal{D} = \{(x, y); x = y = 0\}$  (asse  $z$ ). L'orientazione di  $\Sigma$  è definita dalla normale  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{j}}$  e l'orientazione lungo  $\mathcal{D}$  secondo la direzione  $\hat{\mathbf{k}}$ , in accordo con la convenzione antioraria girando lungo la linea di dislocazione (immaginiamo di chiudere la linea di dislocazione all'infinito, lungo il perimetro del semipiano  $\Sigma$ ), intorno a  $\hat{\mathbf{j}}$ . La faccia positiva di  $\Sigma$  sia soggetta ad uno spostamento costante  $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{b}$  (vettore di Burgers) rispetto alla faccia negativa.

La condizione di dislocazione, scritta per una curva chiusa  $L$  attorno all'asse  $z$  è

$$\oint_L du_i = -bi \quad (1.1)$$

e l'equazione di equilibrio per una dislocazione elastica si scrive

$$\frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla^2 \mathbf{u} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{b} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

dove  $r$  è il modulo del vettore bi-dimensionale  $(x, y)$  e  $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)$ .

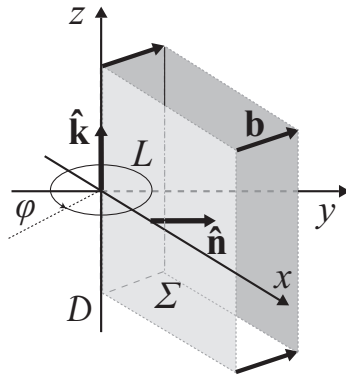


Figura 1.1: Schema e notazione impiegata per descrivere una dislocazione piana

Possiamo allora distinguere tre casi, a seconda che il vettore di Burgers sia diretto lungo l'asse  $z$  (dislocazioni “a vite”), lungo  $x$  (dislocazioni di bordo), oppure lungo  $y$  (dislocazioni tensili).

### 1.1.1 Dislocazioni “a vite” (Screw dislocations)

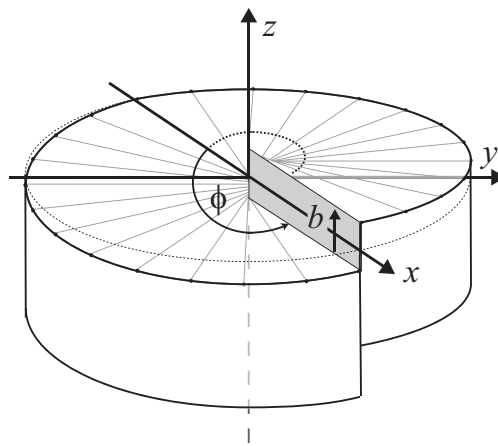


Figura 1.2: Dislocazione a vite.

Consideriamo la superficie di dislocazione data dal semipiano  $x, z$  con  $x > 0$ , orientata secondo la normale  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{j}}$  (versore dell'asse  $y$ ), con linea di dislocazione lungo l'asse  $z$ . Sia inoltre  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{k}}$ , dove  $\hat{\mathbf{k}}$  è il versore dell'asse  $z$ . Il secondo membro della (1.2) è nullo.

La soluzione sarà indipendente da  $z$  per simmetria traslazionale. Supponiamo inoltre che sia  $u_x = u_y = 0$ ; allora  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  e la (1.2) si riduce a  $\nabla^2 u_z = 0$ , corredata dalla condizione (1.1). La soluzione è

$$u_z(x, y) = -\frac{b}{2\pi}\phi, \quad \phi = \Im \{\ln(x + iy)\}$$

Si può dimostrare che  $\phi$  è una funzione armonica, cioè che  $\nabla^2 \phi = 0$ . Per simmetria, sommiamo  $b/2$  al precedente campo di spostamento; in tal modo  $u_z$  vale  $+b/2$  in  $x > 0$  e  $y = 0^+$  mentre vale  $-b/2$  in  $x > 0$  e  $y = 0^-$ ; ciò equivale a scegliere la determinazione di  $\phi$  che va da  $-\pi$  in  $y = 0^+$ ,  $x > 0$  a  $+\pi$  in  $y = 0^-$ ,  $x > 0$ ; ovviamente questa traslazione non altera i campi di deformazione e sforzo. Possiamo riscrivere allora, impiegando funzioni reali,

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \text{Atan} \left( \frac{x}{y} \right), \quad \text{Atan} \left( \frac{x}{y} \right) = -\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{y}, & \text{se } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{y}, & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

È immediato verificare che questa funzione presenta un salto di ampiezza  $b$  fra  $y = 0^-$  e  $y = 0^+$  per  $x > 0$  mentre è continua e derivabile altrove (in particolare è continua per  $y \rightarrow 0$  se  $x < 0$ ). Deformazioni e sforzi sono calcolabili immediatamente dalla (1.3); le componenti non nulle sono:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{b}{4\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= 2\mu\epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{b}{4\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= 2\mu\epsilon_{yz} \end{aligned}$$

In coordinate polari nel piano  $x, y$ , posto  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  possiamo riscrivere le componenti di sforzo

$$\tau_{xz} = \frac{\mu b \sin \theta}{2\pi r}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\mu b \cos \theta}{2\pi r}$$

che mostrano le caratteristiche singolari della soluzione in prossimità della linea di dislocazione  $r = 0$ .

### 1.1.2 Dislocazioni di bordo (Edge dislocations)

Consideriamo ora l'equazione (1.2) nel caso in cui la superficie di dislocazione sia ancora il semipiano  $x, z$  con  $x > 0$  e la linea di dislocazione coincida con l'asse  $z$ , ma il vettore di Burgers sia in direzione dell'asse  $x$ :  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{i}}$ . L'equazione di dislocazione (1.2) diventa allora

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = b\hat{\mathbf{j}}\delta(\mathbf{r})$$

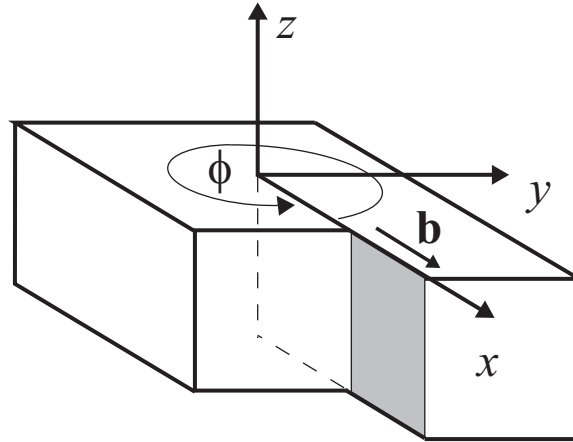


Figura 1.3: *Dislocazione di bordo.*

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Considerazioni di invarianza traslazionale e simmetria richiedono che sia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$  e  $u_z = 0$ . La soluzione dovrà inoltre soddisfare alla condizione di dislocazione  $\oint du_x = -b$ . È opportuno scomporre  $\mathbf{u}$  in due termini,  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ , il primo che soddisfi alla condizione di dislocazione e il secondo che soddisfi alla (1.2) per un mezzo continuo. Una scelta appropriata per il primo termine è

$$v_x = -\frac{b}{2\pi}\phi, \quad v_y = -\frac{b}{2\pi}\ln r$$

dove  $\phi = -A \tan(\frac{x}{y})$  è l'angolo fra il semi-asse  $x < 0$  e il punto  $\mathbf{r}$  (in verso anti-orario visto da  $z$ ) già discusso a proposito della (1.3) e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . La scelta per  $v_y$  è dovuta al fatto che essa è la parte reale della stessa funzione analitica di cui  $\phi$  è la parte immaginaria. In tal modo  $\nabla^2 v_y = 0$  per  $r \neq 0$ . Inoltre è  $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ , come è facile verificare esplicitamente per  $r \neq 0$  e, tramite il teorema di Gauss, anche in un cilindretto attorno a  $r = 0$ <sup>1</sup>. Resta da determinare il valore di  $\nabla^2 v_y$  in  $\mathbf{r} = 0$ . Impiegando il teorema di Gauss su un cilindretto di raggio  $r$  attorno all'origine e altezza unitaria lungo  $z$ , si ha

$$\int_C \nabla^2 v_y dC = \oint_{\partial C} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla v_y dl = \int_{-\pi}^{\pi} r d\phi \frac{\partial v_y}{\partial r} = -b$$

Quindi  $\nabla^2 \mathbf{v} = -b \hat{\mathbf{j}} \delta(\mathbf{r})$  e l'equazione per  $\mathbf{w}$  è

$$\nabla^2 \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = 2b \hat{\mathbf{j}} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>Detto  $C$  un cilindro di raggio  $r$  e altezza unitaria lungo  $z$ , la normale alla superficie laterale è  $\hat{\mathbf{n}} = (-\cos \phi, -\sin \phi, 0)$  e quindi si ha  $\int \nabla \cdot \mathbf{v} dC = \oint \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \frac{b}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [\phi \cos \phi + \log r \sin \phi] r d\phi = 0$ .



Questa è l'equazione dell'elastostatica in presenza di forze di volume  $\mathbf{f} = -2\mu b \hat{\mathbf{j}} \delta(x) \delta(y)$  e la soluzione per  $\mathbf{w}$  può essere ottenuta integrando il tensore di Somigliana su tutto lo spazio in cui sono presenti forze di volume

$$\begin{aligned} w_i &= \int dx' \int dy' \int [-2\mu b \delta(x') \delta(y')] \mathcal{G}_{i2}(x - x', y - y', z - z') \\ &= -2\mu b \int_{-\infty}^{\infty} dz' \mathcal{G}_{i2}(x, y, z - z') \end{aligned} \quad (1.5)$$

Inserendo l'espressione esplicita per il tensore di Somigliana, risulta quindi, per  $i = 1$ :

$$w_x = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} xy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(r^2 + t^2)^{3/2}} = \frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \frac{xy}{r^2}$$

dove  $t = z - z'$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (l'integrale si calcola agevolmente tramite la sostituzione  $t = r \sinh \alpha \implies dt = r \cosh \alpha d\alpha$ ). Per  $i = 2$  otteniamo:

$$w_y = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{[r^2 + (z-z')^2]^{1/2}} + \frac{y^2}{[r^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \right\} dz'$$

Il calcolo richiede particolare attenzione dato che l'integrale del primo termine diverge; tuttavia nei problemi di elasticità siamo interessati alle deformazioni, e quindi agli spostamenti, a meno di moti di traslazione che possiamo calcolare come segue: detto  $I(r, z) = \int \frac{dz'}{[r^2 + (z-z')^2]^{1/2}}$ , abbiamo

$$\frac{\partial I}{\partial r} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(r dz')}{[r^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{2}{r} \implies I = -2 \ln r + C$$

dove  $C$  è una costante di integrazione, inessenziale nel calcolo di sforzi e deformazioni (il procedimento di integrazione impiegato equivale quindi ad eliminare una costante infinita dal calcolo dello spostamento). Abbiamo quindi

$$w_y = \frac{b}{2\pi} \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \ln r - \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \frac{y^2}{r^2}$$

Risulta infine, a meno di traslazioni

$$\begin{cases} u_x = -\frac{b}{2\pi} \left[ \phi + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{xy}{r^2} \right] \\ u_y = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r - \frac{y^2}{r^2} \right] \end{cases} \quad (1.6)$$

Le componenti non nulle di sforzo, in coordinate cartesiane, sono facilmente ricavabili dalle deformazioni tramite le relazioni costitutive

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(3x^2 + y^2)}{r^4} \\
 \tau_{yy} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(y^2 - x^2)}{r^4} \\
 \tau_{xy} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(y^2 - x^2)}{r^4} \\
 \tau_{zz} &= \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = \frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y}{r^2}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

### 1.1.3 Dislocazioni tensili

Consideriamo infine l'equazione (1.2) nel caso in cui il vettore di Burgers sia in direzione dell'asse  $y$ :  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{j}}$ . L'equazione di dislocazione (1.2) diventa allora

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -b \hat{\mathbf{i}} \delta(\mathbf{r})$$

dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Considerazioni di invarianza traslazionale e simmetria richiedono che sia  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$  e  $u_z = 0$ . La soluzione dovrà inoltre soddisfare alla condizione di dislocazione  $\oint du_y = -b$ . Come nel caso precedente scomponiamo lo spostamento  $\mathbf{u}$  in un termine discontinuo e uno continuo  $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ . In questo caso è opportuno scegliere

$$v_x = \frac{b}{2\pi} \ln r, \quad v_y = -\frac{b}{2\pi} \phi = \frac{b}{2\pi} \text{Atan} \left( \frac{x}{y} \right)$$

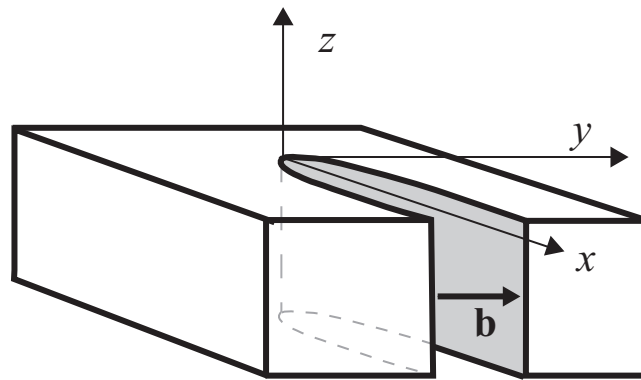


Figura 1.4: *Dislocazione tensile.*

In tal modo, infatti sono nulli sia  $\nabla^2 \mathbf{v}$  che  $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  per  $r \neq 0$ . Integrando  $\nabla^2 \mathbf{v}$  su un circoletto attorno all'origine si dimostra facilmente che

$$\nabla^2 \mathbf{v} = b \hat{\mathbf{i}} \delta(\mathbf{r})$$

e quindi l'equazione per  $\mathbf{w}$  diventa

$$\nabla^2 \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = -2b \hat{\mathbf{i}} \delta(\mathbf{r})$$

che può essere risolta integrando il tensore di Somigliana sull'asse  $z$ , in analogia con il procedimento seguito per le dislocazioni di bordo.

$$w_i = 2\mu b \int_{-\infty}^{\infty} dz' \mathcal{G}_{i1}(x, y, z - z')$$

Si ottiene infine

$$\begin{cases} u_x = \frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} \right] = \frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln r + \frac{y^2}{r^2} \right] \\ u_y = \frac{b}{2\pi} \left[ \text{Atan} \frac{x}{y} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{xy}{r^2} \right] \end{cases} \quad (1.8)$$

(le due espressioni riportate sopra per  $u_x$  sono equivalenti perché differiscono per una costante). Per derivazione delle precedenti ricaviamo le deformazioni e da queste, tramite le relazioni costitutive, gli sforzi

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{-b\mu}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - y^2)}{r^4} \\ \tau_{xy} &= \frac{-b\mu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y(x^2 - y^2)}{r^4} \\ \tau_{yy} &= \frac{-b\mu}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 + 3y^2)}{r^4} \\ \tau_{zz} &= \nu(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = \frac{-b\mu\nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x}{r^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le restanti componenti sono nulle. Se la linea di dislocazione non coincide con l'asse  $z$  (e.g.  $x = x_0$  e  $y = y_0$ ) sarà sufficiente effettuare una traslazione di coordinate per portare la nuova origine in  $(x_0, y_0)$ . Le formule precedenti possono essere quindi impiegate con le ovvie sostituzioni  $x \rightarrow x - x_0$ ,  $y \rightarrow y - y_0$ .

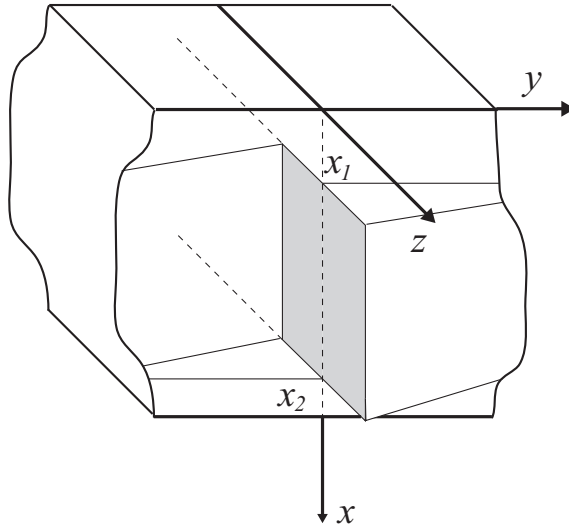


Figura 1.5: *Dislocazione chiusa "a vite"*.

### 1.1.4 Dislocazioni rettilinee chiuse

Le precedenti soluzioni presentano una discontinuità dello spostamento sul semipiano  $y = 0$ ,  $0 < x < +\infty$  e sono dette "*dislocazioni elementari*". Definiamo "*chiuse*" le superfici di dislocazione che si aprono lungo una linea di dislocazione e si chiudono su un'altra: ad esempio, una dislocazione rettilinea che si apre in  $x = x_1$ ,  $y = 0$  e si chiude in  $x = x_2$ ,  $y = 0$ . Soluzioni di questo tipo possono essere facilmente ottenute per sovrapposizione, sommando la soluzione con vettore di Burgers  $\mathbf{b}$  e linea di dislocazione  $x = x_1$ ,  $y = 0$  con l'analoga soluzione con vettore di Burgers  $-\mathbf{b}$  e linea di dislocazione  $x = x_2$ ,  $y = 0$ . In tal modo il campo di spostamento è discontinuo solo sulla striscia  $x_1 < x < x_2$ ,  $y = 0$ .

Ad esempio, nota la soluzione (1.3), una dislocazione chiusa "a vite" è descritta dal seguente campo di spostamento

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \left[ \arctan \frac{x - x_1}{y} - \arctan \frac{x - x_2}{y} \right]$$

Notiamo che le costanti  $\pm \frac{\pi}{2}$  che compaiono nella definizione di  $\text{Atan}(\frac{x}{y})$  si cancellano, semplificando la scrittura della soluzione. Analogamente, le componenti di deformazione e sforzo per una dislocazione chiusa "a vite" si ottengono per sovrapposizione delle (1.4):

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xz} &= \frac{b}{4\pi} \left[ \frac{y}{(x-x_1)^2+y^2} - \frac{y}{(x-x_2)^2+y^2} \right], & \tau_{xz} &= 2\mu\epsilon_{xz} \\
\epsilon_{yz} &= -\frac{b}{4\pi} \left[ \frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+y^2} - \frac{x-x_2}{(x-x_2)^2+y^2} \right], & \tau_{yz} &= 2\mu\epsilon_{yz}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Procedendo in modo analogo possiamo ottenere le soluzioni per dislocazioni chiuse di bordo e tensili.

Le dislocazioni con vettore di Burgers assegnato e costante, come quelle considerate finora, sono dette “*di Volterra*”. Sono dette invece dislocazioni “*di Somiglianza*” quelle in cui la discontinuità dello spostamento è assegnata ma variabile sulla superficie di dislocazione.

## 1.2 Problemi in semispazi con superficie libera

Nel paragrafo precedente abbiamo ottenuto alcune soluzioni in spazi elastici omogenei ed illimitati, utili per rappresentare i campi di spostamento, deformazione e sforzo generati da sorgenti interne, sismiche o vulcaniche. Tuttavia, la Terra è un corpo geometrico limitato, e l’impiego di soluzioni ottenute in spazi elastici illimitati è, a rigor di termini, scorretto; dette soluzioni sono in particolare inadatte a descrivere i campi di sforzo e deformazione in prossimità della superficie terrestre, dove le trazioni dovranno soddisfare opportune *condizioni al contorno*, che non sono soddisfatte in generale dalle soluzioni in spazi elastici illimitati. Sembra plausibile che l’applicazione di soluzioni in spazi illimitati sia accettabile in prima approssimazione solo per regioni molto lontane dalla superficie e prossime alla sorgente deformativa. Ma questa limitazione è inaccettabile per molti scopi, in particolare per lo studio della deformazione della superficie terrestre stessa, che oggi costituisce uno dei più potenti mezzi di indagine delle sorgenti sismiche e vulcaniche.

La superficie terrestre può essere descritta con ottima approssimazione come una *superficie libera*, cioè come una superficie sulla quale sono nulle le trazioni applicate dall’esterno; nell’impiego di questa *condizione al contorno* trascuriamo l’azione di corpi esterni alla superficie solida della Terra, cioè trascuriamo la pressione atmosferica, l’azione dei venti, le forze di gravità esercitate dal Sole, dalla Luna e dagli altri corpi celesti, le forze elettromagnetiche fra linee di corrente esterne ed interne alla Terra, etc. La più intensa fra queste forze esterne è la pressione atmosferica, ma un semplice calcolo mostra che la pressione litostatica, già a 4-5 metri di profondità, supera la pressione atmosferica; dato che le sorgenti sismiche e vulcaniche sono tipicamente localizzate a profondità di diversi km, l’approssimazione di *superficie libera* può essere ritenuta valida con ottima approssimazione. Inoltre, è ben noto che la forma della Terra è in prima approssimazione sferica, e quindi le coordinate privilegiate per la sua descrizione sarebbero quelle polari sferiche  $r, \theta, \phi$ . L’impiego della geometria sferica è tuttavia essenziale solo quando si considerano fenomeni che coinvolgono l’intero pianeta (e.g. il campo di gravità, il

campo geomagnetico, le oscillazioni libere della Terra, etc.) o regioni con estensioni di migliaia di km. In tal caso, oltre alle complicazioni matematiche formali dovuti all'uso della geometria sferica, è necessario tenere conto almeno delle maggiori disomogeneità presenti nell'interno della Terra, come la transizione crosta-mantello, le discontinuità a 410 e 670 km nel mantello superiore, la transizione mantello-nucleo e quella nucleo esterno-interno.

Se però siamo interessati allo studio di regioni con dimensioni lineari molto inferiori al raggio terrestre, possiamo approssimare la Terra come un semispazio elastico omogeneo con superficie libera orizzontale. Nel presente capitolo utilizzeremo questa approssimazione e utilizzeremo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi  $x, y$  lungo l'orizzontale e asse  $z$  diretto verticalmente verso l'interno del semispazio; la superficie terrestre è descritta dal piano  $z = 0$  e la condizione di superficie libera richiede che sia

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad \text{in } z = 0 \text{ (condizione di superficie libera)}$$

Vedremo nei prossimi paragrafi alcuni metodi per ricavare soluzioni in semispazi elastici, a partire dalla conoscenza delle soluzioni in spazi illimitati.

### 1.3 Il metodo delle Immagini

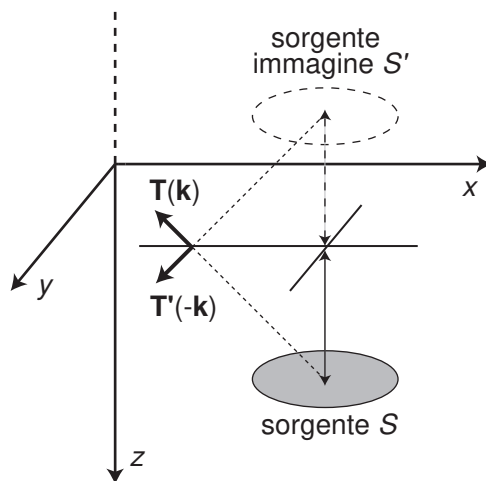


Figura 1.6: Una sorgente in  $z > 0$  e la sua immagine speculare in  $z < 0$  generano rispettivamente trazioni  $\mathbf{T}(\mathbf{k})$  e  $\mathbf{T}'(-\mathbf{k})$  con componenti orizzontali uguali e componenti verticali opposte. Per il principio di azione e reazione  $\mathbf{T}'(-\mathbf{k}) = -\mathbf{T}(\mathbf{k})$  e quindi la trazione risultante ha componente orizzontale nulla.

Consideriamo la soluzione per una sorgente deformativa  $S$  immersa in uno spazio elastico illimitato. La sorgente sia localizzata in  $z > 0$ . Questa soluzione non avrà in generale valori non nulli delle trazioni sul piano  $z = 0$ . Sia  $\mathbf{u}$  il campo di spostamento prodotto da  $S$ . Consideriamo una *sorgente immagine*  $S'$ , posta specularmente ad  $S$  rispetto al piano  $z = 0$ . Sia  $\mathbf{u}'$  il campo di spostamento prodotto da  $S'$ . Per simmetria, il vettore spostamento  $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ , generato dalla sovrapposizione delle soluzioni  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$ , avrà componente  $U_z$  dispari in  $z$  e componenti orizzontali  $U_x$  e  $U_y$  pari in  $z$ . Di conseguenza, le componenti del gradiente dello spostamento  $U_{x,x}$ ,  $U_{y,y}$ ,  $U_{z,z}$ ,  $U_{x,y}$  e  $U_{y,x}$  sono funzioni pari di  $z$ , mentre  $U_{x,z}$ ,  $U_{z,x}$  e  $U_{y,z}$ ,  $U_{z,y}$  sono dispari in  $z$ . Utilizzando le relazioni costitutive per un mezzo elastico isotropo, otteniamo le seguenti simmetrie per gli sforzi complessivi  $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma'_{ij}$ , applicati sulla superficie  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)U_{z,z} + \lambda(U_{x,x} + U_{y,y}) && \text{è funzione pari di } z \\ \Sigma_{xz} &= \mu(U_{x,z} + U_{z,x}) && \text{è funzione dispari di } z \\ \Sigma_{yz} &= \mu(U_{y,z} + U_{z,y}) && \text{è funzione dispari di } z\end{aligned}$$

Se quindi gli sforzi sono funzioni continue di  $z$ , nell'intorno di  $z = 0$ , dovrà essere  $\Sigma_{xz} = \Sigma_{yz} = 0$  in  $z = 0$ , mentre  $\Sigma_{zz}$  ha valore doppio di quello previsto dalla singola sorgente  $S$ .

Utilizzando la tecnica delle immagini siamo quindi in grado di ottenere una soluzione (somma della soluzioni per  $S$  e  $S'$ ) in cui due delle tre condizioni di superficie libera sono soddisfatte. Resta solo da rimuovere dalla superficie  $z = 0$  la componente  $\Sigma_{zz}$ .

Nei casi in cui la soluzione per  $S$  prevede sforzi  $\sigma_{zz}$  identicamente nulli, la tecnica delle immagini consente da sola di ottenere la soluzione per il semispazio. L'esempio più interessante è quello relativo alle dislocazioni a vite, che forniscono un semplice modello per descrivere sforzi e deformazioni indotte da faglie trasformati molto lunghe.

## 1.4 Il vettore di Galerkin

Una tecnica molto versatile, che può essere impiegata per "rimuovere" trazioni non nulle dalla superficie  $z = 0$ , fa uso del vettore di Galerkin, che fornisce una rappresentazione molto generale degli spostamenti e sforzi in un problema di elasticità statica. L'equazione di Cauchy-Navier può essere scritta tramite i potenziali di Helmholtz  $\phi$  e  $\vec{\psi}$  come segue:

$$\rho_0 \left( \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla^2 \phi) + \mu \nabla \times (\nabla^2 \vec{\psi}), \quad (1.11)$$

dove  $\phi$  e  $\vec{\psi}$  forniscono lo spostamento  $\vec{u}$  attraverso:

$$2\mu u_i = \phi_{,i} + e_{ijk} \psi_{k,j}$$

L'equazione (1.11), nel caso statico, è certamente soddisfatta se  $\nabla^2\phi = \text{cost}$  e  $\nabla^2\psi_k = \text{cost}$ . Tuttavia questa non è la soluzione più generale. Nel 1930 Galerkin, alla ricerca di soluzioni più generali, introdusse una funzione potenziale vettore  $\vec{F}$  legato allo spostamento attraverso questa relazione

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu)F_{i,jj} - F_{j,ji} \quad (1.12)$$

dove  $F_i$  soddisfa all'equazione

$$F_{i,jjkk} = -\frac{f_i}{1 - \nu}, \quad (1.13)$$

che discende dall'equazione di Cauchy Navier nel caso statico:

$$\left[ \frac{c - 1}{2(1 - 2\nu)} - \frac{1}{2} \right] F_{j,jii} + \frac{c}{2} F_{k,jji} + f_k = 0$$

Il vettore  $F_i$  così definito è il *vettore di Galerkin*. Se le forze di volume sono nulle ( $f_i = 0$ ) l'equazione (1.13) è detta *biarmonica* e le sue soluzioni sono dette *funzioni biarmoniche*. Dalla (1.12) otteniamo facilmente, tramite le relazioni costitutive, le espressioni per gli sforzi in termini di  $F_1, F_2, F_3$ .

Se le forze di volume sono nulle (i.e.  $f_i = 0$ ), si può inoltre dimostrare che ogni vettore di Galerkin ha un vettore di Galerkin equivalente con una componente identicamente nulla.

### 1.4.1 La strain function di Love

In molte applicazioni, se la forza di volume ha una sola componente (o se è nulla) ci si può ricondurre ad un vettore di Galerkin con una sola componente diversa da zero (e.g.  $F_3 = Z$ ). La funzione  $Z$  è detta *funzione di strain di Love* e fu introdotta da A.E.H. Love nel 1906 per trattare solidi di rivoluzione in configurazione assi-simmetrica. In coordinate cartesiane  $x, y, z$  si ha:

$$\nabla^4 Z = -\frac{f_z}{1 - \nu},$$

dove  $\nabla^4 \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} \right)$

Ponendo  $F_1 = F_2 = 0$  e  $F_3 = Z$  nelle (1.12) otteniamo gli spostamenti nella forma

$$\begin{aligned} 2\mu u_x &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}, \\ 2\mu u_y &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z}, \\ 2\mu u_z &= \left[ 2(1 - \nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \end{aligned} \quad (1.14)$$



e da questi, tramite la relazione costitutiva  $\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ , riscrivendo  $\lambda = 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu}$ , otteniamo gli sforzi

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial x^2} \right) Z, \\
\tau_{yy} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial y^2} \right) Z, \\
\tau_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial z^2} \right] Z, \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial z}, \\
\tau_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z, \\
\tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

## 1.4.2 Problemi statici in semispazi elastici

In geofisica è tipicamente necessario considerare problemi in prossimità della superficie libera del suolo o in prossimità di superfici di discontinuità strutturali. La strain function di Love è spesso impiegata per “correggere” soluzioni ottenute in spazi illimitati in modo che soddisfino alle condizioni al contorno su dette superfici. Ad esempio, nei precedenti paragrafi (1.1.1, 1.1.2 e 1.1.3) abbiamo presentato le soluzioni per dislocazioni elementari (sorgenti deformative rappresentative di faglie) all’interno di uno spazio elastico illimitato. Tuttavia, per motivi pratici, si possono misurare le deformazioni solo alla superficie del suolo, (o in pozzi poco profondi) sicché l’interpretazione dei dati sperimentali deve necessariamente far ricorso a modelli matematici in cui è presente una superficie libera. Se la superficie è descritta dal piano  $z = 0$ , la condizione di superficie libera in coordinate cilindriche richiede che si annullino le trazioni  $\tau_{zz}, \tau_{z\theta}, \tau_{rz}$ . Il problema può essere spesso convenientemente affrontato partendo dalla soluzione per la sorgente deformativa in uno spazio elastico illimitato, calcolando le trazioni  $\tau_{zz}, \tau_{z\theta}, \tau_{rz}$  che questa genera in  $z = 0$  e sottraendo la soluzione di un problema nel semispazio elastico  $z > 0$  con trazioni  $\tau_{zz}, \tau_{z\theta}, \tau_{rz}$  assegnate sulla superficie  $z = 0$ . Il problema è dunque ricondotto a quello di trovare la soluzione elastostatica in un semispazio con assegnate trazioni sulla superficie.

Nel paragrafo 1.3 abbiamo visto che con il metodo delle immagini possiamo limitarci a considerare problemi in cui la sola componente  $\tau_{zz}$  è diversa da zero in  $z = 0$ .

Il problema può essere risolto in modo generale se assegniamo sulla superficie  $z = 0$  del semispazio trazioni modulate armonicamente, del tipo:

$$\tau_{zz} = \mathcal{T} \cos kx \cos ly, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{1.16}$$

Il problema può essere risolto tramite una funzione di Love  $Z$  che, in assenza di forze, deve essere biarmonica. Si può verificare facilmente che, se  $\psi$  è armonica, allora la seguente funzione è biarmonica:

$$Z = (A + Bcz)\psi \tag{1.17}$$

(anzi si dimostra, sotto ipotesi abbastanza generali, che una funzione biarmonica in coordinate cartesiane deve essere necessariamente il prodotto di una funzione lineare e di una funzione armonica). Nella precedente espressione  $c^{-1}$  è un fattore di scala verticale, inserito per rendere i coefficienti  $A$  e  $B$  dimensionalmente omogenei; vedremo fra poco che può essere determinato in termini di  $k$  e  $l$ . Le condizioni al contorno (1.16) suggeriscono che  $\psi$  sia del tipo

$$\psi = f(z) \cos kx \cos ly \quad (1.18)$$

che, inserita in  $\nabla^2\psi = 0$ , fornisce

$$f(z) = e^{\pm\sqrt{k^2+l^2}z}.$$

Vediamo quindi che il fattore di scala verticale  $c$  può essere scelto come  $c = \sqrt{k^2 + l^2}$  e quindi

$$f(z) = e^{-cz}$$

(l'altra soluzione  $e^{+cz}$  è da scartare per le condizioni al contorno all'infinito, che è ragionevole supporre limitate). Gli sforzi corrispondenti alla funzione di Love (1.17) si calcolano facilmente tramite le (1.15). Per effettuare tale calcolo, notiamo che

$$\begin{aligned} \nabla^2 Z &= 2Bc \frac{\partial\psi}{\partial z} = -2Bc^2\psi \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= -cA\psi + Bc(1 - cz)\psi \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)Z &= -(A + Bcz)c^2\psi \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= -k^2(A + Bcz)\psi \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= -l^2(A + Bcz)\psi \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} &= c^2(A + Bcz - 2B)\psi \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x}[2\nu Bc^2 - (A + Bcz)c^2]\psi, \\ \tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y}[2\nu Bc^2 - (A + Bcz)c^2]\psi, \end{aligned} \quad (1.19)$$

e le condizioni al contorno  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  in  $z = 0$  impongono

$$A = 2\nu B. \quad (1.20)$$

Infine, la componente  $\tau_{zz}$  è data da

$$\tau_{zz} = Bc^3(1 + cz)\psi = Bc^3(1 + cz)e^{-cz} \cos kx \cos ly \quad (1.21)$$

e un confronto con la condizione (1.16) richiede che sia

$$B = \frac{\mathcal{T}}{c^3}, \quad A = 2\nu \frac{\mathcal{T}}{c^3}. \quad (1.22)$$

La strain function quindi ha la seguente espressione

$$Z(x, y, z) = \frac{\mathcal{T}}{c^3}(2\nu + kz) e^{-cz} \cos kx \cos ly \quad (1.23)$$

Spostamenti e sforzi sono dati in definitiva dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathcal{T}k}{2\mu c^2}(1 - 2\nu - cz) e^{-cz} \sin kx \cos ly, \\ u_y &= \frac{\mathcal{T}l}{2\mu c^2}(1 - 2\nu - cz) e^{-cz} \cos kx \sin ly, \\ u_z &= -\frac{\mathcal{T}}{2\mu c}[2(1 - \nu) + cz] e^{-cz} \cos kx \cos ly, \\ \tau_{xx} &= \frac{\mathcal{T}}{c^2}(k^2 + 2\nu l^2 - k^2 cz)\psi, \\ \tau_{yy} &= \frac{\mathcal{T}}{c^2}(l^2 + 2\nu k^2 - l^2 cz)\psi, \\ \tau_{zz} &= \mathcal{T}(1 + cz)\psi, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\mathcal{T}kl}{c^2}(1 - 2\nu - cz) e^{-cz} \sin kx \sin ly, \\ \tau_{xz} &= \mathcal{T}kz e^{-cz} \sin kx \cos ly, \\ \tau_{yz} &= \mathcal{T}lz e^{-cz} \cos kx \sin ly, \end{aligned} \quad (1.24)$$

In alcuni casi risulta più conveniente assegnare sulla superficie  $z = 0$  trazioni di questo tipo

$$\sigma_{zz} = \sigma \sin(kx) \cos(ly) \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.25)$$

Procediamo come nel caso precedente e troviamo la seguente espressione per la funzione di Love:

$$Z = (A + Bcz)e^{-cz} \sin(kx) \cos(ly) \quad (1.26)$$

Possiamo calcolare gli sforzi relativi a  $Z$  tramite le (1.15), ottenendo:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = \frac{\partial}{\partial x} [2\nu Bc^2 - (A + Bcz)c^2] \psi \quad (1.27)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = \frac{\partial}{\partial y} [2\nu Bc^2 - (A + Bcz)c^2] \psi \quad (1.28)$$

Anche in questo caso, le condizioni al contorno  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  in  $z = 0$  impongono:

$$A = 2\nu B \quad (1.29)$$

e la componente  $\sigma_{zz}$  risulta:

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = Bc^3(1 + cz)\psi \quad (1.30)$$

Dal confronto di  $\sigma_{zz}|_{z=0}$  con la (1.25) ricaviamo le relazioni per i coefficienti  $A$  e  $B$ , uguali alle (1.22).

Otteniamo quindi la seguente espressione per la strain function di Love:

$$Z(x, y, z) = \frac{\sigma}{c^3} (2\nu + cz) e^{-cz} \sin kx \cos ly \quad (1.31)$$

Possiamo infine ricavare spostamenti e sforzi da  $Z$ , sfruttando le (1.14) e le (1.15):

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} = -\frac{\sigma k}{2\mu c^2} (1 - 2\nu - cz) e^{-cz} \cos kx \cos ly \\ u_y &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} = \frac{\sigma l}{2\mu c^2} (1 - 2\nu - cz) e^{-cz} \sin kx \sin ly \\ u_z &= \frac{1}{2\mu} \left[ 2(1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = -\frac{\sigma}{2\mu c} [2(1 - \nu) + cz] \psi \\ \sigma_{xx} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] Z = \frac{\sigma}{c^2} (k^2 + 2\nu l^2 - k^2 cz) \psi \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] Z = \frac{\sigma}{c^2} (l^2 + 2\nu k^2 - l^2 cz) \psi \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = \sigma(1 + cz) \psi \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\tau k l}{c^2} (1 - 2\nu - cz) e^{-cz} \cos kx \sin ly \\ \sigma_{xz} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = -\sigma k z e^{-cz} \cos kx \cos ly \\ \sigma_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] Z = -\sigma l z e^{-cz} \sin kx \sin ly \end{aligned} \quad (1.32)$$

Torniamo ora al problema che ci eravamo posti inizialmente, di ottenere la soluzione per una sorgente deformativa in un semispazio elastico con superficie libera a partire dalla soluzione dell'analogo problema in un mezzo elastico illimitato. Se la soluzione del problema nel mezzo illimitato ha in  $z = 0$  trazioni  $\tau_{xz} = 0$  e  $\tau_{yz} = 0$ , possiamo adottare la seguente procedura:

- calcoliamo le trazioni prodotte sul piano  $z = 0$  dalla soluzione nel mezzo illimitato,

- separiamole tramite trasformate di Fourier nelle componenti armoniche del tipo (1.16),
- sottraiamo da ciascuna componente di Fourier le soluzioni (1.24) e infine
- ricomponiamo il campo complessivo tramite la trasformata inversa di Fourier.

Per la linearità delle equazioni, la soluzione così ottenuta soddisfa all'equazione di Cauchy-Navier in condizioni statiche, possiede trazioni nulle sul piano  $z = 0$  e spostamenti nulli all'infinito (perché ciascuna componente di Fourier gode di dette proprietà); per il teorema di unicità questa deve essere la soluzione del problema in un semispazio con superficie libera.

Se la soluzione del problema nel mezzo illimitato ha in  $z = 0$  trazioni  $\tau_{xz} \neq 0$  e  $\tau_{yz} \neq 0$ , possiamo trovare col metodo delle immagini una soluzione che annulli dette componenti (sia pur raddoppiando la componente  $\tau_{zz}$ ); il metodo delle immagini, illustrato nella figura 1.6, consiste nel sovrapporre alla soluzione per la sorgente in  $z > 0$  la soluzione per una sorgente simmetrica posta in  $z < 0$ . Per generare soluzioni di problemi deformativi in semispazi con superficie libera possiamo quindi sempre ricondurci al caso  $\tau_{zz} \neq 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

## Capitolo 2

# Dislocazione tensile e di bordo in prossimità della superficie

### 2.1 Dislocazione tensile in prossimità della superficie

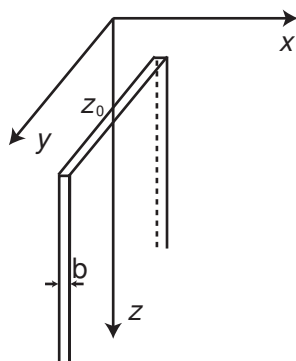


Figura 2.1: *Dislocazione tensile con vettore di Burgers  $b$  in prossimità della superficie libera  $z = 0$ .*

Una dislocazione tensile costituisce una ragionevole schematizzazione matematica di dicchi intrusivi (generati da magma che, penetrando verticalmente attraverso la crosta terrestre, apre fratture in direzione normale alla superficie di frattura), di *sill* (fratture orizzontali di stagnazione del magma al confine fra strati diversi), di crepacci nei ghiacciai, ma anche fratture beanti che si aprono alla superficie quando le tensioni prodotte da sorgenti profonde o da flessione degli strati superficiali superano la pressione litostatica. Inoltre, lo studio delle fratture tensili è di grande importanza in ingegneria, dato che le strutture ingegneristiche sono spesso soggette ad elevati sforzi tensili (si pensi ai cavi

di un ponte sospeso) e i materiali impiegati (ad es. il calcestruzzo) presentano grande resistenza in compressione ma scarsa resistenza in tensione. Nel capitolo precedente abbiamo ricavato le soluzioni per una dislocazione tensile in uno spazio elastico illimitato. Consideriamo il caso di un dicco verticale: consideriamo una linea di dislocazione  $z = z_0, x = 0$  parallela all'asse  $y$  la superficie di dislocazione è il semipiano  $x = 0, z > z_0$ , il vettore di Burgers è orientato lungo l'asse  $x$ . Riscriviamo di seguito le soluzioni ottenute nel capitolo precedente per gli spostamenti, adattandole al sistema di coordinate impiegato nel presente caso (vedi figura 2.1):

$$\begin{aligned} u_x^\infty &= \frac{b}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) + \arctan \frac{z - z_0}{x} + \frac{1}{2(1 - \nu)} \frac{(z - z_0)x}{r^2} \right] \\ u_z^\infty &= \frac{-b}{4\pi(1 - \nu)} \left[ (1 - 2\nu) \ln r + \frac{x^2}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove  $r^2 = x^2 + (z - z_0)^2$  e la funzione  $\operatorname{sgn}(x)$  vale 1 se  $x > 0$ , -1 se  $x < 0$ . Gli sforzi sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^\infty &= \frac{-b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{(z - z_0)[(z - z_0)^2 + 3x^2]}{r^4} \\ \sigma_{zz}^\infty &= \frac{-b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{(z - z_0)[(z - z_0)^2 - x^2]}{r^4} \\ \sigma_{xz}^\infty &= \frac{-b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{x[(z - z_0)^2 - x^2]}{r^4} \\ \sigma_{yy}^\infty &= \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) = \frac{-b\mu\nu}{\pi(1 - \nu)} \frac{z - z_0}{r^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove l'indice  $\infty$  indica la soluzione in uno spazio illimitato. Le altre componenti  $\sigma_{xy}^\infty$  e  $\sigma_{yz}^\infty$  sono identicamente nulle. Le trazioni applicate sulla superficie  $z = 0$  riguardano le componenti  $\sigma_{zz}^\infty, \sigma_{xz}^\infty$  mentre  $\sigma_{yz}^\infty$  è identicamente nulla. Consideriamo una sorgente immagine, che si apre in  $z = -\infty$  e si chiude in  $z = -z_0$ . Chiaramente gli sforzi  $\sigma'_{ij}$  dovuti alla dislocazione immagine sono descritti dalle precedenti soluzioni con  $z_0$  sostituito da  $-z_0$  e con  $b$  cambiato di segno (la dislocazione immagine si *chiude* in  $-z_0$ ). In  $z = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} \Sigma_{zz} &= \sigma_{zz}^\infty + \sigma'_{zz} = \frac{-b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{(-z_0)[z_0^2 - x^2]}{(x^2 + z_0^2)^2} + \frac{b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{z_0[z_0^2 - x^2]}{(x^2 + z_0^2)^2} \\ &= \frac{b\mu}{\pi(1 - \nu)} \frac{z_0[z_0^2 - x^2]}{(x^2 + z_0^2)^2} \\ \Sigma_{xz} &= \sigma_{xz}^\infty + \sigma'_{xz} = \frac{-b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{x[z_0^2 - x^2]}{(x^2 + z_0^2)^2} + \frac{b\mu}{2\pi(1 - \nu)} \frac{x[z_0^2 - x^2]}{(x^2 + z_0^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Per applicare la tecnica della strain function di Love descritta nel paragrafo precedente occorre preliminarmente scomporre  $\Sigma_{zz} = \sigma_{zz}^\infty + \sigma'_{zz}$ , calcolata in  $z = 0$ , nelle sue

componenti di Fourier. Il problema in esame è bidimensionale, e non prevede nessuna dipendenza dalla variabile  $y$ ; trattandosi di una funzione pari in  $x$  possiamo limitarci a sviluppare la funzione  $\Sigma_{zz}(x; z_0)$  in funzioni coseno della variabile  $x$

$$\Sigma_{zz}(x; z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Sigma}(k; z_0) \cos kx \, dk$$

dove  $\tilde{\Sigma}$  è la trasformata-coseno di  $\Sigma_{zz}$ .

$$\tilde{\Sigma}(k; z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_{zz}(x; z_0) \cos kx \, dx = \frac{b\mu}{2\pi(1-\nu)} z_0 |k| e^{-|k|z_0}$$

Ricaviamo quindi, per ciascuna componente armonica, la soluzione del problema elastostatico nel semispazio  $z \geq 0$  con trazioni  $\Sigma_{zz} = \tilde{\Sigma}(k; z_0) \cos kx$  e  $\Sigma_{xz} = 0$  in  $z = 0$  (la componente  $\Sigma_{yz}$  è identicamente nulla nel presente problema). La funzione di Love nel presente caso si ottiene semplicemente ponendo  $l = 0$ ,  $c = |k|$  e  $\mathcal{T} = \tilde{\Sigma}(k; z_0)$  nella (1.23)

$$Z(x, z) = \frac{\tilde{\Sigma}(k; z_0)}{k^3} (2\nu + kz) \cos kx e^{-kz} \quad \text{con} \quad \tilde{\Sigma}(k; z_0) = \frac{b\mu}{2\pi(1-\nu)} z_0 |k| e^{-|k|z_0}.$$

Effettuando le stesse sostituzioni nelle (1.24) otteniamo gli spostamenti

$$\begin{aligned} u_x^a &= \frac{\tilde{\Sigma}(k; z_0)}{2\mu|k|} (1 - 2\nu - |k|z) e^{-|k|z} \sin |k|x, \\ u_z^a &= -\frac{\tilde{\Sigma}(k; z_0)}{2\mu|k|} [2(1-\nu) + |k|z] e^{-|k|z} \cos kx, \\ u_y^a &= 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove l'indice  $a$  indica il contributo di una singola componente armonica, e gli sforzi

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^a &= \tilde{\Sigma}(k; z_0) (1 - |k|z) \cos kx e^{-|k|z} \\ \sigma_{xz}^a &= \tilde{\Sigma}(k; z_0) |k|z \sin |k|x e^{-|k|z} \\ \sigma_{zz}^a &= \tilde{\Sigma}(k; z_0) (1 + |k|z) \cos kx e^{-|k|z} \\ \sigma_{yy}^a &= 2\nu \tilde{\Sigma}(k; z_0) \cos kx e^{-|k|z} \end{aligned}$$

in tutto il semispazio  $z \geq 0$  per ciascuna componente armonica di  $\Sigma_{zz}$  applicata in superficie. Per ottenere gli spostamenti e gli sforzi dovuti complessivamente a  $\Sigma_{zz}$  occorre quindi "sommare" (cioè integrare in  $k$ ) le risposte dovute a tutte le componenti armoniche. Ad esempio, indicando con l'indice  $s$  il contributo di tutti gli sforzi dovuti alla trazione applicata alla superficie, si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^s &= \frac{b\mu}{2\pi(1-\nu)} z_0 \int |k| e^{-|k|(z+z_0)} (1 + kz) \cos kx \, dk \\ &= \frac{b\mu}{\pi(1-\nu)} z_0 \frac{(3z + z_0)(z + z_0) [(z + z_0)^2 - 3x^2] + x^2 [3(z + z_0)^2 - x^2]}{[(z + z_0)^2 + x^2]^3} \end{aligned}$$



analogamente si ottengono le altre componenti degli sforzi:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^s &= -\frac{b\mu}{\pi(1-\nu)}z_0 \frac{(z^2 - z_0^2) [(z + z_0)^2 - 3x^2] - x^2 [3(z + z_0)^2 - x^2]}{[(z + z_0)^2 + x^2]^3} \\ \sigma_{xz}^s &= \frac{2b\mu}{\pi(1-\nu)}z_0 \frac{xz [3(x + z_0)^2 - x^2]}{[(z + z_0)^2 + x^2]^3} \\ \sigma_{yy}^s &= \frac{2b\mu\nu}{\pi(1-\nu)}z_0 \frac{(z + z_0)^2 - x^2}{[(z + z_0)^2 + x^2]^2}\end{aligned}$$

e gli spostamenti:

$$\begin{aligned}u_x^s &= \frac{b}{2\pi(1-\nu)}z_0 \frac{(1-2\nu)x [(z + z_0)^2 + x^2] - 2xz(z + z_0)}{[(z + z_0)^2 + x^2]^2} \\ u_z^s &= -\frac{b}{2\pi(1-\nu)}z_0 \frac{[(3-2\nu)z + 2(1-\nu)z_0] [(z + z_0)^2 - x^2] + 4(1-\nu)x^2(z + z_0)}{[(z + z_0)^2 + x^2]^2}\end{aligned}\tag{2.4}$$

La soluzione del problema dislocativo in un semispazio elastico è quindi data da: soluzione per una sorgente posta in uno spazio illimitato, più soluzione per la sorgente immagine, meno la soluzione per un semispazio con trazioni  $\Sigma_{zz}$  applicate alla superficie:

$$\sigma_{ij}^{\text{hs}}(x, z; z_0) = \sigma_{ij}^{\infty}(x, z; z_0) + \sigma'_{ij}(x, z; z_0) - \sigma^s(x, z, z_0)$$

dove il suffisso “hs” indica la soluzione completa per la sorgente dislocativa nel semispazio.

Particolare interesse rivestono le soluzioni per gli spostamenti alla superficie libera. Ponendo  $z = 0$  nelle equazioni (2.1), vediamo subito che la sorgente immagine produce un identico contributo per  $u'_x$  e contributo opposto per  $u'_z$  (come si ottiene facilmente cambiando segno a  $z_0$  ed a  $b$  nelle espressioni per  $u^\infty$ ); sottraendo quindi le (2.4) calcolate in  $z = 0$  otteniamo:

$$\begin{aligned}u_x^{\text{hs}}(x, z = 0) &= 2u_x^\infty - u_x^s \\ &= \frac{b}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x) - \arctan \frac{z_0}{x} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{z_0 x}{z_0^2 + x^2} \right] - \frac{b(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \frac{xz_0}{z_0^2 + x^2} \\ &= \frac{b}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x) - \arctan \frac{z_0}{x} - \frac{xz_0}{x^2 + z_0^2} \right] \\ u_z^{\text{hs}}(x, z = 0) &= -u_z^s = \frac{b}{\pi} \frac{z_0^2}{z_0^2 + x^2}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Possiamo ottenere la soluzione per un dicco di estensione limitata fra le profondità  $z = z_0$  e  $z = z_1$  semplicemente sottraendo dalle (2.5) le analoghe espressioni degli spostamenti con  $z = z_1$  al posto di  $z = z_0$ ; in figura 2.3 è riportato il grafico per gli spostamenti orizzontali  $u_x$  e verticali  $u_z$  in funzione della distanza  $x$  per un dicco verticale che si apre

fra le profondità  $z_0 = 1$  km e  $z_1 = 5$  km. Valori negativi di  $u_z$  implicano un sollevamento del suolo, dato che l'asse  $z$  è diretto verso il basso; questo tuttavia è contro-intuitivo, per cui abbiamo preferito disegnare la componente verticale cambiata di segno  $-u_z$ . Un risultato per certi versi sorprendente è che  $u_z$  è nullo in  $x = 0$ ; ciò è dovuto alla esatta cancellazione dei contributi delle due linee di dislocazione, perchè il valore di  $u_z^{\text{hs}}$  in  $x = 0$  risulta indipendente dalla profondità della linea di dislocazione. Inoltre, la componente orizzontale tende a zero molto più lentamente di quella verticale, come si evince facilmente anche dalle (2.5), che prevedono un andamento asintotico  $u_x^{\text{hs}} \sim \frac{1}{x}$ , mentre  $u_z^{\text{hs}} \sim \frac{1}{x^2}$ .

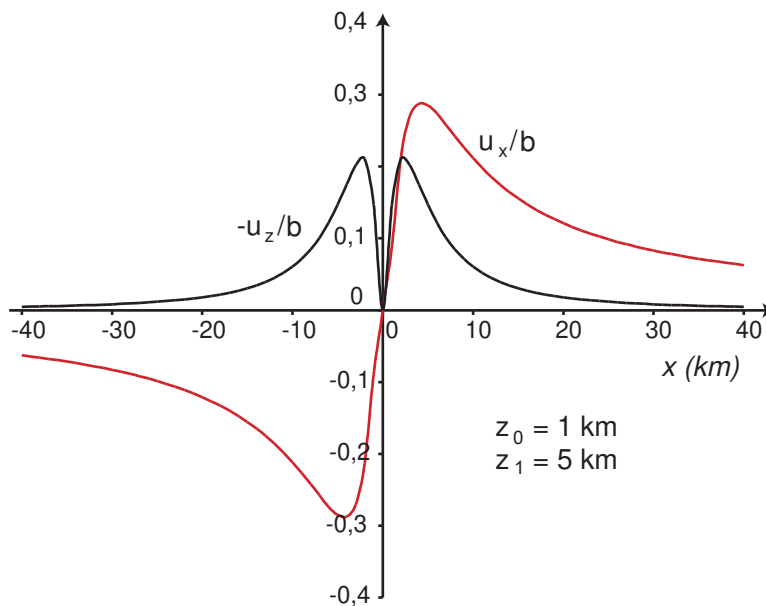


Figura 2.2: Deformazione in superficie generata da un dicco verticale, con vettore di Burgers  $b$ , fra le profondità  $z_0 = 1$  km e  $z_1 = 5$  km.

## 2.2 Dislocazione di bordo in prossimità della superficie

Consideriamo una dislocazione di bordo semi-infinita in prossimità della superficie, con linea di dislocazione  $z = z_0$ ,  $x = 0$  parallela all'asse  $y$  e superficie di dislocazione  $x = 0$ ,  $z > z_0$ . Per ottenere l'espressione degli spostamenti applicheremo le tecniche della sorgente immagine e della strain function di Love, così da assicurarci che essi soddisfino la condizione di superficie libera.

La soluzione del problema in questione, allora, sarà data dalla somma tra la soluzione

per una sorgente posta in uno spazio illimitato e la soluzione per la sorgente immagine, a cui si sottrae la soluzione trovata tramite la tecnica di Love.

$$u_i^{tot} = u_i^\infty + u'_i - u_i^L \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij}^{tot} = \sigma_{ij}^\infty + \sigma'_{ij} - \sigma_{ij}^L \quad (2.7)$$

La soluzione illimitata si ottiene dalle (1.1.2) opportunamente ruotate in modo da adattarle al caso trattato.

$$u_x^\infty = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln \sqrt{x^2 + (z-z_0)^2} - \frac{x^2}{x^2 + (z-z_0)^2} \right] \quad (2.8)$$

$$u_z^\infty = -\frac{b}{2\pi} \left[ -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - \arctan \frac{z-z_0}{x} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z-z_0)}{x^2 + (z-z_0)^2} \right] \quad (2.9)$$

e gli sforzi dalle (1.7)

$$\sigma_{xx}^\infty = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - (z-z_0)^2)}{(x^2 + (z-z_0)^2)^2} \quad (2.10)$$

$$\sigma_{yy}^\infty = \frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2 + (z-z_0)^2} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{zz}^\infty = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(3(z-z_0)^2 + x^2)}{(x^2 + (z-z_0)^2)^2} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{xz}^\infty = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{(z-z_0)(x^2 - (z-z_0)^2)}{(x^2 + (z-z_0)^2)^2} \quad (2.13)$$

Le componenti  $\sigma_{xy}^\infty$  e  $\sigma_{yz}^\infty$  sono identicamente nulle. Notiamo che sulla superficie terrestre sono applicati gli sforzi  $\sigma_{xz}^\infty$  e  $\sigma_{zz}^\infty$ , mentre  $\sigma_{yz}^\infty$  è nulla.

Applichiamo innanzitutto la tecnica delle immagini.

Consideriamo una seconda sorgente che si apre in  $z = -z_0$ . Otteniamo spostamenti e sforzi sostituendo  $z_0$  con  $-z_0$ . Ciò equivale (a meno di una traslazione del blocco  $x > 0$  rispetto al blocco  $x < 0$  di ampiezza  $-b$ , che non produce sforzi) a considerare una dislocazione che si apre in  $z = -\infty$  e si chiude in  $z = -z_0$  con vettore di Burgers  $-b$ , che è la dislocazione immagine della sorgente.

$$u'_x = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln \sqrt{x^2 + (z+z_0)^2} - \frac{x^2}{x^2 + (z+z_0)^2} \right] \quad (2.14)$$

$$u'_z = -\frac{b}{2\pi} \left[ -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - \arctan \frac{z+z_0}{x} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z+z_0)}{x^2 + (z+z_0)^2} \right] \quad (2.15)$$

$$\sigma'_{xx} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(x^2 - (z+z_0)^2)}{(x^2 + (z+z_0)^2)^2} \quad (2.16)$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\mu b \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2 + (z+z_0)^2} \quad (2.17)$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x(3(z+z_0)^2 + x^2)}{(x^2 + (z+z_0)^2)^2} \quad (2.18)$$

$$\sigma'_{xz} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{(z+z_0)(x^2 - (z+z_0)^2)}{(x^2 + (z+z_0)^2)^2} \quad (2.19)$$

Come ci aspettavamo, otteniamo

$$\begin{aligned} (u_x^\infty + u'_x)|_{z=0} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \ln \sqrt{x^2 + z_0^2} - \frac{x^2}{x^2 + z_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu) \ln \sqrt{x^2 + z_0^2} - \frac{x^2}{x^2 + z_0^2} \right] = 2u_x^\infty|_{z=0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} (u_z^\infty + u'_z)|_{z=0} &= -\frac{b}{2\pi} \left[ -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - \arctan \frac{-z_0}{x} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(-z_0)}{x^2 + z_0^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) - \arctan \frac{z_0}{x} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x(z_0)}{x^2 + z_0^2} \right] = \frac{b \operatorname{sgn}(x)}{2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{xz}|_{z=0} &= \sigma_{xz}^\infty + \sigma'_{xz} \\ &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{(-z_0)(x^2 - z_0^2)}{(x^2 + z_0^2)^2} + \frac{(z_0)(x^2 - z_0^2)}{(x^2 + z_0^2)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{zz}|_{z=0} &= \sigma_{zz}^\infty + \sigma'_{zz} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{x}{(x^2 + z_0^2)^2} \left[ 3z_0^2 + x^2 + 3z_0^2 + x^2 \right] \\ &= \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{x}{(x^2 + z_0^2)^2} \left[ 3z_0^2 + x^2 \right] = 2\sigma_{zz}^\infty|_{z=0} \end{aligned} \quad (2.23)$$

La tecnica della sorgente immagine prevede che  $u_z^\infty + u'_z$  sia una funzione dispari di  $z$  e pertanto la (2.21) dovrebbe essere nulla. Quando imporremo la chiusura della dislocazione, come descritto nel paragrafo 1.1.4, questa condizione si verificherà.

Siamo quindi riusciti ad annullare la componente  $\Sigma_{xz}$  sulla superficie terrestre. poiché  $\Sigma_{yz}$  è identicamente nulla, resta solo la componente  $\Sigma_{zz} \neq 0$  in  $z = 0$ . Per annullare anche  $\Sigma_{zz}$  e realizzare così la condizione al contorno di superficie libera, sfruttiamo la tecnica della strain function di Love.

Per iniziare, scomponiamo  $\Sigma_{zz}|_{z=0}$  nelle sue componenti di Fourier, tenendo conto che  $\Sigma_{zz}|_{z=0}$  è una funzione dispari in  $x$ .

$$\Sigma_{zz}(x; z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} i\tilde{\Sigma}(k; z_0) \sin kx dk \quad (2.24)$$

dove  $\tilde{\Sigma}(k; z_0)$  è la trasformata di Fourier di  $\Sigma_{zz}$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(k; z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma_{zz}(x; z_0) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma_{zz}(x; z_0) i \sin(-kx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{3z_0^2 x + x^3}{(x^2 + z_0^2)^2} i \sin(-kx) dx \\
&= -\frac{\mu b i}{2\pi^2(1-\nu)} \left[ \underbrace{3z_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(kx)}{(x^2 + z_0^2)^2} dx}_A + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(kx)}{(x^2 + z_0^2)^2} dx}_B \right] \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Calcoliamo gli integrali:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(kx)}{(x^2 + z_0^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-|k|z_0}}{2} \frac{k}{z_0} \quad \text{per } z_0 > 0 \quad (2.26)$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(kx)}{(x^2 + z_0^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-|k|z_0}}{2} \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0) \quad (2.27)$$

Ora sostituiamo gli integrali A e B in  $\tilde{\Sigma}(k; z_0)$ .

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}(k; z_0) &= -\frac{\mu b i}{2\pi^2(1-\nu)} \left[ 3z_0^2 \frac{\pi e^{-|k|z_0}}{2} \frac{k}{z_0} + \frac{\pi e^{-|k|z_0}}{2} \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0) \right] \\
&= -\frac{\mu b i}{2\pi^2(1-\nu)} \frac{\pi e^{-|k|z_0}}{2} \left[ 3z_0 k + \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0) \right] \\
&= -\frac{\mu b i}{4\pi(1-\nu)} e^{-|k|z_0} \left[ 3z_0 k + \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0) \right] \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Per ogni componente armonica applichiamo la teoria della strain function di Love con condizioni al contorno (1.25): troviamo, dunque, la soluzione per il problema dislocativo nel semipiano  $z > 0$  con trazioni assegnate sulla superficie  $z = 0$  pari a  $\Sigma_{zz} = i\tilde{\Sigma}(k; z_0) \sin kx$  e  $\Sigma_{xz} = \Sigma_{yz} = 0$ .

Otteniamo la funzione di Love (1.31) ponendo  $l = 0$ ,  $c = |k|$  e  $\sigma = i\tilde{\Sigma}(k; z_0)$ .

$$Z(x, z) = \frac{i\tilde{\Sigma}}{|k|^3} (2\nu + |k|z) e^{-|k|z} \sin kx \quad (2.29)$$

da questa possiamo derivare spostamenti e sforzi sfruttando le (1.32):

$$u_x^a = -\frac{i\tilde{\Sigma}}{2\mu k} (1 - 2\nu - |k|z) e^{-|k|z} \cos kx \quad (2.30a)$$

$$u_y^a = 0 \quad (2.30b)$$

$$u_z^a = -\frac{i\tilde{\Sigma}}{2\mu |k|} [2(1-\nu) + |k|z] e^{-|k|z} \sin kx \quad (2.30c)$$

$$\sigma_{xx}^a = i\tilde{\Sigma}(1 - |k|z)e^{-|k|z} \sin kx \quad (2.31a)$$

$$\sigma_{yy}^a = 2\nu i \tilde{\Sigma} e^{-|k|z} \sin kx \quad (2.31b)$$

$$\sigma_{zz}^a = i\tilde{\Sigma}(1 + |k|z)e^{-|k|z} \sin kx \quad (2.31c)$$

$$\sigma_{xz}^a = -i\tilde{\Sigma} kz e^{-|k|z} \cos kx \quad (2.31d)$$

$$\sigma_{xy}^a = 0 \quad (2.31e)$$

$$\sigma_{yz}^a = 0 \quad (2.31f)$$

dove l'apice  $a$  sta ad indicare il contributo di una singola componente armonica. Per arrivare all'espressione degli spostamenti complessivi, occorre integrare in  $k$  le (2.30a) e (2.30c), per considerare il contributo di tutte le componenti armoniche. Notiamo, però, che  $u_x^a$  e  $u_z^a$  sono funzioni non integrabili:

$$\begin{aligned} u_x^L &= \int_{-\infty}^{\infty} u_x^a dk = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i\tilde{\Sigma}}{2\mu k} (1 - 2\nu - |k|z) e^{-|k|z} \cos kx dk \\ &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|k|(z+z_0)}}{k} (3z_0k + \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0))(1 - 2\nu - |k|z) \cos kx dk \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} u_z^L &= \int_{-\infty}^{\infty} u_z^a dk = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{i\tilde{\Sigma}}{2\mu|k|} [2(1-\nu) + |k|z] e^{-|k|z} \sin kx dk \\ &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|k|(z+z_0)}}{|k|} (3z_0k + \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0))(2(1-\nu) + |k|z) \sin kx dk \end{aligned} \quad (2.33)$$

Per rimuovere la singolarità delle integrande procediamo allora nel seguente modo, sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} u_x^L &= \int_{-\infty}^{\infty} u_x^a dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^x \varepsilon_{xx}^a dx \right] dk \\ &= \int_0^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_x^a}{\partial x} dk \right] dx, \end{aligned} \quad (2.34)$$

dove la scelta degli estremi di integrazione in  $x$  deriva dalla simmetria del problema, che assicura:  $u_x^L|_{x=0} = 0$ .

$$\begin{aligned} u_z^L &= \int_{-\infty}^{\infty} u_z^a dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\int_z^{\infty} \varepsilon_{zz}^a dz \right] dk \\ &= -\int_z^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_z^a}{\partial z} dk \right] dz, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nel caso di  $u_z^L$  non ci è possibile sfruttare il valore di  $u_z^L|_{z=0}$ , poiché ci aspettiamo che sulla superficie terrestre questo spostamento abbia un andamento complicato e certamente non nullo.

Ipotizziamo, allora, che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_z^L = 0. \quad (2.36)$$

Questa assunzione non è garantita nel caso della dislocazione semi-infinita che stiamo trattando, ma lo sarà una volta imposta la dislocazione finita, come illustrato nel paragrafo 1.1.4.

Calcoliamo le espressioni di  $\frac{\partial u_x^a}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u_z^a}{\partial z}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x^a}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{i\tilde{\Sigma}}{2\mu k} (1 - 2\nu - |k|z) e^{-|k|z} \cos kx \right] \\ &= \frac{b \sin kx}{8\pi(1-\nu)} e^{-|k|(z+z_0)} (3z_0k + \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0))(1 - 2\nu - |k|z) \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z^a}{\partial z} &= -\frac{i\tilde{\Sigma}}{2\mu|k|} [2(1-\nu) + |k|z] e^{-|k|z} \sin kx \\ &= -\frac{b \sin kx}{8\pi(1-\nu)} e^{-|k|(z+z_0)} (3z_0k + \operatorname{sgn}(k)(2 - |k|z_0))(2\nu - 1 - |k|z) \end{aligned} \quad (2.38)$$

e procediamo col calcolo degli spostamenti complessivi dovuti alla tecnica di Love:

$$\begin{aligned} u_x^L &= -\frac{b}{2\pi(1-\nu)} \left( \frac{x^2(z^2 + (2\nu+3)zz_0 + (2\nu-1)z_0^2)}{(x^2 + (z+z_0)^2)^2} - (2\nu-1) \log(z+z_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(2\nu-1) \log(x^2 + (z+z_0)^2) + \frac{x^4(z^2 + z(2\nu z_0 + z_0) + (2\nu-1)z_0^2)}{(z+z_0)^2(x^2 + (z+z_0)^2)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} u_z^L &= -\frac{b}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{(x^2 + (z+z_0)^2)^2} \left[ x^3(z + 2(1-\nu)z_0) + \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu)(x^2 + (z+z_0)^2)^2 \arctan\left(\frac{x}{z+z_0}\right) + \right. \\ &\quad \left. + x(z+z_0)(z^2 + (5-2\nu)zz_0 + 2(1-\nu)z_0^2) \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Possiamo ricavare anche le componenti degli sforzi integrando in  $k$  le (2.31):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^L &= \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{x [x^4 + 2x^2 z_0(3z + 2z_0) - (z + z_0)^2 (z^2 + 4zz_0 - 3z_0^2)]}{(x^2 + (z + z_0)^2)^3} \\ \sigma_{yy}^L &= \frac{2\mu\nu b}{\pi(1-\nu)} \frac{x [x^2 + (z + z_0)(z + 3z_0)]}{(x^2 + (z + z_0)^2)^2} \\ \sigma_{zz}^L &= \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{x [x^4 + 2x^2 (2z^2 + 3zz_0 + 2z_0^2) + 3(z + z_0)^2 (z^2 + 4zz_0 + z_0^2)]}{(x^2 + (z + z_0)^2)^3} \\ \sigma_{xz}^L &= \frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{z [x^4 + 6x^2 z_0(z + z_0) - (z + z_0)^3 (z + 3z_0)]}{(x^2 + (z + z_0)^2)^3}\end{aligned}$$

Notiamo che

$$\sigma_{zz} + \sigma'_{zz} - \sigma_{zz}^L = 0 \quad (2.41)$$

e siamo pertanto riusciti a soddisfare la condizione di superficie libera.

Possiamo ottenere la soluzione per una dislocazione limitata tra le profondità  $z = z_0$  e  $z = z_1$  sottraendo da (2.39) e (2.40) le analoghe espressioni degli spostamenti con  $z = z_1$  al posto di  $z = z_0$ .

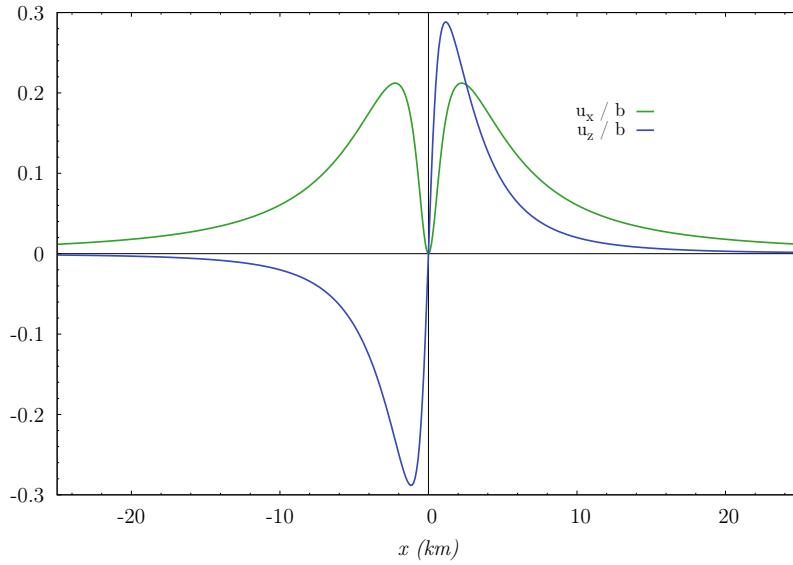


Figura 2.3: *Deformazione in superficie generata da una dislocazione di bordo chiusa, con vettore di Burgers  $b$ , fra le profondità  $z_1 = 1$  km e  $z_2 = 5$  km.*



# Capitolo 3

## Calcolo dell'energia gravitazionale

### 3.1 Introduzione

In un processo dislocativo spontaneo, l'energia totale dello stato finale deve essere minore rispetto a quella dello stato iniziale. Nel caso di una dislocazione poco profonda, l'effetto del processo dislocativo sulla superficie terrestre è importante ed essa sarà soggetta ad un cambiamento. Si vengono così a creare delle zone in cui cambia la distribuzione di massa nel corso della dislocazione.

Possiamo associare a questo processo un cambiamento della densità del sistema. Prima che la dislocazione avvenga si ha una densità pari a

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{per } z > 0 \\ 0 & \text{per } z < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

A processo concluso, invece, la superficie terrestre si trova ad un diversa quota data dalla componente  $u_z$  dello spostamento in  $z = 0$ .

La densità  $\rho'$  a processo dislocativo avvenuto risulta essere di conseguenza:

$$\rho' = \begin{cases} \rho_0(1 - \varepsilon_{kk}) & \text{per } z > 0 \\ \rho_0 & \text{per } u_z < z < 0 \\ 0 & \text{per } 0 < z < u_z \end{cases} \quad (3.2)$$

dove nel primo caso abbiamo sfruttato la proprietà della traccia del tensore di deformazione di fornire la variazione relativa di volume di un corpo.

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\delta V}{V} = -\varepsilon_{kk} \quad (3.3)$$

e, dato che  $\varepsilon_{kk}$  può essere calcolato solo in  $z > 0$ , trascuriamo le variazioni di densità (rispetto al valore  $\rho_0$ ) nelle regioni  $u_z < z < 0$ . La definizione (3.2) è conveniente perché

semplifica notevolmente la configurazione finale del sistema, che risulta essere composto da:

- materiale di densità  $\rho' = \rho_0(1 - \varepsilon_{kk})$  nel semipiano  $z > 0$
- materiale di variazione di densità negativa posto in  $0 < z < u_z$ , ovvero nelle regioni in cui prima della dislocazione si trovava materia e dopo risultano vuote
- materiale di variazione di densità positiva posto in  $u_z < z < 0$ , ovvero nelle regioni che prima della dislocazione risultavano vuote e in cui dopo si trova materia

Poiché abbiamo un cambiamento di densità nel corso del processo dislocativo, possiamo valutare la conseguente variazione di energia gravitazionale. L'energia gravitazionale iniziale si ottiene dalla seguente relazione

$$E_G^0 = \int_{z>0} \rho_0 g z dV,$$

mentre quella finale da

$$E'_G = \int_{z>u_z} \rho' g z dV = \int_{z>0} \rho_0(1 - \varepsilon_{kk})g z dV + \int_{u_z<0} \rho_0 g z dV - \int_0^{u_z>0} \rho_0 g z dV$$

dove abbiamo inserito la definizione (3.2) di  $\rho'$ . Troviamo la differenza di energia gravitazionale sottraendo le equazioni precedenti.

$$\Delta E_G = E'_G - E_G^0 = - \int_{z>0} \varepsilon_{kk} \rho_0 g z dV - \int_0^{u_z} \rho_0 g z dV \quad (3.4)$$

Nei casi da noi considerati, l'asse  $y$  rappresenta l'asse di invarianza e pertanto è più comodo valutare la differenza di energia su unità di lunghezza  $\frac{\Delta E_G}{\Delta y}$ .

Inoltre assumeremo costanti l'accelerazione di gravità  $g$  e la densità iniziale  $\rho_0$ . Otteniamo così l'espressione della differenza di energia gravitazionale per unità di lunghezza:

$$\frac{\Delta E_G}{\Delta y} = -\rho_0 g \left[ \int_0^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty \varepsilon_{kk} dx \right) z dz + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (u_z|_{z=0})^2 dx \right] \quad (3.5)$$

Nei prossimi paragrafi eseguiremo il calcolo di  $\frac{\Delta E_G}{\Delta y}$  nel caso di una dislocazione di bordo e di una dislocazione tensile.

In entrambi i casi le dislocazioni sono chiuse e seguiremo quindi il metodo illustrato nel paragrafo 1.1.4 che permette di ottenere le espressioni degli spostamenti a partire dalle soluzioni illimitate.

Inoltre i due problemi considerati si riferiscono a dislocazioni in prossimità della superficie. Sfrutteremo perciò i metodi illustrati nei paragrafi 1.3 e 1.4.2 per imporre la

condizione di superficie libera.

La soluzione per una dislocazione in prossimità della superficie si otterrà, allora, mediante la somma tra la soluzione per una sorgente posta in uno spazio illimitato e la soluzione per la sorgente immagine, a cui si sottrae la soluzione trovata tramite la tecnica di Love.

$$u_i^{tot} = u_i^\infty + u'_i - u_i^L \quad (3.6)$$

Analogamente, anche la traccia sarà composta da 3 contributi:

$$\varepsilon_{kk}^{tot} = \varepsilon_{kk} + \varepsilon'_{kk} - \varepsilon_{kk}^L \quad (3.7)$$

dove

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon'_{kk} = \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_z}{\partial z}, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{kk}^L = \frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{\partial u_z^L}{\partial z}. \quad (3.10)$$

## 3.2 Dislocazione di bordo

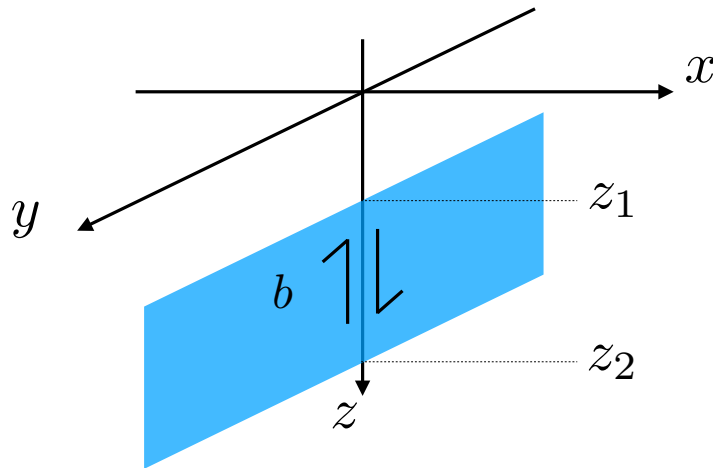


Figura 3.1: Dislocazione di bordo chiusa con vettore di Burgers  $b$  in prossimità della superficie libera  $z = 0$

Vogliamo calcolare la differenza di energia gravitazionale nel caso di una dislocazione di bordo superficiale e chiusa (Fig. 3.1), ovvero che si apre in  $z = z_1$  e si chiude in

$z = z_2$ . Per poter eseguire il calcolo (3.5) abbiamo bisogno della componente  $u_z|_{z=0}^{tot}$  dello spostamento in superficie e della traccia del tensore di deformazione  $\varepsilon_{kk}^{tot}$ .

Partiamo calcolando il contributo della traccia relativo alla sorgente (3.8).

Otteniamo le espressioni degli spostamenti per una dislocazione di bordo chiusa dalle soluzioni illimitate (2.8) e (2.9).

$$u_x = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \ln \sqrt{x^2 + (z-z_1)^2} - \ln \sqrt{x^2 + (z-z_2)^2} \right) - x^2 \left( \frac{1}{x^2 + (z-z_1)^2} - \frac{1}{x^2 + (z-z_2)^2} \right) \right] \quad (3.11)$$

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \left[ \arctan \frac{z-z_1}{x} - \arctan \frac{z-z_2}{x} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{x(z-z_1)}{x^2 + (z-z_1)^2} - \frac{x(z-z_2)}{x^2 + (z-z_2)^2} \right) \right] \quad (3.12)$$

Da questi spostamenti possiamo ricavare  $\varepsilon_{kk}$  seguendo la (3.8):

$$\varepsilon_{kk} = \frac{b(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x}{x^2 + (z-z_1)^2} - \frac{x}{x^2 + (z-z_2)^2} \right] \quad (3.13)$$

Notiamo che l'espressione ottenuta è dispari in  $x$ .

Procediamo analogamente per ricavare il contributo relativo alla sorgenti immagine (3.9).

Gli spostamenti si ottengono a partire dalle (2.14) e (2.15), imponendo che la dislocazione immagine si apra in  $-z_2$  e si chiuda in  $-z_1$ .

$$u'_x = -\frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \ln \sqrt{x^2 + (z+z_2)^2} - \ln \sqrt{x^2 + (z+z_1)^2} \right) - x^2 \left( \frac{1}{x^2 + (z+z_2)^2} - \frac{1}{x^2 + (z+z_1)^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

$$u'_z = -\frac{b}{2\pi} \left[ \arctan \frac{z+z_2}{x} - \arctan \frac{z+z_1}{x} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left( \frac{x(z+z_2)}{x^2 + (z+z_2)^2} - \frac{x(z+z_1)}{x^2 + (z+z_1)^2} \right) \right] \quad (3.15)$$

Sostituiamo nella (3.9) e abbiamo:

$$\varepsilon'_{kk} = \frac{-b(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left[ \frac{x}{x^2 + (z+z_2)^2} - \frac{x}{x^2 + (z+z_1)^2} \right] \quad (3.16)$$

Osserviamo che anche  $\varepsilon'_{kk}$  risulta dispari in  $x$ .

Per quanto riguarda il contributo della traccia relativo alla tecnica di Love (3.10), conviene esprimere  $u_x^L$  e  $u_z^L$  mediante le (2.32) e (2.33) e scambiare l'ordine di derivazione

in modo da rendere integrabili le funzioni integrande.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kk}^L &= \frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{\partial u_z^L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^a dk + \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} u_z^a dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial u_x^a}{\partial x} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right] dk\end{aligned}\quad (3.17)$$

Nell'espressione precedente abbiamo imposto la chiusura della dislocazione basandoci sulle (2.30a) e (2.30c).

$$u_x^a = -\frac{i}{2\mu k} (1 - 2\nu - |k|z) e^{-|k|z} \cos kx \left( \tilde{\Sigma}(k; z_1) - \tilde{\Sigma}(k; z_2) \right) \quad (3.18)$$

$$u_z^a = -\frac{i}{2\mu |k|} [2(1 - \nu) + |k|z] e^{-|k|z} \sin kx \left( \tilde{\Sigma}(k; z_1) - \tilde{\Sigma}(k; z_2) \right) \quad (3.19)$$

Arriviamo dunque a determinare  $\varepsilon_{kk}^L$ , anch'essa funzione dispari nella variabile  $x$ .

$$\varepsilon_{kk}^L = \frac{b(1 - 2\nu)}{\pi(1 - \nu)} \left[ \frac{x((z + z_1)(z + 3z_1) + x^2)}{((z + z_1)^2 + x^2)^2} - \frac{x((z + z_2)(z + 3z_2) + x^2)}{((z + z_2)^2 + x^2)^2} \right] \quad (3.20)$$

A questo punto abbiamo ricavato tutti i termini della traccia totale (3.1) e possiamo calcolare il primo integrale presente nella formula (3.5) dell'energia gravitazionale.

Poiché  $\varepsilon_{kk}^{tot}$  è una funzione dispari in  $x$  otteniamo:

$$\int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{kk} dx \right) z dz = 0 \quad (3.21)$$

Questo risultato è ragionevole se consideriamo la simmetria del problema: la variazione di volume che si realizza nel semiasse  $x > 0$  si compensa con quella riguardante il semiasse  $x < 0$ .

Concentriamoci allora sul secondo termine della (3.5).

Nel calcolo della componente verticale dello spostamento in superficie, teniamo conto che

$$u_z^{tot}|_{z=0} = (u_z^{\infty} + u_z' - u_z^L)|_{z=0} = -u_z^L|_{z=0} \quad (3.22)$$

poiché, come esposto nel paragrafo 1.3 riguardante la tecnica della sorgente immagine,  $u_z^{\infty} + u_z'$  è una funzione dispari in  $z$ .

L'equazione della differenza di energia gravitazionale (3.5) si riduce allora a:

$$\frac{\Delta E_G}{\Delta y} = -\frac{1}{2} \rho_0 g \int_{-\infty}^{\infty} (-u_z^L|_{z=0})^2 dx \quad (3.23)$$

Arriviamo a  $u_z^L|_{z=0}$  per la dislocazione chiusa dalla (2.40):

$$u_z^L|_{z=0} = \frac{b}{\pi} \left( \frac{xz_2}{x^2 + z_2^2} + \arctan\left(\frac{x}{z_2}\right) - \frac{xz_1}{x^2 + z_1^2} - \arctan\left(\frac{x}{z_1}\right) \right) \quad (3.24)$$

Per studiare l'andamento della  $\frac{\Delta E_G}{\Delta y}$ , è conveniente esprimere gli estremi della dislocazione in questo modo:

$$z_1 = c - \ell \quad z_2 = c + \ell, \quad \text{con} \quad \frac{c}{\ell} > 1$$

$c$ , che rappresenta il centro della dislocazione, e  $\ell$ , che ne rappresenta la metà della lunghezza, hanno entrambi le dimensioni di una lunghezza.

Possiamo ora operare nella (3.24) il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\ell} \\ z'_1 = \frac{z_1}{\ell} = \frac{c}{\ell} - 1 \\ z'_2 = \frac{z_2}{\ell} = \frac{c}{\ell} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che le nuove variabili  $x'$ ,  $z'_1$  e  $z'_2$  sono adimensionali.

$$u_z^L|_{z=0} = \frac{b}{\pi} \left( \frac{x' \left(\frac{c}{\ell} + 1\right)}{\left(\frac{c}{\ell} + 1\right)^2 + x'^2} + \arctan\left(\frac{x'}{\frac{c}{\ell} + 1}\right) - \frac{x' \left(\frac{c}{\ell} - 1\right)}{\left(\frac{c}{\ell} - 1\right)^2 + x'^2} - \arctan\left(\frac{x'}{\frac{c}{\ell} - 1}\right) \right) \quad (3.25)$$

In questo modo lo spostamento verticale sulla superficie dipende dall'unico parametro adimensionale  $\frac{c}{\ell}$ .

Sfruttiamo la (3.25) per svolgere l'integrale (3.23), dove abbiamo sfruttato la parità dell'integranda per cambiare gli estremi:

$$\frac{\Delta E_G}{\Delta y} = -\rho_0 g \ell \int_0^\infty (-u_z^L|_{z=0})^2 dx' \quad (3.26)$$

Possiamo ora servirci del parametro adimensionale  $\frac{c}{\ell}$  per valutare l'andamento di  $\frac{\Delta E_G}{\Delta y}$ . Otteniamo la relazione:

$$\frac{\Delta E_G}{\Delta y} = -\frac{\rho_0 g \ell^2 b^2}{2 c \pi} \quad (3.27)$$

Si evidenzia un andamento inversamente proporzionale alla profondità  $c$  della dislocazione: ciò è verosimile poiché sappiamo che più la dislocazione è superficiale più se ne sentiranno gli effetti sulla superficie terrestre.

### 3.2.1 Variazione di energia gravitazionale ed energia trasmessa dalle onde sismiche

Abbiamo detto che l'energia potenziale liberata in un terremoto è composta da due contributi: l'energia potenziale gravitazionale e quella elastica dovuta agli sforzi tettonici. Questa energia viene in parte dissipata ed in parte trasmessa dalle onde sismiche. Per ulteriori informazioni si veda [3] e [4]. La componente irraggiata dalle onde sismiche è direttamente collegata alla magnitudo: questa, infatti, è un numero che rappresenta l'energia rilasciata durante un terremoto e si calcola attraverso l'ampiezza delle oscillazioni del terreno provocate dal passaggio delle onde sismiche. La relazione che lega l'energia irraggiata  $E$  (in joule) e la magnitudo  $M$  è:

$$\log E \simeq A + B M, \quad (3.28)$$

dove  $A$  e  $B$  sono delle costanti i cui valori empirici sono  $A = 5$  e  $B = 1.5$ . Per approfondimenti si veda [2].

Possiamo confrontare la componente di energia potenziale gravitazionale  $\frac{\Delta E_G}{\Delta y}$  con l'energia irraggiata  $E$  tramite le espressioni (3.27) e (3.28).

Scegliamo ad esempio un terremoto di magnitudo  $M = 6$ .

Siamo in grado di associare le dimensioni della superficie di faglia e il modulo del vettore di Burgers alla magnitudo dell'evento tramite le relazioni empiriche di Wells & Coppersmith [5]:

- apertura della dislocazione  $z_1 = 2 \text{ km}$
- chiusura della dislocazione  $z_2 = 10 \text{ km}$
- lunghezza  $\Delta y = 13 \text{ km}$
- modulo del vettore di Burgers  $b = 0.2 \text{ m}$

Conosciamo, inoltre, i valori della densità media della crosta terrestre  $\rho_0 = 2650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  e dell'accelerazione di gravità  $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Abbiamo tutti gli elementi per stimare la variazione di energia potenziale gravitazionale nel processo di dislocazione sulla base della (3.27).

$$\Delta E_G = -\Delta y \frac{\rho_0 g \ell^2 b^2}{2 c \pi} \simeq -5.7 \cdot 10^9 \text{ J} \quad (3.29)$$

Tramite la (3.28) otteniamo, per una magnitudo  $M = 6$ , un'energia irraggiata pari a  $E = 10^{14} \text{ J}$ .

I risultati ottenuti indicano che l'energia  $E$  trasmessa dalle onde sismiche è molto maggiore dell'energia potenziale gravitazionale liberata. Contribuirà ad assicurare il bilancio energetico l'altro principale contributo dell'energia potenziale: quello relativo all'energia potenziale elastica dovuta agli sforzi tettonici.

### 3.3 Dislocazione tensile

Calcoliamo la differenza di energia gravitazionale anche nel caso di una dislocazione tensile chiusa in prossimità della superficie.

Seguiamo lo stesso procedimento trattato nel paragrafo precedente: ricaviamo  $u_z^{tot}$  e  $\varepsilon_{kk}^{tot}$  per poterli sostituire nell'equazione (3.5).

Per calcolare il termine (3.8) della traccia relativo alla sorgente, riportiamo gli spostamenti per la dislocazione chiusa ottenuti a partire dalle (2.1).

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left[ \arctan\left(\frac{z-z_1}{x}\right) + \frac{x(z-z_1)}{2(1-\nu)(x^2+(z-z_1)^2)} - \arctan\left(\frac{z-z_2}{x}\right) - \frac{x(z-z_2)}{2(1-\nu)(x^2+(z-z_2)^2)} \right] \quad (3.30)$$

$$u_z = \frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \log(\sqrt{x^2+(z-z_1)^2}) + \frac{x^2}{x^2+(z-z_1)^2} - (1-2\nu) \log(\sqrt{x^2+(z-z_2)^2}) - \frac{x^2}{x^2+(z-z_2)^2} \right] \quad (3.31)$$

Da questi possiamo ricavare il termine (3.8).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{b}{2\pi} \frac{2\nu-1}{2(1-\nu)} \left[ \frac{z-z_2}{x^2+(z-z_2)^2} - \frac{z-z_1}{x^2+(z-z_1)^2} \right] \\ &= \frac{b(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} (z_1-z_2) \frac{x^2-(z-z_1)(z-z_2)}{(x^2+(z-z_1)^2)(x^2+(z-z_2)^2)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ci concentriamo ora sul (3.9) e troviamo le espressioni della dislocazione immagine che si apre in  $-z_2$  e si chiude in  $-z_1$ :

$$u'_x = \frac{b}{2\pi} \left[ \arctan\left(\frac{z+z_2}{x}\right) + \frac{x(z+z_2)}{2(1-\nu)(x^2+(z+z_2)^2)} - \arctan\left(\frac{z+z_1}{x}\right) - \frac{x(z+z_1)}{2(1-\nu)(x^2+(z+z_1)^2)} \right] \quad (3.33)$$

$$u'_z = \frac{-b}{4\pi(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \log(\sqrt{x^2+(z+z_2)^2}) + \frac{x^2}{x^2+(z+z_2)^2} - (1-2\nu) \log(\sqrt{x^2+(z+z_1)^2}) - \frac{x^2}{x^2+(z+z_1)^2} \right] \quad (3.34)$$

Otteniamo il contributo alla traccia della sorgente immagine (3.9):

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{kk} &= \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = \\ &= \frac{b(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} (z_1-z_2) \frac{x^2-(z+z_1)(z+z_2)}{(x^2+(z+z_1)^2)(x^2+(z+z_2)^2)} \end{aligned} \quad (3.35)$$



Per quanto concerne il termine (3.10), scriviamo le espressioni degli spostamenti di Love tramite le (2.4).

$$u_x^L = \frac{b z_1}{2\pi(1-\nu)} \frac{((1-2\nu)x(x^2 + (z+z_1)^2) - 2xz(z+z_1))}{(x^2 + (z+z_1)^2)^2} - \frac{b z_2}{2\pi(1-\nu)} \frac{((1-2\nu)x(x^2 + (z+z_2)^2) - 2xz(z+z_2))}{(x^2 + (z+z_2)^2)^2} \quad (3.36)$$

$$u_z^L = \frac{b z_2 [((3-2\nu)z + 2(1-\nu)z_2)((z+z_2)^2 - x^2) + 4(1-\nu)x^2(z+z_2)]}{2\pi(1-\nu)(x^2 + (z+z_2)^2)^2} - \frac{b z_1 [((3-2\nu)z + 2(1-\nu)z_1)((z+z_1)^2 - x^2) + 4(1-\nu)x^2(z+z_1)]}{2\pi(1-\nu)(x^2 + (z+z_1)^2)^2} \quad (3.37)$$

Operando le opportune semplificazioni nelle espressioni di  $\frac{\partial u_x^L}{\partial x}$  e  $\frac{\partial u_z^L}{\partial z}$  si riesce ad ottenere un'espressione molto semplice per (3.10):

$$\varepsilon_{kk}^L = \frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{\partial u_z^L}{\partial z} = \frac{(1-2\nu)b}{\pi(1-\nu)} \left( \frac{z_1 [(z+z_1)^2 - x^2]}{(x^2 + (z+z_1)^2)^2} - \frac{z_2 [(z+z_2)^2 - x^2]}{(x^2 + (z+z_2)^2)^2} \right) \quad (3.38)$$

Possiamo, a questo punto, calcolare il primo integrale della (3.5) notando che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{kk} dx = \begin{cases} \frac{-b(1-2\nu)}{1-\nu} & \text{se } z_1 < z < z_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon'_{kk} dx = 0 \quad z, z_1, z_2 > 0 \quad (3.40)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{kk}^L dx = 0 \quad (3.41)$$

L'unico contributo non nullo è dunque quello della traccia della sorgente.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{kk}^{tot} dx \right] z dz &= \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{kk} dx \right] z dz = \int_{z_1}^{z_2} \left[ \frac{-b(1-2\nu)}{1-\nu} \right] z dz \\ &= \frac{b(1-2\nu)}{2(1-\nu)} [z_1^2 - z_2^2] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Analizziamo il secondo termine della (3.5).

Anche in questo caso lo spostamento verticale in  $z = 0$  è dato dalla sola componente di Love.

$$\begin{aligned} u_z^{tot}|_{z=0} &= (u_z + u'_z - u_z^L)|_{z=0} = -u_z^L|_{z=0} \\ &= \frac{bx^2(z_1^2 - z_2^2)}{\pi(x^2 + z_1^2)(x^2 + z_2^2)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_z^{tot}|_{z=0})^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-u_z^L|_{z=0})^2 dx = \frac{b^2(z_1 - z_2)^2}{2\pi(z_1 + z_2)} \quad (3.44)$$

Otteniamo allora l'espressione finale della differenza di energia gravitazionale per una dislocazione tensile:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_G}{\Delta y} &= -\rho_0 g \frac{b(1-2\nu)}{2(1-\nu)} (z_1^2 - z_2^2) - \frac{\rho_0 g b^2 (z_1 - z_2)^2}{2 \cdot 2\pi(z_1 + z_2)} \\ &= -\frac{\rho_0 g b}{2} \left[ \frac{1-2\nu}{1-\nu} (z_1^2 - z_2^2) + \frac{b(z_1 - z_2)^2}{2\pi(z_1 + z_2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Il secondo termine è proporzionale al quadrato del vettore di Burgers e al quadrato della estensione verticale  $\ell = \frac{z_1 - z_2}{2}$ , ma è inversamente proporzionale alla profondità media  $c = \frac{z_1 + z_2}{2}$ , in analogia con il risultato (3.27) per la dislocazione di bordo. Il secondo termine quindi è importante per dislocazioni prossime alla superficie. Il primo termine invece è proporzionale al prodotto  $b \ell c$  ed è quindi tanto più importante quanto maggiore è la profondità.

Considerando che l'apertura della dislocazione tensile comporta un vuoto (cioè  $\rho' = 0$ ) fra  $z_1$  e  $z_2$  per  $-\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}$  di volume  $\Delta V = 2b\ell\Delta y$ , la spiegazione dell'andamento con  $c$  del primo termine risiede nel fatto che il lavoro compiuto per aprire la dislocazione tensile è proporzionale alla pressione litostatica (che è linearmente crescente con la profondità),  $\rho_0 g c$ , alla superficie  $2\ell\Delta y$  e allo spostamento  $b$ . Quindi la variazione di energia potenziale per unità di lunghezza lungo  $y$  descritta dal primo termine è ragionevole che sia proporzionale a  $2\rho_0 g b \ell c$  come risulta nella (3.45). Tenendo conto dell'apertura di questo vuoto, per la dislocazione tensile si sarebbe dovuta riscrivere la (3.2) considerando la prima e seconda riga (dato che  $u_z$  è sempre  $< 0$ ) e aggiungendo  $\rho' = 0$  per  $z_1 < z < z_2$  e  $|x| < \frac{b}{2}$ . Aggiungendo tale effetto si sarebbe trovato il contributo

$$-b \int_{z_1}^{z_2} \rho_0 g z' dz' = \rho_0 g b \frac{z_1^2 - z_2^2}{2} = -2\rho_0 g b \ell c$$

alla variazione di energia potenziale della dislocazione tensile, che rende complessivamente negativa la variazione di energia potenziale.

# Conclusioni

Abbiamo analizzato il caso di due tipi di dislocazione in configurazione di deformazione piana in prossimità della superficie.

Nel caso della dislocazione di bordo é interessante confrontare una parte dell'energia potenziale, quella gravitazionale, con una parte dell'energia rilasciata, quella irraggiata dalle onde sismiche. Per quanto riguarda la dislocazione tensile abbiamo ricavato l'espressione della variazione di energia potenziale gravitazionale. Entrambi i casi studiati, rappresentano due processi in cui il vettore di Burgers  $b$  ha una sola componente cartesiana non nulla e costituiscono una semplificazione della maggioranza dei casi reali, in cui  $b$  non risulta parallelo ad un asse cartesiano.

Un possibile sviluppo di questo lavoro di tesi è, allora, l'analisi di una dislocazione con piano di faglia inclinato di un certo angolo di *dip* rispetto alla superficie terrestre. In questo caso il vettore di Burgers avrà una componente lungo l'asse  $x$  ed una lungo l'asse  $z$ . L'espressione del campo di spostamento per una dislocazione di taglio inclinata di un angolo di dip  $\delta$  sarà data da una combinazione lineare in funzione dell'angolo  $\delta$  della soluzione per la dislocazione tensile e di quella per la dislocazione di bordo trovate nel capitolo 2.

# Bibliografia

- [1] M. Bonafede. Appunti per il corso di fondamenti di geofisica. 2013.
- [2] E. Boschi and M. Dragoni. *Sismologia*. Utet, 2000.
- [3] H. Kanamori. *Earthquake Thermodynamics and Phase Transformations in the Earth's Interior*. Academic Press, 2001.
- [4] H. Kanamori and L. Rivera. Representations of the radiated energy in earthquakes. *Geophys. J. Int.*, 2005.
- [5] D. Wells and K. Coppersmith. New empirical relationships among magnitude, rupture length, rupture width, rupture area, and surface displacement. *Bull. seism. Soc. Am.*, 1994.