

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

LA FORZA DI LORENTZ  
E SUE GENERALIZZAZIONI NON  
ABELIANE

Relatore:

Prof. FIORENZO BASTIANELLI

Laureando:

CARLOS BOSCÁN

---

ANNO ACCADEMICO 2019-2020

A mi madre, que me ha apoyado siempre en cada uno de mis proyectos.

# Introduzione

La forza di Lorentz è avvertita da una particella con carica elettrica quando si muove in un campo elettromagnetico, come conseguenza dell'interazione che ha con esso. In questo elaborato si studia la generalizzazione dell'espressione di questa forza quando si ha l'interazione tra una carica ed una forza generalizzata descritta da un campo di gauge non abeliano.

L'elaborato si basa su una ricerca bibliografica ed è costituito da tre capitoli. Nel primo di questi si studia in profondità l'espressione della forza di Lorentz portandola dal linguaggio vettoriale/matriciale tridimensionale, tipico degli studi di primo livello in Fisica, alla notazione tensoriale indiciale con l'aggiunta delle correzioni relativistiche. Inoltre, la si ricava anche dal Principio di Minima Azione che contiene la corretta lagrangiana la quale descrive l'accoppiamento della particella con i potenziali elettromagnetici, interpretati come campi di gauge abeliani associati al gruppo  $U(1)$ .

Nel secondo capitolo si presentano le basi necessarie per costruire una generalizzazione non abeliana. Si definisce il commutatore, che compare come misura della proprietà non commutativa dei gruppi non abeliani, e descrive l'algebra di Lie associata al gruppo. Questa algebra di Lie descrive le trasformazioni infinitesime del gruppo non abeliano, e caratterizza in modo molto preciso la struttura del gruppo. Si introducono inoltre anche i numeri anticommutanti, o variabili di Grassmann, utili per poter descrivere le cariche

generalizzate. In seguito si definisce appunto una carica generalizzata come vettore di uno spazio vettoriale opportuno associato al gruppo, lo spazio vettoriale della rappresentazione aggiunta, usando sia le variabili dinamiche sia quelle di Grassmann. Vengono inoltre definiti il potenziale di gauge ed il corrispondente tensore campo di forza generalizzato. Infine si esegue una derivazione dal Principio di Minima Azione e si presenta l'espressione della forza di Lorentz generalizzata, che compare nelle cosiddette equazioni di Wong, le quali descrivono la legge del moto della particella nel campo di gauge non abeliano. Vengono anche presentate le notazioni usate da diversi autori, paragonandole tra loro.

Si conclude con un terzo capitolo dove viene sviluppata l'espressione della forza di Lorentz generalizzata, applicata ai casi particolari delle quattro forze fondamentali. Si comincia con i due casi abeliani, cioè la carica elettrica con il campo elettromagnetico, studiato in maniera indipendente nel primo capitolo, e la carica gravitazionale ovvero la massa che risente del rispettivo campo gravitazionale. Poi si presentano i casi non abeliani, cominciando dalla carica di isospin debole con il suo rispettivo campo debole, basato sul gruppo  $SU(2)$ , e poi la carica di colore con il rispettivo campo forte della Cromodinamica Quantistica (QCD), basato sul gruppo  $SU(3)$ . Entrambi sono alla base delle forze nucleari nelle particelle subatomiche del Modello Standard.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Forza di Lorentz</b>	<b>1</b>
1.1 Dal linguaggio vettoriale/matriciale al linguaggio tensoriale . . .	2
1.2 Definizioni preliminari con notazione tensoriale . . . . .	5
1.2.1 Quadrivettore posizione . . . . .	5
1.2.2 Differenziale di tempo proprio . . . . .	5
1.2.3 Quadrivettore velocità . . . . .	6
1.2.4 Impulso . . . . .	6
1.2.5 Quadrivettore forza . . . . .	7
1.2.6 Quadrivettore densità di corrente . . . . .	8
1.2.7 Quadrivettore gradiente . . . . .	8
1.2.8 Quadrivettore potenziale . . . . .	8
1.2.9 Tensore del campo elettromagnetico . . . . .	9
1.2.10 Funzionale d'azione . . . . .	9
1.3 Dimostrazione. Principio di Minima Azione . . . . .	11
<b>2 Generalizzazioni non abeliane</b>	<b>15</b>
2.1 Commutatore e Principio di Heisenberg . . . . .	15
2.2 Elementi della Teoria dei Gruppi . . . . .	17

---

2.3	Variabili di Grassmann. Algebra di Clifford . . . . .	21
2.4	Definizioni preliminari nella generalizzazione non abeliana . . .	25
2.4.1	Traiettoria . . . . .	25
2.4.2	Velocità ed accelerazione . . . . .	25
2.4.3	Vettore carica . . . . .	26
2.4.4	Densità di corrente generalizzata . . . . .	29
2.4.5	Teoria di Yang-Mills e campo di gauge . . . . .	30
2.4.6	Gradiente generalizzato . . . . .	32
2.4.7	Tensore del campo . . . . .	32
2.4.8	Funzionale d'azione . . . . .	34
2.5	Dimostrazione. Principio di Minima Azione . . . . .	35
2.6	Altre forme e considerazioni . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Casi particolari nelle forze fondamentali</b>	<b>44</b>
3.1	Costante di accoppiamento . . . . .	44
3.2	Casi abeliani . . . . .	46
3.2.1	Nel campo elettromagnetico . . . . .	46
3.2.2	Nel campo gravitazionale . . . . .	46
3.3	Casi non abeliani . . . . .	49
3.3.1	Nel campo debole . . . . .	49
3.3.2	Nel campo forte . . . . .	51
	<b>Conclusioni</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>

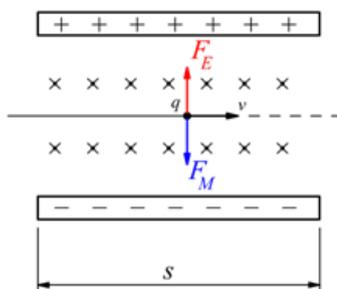
# Capitolo 1

## Forza di Lorentz

Quando una particella puntiforme con carica elettrica si muove in un campo elettromagnetico, risente di una forza definita come:

$$\vec{F} \equiv q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

dove  $\vec{E}$  è il campo elettrico,  $\vec{B}$  il campo magnetico,  $q$  la carica elettrica della particella ed  $\dot{\vec{r}}$  la velocità della particella ovvero la derivata della sua posizione rispetto al tempo. Questa forza è conosciuta come forza di Lorentz.



## 1.1 Dal linguaggio vettoriale/matriciale al linguaggio tensoriale

L'equazione (1.1) può essere espressa in coordinate cartesiane come:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Esplicitando il prodotto vettoriale e riscrivendolo come prodotto matriciale si ha che:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} \dot{r}_y B_z - \dot{r}_z B_y \\ \dot{r}_z B_x - \dot{r}_x B_z \\ \dot{r}_x B_y - \dot{r}_y B_x \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Ora, si osserva che questa espressione può essere scritta con un unico prodotto matriciale:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Cosicché si trova il bisogno di dover lavorare con i quadrivettori forza e velocità aggiungendo le loro componenti temporali.

Secondo Gasperini [13, pag.100], la componente temporale della forza viene definita come la potenza dissipata dalla forza, cioè la variazione di lavoro effet-

## 1.1 Dal linguaggio vettoriale/matriciale al linguaggio tensoriale 3

tuato dal campo sulla particella per unità di tempo. Seguendo l'osservazione di Chiese [11, pag.32] (sicuramente basandosi su Gasperini [13, pag.95]), siccome la forza che esercita il campo magnetico è perpendicolare al suo spostamento, allora il lavoro corrispondente è nullo. Ne consegue che:

$$F^0 = Potenza = \frac{dEnergia}{dt} = Forza \cdot \dot{\vec{r}} = q\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (1.6)$$

e quindi l'espressione della forza di Lorentz rimane:

$$\begin{pmatrix} F_t \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = q \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Ora si considerano le correzioni relativistiche con le trasformazioni di Lorentz. Per farli definiamo il quadrivettore velocità

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( \frac{c}{\gamma}, \frac{\dot{\vec{r}}}{\gamma} \right) \quad (1.8)$$

dove  $\tau$  è il tempo proprio e  $\gamma$  rappresenta il fattore di Lorentz ovvero  $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{c^2}}}$ .

Da qui segue:

$$\left( c, \dot{\vec{r}} \right) = \gamma v^\mu = \left( \gamma c, \gamma \dot{\vec{r}} \right) \quad (1.9)$$

D'altronde la componente temporale della forza viene moltiplicata e divisa per  $c$  e rimane:

$$F^0 = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot c\dot{\vec{r}} \quad (1.10)$$

Con queste aggiunte, l'espressione rimane:

$$\begin{pmatrix} F_t \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{q}{c} \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \frac{dx_x}{d\tau} \\ \gamma \frac{dx_y}{d\tau} \\ \gamma \frac{dx_z}{d\tau} \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Dal raccoglimento del fattore  $\frac{1}{c}$  ci si accorge che è meglio dividere per  $c$  anche  $\dot{\vec{r}}$  (ridefinendo opportunamente il campo magnetico), ottenendo la forma usata da Gasperini [13, eq.6.71].

Dopodiché, cambiando la notazione degli indici, si ha che:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{q}{c} \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \frac{dx_1}{d\tau} \\ \gamma \frac{dx_2}{d\tau} \\ \gamma \frac{dx_3}{d\tau} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Infine usando la notazione indiciale con la convenzione di Einstein, si ricava la forza di Lorentz espressa nel seguente modo:

$$f^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau} \quad (1.13)$$

dove  $F^{\mu\nu}$  viene detto tensore del campo elettromagnetico. Questo tensore viene anche usato per rappresentare le equazioni di Maxwell.

## 1.2 Definizioni preliminari con notazione tensoriale

Si presentano delle definizioni, raccolte da Gasperini [13], che permetteranno una rapida dimostrazione dell'equazione della forza di Lorentz dal Principio di Minima Azione.

### 1.2.1 Quadrivettore posizione

Il quadrivettore posizione è indicato da

$$x^\mu \equiv (ct, \vec{x}) \quad (1.14)$$

e definisce un punto nello spazio di Minkowski (detto evento). Nello spazio di Minkowski, la distanza tra due punti viene dato dal modulo quadro del quadrivettore impulso, definito da una metrica  $\eta_{\mu\nu}$ , detta appunto metrica di Minkowski.

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu = |\vec{x}|^2 - (ct)^2 \quad (1.15)$$

definendo la metrica di Minkowski, nella forma controvariante, nel seguente modo:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

### 1.2.2 Differenziale di tempo proprio

L'intervallo di tempo proprio  $d\tau$  è l'intervallo di tempo tra due eventi misurato nel sistema di riferimento in cui la loro separazione spaziale è nulla, cioè  $d\vec{x} = 0$ .

Differenziando il modulo quadro del quadrivettore posizione dell'espressione (1.15) si ha che:

$$ds^2 = |d\vec{x}|^2 - c^2 dt^2 \quad (1.17)$$

Se consideriamo  $t = \tau$ , i due eventi hanno separazione spaziale nulla, di conseguenza il differenziale di tempo proprio può essere definito come:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} \quad (1.18)$$

ed è interpretabile come il tempo nel sistema di riferimento solidale con la particella.

### 1.2.3 Quadrivettore velocità

Il quadrivettore velocità, usato nell'espressione (1.13), viene definito nella forma controvariante come la derivata del quadrivettore posizione rispetto al tempo proprio:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (ct, \vec{x}) = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (1.19)$$

dove  $\vec{x}$  e  $\vec{v}$  sono i vettori spaziali della posizione e la velocità rispettivamente.

### 1.2.4 Impulso

L'impulso viene definito come il prodotto della massa propria, cioè a riposo, per il quadrivettore velocità, quindi nella forma covariante la sua espressione è:

$$p_\mu \equiv m u_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau} = (m\gamma c, m\gamma v) \quad (1.20)$$

D'altronde l'impulso può essere ricavato come integrale primo dell'equazione di Eulero-Lagrange nel caso che la lagrangiana non dipenda dalle coordinate, ovvero

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \quad (1.21)$$

Quindi

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (1.22)$$

dove la lagrangiana è data da  $L = -mc\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}$ . Espressione che verrà spiegata nella seguente sezione con l'espressione (1.37).

Cosicché

$$p_\mu = \frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\nu \dot{x}^\nu}} \quad (1.23)$$

Considerando che da (1.19) si può dedurre che nello spazio di Minkowski  $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = \gamma^2(v^2 - c^2)$ , allora si ha che:

$$\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (v^2 - c^2) = -c^2 \quad (1.24)$$

Quindi le definizioni (1.20) e (1.23) sono equivalenti.

### 1.2.5 Quadrivettore forza

Il quadrivettore forza, usato nell'espressione (1.13), viene definito nella forma covariante come la derivata del quadrivettore impulso rispetto al tempo proprio:

$$f_\mu \equiv \frac{dp_\mu}{d\tau} \quad (1.25)$$

### 1.2.6 Quadrivettore densità di corrente

Il quadrivettore densità di corrente viene definito, nella forma controvariante, come il prodotto tra la densità di carica e la velocità:

$$J^\mu \equiv (\rho\vec{v}, \rho c) = \rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.26)$$

dove  $\rho = e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$ .

Infatti, Chiese [11, eq.2.32 e 2.33], nel suo elaborato, definisce la carica elettrica in funzione della densità di carica come  $e = \int \rho(x)dx^3$  dove  $\rho(x)$  è la densità di carica.

Considerando che la delta di Dirac  $\delta$  è una distribuzione che associata ad una funzione  $f(x)$ , soddisfa la proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) = f(a) \quad (1.27)$$

si può affermare che nel caso puntiforme, con la distribuzione delta di Dirac, si ha che  $\rho(\vec{x}, t) = \int e\delta^3(\vec{x} - \vec{x}(t))$ . Infatti, sotto questa espressione la densità risulta non nulla nel punto dove si trova la carica puntiforme.

### 1.2.7 Quadrivettore gradiente

Il quadrivettore gradiente viene definito, nella forma covariante, come:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \nabla, \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1.28)$$

### 1.2.8 Quadrivettore potenziale

Il quadrivettore potenziale è definito nella sua forma covariante come:

$$A_\mu = \left( \vec{A}, \phi \right) \quad (1.29)$$

essendo  $\vec{A}$  la sua parte vettoriale e  $\phi$  la sua parte scalare.

La relazione tra campo e potenziale rimane:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad e \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.30)$$

### 1.2.9 Tensore del campo elettromagnetico

Il tensore di campo  $F^{\mu\nu}$  (“Field”), usato nell’espressione (1.13), viene rappresentato come una matrice antisimmetrica  $4 \times 4$ ; nella forma controvariante ha la forma:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

D'altronde, considerando la relazione tra campi e potenziali (1.30), il tensore  $F^{\mu\nu}$  può essere scritto nella sua forma covariante nel seguente modo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.32)$$

dove  $A_\mu$  e  $\partial_\mu$  sono i quadrivettori definiti nelle espressioni (1.29) e (1.28) rispettivamente.

### 1.2.10 Funzionale d'azione

L'azione è definita come l'integrale della lagrangiana rispetto al tempo:

$$S = \int dt L \quad (1.33)$$

Poi la lagrangiana  $L$  può essere scritta come l'integrale di una densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$  rispetto allo spazio, cosicché risulta:

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} \quad (1.34)$$

L'azione  $S$  ha le dimensioni di  $[energia] \times [tempo]$ .

### 1.3 Dimostrazione. Principio di Minima Azione

Nel caso della particella puntiforme, libera e con massa  $m$ , l'azione (1.33) assume la forma:

$$S = -mc^2 \int d\tau \quad (1.35)$$

con il riferimento temporale  $\tau$  che rappresenta il tempo proprio. Sostituendo (1.18) si ha che:

$$S = -mc^2 \int \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = -mc \int \sqrt{-ds^2} \quad (1.36)$$

Poi, considerando (1.15) si ha la forma alternativa:

$$S = -mc \int \sqrt{-dx_\mu dx^\mu} \quad (1.37)$$

Utilizzando ora un parametro arbitrario  $\tau$  per descrivere la linea di mondo della particella, l'azione diventa:

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{-\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}} = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \quad (1.38)$$

Invece se la particella è carica e si muove in un campo elettromagnetico esterno, allora all'azione viene aggiunto un termine di interazione, che descrive appunto l'interazione tra il potenziale  $A_\mu$  e la corrente elettromagnetica associata alla carica, ovvero la densità di corrente (1.26). La lagrangiana da aggiungere deriva da un termine di accoppiamento che nell'azione della teoria di campo dell'elettromagnetismo assume la forma:

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x A_\mu(x) J^\mu(x) \quad (1.39)$$

con  $J^\mu$  la densità di corrente. Per una particella puntiforme possiamo prendere la forma:

$$J^\mu = \int d\tau e \delta^4(x - x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.40)$$

dove  $e$  è la carica della particella. Il termine d'interazione assume quindi la forma:

$$S = \frac{e}{c} \int d\tau A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.41)$$

da cui riconosciamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{e}{c} A_\mu(x(\tau)) \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.42)$$

Cosicché l'azione di una particella massiva e carica puntiforme diventa:

$$S(x^\mu) = -mc \int \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} d\tau + \frac{e}{c} \int A_\mu \dot{x}^\mu d\tau \quad (1.43)$$

Secondo Landau e Lifshitz [16, pag.24] il principio di Minima Azione indica appunto che l'azione ha un valore minimo sulla configurazione che risolve le leggi del moto del sistema in studio.

Ora si procede a calcolare il minimo del funzionale di azione  $S[x^\mu(\tau)]$ :

$$\frac{dS(x^\mu)}{dx^\mu} = \int d\tau \left[ -mc \frac{1}{2\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} (-2\dot{x}_\mu \delta x^\mu) + \frac{e}{c} A_\mu \delta x^\mu + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu(x^\mu)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \dot{x}^\nu \right] = 0 \quad (1.44)$$

Seguendo il metodo usato da Landau e Lifshitz [16, eq.23.2], nei primi due membri viene applicato il metodo per parti.

Semplificazione dei primi due termini:

$$\begin{aligned} & \int d\tau \left[ mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \delta \dot{x}^\mu + \frac{e}{c} A_\mu \delta \dot{x}^\mu \right] = \\ & mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \int d\tau \delta \dot{x}^\mu - \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[ mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \right] \int d\tau \delta \dot{x}^\mu + \\ & \frac{e}{c} A_\mu \int d\tau \delta \dot{x}^\mu - \int d\tau \frac{e}{c} \frac{d}{d\tau} [A_\mu] \int d\tau \delta \dot{x}^\mu = \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} & mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \delta x^\mu - \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[ mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \right] \delta x^\mu + \\ & \frac{e}{c} A_\mu \delta x^\mu - \int d\tau \frac{e}{c} \frac{d}{d\tau} [A_\mu] \delta x^\mu \end{aligned}$$

Inoltre, i termini senza integrale si annullano per  $\dot{x}_\mu \delta x^\mu = 0$  e  $A_\mu \delta x^\mu = 0$ , questo come conseguenza delle caratteristiche delle traiettorie secondo Landau e Lifshitz [16, pag.60]. Le condizioni al contorno sulle traiettorie sono fissate specificando la posizione della particella, in questo caso  $\delta x$  deve valere zero al tempo iniziale ed al tempo finale.

Poi, semplificando il terzo termine di (1.44) con la notazione presente dell'espressione (1.28) e raccogliendo  $\delta x^\mu$ , rimane:

$$\int d\tau \delta x^\mu \left[ -\frac{d}{d\tau} \left( \frac{mc \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \right) - \frac{e}{c} \frac{d}{d\tau} A_\mu + \frac{e}{c} \partial_\mu A_\nu(x^\mu) \dot{x}^\nu \right] = 0 \quad (1.46)$$

Siccome

$$\frac{d}{d\tau} A_\mu = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu = \partial_\nu A_\mu(x^\mu) \dot{x}^\nu \quad (1.47)$$

Allora

$$\int d\tau \delta x^\mu \left[ -\frac{d}{d\tau} \left( \frac{mc \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \right) + \frac{e}{c} (\partial_\mu A_\nu(x^\mu) - \partial_\nu A_\mu(x^\mu)) \dot{x}^\nu \right] = 0 \quad (1.48)$$

Poi, considerando le definizioni (1.23) e (1.32)

$$\int d\tau \delta x^\mu \left[ -\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \right] = 0 \quad (1.49)$$

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0 \quad (1.50)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (1.51)$$

Infine per (1.25), si ha:

$$f_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (1.52)$$

che costituisce la forma covariante della forza di Lorentz, presentata precedentemente in (1.13).

# Capitolo 2

## Generalizzazioni non abeliane

### 2.1 Commutatore e Principio di Heisenberg

Innanzitutto bisogna chiarire o ricordare che il termine “abeliano” è equivalente a “commutativo”. Risulta quindi necessario definire e misurare il grado di non commutatività nell’operazione binaria di due elementi, e lo si fa con la differenza tra l’operazione effettuata in un ordine e la stessa operazione degli stessi elementi eseguita con l’ordine invertito.

Nasce così il commutatore, definito secondo Zucchini [23, eq.6.6.1] come:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2.1)$$

dove  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  operatori.

Il commutatore soddisfa le seguenti proprietà:

- Linearità:

$$\begin{aligned} [\hat{C}, a\hat{A} + b\hat{B}] &= a[\hat{C}, \hat{A}] + b[\hat{C}, \hat{B}] \\ [a\hat{A} + b\hat{B}, \hat{C}] &= a[\hat{A}, \hat{C}] + b[\hat{B}, \hat{C}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

- Regola di Leibnitz:

$$[\hat{C}, \hat{A}\hat{B}] = [\hat{C}, \hat{A}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{C}, \hat{B}] \quad (2.3)$$

- Anticommutatività:

$$[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{B}, \hat{A}] = 0 \quad (2.4)$$

- Identità di Jacobi:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0 \quad (2.5)$$

dove  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  sono operatori. Le ultime due proprietà possono essere dimostrate dalle prime due.

In Fisica, due osservabili possono essere rappresentati da due operatori. Come conseguenza del Principio di Indeterminazione di Heisenberg, nella Meccanica Quantistica, due osservabili non possono avere dei valori ben definiti simultaneamente. La misura di questa imprecisione, secondo Grattan [14, eq.8.40], viene definita dal commutatore dei rispettivi operatori, il quale può essere uguagliato ad un terzo operatore immaginario, cioè:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hat{C} \quad (2.6)$$

Per gli operatori che non commutano si soddisfa la relazione:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\bar{C}| \quad (2.7)$$

dove  $\Delta A$  e  $\Delta B$  sono le incertezze degli operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  rispettivamente.

Facile da riconoscere come una generalizzazione della relazione del Principio di Indeterminazione di Heisenberg, infatti se  $\hat{A} = x$  e  $\hat{B} = p_x$  allora  $\hat{C} = \hbar$  perché  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar$  (Grattan [14, eq.8.52]).

## 2.2 Elementi della Teoria dei Gruppi

Seguendo l'elaborato di Bastianelli [6], un gruppo  $G$  viene definito come un insieme di elementi  $g$  che soddisfano le seguenti proprietà:

- Esistenza di una legge di composizione:

$$\text{Presi } g_1, g_2 \in G \text{ allora } \exists g_3 \in G \quad / \quad g_1 \cdot g_2 = g_3$$

- Esistenza dell'elemento identità:

$$\text{Preso } g \in G \text{ allora } \exists e \in G \quad / \quad g \cdot e = e \cdot g = g$$

- Esistenza dell'elemento inverso:

$$\text{Preso } g \in G \text{ allora } \exists g^{-1} \in G \quad / \quad g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

- Associatività:

$$\text{Presi } g_1, g_2, g_3 \in G \text{ allora } (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$$

A continuazione, vengono definiti alcuni gruppi discreti:

$U(1)$ : detto Unitario, viene definito come il gruppo dei numeri complessi unitari ovvero  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ ; viene anche detto gruppo delle fasi. Sotto il Modello Standard delle particelle elementari viene considerato come il gruppo dell'ipercarica. Essa si conserva nel corso dell'interazione debole e viene definita da Semprini [19, pag.263] come  $Y_w = 2(q - t_3)$  dove  $q$  rappresenta la carica elettrica delle particelle subatomiche (quark e leptoni) e  $t_3$  il terzo operatore di isospin debole.

$SU(N)$ : detto Speciale Unitario, è il gruppo delle matrici unitarie  $N \times N$  con determinante unitario.

$SO(N)$ : detto Speciale Ortogonale, è il gruppo delle matrici reali ortogonali  $N \times N$  con determinante unitario. Lascia invariato il prodotto interno tra tensori.

In particolare  $SU(2)$  è utile per definire la carica di isospin debole.

Invece il caso di  $SU(3)$  viene usato per definire la carica di colori della Forza Forte che agisce sui quark. Invece, per quanto riguarda i leptoni, non interagendo con questa forza vengono considerati scalari sotto questo gruppo. Questo caso serve anche a descrivere gli adroni composti dai tre sapori dei quark più leggeri (up, down, strange) nel modello statico a quark.

Gli elementi di un gruppo possono trasformarsi secondo un parametro reale  $\theta$  nel seguente modo:

$$g(\theta) = e^{i\theta_a T^a} \quad (2.8)$$

essendo  $T^a$  gli operatori di gruppo ed  $a = 1, \dots, \dim G$ .

Seguendo l'espressione (2.6), L'algebra di Lie del gruppo, ovvero i commutatori dei suoi generatori infinitesimi, è definita come:

$$[T^a, T^b] = i f_c^{ab} T^c \quad (2.9)$$

dove  $f^{abc}$  vengono detti coefficienti di struttura del gruppo, secondo Srednicki [20, eq.69.7].

Si può alzare un indice a queste costanti sotto la proprietà:

$$f^{abc} = f_d^{ab} \gamma^{dc} \quad (2.10)$$

dove  $\gamma^{dc}$  rappresenta la metrica di Killing, definita positiva solo per gruppi di Lie compatti, come ad esempio  $SU(N)$  e  $SO(N)$ .

Nei gruppi  $U(1)$  il generatore infinitesimo  $T = \mathbb{1}$  (matrice identità), ne consegue che la sua algebra di Lie sia  $[T, T] = 0$ . Ad esempio, nella rappre-

sentazione di carica  $q$ , si ha che il generatore infinitesimo è rappresentato da  $T = q$ , cioè matrici  $1 \times 1$  ovvero degli scalari, da lì che la sua algebra di Lie sia  $[T, T] = 0$  e di conseguenza abeliano.

Invece per i gruppi  $SO(N)$  con  $N > 2$ , l'algebra di Lie prende dei valori diversi da zero e fanno sì che i gruppi siano non abeliani.

In particolare nel caso  $SU(2)$ ,  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$  ovvero il tensore di Levi Civita (Srednicki [20, eq.69.8]), e  $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$  essendo  $\sigma^a$  le matrici di Pauli ovvero:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Il tensore di Levi-Civita viene definito come:

$$\epsilon^{abc} = \begin{cases} +1 & \text{se } (a, b, c) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \text{ cioè permutazioni pari} \\ -1 & \text{se } (a, b, c) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ cioè permutazioni dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.12)$$

ovvero

$$\epsilon^{1bc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{2bc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{3bc} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

D'altronde nel caso  $SU(3)$ ,  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$  essendo  $\lambda^a$  le matrici di Gell-Mann ovvero:

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Queste matrici sono normalizzate secondo la convenzione:

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \tag{2.15}$$

con  $\delta^{ab}$  delta di Kronecker (elementi della matrice identità).

## 2.3 Variabili di Grassmann. Algebra di Clifford

Seguendo l'elaborato di Bastianelli [5] e l'articolo di Catto et al. [10] le variabili di Grassmann anche detti numeri anticommutanti vengono definite come dei generatori  $\theta_i$  tale che:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \quad (2.16)$$

ovvero

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i \quad (2.17)$$

Vengono usati per descrivere i fermioni a livello pseudoclassico e modelli che riproducono i gradi di libertà associato allo spin. Il prefisso “pseudo” è dovuto al fatto che i numeri di Grassmann non possono essere misurati come una grandezza fisica.

Una conseguenza immediata della definizione (2.16) è che se  $i = j$ , allora si ha che:

$$\theta_i\theta_i + \theta_i\theta_i = 0 \quad (2.18)$$

Quindi

$$\theta_i^2 = 0 \quad (2.19)$$

Secondo Catto et al. [10] è importante evidenziare il fatto che soddisfino anche la proprietà associativa:

$$[\theta_i, \theta_j, \theta_k] = (\theta_i\theta_j)\theta_k - \theta_i(\theta_j\theta_k) = 0 \quad (2.20)$$

Un esempio di questi numeri astratti lo si trova realizzato nell'operatore derivata esterna  $d$  usato nelle leggi di Maxwell senza sorgente, ovvero  $dF = 0$ ,

come scritte nella notazione delle forme differenziali. La derivata esterna ha la proprietà che  $d^2 = 0$ , per cui una soluzione di  $dF = 0$  è proprio quella di scrivere  $F = dA$ , che difatti introduce i potenziali elettromagnetici  $A$ . L'invarianza di gauge emerge dal fatto che  $A' \sim A + d\Lambda$  con  $\Lambda$  funzione arbitraria.

Infatti se si considera  $f$  come tensore di campo elettromagnetico e  $A$  come quadri-potenziale, si ha che  $f = dA$ ; di conseguenza  $ddA = 0$  e siccome  $A \neq 0$  allora  $d^2 = 0$ . D'altronde, considerando l'invarianza di gauge,  $dA' \sim d(A + d\Lambda) = dA + dd\Lambda = dA$ , per cui  $dd\Lambda = 0$  e  $d^2 = 0$ .

D'altronde, secondo Bastianelli [5] le variabili di Grassmann possono essere reali o complesse. In questo caso, nel prodotto di variabili di Grassmann il complesso coniugato include uno scambio dell'ordine delle variabili:

$$(\theta_1\theta_2)^* = (-\theta_2\theta_1)^* = -\theta_2^*\theta_1^* \quad (2.21)$$

Le Variabili di Grassmann complesse  $\eta$  ed  $\eta^*$  possono sempre essere definite in termini di variabili di Grassmann reali nel seguente modo:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2) \quad (2.22)$$

$$\eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2) \quad (2.23)$$

essendo  $\theta$  numero reale, di conseguenza  $\theta^* = \theta$ .

Essi ricordano gli operatori di annichilazione e creazione, definite secondo Catto et al. [10, eq.49 e 50] come:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i + ip_i) \quad (2.24)$$

$$a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i - ip_i) \quad (2.25)$$

essendo  $x$  e  $p$  gli operatori posizioni e momento lineare rispettivamente, i quali soddisfano le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (2.26)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (2.27)$$

dove le parentesi quadre rappresentano il commutatore definito in (2.1) e  $\delta^{ij}$  la delta di Kronecker.

Si può osservare che l'espressione (2.27) rappresenta la relazione di indeterminazione ovvero misura di imprecisione (2.6). D'altronde secondo Balachandran et al. [1, eq.2.13] essa viene espressa con la notazione delle parentesi graffe che rappresentano le parentesi di Poisson, di conseguenza:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (2.28)$$

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbb{1} \quad (2.29)$$

proprietà trovate con questa notazione in [23, eq.8.12.34].

Le proprietà (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29) soddisfano l'algebra di Clifford, definite secondo Catto et. al. [10, eq.8] come gli elementi  $\gamma$  che soddisfano le proprietà anticommutativa ed associativa:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu, \gamma_\lambda] = 0 \quad (2.31)$$

dove le parentesi graffe rappresentano l'operazione di anticommutatività usata nella definizione (2.16) e le parentesi quadre rappresentano l'associatività usata nella proprietà (2.20).

La soddisfazione dell'algebra di Clifford è necessaria per avere l'esistenza di una rappresentazione matriciale. Si ha ad esempio in [10, eq.20 e 21]:

$$\theta = \frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

$$\pi = \frac{1}{2}(\sigma^1 - i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

dove  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli (2.11).

Poi si ha che  $\theta^2 = \pi^2 = 0$ , il quale soddisfa (2.19) e  $\{\theta, \pi\} = \mathbb{1}$  che soddisfa (2.30).

L'algebra di Clifford risulta così una struttura che generalizza la nozione di numero complesso e di quaternioni.

## 2.4 Definizioni preliminari nella generalizzazione non abeliana

Si presentano delle definizioni che serviranno di base per la costruzione e dimostrazione dell'equazione della forza di Lorentz dal principio di Minima Azione.

### 2.4.1 Traiettoria

La traiettoria di una particella può essere descritta dal quadrivettore posizione  $x^\mu$  al variare di un parametro  $\tau$ :

$$x^\mu(\tau) \tag{2.34}$$

Spesso  $\tau$  è il tempo proprio, come definito nel capitolo 1 insieme al suo differenziale nell'espressione (1.18), ma altre scelte sono possibili. La curva definita da  $x^\mu(\tau)$  viene anche detta linea di mondo, come in Parikh [17, eq.4.8].

### 2.4.2 Velocità ed accelerazione

La velocità e l'accelerazione vengono rappresentate rispettivamente come la derivata prima e seconda della traiettoria rispetto al tempo proprio:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu(\tau) &= \frac{d}{d\tau}x^\mu(\tau) \\ \ddot{x}^\mu(\tau) &= \frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu(\tau) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Possono essere anche espresse con la notazione indiciale di quadrivettore.

### 2.4.3 Vettore carica

I casi particolari commutativi, come la carica elettrica e la carica gravitazionale ovvero la massa, sono scalari rappresentate sotto il gruppo  $U(1)$ , il quale è abeliano.

Per addentrarsi nella nozione di una carica generalizzata è necessario definirla come un vettore. Cosicché la carica di colori ad esempio, corrispondente al campo di Forza Forte, presenta otto componenti derivate dalle combinazioni non scalari dei tre tipi di carica fondamentale di  $SU(3)$ : blu, verde e rosso. Invece la carica di isospin debole, corrispondente al campo di Forza Debole, presenta tre componenti derivate dai suoi due tipi di cariche fondamentali descritte dal gruppo  $SU(2)$ . Questi gruppi sono entrambi non abeliani.

In generale, per un gruppo non abeliano la carica di colore può essere vista come un vettore nello spazio della rappresentazione aggiunta, corrispondente appunto al fatto che i generatori del gruppo  $T^a$  hanno un indice  $a$ , che per  $SU(N)$  assume  $N^2 - 1$  valori.

La carica generalizzata viene dunque associata ad una rappresentazione del gruppo di simmetria. Nel caso del modello standard delle particelle elementari si ha il gruppo di simmetria di gauge ovvero  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ; che include i tre tipi di cariche appena spiegati. I fermioni del modello standard hanno cariche generalizzate sotto questi gruppi.

Secondo la ricerca di Salvi [18, pag.49] (sicuramente basandosi su Bastianelli [6, pag.14]), la carica è un vettore nello spazio delle rappresentazioni, analogo al momento angolare quantizzato; da questo si intuisce come possa essere rappresentata da un generatore del gruppo in una opportuna rappresentazione.

Per ottenere le equazioni del moto da un principio d'azione, si può esprimere ogni componente del vettore carica come un prodotto hermitiano tra variabili complesse tramite un generatore del gruppo di gauge. Cosicché aggiungendo

l'indice  $a$  del vettore carica, si ha un'espressione per rappresentare ognuno di questi prodotti interni nel seguente modo:

$$\rho^a = \bar{z}_\alpha (T^a)^\alpha_\beta z^\beta \quad (2.36)$$

detta espressione della carica con variabili complesse; essendo  $(T^a)^\alpha_\beta$  generatori nella rappresentazione definita usato nella sezione (2.2) e  $z$  le variabili complesse ausiliari, da considerare come variabili dinamiche associate alla carica non abeliana della particella.

Secondo Bastianelli et al. [7, eq.5] le variabili dinamiche possono essere numeri complessi commutanti o no, e quantisticamente possono essere associate ad operatori di creazione ed annichilazione (2.24) e (2.25).

Poi in [7, pag.2] Bastianelli et al. indicano che le variabili ausiliari potrebbero essere usate in qualsiasi altra rappresentazione prescelta e trovano nel corrispondente spazio di Hilbert tutti i possibili prodotti tensoriali simmetrici o antisimmetrici della rappresentazione scelta.

Un modo simile di esprimere l'espressione del vettore carica, è attraverso l'uso delle variabili di Grassmann spiegate nella sezione (2.3), essa sarebbe secondo Barducci et al. [3, eq.3.4]:

$$I^a = \theta^* \tau^a \theta \quad (2.37)$$

dove  $\tau^a$  è il generatore infinitesimo che soddisfa l'algebra di Lie (2.9), e  $\theta$  le variabili di Grassmann.

Questa espressione coincide con la definizione riportata da Balasin et al. [2, eq.2.11] che presenta la seguente notazione:

$$q^a = -\frac{i}{2} f^{abc} \Lambda^b \Lambda^c \quad (2.38)$$

Essi esprimono l'Algebra non abeliana delle cariche attraverso le parentesi di Poisson:

$$\{q^a, q^b\} = f^{abc} q^c \quad (2.39)$$

D'altronde, Balachandran et al. [1, eq.2.5] la definiscono come variabile di isospin e la rappresentano come:

$$I^\alpha = \theta_a^\dagger T_{ab}^\alpha \theta_b \quad (2.40)$$

Di maniera analoga al ragionamento che porta dall'espressione (2.27) a (2.29), secondo Balachandran et al. [1, eq.2.13] siccome  $\{\theta_a, \theta_b^\dagger\} = -i\delta_{ab}$ , allora  $\{I^\alpha, I^\beta\} = f_\gamma^{\alpha\beta} I^\gamma$  dette parentesi di Dirac per variabili di isospin.

Un'altra espressione della carica si basa nella sua densità. Infatti, considerando la delta di Dirac (1.27), di maniera analoga, aggiungendo la componente temporale, la densità di carica generalizzata  $d^a$  potrebbe essere espressa come:

$$d^a = \int \rho^a \delta^4(x - \xi(\tau)) d\tau \quad (2.41)$$

dove  $a$  rappresenta l'indice che elenca ogni carica con la sua rispettiva densità.

Infine, viene evidenziata una proprietà della carica la quale sarà fondamentale per ricavare la seconda equazione di Wong nella seguente sezione. Si tratta della sua conservazione covariante rispetto al tempo proprio, per cui soddisfa l'espressione:

$$\frac{D}{d\tau} \rho^a = 0 \quad (2.42)$$

### 2.4.4 Densità di corrente generalizzata

Secondo Yang e Mills [22, eq.13], la densità o divergenza di corrente viene definita come:

$$\vec{J}^\mu = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\Psi \quad (2.43)$$

dove  $\gamma^\mu$  sono matrici  $4 \times 4$  di traccia nulla dette matrici gamma di Dirac, le quali vengono definite come:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^4 = -i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

dove  $\sigma^i$  sono le matrici di Pauli, già definite in (2.11) e  $\mathbb{1}$  è la matrice identità di  $2 \times 2$ . Inoltre, i generatori di spin isotopico sono per il gruppo di gauge  $SU(2)$  identici alle matrici di Pauli,  $\vec{\tau} = \vec{\sigma}$ . Le matrici gamma soddisfano l'algebra di Clifford spiegate nella sezione (2.3).

D'altronde, la densità di corrente può essere definita nella forma controvariante come il prodotto tra la densità di carica (2.41) e la velocità (2.35):

$$J^{a\mu} = g \int \rho^a(\tau)\dot{\xi}^\mu(\tau)\delta^4(x - (\tau))d\tau \quad (2.45)$$

essendo  $\delta$  la delta di Dirac (1.27) e  $g$  la costante di accoppiamento o peso relativo tra le azioni.

L'espressione (2.45) viene usata da Boozer [9, eq.7] senza la costante di accoppiamento e con il simbolo solito dei vettori al posto dell'indice  $a$ :

$$\vec{J}^\mu = \int \vec{\rho}^\mu\delta^4(x - (\tau))d\tau \quad (2.46)$$

Questa notazione è presentata con l'intenzione di paragonarla al caso particolare di campo elettromagnetico che egli esprime con carica  $q$ , velocità  $w$  e traiettoria o posizione  $z(\tau)$  Boozer [9, eq.3].

Di maniera analoga, l'espressione (2.45) viene espressa da Wong [21, eq.16] ma con  $\vec{I}$  al posto del vettore carica:

$$\vec{J}^\mu = g \int \vec{I}(\tau) \dot{\xi}^\mu \delta^4(x - \xi(\tau)) d\tau \quad (2.47)$$

Wong [21, sec.Validity] infatti presenta  $I$  come una matrice di elementi; bisogna evidenziare che egli non usa la notazione indiciale per la carica.

### 2.4.5 Teoria di Yang-Mills e campo di gauge

Secondo Srednicki [20, pag.410], la teoria di Yang-Mills o Teoria non-abeliana di gauge è quella in cui  $f_c^{ab}$  dell'espressione (2.9) è non nulla.

Secondo Boozer [9, sec.I], questa teoria gioca un ruolo centrale nello studio delle interazioni forte e debole; ed include anche lo studio dell'elettrodinamica quantistica.

Il campo di gauge viene definito attraverso il suo potenziale  $A_\mu$  in  $SU(N)$  detto "potenziale di gauge" o "connessione" che secondo Bastianelli [4] definisce geometricamente una specie di trasporto parallelo in un certo spazio.  $A_\mu$  è una matrice hermitiana senza traccia che segue, secondo Srednicki [20, eq.69.9], la trasformazione di gauge:

$$A_\mu \rightarrow U(x) A_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \quad (2.48)$$

essendo  $U$  una matrice unitaria speciale, che può essere scritta in funzione delle matrici generatrici  $T$  nel seguente modo:

$$U(x) = e^{-ig\theta^a T^a} \quad (2.49)$$

espressione che segue la notazione (2.8).

D'altronde, seguendo proprietà per alzare o abbassare gli indice ad un tensore (2.10), il potenziale viene sviluppato in termine dei generatori  $T^a$  dell'algebra di Lie nel seguente modo:

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \tag{2.50}$$

dove  $A_\mu^a = 2Tr A_\mu T^a$ .

Questa espressione coincide con quella di Srednicki [20, eq.69.17] ed anche con quella di Bastianelli [4, eq.25], quest'ultimo però con l'aggiunta dell'unità immaginaria:

$$A_\mu = -iA_\mu^a T^a \tag{2.51}$$

Secondo Boozer [9, sec.II], nel caso del campo elettromagnetico (caso abeliano), si ha l'invarianza rispetto alla trasformazione

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda \tag{2.52}$$

dove  $\lambda$  è un parametro arbitrario dipendente dalla posizione.

Questa trasformazione di gauge viene detta locale perché  $\lambda$  può essere diversa in diversi punto dello spazio-tempo, e viene anche detta abeliana perché l'effetto netto di due trasformazioni è indipendente dal ordine in cui vengono eseguite.

Invece, nel caso non abeliano  $\lambda$  è un vettore e sarebbe definito come  $\vec{\lambda} = -\frac{1}{g}\vec{\theta}$  con  $g$  costante di unità inversa a quella della carica (Boozer [9, sec.IV]).

### 2.4.6 Gradiente generalizzato

Secondo Srednicki [20, eq.69.11], il gradiente generalizzato viene definito, nella forma covariante, come:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu \quad (2.53)$$

dove  $A_\mu$  è il potenziale di campo dell'espressione (2.50) e  $g$  la costante di accoppiamento o peso relativo tra le azioni.

Secondo Bastianelli [4] il gradiente trasforma tensori in tensori, quindi non distrugge il carattere tensoriale. Inoltre rende locale la simmetria  $SU(N)$ .

### 2.4.7 Tensore del campo

Secondo Bastianelli [4], il tensore del campo può essere interpretato come curvatura di un determinato oggetto geometrico.

Srednicki [20, eq.69.13] lo definisce attraverso il commutatore di gradienti nel seguente modo:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (2.54)$$

Sostituendo la definizione di gradiente generalizzato (2.53), rimane:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] \quad (2.55)$$

Cosicché, considerando la proprietà di linearità del commutatore (2.2), si ha che:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} ([\partial_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] - ig[A_\mu, \partial_\nu - igA_\nu]) \quad (2.56)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\partial_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] \quad (2.57)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} ([\partial_\mu, \partial_\nu] - ig[\partial_\mu, A_\nu]) + ([A_\mu, \partial_\nu] - ig[A_\mu, A_\nu]) \quad (2.58)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\partial_\mu, \partial_\nu] + [\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu] - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (2.59)$$

Considerando che il primo termine vale zero perché gli operatori derivate commutano, sviluppando il secondo ed il terzo termine con la definizione di commutatore (2.1) e considerando che applicate su una funzione si avrebbe  $[\partial_\mu, A_\nu]f = \partial_\mu(A_\nu f) - A_\nu \partial_\mu f = \partial_\mu A_\nu f + A_\nu \partial_\mu f - A_\nu \partial_\mu f = \partial_\mu A_\nu f$ , infine si ha che:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (2.60)$$

espressione analoga a quella del tensore di campo elettromagnetico (1.32) con l'aggiunta del termine non abeliano considerando (2.6).

Questa espressione coincide con quella di Balasin et al. [2, pag.7] nello spazio di Moyal, dove si applica il commutatore con operatori che vengono definiti nello spazio di Hilbert. Coincide anche con la definizione proposta da Yang e Mills [22, eq.4] mantenendo l'invarianza sotto la trasformazione isotopica di gauge.

Poi, moltiplicando entrambi i membri dell'espressione (2.9) per  $-i$ , si ha che  $-i[A_\mu, A_\nu] = f^{abc}T^a$ . Dopodiché considerando  $T^a = [A_\mu^a, A_\nu^a]$ , il tensore rimane:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} [A_\mu^a, A_\nu^a] \quad (2.61)$$

detta equazione di campo di Yang-Mills secondo Parikh [23, eq.4.7].

D'altronde Balachandran et al. [1, sec.II] presentano il termine non abeliano come  $-gf_{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta A_\nu^\gamma$ , espressione che coincide con Bastianelli [4, eq.38] ma con segno positivo.

Secondo Chiese [11, eq.4.94], il tensore  $F$  soddisfa l'identità di Bianchi:

$$D_\rho F_{\mu\nu}^a + D_\mu F_{\nu\rho}^a + D_\nu F_{\rho\mu}^a = 0 \quad (2.62)$$

dove  $D_\mu$  è stato definito nell'espressione (2.53). Corrisponde infatti, nel caso del tensore elettromagnetico, all'espressione delle leggi di Maxwell senza sorgente.

Questa proprietà viene espressa anche da Wong [21, eq.21] usando il simbolo di nabra come operatore gradiente generalizzato.

### 2.4.8 Funzionale d'azione

Il funzionale d'azione mantiene la definizione (1.33). La sua generalizzazione viene applicata sulla lagrangiana generalizzata nella seguente sezione.

## 2.5 Dimostrazione. Principio di Minima Azione

Si considera l'azione della particella puntiforme, libera e massiva dell'espressione (1.37) e si aggiunge il termine di interazione tra il vettore carica (2.36) o (2.37) ed il campo generalizzato di potenziale (2.51). Il termine di questa interazione viene costruita imitando lo svolgimento usato nella dimostrazione del capitolo 1 (1.43) con la definizione di densità di corrente (2.45). L'azione rimane:

$$S = \int d\tau (-mc\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} + g\dot{x}^\mu \rho^a A_\mu^a) \quad (2.63)$$

espressione che coincide con quella di Balasin [2, eq.2.4] ma con segno diverso nel secondo termine. Questo per il modo come è stato definito il potenziale di gauge.

Ora, viene applicato il Principio di Minima Azione, per cui si deriva ed eguaglia a zero l'azione appena definita. Per quanto riguarda il primo termine, corrispondente alla particella libera, viene applicato lo stesso metodo usato in (1.45), invece per quanto riguarda il secondo termine ovvero il termine di interazione, si procede il calcolo della variazione nel seguente modo:

$$\int d\tau [g\rho^a \delta(\dot{x}^\mu A_\mu^a(x^\mu))] \quad (2.64)$$

Si specifica che il campo  $A_\mu$  si esprime in funzione della posizione, in modo di considerare anche la sua derivata interna ovvero seguire la regola della catena.

Applicando la derivata del prodotto, seguendo la regola di Leibnitz ed usando il metodo usato in (1.45) per il secondo termine e la semplificazione

(1.47), si ha che:

$$\int d\tau [g\rho^a (-\delta x^\mu D_\nu A_\mu^a \dot{x}^\nu + \dot{x}^\nu D_\mu A_\nu^a \delta x^\mu)] \quad (2.65)$$

Poi, raccogliendo il differenziale di posizione e la velocità:

$$\int d\tau \delta x^\mu [g\rho^a (-D_\nu A_\mu^a + D_\mu A_\nu^a) \dot{x}^\nu] \quad (2.66)$$

Poi applicando la definizione (2.53), si ha che:

$$\int d\tau \delta x^\mu [g\rho^a (-\partial_\nu A_\mu^a + ig A_\nu^a A_\mu^a + \partial_\mu A_\nu^a - ig A_\mu^a A_\nu^a) \dot{x}^\nu] \quad (2.67)$$

Cosicché, sistemando i termini, si ha:

$$\int d\tau \delta x^\mu [g\rho^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - ig [A_\mu^a, A_\nu^a]) \dot{x}^\nu] \quad (2.68)$$

Poi, applicando lo stesso passaggio usato per trasformare l'espressione (2.60) in (2.61), si ha che:

$$\int d\tau \delta x^\mu [g\rho^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} [A_\mu^a, A_\nu^a]) \dot{x}^\nu] \quad (2.69)$$

Infine, sostituendo con la definizione (2.61), rimane:

$$S = \int d\tau \delta x^\mu g\rho^a F_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu \quad (2.70)$$

Quindi, la derivata dell'azione totale rimane:

$$\int d\tau \delta x^\mu \left[ -\frac{d}{d\tau} \left( \frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} \right) + g\rho^a F_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu \right] = 0 \quad (2.71)$$

Poi, considerando le definizioni (1.23), si ha:

$$\int d\tau \delta x^\mu \left[ -\frac{dp_\mu}{d\tau} + g\rho^a F_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu \right] = 0 \quad (2.72)$$

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau} + g\rho^a F_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = g\rho^a F_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu \quad (2.74)$$

Infine, per (1.25) si ha:

$$f_\mu = g\rho^a F_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu \quad (2.75)$$

la quale sarebbe la forma generalizzata della forza di Lorentz.

## 2.6 Altre forme e considerazioni

Wong [21, eq.14], nel suo articolo, descrive la forza di Lorentz nella sua forma covariante, esprimendo la forza come la massa per l'accelerazione, ovvero:

$$m\ddot{\xi}_\mu(\tau) = gf_{\mu\nu}^a \cdot I(\tau)\dot{\xi}_\nu \quad (2.76)$$

dove  $I$  è una matrice di elementi (Wong [21, sec.5]) e  $\xi$  la posizione o traiettoria definita in (2.34);  $\dot{\xi}_\nu$  la velocità e  $\ddot{\xi}_\mu$  l'accelerazione, entrambe definite in (2.35). Cosicché nella notazione del presente elaborato rimarrebbe:

$$m\ddot{x}^\mu(\tau) = gF^{\mu\nu a} \dot{x}_\nu q^a \quad (2.77)$$

D'altronde secondo Wong [21, eq.12], il primo membro dell'espressione (2.74) viene scritto come  $\frac{d\pi_i}{d\tau}$ , dove  $\pi_i$  è detto momento meccanico e viene definito come il momento meccanico classico più il termine quantistico:

$$\pi_i = p_i - gb_i \cdot I \quad (2.78)$$

dove  $b$  è il campo di Yang-mills ed  $I$  è una matrice di elementi definita come  $I = \hbar X$  con  $X$  "set" di generatori tali che  $[X_\alpha, X_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma$  dove  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  è tensore di Levi-Civita (2.12).

Dall'espressione di conservazione  $\frac{d}{d\tau} I^2 = 0$  presente in Wong [21, eq.18] si deduce che  $I$  sia la carica (2.37).

Di maniera analoga Balachandran et al. [1, eq.2.12], definisce il momento meccanico con l'espressione:

$$\pi_i = p_i + gA_\mu^\alpha I^\alpha \quad (2.79)$$

L'espressione della forza di Lorentz sarebbe una delle due equazioni dette "Equazioni di Wong" le quali descrivono le equazioni del moto. La seconda equazione sarebbe:

$$\frac{D}{d\tau}\rho^a = \dot{\rho}^a + g\dot{x}^\mu f^{abc} A_\mu^b \rho^c = 0 \quad (2.80)$$

dove  $\dot{\rho}^a = \frac{d}{d\tau}\rho^a$ . Questa equazione può essere ottenuta dalla conservazione della carica rispetto al tempo proprio, ovvero (2.42).

Una variazione interessante nella dimostrazione delle equazioni di Wong la si trova nel modo di definire l'integrando dell'azione ovvero la lagrangiana, il quale viene definita, secondo Balachandran et al. [1, eq.2.1], come:

$$L = -m(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{1/2} + i\theta_a^\dagger D_{ab}\theta_b \quad (2.81)$$

dove  $D_{ab}\theta_b = \dot{\theta}_a + ig\dot{x}^\mu A_\mu^\alpha T_{ab}^\alpha \theta_b$ .

Sostituendo, si ha che:

$$L = -m(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{1/2} + i\theta_a^\dagger (\dot{\theta}_a + ig\dot{x}^\mu A_\mu^\alpha T_{ab}^\alpha \theta_b) \quad (2.82)$$

Per cui distribuendo:

$$L = -m(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu)^{1/2} + i\theta_a^\dagger \dot{\theta}_a - g\theta_a^\dagger \dot{x}^\mu A_\mu^\alpha T_{ab}^\alpha \theta_b \quad (2.83)$$

Questo spiega perché alcuni autori come Bastianelli et al. [7, eq.5] presentano, dentro la parte di lagrangiana di particella libera, un termine aggiuntivo con variabili dinamiche  $i\bar{z}_a \dot{z}^\alpha$ . Inoltre, usando  $q$  come simbolo della carica e  $W$  come simbolo del campo.

Infatti Salvi [18, pag.49 e 50] nel suo elaborato dimostra le equazioni di Wong variando, dall'azione, la variabile  $x^\mu$  e le variabili dinamiche. Con la prima variazione dimostra l'espressione della forza di Lorentz e con la variazione delle variabili dinamiche dimostra invece l'espressione (2.80).

Di maniera analoga, secondo Barducci et al. [3, eq.3.1], dentro la parte di lagrangiana di particella libera viene aggiunto il termine  $\frac{1}{2}i \sum_{\alpha=1}^n (\theta_{\alpha}^* \dot{\theta}_{\alpha} - \alpha \dot{\theta}_{\alpha}^*)$  dove  $\theta$  rappresenta le variabili di Grassmann. Questo stesso termine lo si trova nella definizione di carica di Balachandran et al. [1, eq.5.6]. È da aspettarsi visto che Balachandran commenta e si appoggia all'articolo di Barducci.

Un'altra alternativa secondo Barducci et al. [3, eq.3.14], sarebbe quella di aggiungere  $\frac{1}{2}i \sum_{a=1}^n \xi^a \dot{\xi}^a$  definendo invece  $I_a$  come  $\frac{1}{2} f_{bc}^a S^{bc}$  con  $S^{ab} = -\frac{1}{2}[\xi^a, \xi^b]$ .  $\xi$  sono variabili di Grassmann che rispettano l'algebra di Clifford. La presenza del simbolo di sommatoria sostituisce l'uso della notazione di Einstein per gli indici.

Un'altra espressione della forza di Lorentz viene data da Jackiw [15, eq.3.18 e 3.20.c]:

$$\partial_{\mu} \theta^{\mu\nu} = 2tr J_{\mu} F^{\mu\nu} \quad (2.84)$$

dove  $\theta^{\mu\nu}$  è il tensore energia-momento e  $tr$  sta per traccia. In questa espressione scompaiono la costante di accoppiamento e la carica, perché si trovano incluse dentro della definizione della densità di carica  $J_{\mu}$  (2.45). Questa espressione corrisponde alla definizione di potenziale di campo  $A_{\mu}^a(x) = 2Tr A_{\mu}(x) T^a$  trovato in Srednicki [20, eq.69.18].

Di maniera simile, secondo Balasin et al. [2, eq.2.9] l'espressione detta forza di Lorentz-Yang-Mills, viene descritta con la traccia:

$$m\ddot{x} = Tr(qF^{\mu\nu} \dot{x}_{\nu}) \quad (2.85)$$

Poi Balasin et al. [2, eq.2.16] la esprime con energia-momento e densità di carica:

$$\partial_{\nu} T^{\nu\mu} = Tr(qF^{\mu\nu} j_{\nu}) \quad (2.86)$$

identica all'espressione (2.84).

D'altronde secondo Jackiw [15, eq.3.29], l'espressione della forza di Lorentz si può esprimere differenziando i potenziale abeliani dai non abeliani, inoltre separando il campo in due componenti analoghi a quello elettrico e magnetico, nel seguente modo:

$$\dot{v} + v \cdot \nabla v = force + Q_a E^a + \frac{v}{c} \times Q_a B^a \quad (2.87)$$

dove *force* è la pressione di forza proveniente dal potenziale  $V$  e di conseguenza abeliana,  $Q_a$  è il vettore carica,  $v$  rappresenta la velocità,  $E$  e  $B$  sono i campi rispettivamente cromoelettrico e cromomagnetico, espresse rispetto al tensore di campo come  $E_a^i = cF_{i0}^a$  e  $B_a^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}^a$  con  $\epsilon^{ijk}$  tensore di Levi-Civita (2.12).

D'altronde, sempre secondo Jackiw [15, eq.3.26], la seconda equazione di Wong rimane:

$$\sum_{s=1}^r j_{(s)}^\mu [A_\mu K_{(s)}] = 0 \quad (2.88)$$

dove, secondo [15, eq.3.11],  $j_{(s)}^\mu$  è un tensore tale che  $J^\mu = \sum_{s=1}^r Q_{(s)} j^\mu$ ,  $A_\mu$  è il potenziale considerato come matrice di rotazione, e  $K_{(s)}$  è un tensore tale che  $Q_{(s)} = gK_{(s)}g^{-1}$ . Quest'ultima espressione è equivalente all'espressione (2.36), dimostrando che  $K_{(s)}$  sarebbe il generatore associato alla carica e  $g$  le variabili dinamiche. Curiosamente, questo autore usa l'indice covariante con parentesi tonde.

Balachandran et al. [1, eq.2.3, 2.4 e 2.6] e Barducci et al. [3, eq.3.12 e 3.13] coincidono, nella forma, con le espressioni delle equazioni di Wong (2.74) e (2.80).

Inoltre, Barducci et al. [3, eq.4.10 e 4.12] presenta dei termini aggiuntivi dovuto alla considerazione della particella di spin semiclassico senza simmetria

interna, includendo la differenziazione tra variabili di Grassmann pseudoscalari e pseudovettoriali.

D'altronde, un altro modo di presentare le equazioni di Wong, detto equazioni di Lorentz-Yang-Mills continuo, secondo Balasin et al. [2, e.A.4] è:

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu} = F_\nu^{a\mu} j^{a\nu} \quad (2.89)$$

con  $D_\mu j^{a\mu} = 0$ , dove  $j$  la densità di corrente e  $T$  è il tensore di densità energia-momento  $\int d\tau \delta^4(y - x(\tau)) m \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)$ .

Per quanto riguarda la dimostrazione dell'espressione della forza di Lorentz, un altro metodo sarebbe partire dall'integrale primo (momento coniugato) delle equazioni di Eulero-Lagrange come esegue Gasperini [13, pag.98] ovvero partire dall'Hamiltoniano come esegue Chiese [11, pag.51] e Balachandran et al. [1, sec.II]. Inoltre, Balasin et al. [2, 9] la dimostrano partendo dalla conservazione del differenziale di densità di carica.

Inoltre, Balasin et al. [2, sec.4] esprimono il tensore di campo dichiarato non uniforme rispetto ad un tensore uniforme in modo tale che ci sia un parametro theta che sarà colui che avrà la parte non uniforme. Alla fine, oltre a questa variazione, arrivano alla stessa equazione di Lorentz non alterata.

Boozer [9, sec.IV], evidenzia il fatto che la forma dell'equazione non subisce nessuna modifica rispetto all'equazione originale del campo elettromagnetico, rispettando comunque le conservazione della carica e della densità di corrente; questo dovuto al fatto che le modifiche furono fatte nelle definizioni di potenziale di campo e dell'operatore gradiente.

Boozer [9, eq.38] esprime il prodotto tra il potenziale ed il vettore carica come un prodotto vettoriale:

$$\frac{d\vec{q}}{d\tau} = -g w^\mu \vec{A}_\mu \times \vec{q} \quad (2.90)$$

dove  $w^\mu$  rappresenta il quadrivettore velocità e  $\vec{q}$  il vettore carica. Questo con l'obbiettivo di riportare il lettore all'idea di una rotazione, spiega così che il vettore carica viene ruotato dal vettore potenziale attraverso questa operazione. La presenza di questo effetto è dovuta all'invarianza sotto la trasformazione de gauge locale non abeliana, richiesta dettata dalla Teoria di Yang-Mills. Per quanto riguarda la costante di accoppiamento  $g$ , indica che è proporzionale a questi effetti. Ne consegue che la Teoria di Yang-Mills non soddisfi il Principio di Sovrapposizione (Boozer [9, sec.IV]). Questo punto di vista verrà sviluppato nella sezione (3.3.2) del seguente capitolo.

# Capitolo 3

## Casi particolari nelle forze fondamentali

In questo capitolo viene applicata la generalizzazione della forza di Lorentz nei quattro campi fondamentali della Fisica come casi particolari dell'espressione generalizzata, ricavata nel capitolo 2.

### 3.1 Costante di accoppiamento

Rappresentato in questo elaborato con la lettera  $g$ , è un valore adimensionale di una costante d'accoppiamento che varia a seconda del campo. Ha un ruolo fondamentale nelle espressioni delle equazioni di Wong, in particolare quella della forza di Lorentz, ad esempio secondo Bastianelli [4] il principio di gauge permette di derivare tutti i vertici di interazione tra campi di spin  $1/2$  ed  $1$  dipendenti dalla sola costante d'accoppiamento  $g$ .

A continuazione si elencano i valori per ognuno dei campi delle quattro forze fondamentali, seguendo la descrizione data da Semprini [19, pag.147] con la notazione  $\alpha$ :

Per il campo della Forza Elettromagnetica:

$$\alpha_{Elettr} = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)\hbar c} \approx \frac{1}{137} \approx 7,3 \times 10^{-3} \quad (3.1)$$

dove  $e$  sta per carica dell'elettrone il cui valore in SI è circa  $1,6 \times 10^{-19}C$ ,  $\epsilon_0$  per costante dielettrica nel vuoto il cui valore in SI è circa  $8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ ,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  con  $h$  la costante di Planck il cui valore in SI è circa  $6,63 \times 10^{-34}Js$  e  $c$  la velocità della luce nel vuoto il cui valore in SI è circa  $3 \times 10^8ms^{-1}$ .

$\alpha_{Elettr}$  è anche detta costante di struttura fine e presenta ordine di grandezza  $10^{-2}$ .

Nel caso del campo della Forza Forte:

$$\alpha_{Forte} = \sqrt{\frac{M_o L_o c}{\hbar}} \approx 2,18 \quad (3.2)$$

dove  $M_o$  e  $L_o$  stanno rispettivamente per massa e diametro del nucleone di valori in SI  $1,67 \times 10^{-27}Kg$  e  $10^{-15}m$ . Il valore numerico di  $\alpha_{Forte}$  presenta ordine di grandezza  $10^0$ .

Nel caso del campo della Forza Debole:

$$\alpha_{Deb} = \frac{G_f E^2}{\hbar^3 c^3} \approx 1,04 \times 10^{-5} \quad (3.3)$$

dove  $G_f$  rappresenta la costante di Fermi di valore approssimato in SI di  $1,46 \times 10^{-62}Jm^3$  e  $E = M_0c^2$ .  $\alpha_{Deb}$  presenta ordine di grandezza  $10^{-5}$ .

E nel caso del campo della Forza Gravitazionale:

$$\alpha_{Grav} = \frac{G_N E^2}{\hbar c^5} \approx 5,39 \times 10^{-39} \quad (3.4)$$

dove  $G_N$  rappresenta la costante di gravitazione universale di valore approssimativo in SI di  $1,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$ . Presenta ordine di grandezza  $10^{-38}$ , notevolmente inferiore rispetto alle prime tre.

## 3.2 Casi abeliani

Si presentano i due casi abeliani ovvero col termine commutativo nullo della forza di Lorentz, partendo dalla generalizzazione sviluppata nel capitolo 2.

### 3.2.1 Nel campo elettromagnetico

A differenza della costante di accoppiamento (3.1), viene considerato che  $g = \frac{1}{c}$ . Sostituendola nell'espressione di forza di Lorentz generalizzata (2.75), rimane l'espressione (1.52). Il vettore carica diventa uno scalare detto "carica elettrica" e viene rappresentato con la lettera  $e$ .

Il resto degli elementi, come l'azione ed il potenziale di campo sono stati già sviluppati con dettaglio nel capitolo 1.

### 3.2.2 Nel campo gravitazionale

Seguendo l'elaborato di de Andrade e Pereira [12] viene chiarito il fatto che questo campo, interagendo a grande scala, non presenta caratteristiche quantistiche e di conseguenza non ha bisogno della generalizzazione non abeliana. Nonostante ciò si parte dalla Teoria di Gauge per gruppo di traslazione, facendo analogia con una particella senza spin, imitando la Teoria di Gauge elettromagnetica in  $U(1)$ .

La carica sarebbe uno scalare detta massa e la geodetica dello spazio-tempo in cui si lavora, basandoci sulla Relatività Generale potrebbe essere quello che presenta torsione ma non curvatura (di Weitzenböch) ovvero quello che presenta curvatura ma non torsione (di Riemann).

L'equazione della forza di Lorentz descrive la traiettoria di una particella massiva sottomessa al campo gravitazionale in uno spazio-tempo piatto (Minkowski).

Viene considerato un quadricampo (“tetrad field”) dove la quaterna (“tetrad”) è parallela, da lì che si parli di parallelismo assoluto o teleparallelismo.

A continuazione si elencano le grandezze necessarie per definire una forza di Lorentz di campo gravitazionale seguendo la notazione di Pereira e de Andrade:

L’operatore gradiente, seguendo una struttura simile a (2.53), viene definito come:

$$D_\mu = \partial_\mu + c^{-2} B_\mu^\alpha \frac{\delta}{\delta a^\alpha} \quad (3.5)$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto,  $B_\mu^\alpha$  rappresenta il potenziale del campo gravitazionale e procede da  $B_\mu = B_\mu^\alpha P_\alpha$ , espressione analoga a (2.50), con la differenza che  $P_\alpha$  generatore di traslazioni infinitesimali, è commutativo ovvero soddisfa:  $[P_\alpha, P_\beta] = 0$ .

D’altronde il tensore di campo commutativo sarebbe:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu B_\nu^\alpha - \partial_\nu B_\mu^\alpha \quad (3.6)$$

Espressione che imita l’espressione (1.32) del tensore elettromagnetico in  $U(1)$ .

La Lagrangiana [12, eq.14] sarebbe

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\theta\rho\beta} \eta^{\mu\theta} \eta_{\alpha\beta\gamma} \eta^{\nu\rho} \right] \quad (3.7)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale, e  $\eta$  rappresenta la metrica di Minkowski ovvero la matrice  $4 \times 4$  definita in (1.16).

Dopodiché l’azione dell’interazione tra la carica gravitazionale (massa) ed il suo rispettivo campo rimane:

$$S = \int c^{-1} B_\mu^\alpha p_\alpha dx^\mu = \int c^{-1} B_\mu^\alpha p_\alpha \dot{x}^\mu d\tau \quad (3.8)$$

dove  $p_\alpha$  è il quadrivettore momento definito nel in (1.20). di Andrade e Pereira [12, eq.16] presentano  $c^{-2}$  perché definiscono il momento con l'aggiunta di  $c$  come fattore.

Per cui, l'azione totale [12, eq.17] considerando anche l'azione della particella puntiforme, libera e massiva (1.37) sarebbe:

$$S = \int d\tau (-mc\sqrt{-\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu} + c^{-1}\dot{x}_\alpha\dot{x}^\mu m B_\mu) \quad (3.9)$$

espressione analoga a (1.43) e (2.63) tranne per la presenza di un altro quadrivettore velocità.

Anche in questo caso, la costante di accoppiamento gravitazionale (3.4) rimane  $g = \frac{1}{c}$ .

Cosicchè l'espressione della forza di Lorentz [12, eq.18] rimane:

$$f^\mu = c^{-1}F^{\mu\nu a}\dot{x}_\nu\dot{x}^\nu m \quad (3.10)$$

### 3.3 Casi non abeliani

Si presentano i due casi non abeliani ovvero col termine commutativo non nullo della forza di Lorentz. Si sviluppa ogni caso per approfondire i concetti generalizzati di vettore carica e campo di Yang-Mills.

#### 3.3.1 Nel campo debole

Yang e Mills [22] cercavano di studiare il decadimento tra il protone ed il neutrone dalla loro carica elettrica, basandoci sul fatto che entrambi fossero due stati della stessa particella. Evidentemente non era stata ancora introdotta l'idea del quark.

Essi [22, eq.22] definiscono la carica elettrica come:

$$Q = e(\epsilon^{-1}T^z + R) \quad (3.11)$$

dove  $R$  è una costante,  $T$  una matrice di trasformazione detto "momento angolare di spin isotopico",  $\epsilon^{-1}$  la costante di accoppiamento e  $z$  indica la direzione dello spazio isotopico.

Secondo Wong [21, eq.2], Bastianelli [4, eq.18] e Yang-Mills [22, eq.11], la lagrangiana di una particella provvista da spin isotropico in interazione con il campo di Yang e Mills nel limite classico è:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{mc}{\hbar}\bar{\Psi}\Psi \quad (3.12)$$

dove  $D_\mu$  corrisponde a (2.53).

Bastianelli [4, eq18] considera che il parametro  $e$  tiene conto del peso relativo tra i vari termini della lagrangiana che sono separatamente gauge invarianti. Bastianelli [4, pag.2] evidenzia il fatto che la costante  $e$  prima introdotta rap-

presenta la costante d'accoppiamento ed è identificata con la carica elementare dell'elettrone.

Balachandran et al. [1, eq.4.7] presenta l'espressione della forza di Lorentz come:

$$m\dot{\vec{v}} = gI^\alpha(\vec{E}^\alpha + \vec{v} \times \vec{B}^\alpha) + \frac{g}{m}\vec{\nabla}I^\alpha\vec{B}^\alpha \cdot \vec{S} \quad (3.13)$$

dove  $\frac{g}{m}\vec{S}$  rappresenta il momento magnetico e  $\vec{S}$  momento angolare intrinseco.

Poi, secondo Bastianelli et al. [7, eq.40] l'azione del fermione colorato di spin 1/2 risulta:

$$S = \int_0^1 d\tau \left[ \frac{1}{2e}(\dot{x} + \chi\Psi^\mu)^2 + \frac{1}{2}\Psi_\mu\dot{\Psi}^\mu + c^\alpha(\partial_\tau + ia)c_\beta - isa - ig\dot{x}^\mu A_\mu^a \bar{c}^\alpha (T^a)_\alpha^\beta c_\beta + \frac{ie}{2}g\Psi^\mu\Psi^\nu F_{\mu\nu}^a \bar{c}^\alpha (T_a)_\alpha^\beta c_\beta \right] \quad (3.14)$$

Stando a Balasin et al. [2, pag.6], le equazioni di Wong appaiono nella Relatività Generale per una particella di spin nello spazio curvato dalla contrazione del tensore di Riemann. Il tensore  $S$  gioca un ruolo simile al tensore di campo  $F$  nella teoria di Yang-Mills.

Secondo Barducci [3, eq.4.29] la seconda equazione di Wong rimane:

$$\dot{I}_a = gf_{ab}^c \dot{x}^\nu A_\mu^b I_c - \frac{ig}{2m_{RC}} \sqrt{\left( \dot{x}_\mu - \frac{i}{mc} \xi_\mu \dot{\xi}_5 \right)^2} f_{ab}^c F_{\mu\nu}^b I_c \xi^\mu \xi^\nu \quad (3.15)$$

dove, secondo [3, eq.4.9]  $m_{RC} = \sqrt{m^2 c^2 - g F_{\mu\nu}^a I_a \xi^\mu \xi^\nu}$

Inoltre  $\xi_\mu$  e  $\xi_5$  sono rispettivamente le variabili di Grassmann pseudovettoriali e pseudoscalari. Balachadran [1] li chiama variabili di isospin anticommutanti.

Questa equazione si differenzia da quella originale di Wong per il secondo termine il quale considera la teoria di quantizzata.

Analogamente, secondo Barducci [3, eq.4.29] l'espressione della forza di Lorentz ovvero prima equazione di Wong rimane:

$$mc\ddot{x}_\mu = gF_{\mu\nu}^a \dot{x}^\nu I_a - \frac{ig}{2mc} F_{\rho\lambda;\mu}^a I_a \xi^\rho \xi^\lambda \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Nel campo forte

Basandoci sulla Cromodinamica Quantistica secondo Srednicki [20, pag.410], si ha il campo di Dirac, corrispondente ai quark, ognuno con 3 colori: verde, blu e rosso, da lì che si basi sul gruppo di gauge  $SU(3)$ , e 6 sapori: up, down, strange, charm, top e botton. La lagrangiana corrispondente è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) - m_l\bar{\Psi}_l\Psi_l - i\bar{\Psi}_{il}\gamma^\mu D_{\mu il}\Psi_{il} \quad (3.17)$$

dove  $\Psi_{il}(x)$  rappresenta il campo di Dirac,  $m$  la massa,  $i$  l'indice di colori e  $l$  l'indice di sapori.  $D$  è il gradiente definito in (2.53), aggiungendo, a parere di Srednicki [20, eq.69.25], l'indice "a" che corrisponde agli 8 gluoni.

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu^a T_R^a \quad (3.18)$$

dove  $T_R^a$  è una matrice hermitiana di dimensione finita ( $R$  forma parte del nome, non è un indice, indica la dimensione della rappresentazione).

Bastianelli [4, eq.47] usa invece la sommatoria per rappresentare i 6 termini di sapori con l'indice  $f$  ("flavors"):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \sum_{f=1}^6 \bar{\Psi}_f(\gamma^\mu D_\mu + m_f)\Psi_f \quad (3.19)$$

considerando che  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}Tr(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$  secondo Bastianelli [4, eq.33].

Si può trovare la stessa espressione in Srednicki [20, eq.69.16-69.23].

Tenendo conto di Semprini [19, pag.137 e 187], il numero di campi gluonici è uguale al numero di generatori della trasformazione di gauge per cui se  $N$  sono le cariche,  $N$  sono le componenti del vettore complesso,  $SU(N)$  è il gruppo di trasformazioni ed  $2N - 1$  è il numero di generatori. Infatti, nel caso della Cromodinamica  $N = 3$ , di conseguenza il numero di gluoni risulta 8, numero che corrisponde alle 8 combinazioni non scalari dei colori, legati, secondo Bastianelli [4] agli 8 generatori infinitesimi di  $SU(3)$  rappresentati tramite le matrici di Gell-Mann (2.14).

Stando a Bastianelli et al. [7, eq.10] l'azione, usando le variabili dinamiche, rimane:

$$S = \int_0^1 d\tau \left[ \frac{\dot{x}^2}{2e} + \frac{em^2}{2} - ig\dot{x}^\mu A_\mu^a \bar{c}^\alpha (T^a)_\alpha^\beta c_\beta + c^\alpha (\partial_\tau + ia)c_\beta - isa \right] \quad (3.20)$$

dove  $c$  sono le variabili dinamiche. Si riesce ad identificare il vettore carica (2.36) nel suo terzo termine.

Per quanto riguarda il vettore carica detta di colori, viene definita in  $SU(3)$ , appunto con 3 tipi di carica presenti ed 8 componenti corrispondenti agli 8 gluoni. Secondo Boozer ogni tipo di carica di colore produce un tipo di campo di colore. Cosicché la forza totale esercitata su una particella è la somma delle forze esercitate da ciascuno dei tre campi di colore, com'è da aspettarsi seguendo il principio di sovrapposizione.

Sotto la notazione di Boozer [9] la carica si denoterà come  $\vec{q}$  ed il campo  $\vec{A}^\mu$ . Invece stando a Bastianelli [4] questi vengono espresse con notazione tensoriale aggiungendo un altro indice, cosicché rimangono  $\rho^a$  e  $A^{\mu a}$ .

Secondo Boozer [9, sec.III], deve essere ammessa una simmetria addizionale sulla la carica, il campo, la densità di corrente ed il tensore elettromagnetico; ed è l'invarianza sotto la trasformazione di rotazione.

Così, sotto le due notazioni si ha che:

$$\begin{aligned}
\vec{q} &\rightarrow R\vec{q} \quad \text{ovvero} \quad \rho^a \rightarrow R_a^a \rho^a. \\
\vec{J}^\mu &\rightarrow R\vec{J}^\mu \quad \text{ovvero} \quad J^{\mu a} \rightarrow R_a^a J^{\mu a}. \\
\vec{A}^\mu &\rightarrow R\vec{A}^\mu \quad \text{ovvero} \quad A^{\mu a} \rightarrow R_a^a A^{\mu a}. \\
\vec{F}^{\mu\nu} &\rightarrow R\vec{F}^{\mu\nu} \quad \text{ovvero} \quad F^{\mu\nu a} \rightarrow R_a^a F^{\mu\nu a}.
\end{aligned}$$

Ne consegue che la teoria dipenda solo dall'orientamento relativo dei vettori di colore tra di essi e non dal loro orientamento assoluto nello spazio dei colori. Questa idea risulta analoga al fatto che sotto le trasformazioni di Lorentz, due particelle dipendono dalle loro velocità relative e non dalle loro velocità assolute rispetto ad un sistema di riferimento esterno.

Tenendo conto che qualsiasi trasformazione può essere considerata come una sequenza di trasformazioni infinitesimi, detta rotazione può essere espressa:  $\vec{q} \rightarrow \vec{q} + \vec{\theta} \times \vec{q}$  con  $\vec{\theta} = \theta \hat{n}$  essendo  $\hat{n}$  il versore dell'asse di rotazione, ovvero  $\rho^a \rightarrow \rho^a + R_b^a \rho^b$  considerando che un prodotto vettoriale può anche essere rappresentato come un prodotto tra una matrice antisimmetrica ed un vettore com'è accaduto nel passaggio (1.3).

Analogamente:

$$\begin{aligned}
\vec{J}^\mu &\rightarrow \vec{J}^\mu + \vec{\theta} \times \vec{J}^\mu \quad \text{ovvero} \quad J^{\mu a} \rightarrow J^{\mu a} + R_b^a J^{\mu b}. \\
\vec{A}^\mu &\rightarrow \vec{A}^\mu + \vec{\theta} \times (\vec{A}^\mu + \partial^\mu \vec{\lambda}) \quad \text{ovvero} \quad A^{\mu a} \rightarrow A^{\mu a} + R_b^a (A^{\mu b} + \partial^\mu \lambda^b), \text{ tenendo} \\
&\text{conto dell'invarianza analoga (2.52).} \\
\vec{F}^{\mu\nu} &\rightarrow \vec{F}^{\mu\nu} + \vec{\theta} \times \vec{F}^{\mu\nu} \quad \text{ovvero} \quad F^{\mu\nu a} \rightarrow F^{\mu\nu a} + R_b^a F^{\mu\nu b}.
\end{aligned}$$

Secondo Parikh[17, eq.4.4] la forza di Lorentz viene descritta come:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = gI_a(E_a + \vec{v} \times \vec{B}_a) \quad (3.21)$$

dove  $I_a$  rappresenta la matrice di operatori e descrive, nel caso  $SU(3)$  della Forza Forte, la dinamica dei colori del sistema. Dentro la parentesi tonda si trova un'espressione analoga a quella usata per il campo elettromagnetico in (1.1). Segue una forma analoga a quella descritta nell'espressione (2.87).

Poi, Parikh [17, eq.4.5] presenta l'equazione di Wong come il nuovo ingrediente per descrivere la dinamica dei colori dei quark in questa estensione non abeliana; la esprime, con una notazione analoga alla precedente, come:

$$\frac{dI_a}{dt} = -g\epsilon_{abc}(A_b^0 - \vec{v} \cdot \vec{A}_b)I_c \quad (3.22)$$

dove  $\epsilon$  è il tensore di Levi-Civita (2.12),  $A^0$  e  $\vec{A}_b$  sono rispettivamente la parte scalare e la parte vettoriale del campo.

Parikh [17] cita Wong(1970) [21] dando una trattazione delle sue equazioni sotto la Teoria dei Fluidi anche detta Teoria Cinetica per studiare l'interazione tra diverse particelle con carica di colori, dette anche plasma QCD. Lo stesso studio viene eseguito da Boozer [15, sec.VI e VII] con diversi esempi.

# Conclusioni

L'obbiettivo di questo elaborato è stato quello di raccogliere, dallo studio di diversi autori, la generalizzazione dell'espressione della forza di Lorentz in una struttura che parte dal caso elettromagnetico con una dimostrazione basata sul Principio di Minima Azione per poi seguire un processo similare partendo da definizioni di carica e campi generalizzati.

Per quanto riguarda la dimostrazione, è stata svolta attraverso il metodo del Principio di Minima Azione, anche se alcuni autori preferiscono partire dalle equazioni di Eulero-Lagrange o dall'Hamiltoniana al posto della Lagrangiana.

Si presentano le diverse notazioni trovate nei diversi autori con il loro collegamento sia nelle definizioni preliminari sia nell'espressione della forza di Lorentz, la quale riesce a mantenere la stessa forma grazie alla modifica della definizione di operatore gradiente e di conseguenza del tensore del campo, questo con l'aggiunta del termine non abeliano.

Si presenta il bisogno di aggiungere un indice nell'espressione per riuscire ad avere la carica come un vettore. Si presentano due modi di definire la carica, una attraverso le variabili dinamiche ed un'altra attraverso le variabili di Grassman. Entrambi le definizioni portano alla stessa forma di espressione nella forma generalizzata.

Gli autori che usano le variabili di Grassmann si basano, quasi tutti, sull'articolo di Wong [21] dal quale nascono le equazioni che portano il suo nome,

tra di esse l'espressione su cui si basa questo elaborato.

Questa espressione ci offre l'opportunità di generalizzare l'interazione tra una carica ed un campo, permettendo una generalizzazione dell'espressione della legge della dinamica della particella. La generalizzazione resta valida in ognuna delle diverse applicazioni.

# Bibliografia

- [1] A. P. Balachandran, Salomonson, Bo-Sture Skagerstam, and Jan-Olov Winnberg. Classical description of a particle interacting with a non-abelian gauge field. *Physical Review D*, 15(8), April 1977. [https://www.researchgate.net/publication/234367591\\_Classical\\_description\\_of\\_a\\_particle\\_interacting\\_with\\_a\\_non-Abelian\\_gauge\\_field](https://www.researchgate.net/publication/234367591_Classical_description_of_a_particle_interacting_with_a_non-Abelian_gauge_field).
- [2] Herbert Balasin, Daniel N. Blaschke, François Gieres, and Manfred Schweda. Wong's equations and charged relativistic particles in non-commutative space. *SIGMA* 10, 099:21, October 2014. <https://www.emis.de/journals/SIGMA/2014/099/sigma14-099.pdf>.
- [3] A. Barducci, R. Casalbuoni, and L. Lusanna. Classical scalar and spinning particles interacting with external yang-mills fields. *Nuclear Physics B*, 124, June 1977.
- [4] Fiorenzo Bastianelli. *Teorie di gauge (Appunti per il corso di Teoria dei Campi 1)*. Università di Bologna, 2010-2011. <http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/teorie-di-gauge-11.pdf>.
- [5] Fiorenzo Bastianelli. *Variabili di Grassmann (Appunti per il corso di Fisica Teorica)*. Università di Bologna, 2011/2012. <http://www-th.bo>.

[infn.it/people/bastianelli/Grassmann-12.pdf](http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/Grassmann-12.pdf).

- [6] Fiorenzo Bastianelli. *Brevi Appunti sulla Teoria dei Gruppi (per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare)*. Università di Bologna, 2017-2018. <http://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/2-gruppi-FNS-17-18.pdf>.
- [7] Fiorenzo Bastianelli, Roberto Bonezzi, Olindo Corradini, Emanuele Latini, and Khaled Hassan Ould-Lahoucine. A wordline approach to colored particles. *Journal of Physics Conference*, April 2015. <https://arxiv.org/pdf/1504.03617.pdf>.
- [8] Fiorenzo Bastianelli and Matteo Broccoli. Weyl fermions in a non-abelian gauge background and trace anomalies. *Journal of High Energy Physics*, August 2019. [https://www.researchgate.net/publication/336976419\\_Weyl\\_fermions\\_in\\_a\\_non-abelian\\_gauge\\_background\\_and\\_trace\\_anomalies](https://www.researchgate.net/publication/336976419_Weyl_fermions_in_a_non-abelian_gauge_background_and_trace_anomalies).
- [9] A. D. Boozer. Classical yang-mills theory. *American Journal of Physics*, 79:925–931, June 2011. [http://www.stat.physik.uni-potsdam.de/~pikovsky/teaching/stud\\_seminar/Classical\\_Yang\\_Mills.pdf](http://www.stat.physik.uni-potsdam.de/~pikovsky/teaching/stud_seminar/Classical_Yang_Mills.pdf).
- [10] Sultan Catto, Yoon S. Choun, Yasemin Gürcan, Amish Khalfan, and Levent Kurt. Grassmann numbers and clifford-jordan-wigner representation of supersymmetry. *Journal of Physics: Conference*, 2013. [http://inspirehep.net/record/1220468/files/jpconf13\\_411\\_012009.pdf](http://inspirehep.net/record/1220468/files/jpconf13_411_012009.pdf).
- [11] Luca Chiese. Teorie di gauge ed equazione di wong. Master’s thesis, Università di Bologna, 2018.
- [12] V.C. de Andrade and J.G. Pereira. Gravitational lorentz force and the description of the gravitational interaction. *Physical review D*:

- Particles and fields*, 56(8), March 1997. [https://www.researchgate.net/publication/1975652\\_Gravitational\\_Lorentz\\_Force\\_and\\_the\\_Description\\_of\\_the\\_GravitationalInteraction](https://www.researchgate.net/publication/1975652_Gravitational_Lorentz_Force_and_the_Description_of_the_GravitationalInteraction).
- [13] Maurizio Gasperini. *Manuale di Relatività Ristretta*. Springer-Verlag, 2010.
- [14] Julio Gratton. *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Universidad de Buenos Aires, 2003. <http://www.lfp.uba.ar/es/notas%20de%20cursos/notasmecanicacuantica/Cuantica.pdf>.
- [15] R. Jackiw. Inserting group variables into fluid mechanics. In George S. Pogosyan, Luis Edgar Vicent, and Kurt Bernardo Wolf, editors, *Group Theoretical Methods in Physics*, 185, pages 61–74. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, August 2004.
- [16] L.D. Landau and E.M Lifshitz. *Course of Theoretical Physics. The Classical Theory of Fields*, volume 2. Pergamon Press Ltd, 1971.
- [17] J.C. Parikh. Physics of the quark-gluon plasma. In Bikash Sinah, Santanu Pal, and Sibaji Raha, editors, *Quark-Gluon Plasma*, pages 281–231. Springer-Verlag, 2004. [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-75289-6\\_3](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-75289-6_3).
- [18] Lucia Salvi. Forza di lorentz e teorie di gauge non abeliane. Master’s thesis, Università di Bologna, 2018.
- [19] Nicola Semprini Cesari. *Fisica Nucleare e Subnucleare*. Università di Bologna, 2016-2017.

- 
- [20] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. University of California. Santa Barbara, 2006. <https://web.physics.ucsb.edu/~mark/ms-qft-DRAFT.pdf>.
- [21] S. K. Wong. Field and particles equations for the classical yang-mills field and particles with isotopic spin. *Il Nuovo Cimento*, LXV A(4), February 1970.
- [22] C.N. Yang and Mills R.L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1), October 1954. <http://srv2.fis.puc.cl/~mbanados/Cursos/TopicosRelatividadAvanzada/YangMills.pdf>.
- [23] Roberto Zucchini. *Quantum Mechanics: Lecture Notes*. Università di Bologna, 2018.