

**ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

---

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica

**Tesi in Termofluidodinamica**

**EFFETTO DELLA DISSIPAZIONE VISCOSA NELLO  
STRATO LIMITE TERMICO ATTORNO AD UNA LAMINA  
PIANA**

**CANDIDATO**

Pancieri Guido

**RELATORE**

Prof. Barletta Antonio

**CORRELATORI**

Prof. Celli Michele

Dr. Pedro Vayssiere Brandão

Anno Accademico 2018-2019



# Indice

<b>Introduzione</b> .....	1
<b>Capitolo 1 Studio dello strato limite con approssimazione di Prandtl</b> .....	3
<b>1.1 Nascita della teoria dello strato limite</b> .....	3
<b>1.2 Teoria dello strato limite con approssimazione di Prandtl</b> .....	4
<b>1.2.1 Equazioni dello strato limite dinamico</b> .....	6
<b>1.2.2 Equazione dello strato limite termico</b> .....	9
<b>1.2.3 Limiti delle equazioni approssimate da Prandtl</b> .....	10
<b>Capitolo 2 Applicazione del metodo di similarità alle equazioni dello strato limite tramite</b> .....	12
<b>2.1 Metodo di similarità applicato allo strato limite dinamico</b> .....	12
<b>2.2 Metodo di similarità applicato allo strato limite termico</b> .....	15
<b>2.2.1 Caso senza dissipazione viscosa (<math>Ec \rightarrow 0</math>) e sua risoluzione</b> .....	16
<b>2.2.2 Caso con <math>Ec \rightarrow \infty</math></b> .....	17
<b>2.2.3 Caso con <math>Pr \rightarrow \infty</math> e sua risoluzione</b> .....	17
<b>2.2.4 Caso con <math>Pr \rightarrow 0</math> e sua risoluzione</b> .....	18
<b>2.3 Deduzione delle espressioni per il calcolo di grandezze di interesse applicativo</b> ....	19
<b>Capitolo 3 Risoluzione delle equazioni dello strato limite</b> .....	21
<b>3.1 Risoluzione dello strato limite dinamico con metodo per serie</b> .....	22
<b>3.2 Risoluzione dello strato limite termico: esempi risolutivi</b> .....	26
<b>3.2.1 Esempio di soluzione analitica</b> .....	26
<b>3.2.2 Esempio di soluzione numerica nel caso di sola dissipazione viscosa</b> .....	27
<b>Capitolo 4 Soluzioni numeriche dello strato limite termico</b> .....	30
<b>4.1 Caso senza dissipazione viscosa</b> .....	30
<b>4.2 Caso con dissipazione viscosa</b> .....	34
<b>4.2.1 Valutazione di <math>Ec_0</math></b> .....	41
<b>4.2.2 Valutazione di <math>\vartheta'(0)</math></b> .....	44

<b>4.3 Caso con <math>Ec \rightarrow \infty</math></b> .....	45
<b>4.4 Caso con <math>Pr \rightarrow 0</math></b> .....	49
<b>4.4.1 Valutazione di <math>\Gamma_0</math></b> .....	50
<b>4.5 Caso con <math>Pr \rightarrow \infty</math></b> .....	51
<b>Capitolo 5 Conclusioni</b> .....	53
<b>Appendice A</b> .....	55
<b>Metodo di Eulero</b> .....	55
<b>Estensioni del metodo di Eulero</b> .....	57
<b>Appendice B</b> .....	60
<b>Script</b> .....	60
<b>Bibliografia</b> .....	101



Vorrei porre qualche riga per ringraziare in primis il Prof. Antonio Barletta insieme al Prof. Michele Celli e il Dr. Pedro Vayssiere Brandão per il loro prezioso aiuto durante la stesura di questa tesi. Anche se non è intervenuto direttamente ci tengo a nominare l'Ing. Philipp Turski in questi ringraziamenti. Un pensiero va poi a tutti coloro che mi sono stati accanto in questi anni, dalla mia famiglia, agli amici, ai coinquilini, al mio gruppo musicale. Grazie. Vorrei dare giustizia al vostro supporto scrivendo molte e più importanti cose, perdonatemi. Grazie Alessia, per ciò che sono con te.

Volevo inoltre ringraziare tutti i gruppi musicali e musicisti in generale che ho ascoltato fino allo sfinimento durante gli studi: Radiohead, Nirvana, Muse, Red Hot Chili Peppers, William Basinski, Trent Reznor e Atticus Ross, 36, Brian Eno, Ska-p, Nicolas Jaar, Arctic Monkeys, This Will Destroy You, Aerial M/Papa M/M/David Pajo, The For Carnation, Smashing Pumpkins, Howard Shore, Ennio Morricone, John Frusciante, Ween, Stars Of the Lid, Carbon Based Lifeforms, And So I Watch You from Afar, Hildur Guðnadóttir, Sigur Ros e molti altri che ora non ricordo.. tipo gli Infant Annihilator. Non sono veri e propri musicisti, ma voglio inserire in questo elenco anche i ragazzi dello Zoo di 105.

# Introduzione

Lo studio della dissipazione viscosa nello strato limite generato attorno ad una lamina piana ha origine già dai primi studi di Pohlhausen risalenti al 1921 [4]. Per diversi aspetti pratici, si tende in genere a trascurare gli effetti della dissipazione viscosa quando si opera con fluidi quali l'acqua e l'aria a velocità moderate, anche a causa dei valori relativamente elevati dei calori specifici. Ma per tali casi ce ne sono altrettanti in cui la forte viscosità del fluido in esame e/o l'elevata velocità di quest'ultimo rendono necessario lo studio dello strato limite termico includendo anche gli effetti dissipativi. In particolare, essi si manifestano nella struttura del campo di temperatura e influiscono significativamente sul calcolo di importanti grandezze di interesse applicativo, quali il coefficiente locale di convezione. L'importanza degli effetti dissipativi dovuti alla viscosità ad elevate velocità è già stata espressa nelle equazioni ottenute da E. Eckert e O. Drewitz [5] già nel 1940 in cui per la prima volta si va a determinare una soluzione di tipo analitico per la temperatura nello strato limite termico con dissipazione viscosa. La trattazione del problema termico è sempre stata difficoltosa a causa della complessità delle equazioni differenziali che governano il problema stesso. Tale complessità ha richiesto da parte dei vari studiosi nel corso del XX secolo, l'ausilio di semplificazioni e l'utilizzo di diversi metodi sia analitici che numerici per arrivare a determinare le relative soluzioni. In questo lavoro di tesi si andrà ad esporre il metodo con cui sono state ricavate le equazioni associate allo strato limite, sia dinamico che termico, con una discussione su un possibile approccio risolutivo per lo strato limite dinamico e su diversi processi risolutivi per lo strato limite termico. In particolare, per quest'ultimo, si andrà a trattare l'associato problema differenziale dal punto di vista numerico, sfruttando il software Mathematica (© Wolfram Research Inc.), analizzando gli effetti sia qualitativi che quantitativi della variazione dei numeri di Prandtl e di Eckert sull'andamento della temperatura adimensionale e sulla sua derivata prima in corrispondenza della lamina piana. Quest'ultimo parametro è di particolare importanza per il calcolo dello scambio termico tra parete solida e fluido. Si andrà inoltre a ricavare le equazioni dello strato limite termico nei casi asintotici in cui il numero di Prandtl tenda a zero o ad infinito e nel caso in cui il numero di Eckert tenda a zero o ad infinito, e per tali casi si procederà alla relativa trattazione numerica.

In particolare, il Capitolo 1 tratterà la deduzione delle equazioni dello strato limite dinamico e termico attraverso l'approssimazione di Prandtl. Il Capitolo 2 riguarderà invece il principio di similarità delle equazioni dello strato limite ed il metodo basato sulla variabile di similarità. Il Capitolo 3 vedrà invece l'esposizione del metodo per serie relativo alla soluzione del problema dinamico insieme al metodo analitico di E. Eckert e O. Drewitz [5] ed al metodo numerico di E. Magyari [3] relativi alla determinazione dello strato limite termico. Il Capitolo 4 contiene invece i risultati ottenuti utilizzando il software Mathematica (© Wolfram Research Inc.) per la soluzione numerica dei problemi di strato limite dinamico e termico. Infine, nel Capitolo 5 sono presentate le conclusioni dello studio svolto.



# Capitolo 1

## Studio dello strato limite con approssimazione di Prandtl

### 1.1 Nascita della teoria dello strato limite

All'inizio del XX secolo la ricerca riguardante la meccanica dei fluidi vedeva contrapporsi due diversi approcci:

- Idrodinamica teorica, focalizzata sullo studio di fluidi ideali (a viscosità nulla). Essa poggiava sull'equazioni di Eulero e si occupava di delineare una teoria matematica rigorosa ed elegante che però trovava difficile applicabilità;
- Idraulica, al contrario della prima si tratta di una disciplina di natura empirica, il cui scopo sta principalmente nella determinazione delle perdite di carico nei condotti, oltre che alla valutazione dei coefficienti di resistenza per corpi solidi che si muovono all'interno di un fluido. Si tratta però di un campo basato su dati sperimentali carente di fondamenti teorici solidi.

La convergenza di queste due diverse branche di studio fu resa possibile dall'ideazione di un nuovo concetto: lo strato limite. La sua teorizzazione nasce dal fatto che anche le più rigorose trattazioni matematiche dell'idrodinamica teorica trovavano dei risultati fisicamente inaccettabili (ad esempio del campo di velocità) inerenti al moto di un fluido nelle vicinanze di una superficie solida. La difficoltà di analizzare con precisione quest'ultima zona alterava anche il calcolo di parametri di interesse progettuale, come ad esempio la portanza. Il concetto di strato limite è stato introdotto per la prima volta da Ludwig Prandtl nella sua conferenza *On Fluid Motion With Very Small Friction* tenutosi al congresso di matematica di Heidelberg nel 1904. Tale concetto consiste nell'andare ad individuare una regione, in prossimità di una parete solida, in cui si concentrano tutti gli effetti della viscosità del fluido. La velocità del fluido si ritrova quindi ad essere nulla in corrispondenza della parete per poi aumentare fino al raggiungimento del valore relativo al moto del fluido indisturbato. Al di fuori dello strato limite invece, il fluido può essere

trattato come fluido ideale ed essendo adeguatamente distante dal solido, esso evolve in moto irrotazionale. Analogo discorso può essere effettuato dal punto di vista energetico, per questo si parla in maniera separata di strato limite dinamico (precedentemente descritto) e strato limite termico, caratterizzato dal fatto di essere una regione in cui gli effetti di scambio termico tra parete solida e fluido a contatto con essa sono preponderanti.

Andando a considerare fluidi di interesse tecnico, come possono essere l'acqua e l'aria, essendo poco viscosi il loro moto determina la comparsa di strati limite di spessore estremamente contenuto. Al contrario, la trattazione di fluidi a viscosità più elevata comporta spessori degli strati limite più importanti.

## **1.2 Teoria dello strato limite con approssimazione di Prandtl**

La trattazione matematica dello strato limite da parte di Prandtl coinvolge lo studio di un caso semplificato bidimensionale, vale a dire una lamina piana solida, di lunghezza  $L$  a temperatura  $T_w$ , lambita da un fluido che si muove di moto uniforme con fronte di velocità rettilineo e perpendicolare alla lamina stessa. Il moto del fluido indisturbato è caratterizzato da una velocità  $U_\infty$ , e ad una temperatura uniformemente distribuita pari a  $T_\infty$ , convenzionalmente considerata inferiore a  $T_w$ . Il sistema di riferimento cartesiano di assi  $x$  e  $y$  viene poi posto con origine in corrispondenza del primo punto di contatto tra lamina e fluido e con asse  $x$  parallelo alla lamina. In ultimo andiamo a chiamare le componenti della velocità del fluido  $u$  e  $v$ , rispettivamente quella lungo  $x$  e lungo  $y$ . Uno schema rappresentativo del caso è esposto in Figura 1.1, con annessa la rappresentazione degli strati limite dinamico e termico.

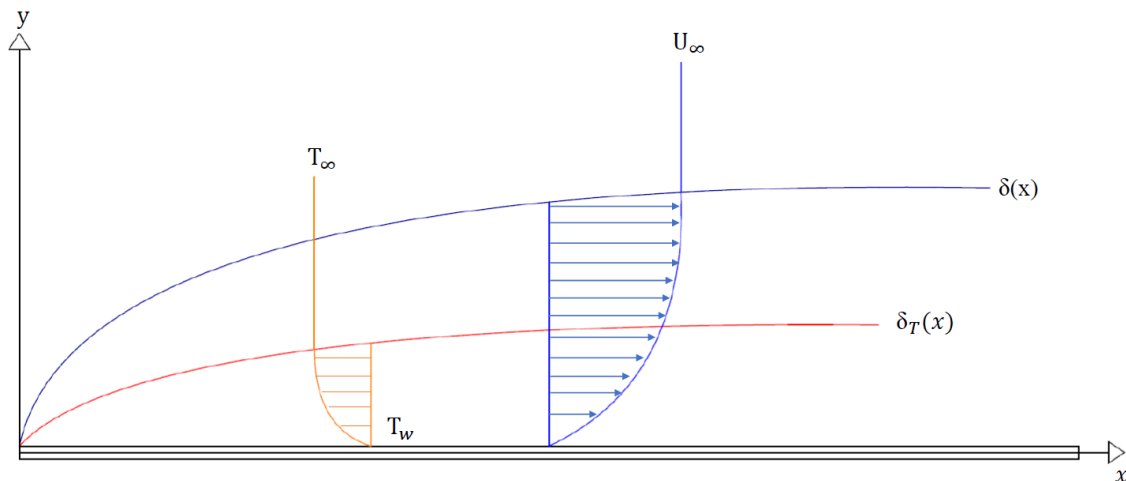


Figura 1.1. Lamina piana infinita a temperatura  $T_w$  lambita da fluido a velocità  $U_\infty$  e temperatura  $T_\infty$ . In blu è rappresentato lo strato limite dinamico annesso al campo di velocità, in rosso lo strato limite termico con relativo campo di temperatura.

Dal punto di vista matematico, lo strato limite dinamico (in Figura 1.1 in blu come colore rappresentativo) consiste nella regione in cui la velocità del fluido  $u$  rispetta la seguente relazione:

$$0 \leq u \leq 0.99U_\infty \quad (1.1)$$

La (1.1) altro non significa che gli effetti della viscosità al di fuori dello strato limite sono inferiori all'1%. Lo spessore di tale regione viene indicato generalmente con  $\delta$ , e si incrementa mano a mano che ci si allontana dall'origine degli assi, quindi è funzione di  $x$ .

Allo stesso modo, lo strato limite termico (in Figura 1.1 in rosso come colore rappresentativo) viene definito matematicamente come quella regione in cui la temperatura del fluido  $T$  rispetta la relazione sottostante:

$$0 \leq \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \leq 0.99 \quad (1.2)$$

Come prima, fisicamente parlando, la (1.2) individua degli effetti di scambio termico fra lamina e fluido inferiori all'1% esternamente allo strato limite termico. Lo spessore di quest'ultimo viene indicato con  $\delta_T$  ed anch'esso è funzione di  $x$ . Generalmente gli spessori  $\delta(x)$  e  $\delta_T(x)$  non coincidono.

## 1.2.1 Equazioni dello strato limite dinamico

Con il fine di adimensionalizzarle, andiamo a scrivere le equazioni del moto sotto le ipotesi di stazionarietà, fluido newtoniano, approssimazione di Oberbeck-Boussinesq e moto bidimensionale su piano  $x$ - $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.4)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (1.5)$$

La (1.3), la (1.4) e la (1.5) sono rispettivamente l'equazione del bilancio locale della massa, del bilancio locale della quantità di moto lungo  $x$  e del bilancio locale della quantità di moto lungo  $y$ . In esse, si è indicato con  $\nu \left[ \frac{m^2}{s} \right]$  la viscosità cinematica del fluido,  $\rho \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$  la densità del fluido e con  $P [Pa]$  il carico piezometrico.

L'approssimazione per lo strato di limite di Prandtl prevede lo studio di un fluido a bassa viscosità e con elevate velocità nella regione indisturbata. Ciò si traduce nell'andare a considerare un numero di Reynolds molto grande:

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (1.6)$$

Si procede all'adimensionalizzazione, per le lunghezze in  $x$  e  $y$  si considerano le rispettive lunghezze caratteristiche:

$$L, \frac{L}{Re^\lambda} \quad (1.7)$$

Analogamente per le velocità  $u$  e  $v$  si adoperano le rispettive velocità caratteristiche:

$$U_\infty, \frac{U_\infty}{Re^\lambda} \quad (1.8)$$

dove  $\lambda$  è un numero reale positivo. Tenendo conto anche dell'adimensionalizzazione del carico piezometrico, la totalità delle quantità adimensionali di interesse è espressa di seguito:

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{Re^\lambda}, u^* = \frac{u}{U_\infty}, v^* = \frac{v}{U_\infty} Re^\lambda, P^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2} \quad (1.9)$$

Sostituendo le relazioni della (1.9) nella (1.3) ottengo l'equazione del bilancio locale della massa adimensionalizzata:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1.10)$$

Allo stesso modo la (1.4) diventa:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + Re^{2\lambda-1} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.11)$$

Focalizzandosi sugli ultimi due termini del secondo membro della (1.11), applicando l'approssimazione di Prandtl, il primo è trascurabile mentre il secondo si comporta diversamente a seconda del valore di  $\lambda$ . Gli scenari possibili infatti sono tre:

- $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ , il relativo termine sarebbe nullo. Se ciò fosse vero però, si perderebbero tutti i contributi della viscosità, cosa che va in disaccordo con la natura dello strato limite (si perderebbe in particolare l'aderenza alla parete);
- $\lambda > \frac{1}{2}$ , la (1.11) assumerebbe la forma:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (1.12)$$

che descrive un profilo di velocità lineare, che a sua volta risulta incompatibile con le evidenze sperimentali;

- $\lambda = \frac{1}{2}$ , rimane quindi l'unico valore plausibile.

La (1.11) diviene quindi:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.13)$$

Infine, le sostituzioni delle (1.9) nella (1.5), appurato che  $\lambda = \frac{1}{2}$ , determinano il seguente risultato:

$$\frac{\partial P^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1.14)$$

Vale a dire:

$$P^* = P^*(x) \quad (1.15)$$

Riassumendo ed andando a dimensionalizzare la (1.10), la (1.13) e la (1.15), le equazioni del bilancio locale della massa e della quantità di moto lungo  $x$  e  $y$  per lo strato limite dinamico sotto l'approssimazione di Prandtl sono le seguenti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.16)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.17)$$

$$P = P(x). \quad (1.18)$$

In particolare, la (1.17) valutata per  $y$  elevato, vale a dire lontano dalla parete solida dove la componente  $v$  è trascurabile mentre  $u \cong U_\infty$ , diventa:

$$U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.19)$$

il che significa, dato che  $U_\infty$  è costante, che  $P$  nel caso della lamina piana presenta un gradiente nullo, e che quindi la (1.17) può essere riscritta come:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.20)$$

## 1.2.2 Equazione dello strato limite termico

Con gli stessi scopi di prima, consideriamo l'equazione del bilancio locale dell'energia sotto le ipotesi di stazionarietà, fluido newtoniano, approssimazione di Oberbeck-Boussinesq e bidimensionalità:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu}{c} \varphi \quad (1.21)$$

Si è indicato con  $T$  la temperatura del fluido, con  $\alpha \left[ \frac{m^2}{s} \right]$  la diffusività termica del fluido, con  $c \left[ \frac{J}{K Kg} \right]$  il calore specifico del fluido, e con  $\varphi$  la funzione di dissipazione definita come:

$$\varphi = 2D_{ij}D_{ij} \quad (1.22)$$

In cui  $D_{ij}$  è il generico elemento del tensore delle deformazioni. Poichè siamo in due dimensioni, l'espressione di  $\varphi$  è pari a:

$$\varphi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.23)$$

Sostituendo la (1.23) nella (1.21), si prosegue con l'adimensionalizzazione considerando, in aggiunta alle relazioni della (1.9), la temperatura adimensionalizzata e i numeri di Prandtl e di Eckert:

$$T^* = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}, \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \text{Ec} = \frac{U_\infty^2}{c(T_\infty - T_w)} \quad (1.24)$$

Tenendo conto di ciò si ottiene la (1.21) in forma adimensionale:

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \text{Ec} \left( \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 \quad (1.25)$$

Essa, rendendola dimensionale, ottiene la forma definitiva:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.26)$$

### 1.2.3 Limiti delle equazioni approssimate da Prandtl

Si riportano per completezza le equazioni ottenute:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.27)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.28)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (1.29)$$

Con esse è possibile studiare le caratteristiche del fluido nello strato limite. Vi sono però delle limitazioni. In primo luogo, la (1.28) non può essere trattata insieme al contributo della forza di galleggiamento che, se l'asse  $x$  fosse orientato verticalmente, la porterebbe ad avere la seguente espressione:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (1.30)$$

Dove si è indicato con  $g$  il modulo dell'accelerazione di gravità e con  $\beta$  il coefficiente di dilatazione termica isobaro. Se così fosse, si creerebbero delle celle convettive che estenderebbero la rotazionalità del moto anche molto lontano dalla parete, non potendo così più distinguere lo strato limite con la regione di moto indisturbato. L'unico caso che permetterebbe uno studio dello strato limite considerando l'effetto della forza di galleggiamento, sarebbe la situazione in cui la lamina è posta in posizione verticale. Si avrebbe infatti una situazione in cui la forza di galleggiamento stessa sarebbe una delle cause del moto e quindi influenzerebbe lo strato limite, sia termico che dinamico.

Ulteriore limite dell'approssimazione di Prandtl è la conversione delle equazioni dalla struttura ellittica (caratterizzata dalla contemporanea presenza degli operatori  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ) ad una struttura parabolica (presenza solo di  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ), che rende le equazioni (1.28) e (1.29) delle equazioni evolutive in  $x$ . Di conseguenza esse possono essere applicate solo per  $x > 0$  dato che per  $x \leq 0$  in situazioni reali il fluido risente già della presenza della lamina (si parla di effetto di retroazione). Se ciò valesse anche per le equazioni ottenute, essendo



esse di carattere evolutivo, non rispetterebbe il principio di causa-effetto. Le equazioni (1.28) e (1.29) quindi analizzano una situazione in cui non si considera l'effetto di retroazione, cosa compatibile con l'approssimazione adottata. Infatti, più  $Re$  è elevato, più l'effetto di retroazione è piccolo.

## Capitolo 2

# Applicazione del metodo di similarità alle equazioni dello strato limite tramite

Il metodo di similarità, come metodo per arrivare a risolvere le tre equazioni dello strato limite, vede la sua comparsa ad inizio del XX secolo, grazie ai lavori di Blasius e Pohlhausen. Esso consiste nell'andare a definire una nuova variabile, detta appunto variabile di similarità, che permetta di ridurre il numero di variabili ed incognite del problema iniziale, costruendone uno nuovo di minor complessità.

### 2.1 Metodo di similarità applicato allo strato limite dinamico

Il problema di partenza dello strato limite dinamico vede la risoluzione delle due seguenti equazioni, in cui è già considerata l'assenza del gradiente del carico piezometrico, come detto in precedenza nullo nel caso di lamina piana:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.2)$$

Le relative condizioni al contorno ed all'infinito sono invece:

- $y = 0$ :  $u = 0$ , condizione di aderenza alla parete;  
 $v = 0$ , condizione di impermeabilità;
- $y \rightarrow \infty$ :  $u = U_\infty$ .

Introducendo la funzione di corrente  $\psi(x, y)$ , definita in modo tale che:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.3)$$

La (2.1) risulta essere identicamente nulla, mentre le condizioni di aderenza alla parete e di impermeabilità diventano rispettivamente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \psi = 0 \text{ per } y = 0. \quad (2.4)$$

Si prosegue ora con la definizione della variabile di similarità. Come detto in precedenza la lunghezza caratteristica per la coordinata  $y$  è  $\frac{L}{Re^\lambda}$  con  $\lambda = 1/2$ , è quindi ragionevole assumere che lo spessore dello strato limite dinamico  $\delta(x)$  sia tale che:

$$\delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}, \text{ con } Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (2.5)$$

È possibile quindi scrivere:

$$\frac{y}{\delta} \sim \frac{y\sqrt{Re_x}}{x} \quad (2.6)$$

Di conseguenza, si definisce la variabile di similarità  $\eta$ :

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (2.7)$$

Per alcuni strati limite, detti simili, il rapporto  $\frac{u}{U_\infty}$  dipende unicamente da  $\frac{y}{\delta}$ . In altre parole,  $\frac{u}{U_\infty}$  dipende anche dalla coordinata  $x$  poichè al variare di  $x$  varia anche lo spessore  $\delta(x)$ . Quanto detto finora, espresso in termini matematici nella (2.8) riportata sotto, accoppiato alla (2.7) prende il nome di “principio di similarità”.

$$u(x, y) = U_\infty F(\eta) \quad (2.8)$$

Una volta appurato ciò, si procede ridefinendo le grandezze di interesse in funzione di  $\eta$ .

Dalla (2.3), integrando la  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  in  $y$ , sostituendovi la (2.8) e cambiando variabile da  $y$  in  $\eta$  ottengo:

$$\psi = \sqrt{U_\infty \nu x} \int_0^\eta F(\eta^*) d\eta^* \quad (2.9)$$

Dalla quale, identificando con  $f(\eta)$  la funzione tale che:

$$f(\eta) = \int_0^\eta F(\eta^*) d\eta^* \text{ o } f'(\eta) = F(\eta) \quad (2.10)$$

Si possono riscrivere  $u$  e  $\psi$  come funzione di  $f(\eta)$ :

$$u(x, y) = U_\infty f'(\eta) \quad (2.11)$$

$$\psi = \sqrt{U_\infty \nu x} f(\eta) \quad (2.12)$$

Dalla (2.12) e dalla equazione  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  della (2.3) insieme con le relazioni:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\eta}{y}, \quad (2.13)$$

dedotte dalla (2.7), si possono ottenere tutte le espressioni utili ai fini delle sostituzioni nella (2.2), ovvero:

$$v = -\frac{\nu \eta}{2y} (f - \eta f'), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu \eta^3}{2y^2} f'', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty f'' \frac{\eta}{y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_\infty f''' \frac{\eta^2}{y^2}. \quad (2.14)$$

Sostituendo quindi le relazioni espresse nella (2.14), insieme alle (2.12) e (2.11), nella (2.2), dividendo per  $\frac{\nu}{2}$  e  $\frac{\eta^2}{y^2}$  a primo e secondo membro, si ottiene l'equazione di Blasius:

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (2.15)$$

Con l'introduzione di  $\eta$  anche le condizioni al contorno e all'infinito si vanno a modificare diventando:

$$\eta = 0 : f = 0, f' = 0. \quad (2.16)$$

$$\eta \rightarrow \infty : f' = 1. \quad (2.17)$$

Come si può notare, la (2.15) insieme alle condizioni (2.16) e (2.17) costituiscono un problema con un'equazione differenziale ordinaria con un'unica funzione incognita  $f$  e con un'unica variabile indipendente,  $\eta$ , esattamente come l'obiettivo che ci si era posti ad inizio capitolo. Oltretutto si tratta di un problema chiuso, dato che ci si trova un'equazione di terzo ordine con tre condizioni. Il problema sta nel fatto che si tratta di un'equazione non lineare.

## 2.2 Metodo di similarità applicato allo strato limite termico

Lo stesso approccio può essere svolto per lo strato limite termico, partendo dall'equazione:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{v}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.18)$$

Considerando la temperatura adimensionale:

$$\vartheta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (2.19)$$

Assumendo che essa sia funzione di  $\eta$ , è possibile derivare le espressioni sottostanti:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\vartheta' \frac{\eta}{2x}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\vartheta' \frac{\eta}{y}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \vartheta'' \frac{\eta^2}{y^2}. \quad (2.20)$$

Queste ultime, in combinazione con le relazioni (2.11), (2.13) e (2.14), ed insieme alle definizioni del numero di Eckert e di Prandtl, possono essere sostituite nella (2.18) per andare ad ottenere:

$$\vartheta'' + \frac{1}{2} Pr f \vartheta' + Pr Ec (f'')^2 = 0 \quad (2.21)$$

Le condizioni relative alla (2.21) vengono ricavate da:

- $y = 0$ :  $T = T_w$ , condizione alla parete;
- $y \rightarrow \infty$ :  $T = T_\infty$ , condizione all'infinito.

che tradotte in termini di  $\vartheta$  e di  $\eta$ , diventano:

$$\eta = 0 : \vartheta = 0. \quad (2.22)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \vartheta = 1. \quad (2.23)$$

Ancora una volta, la (2.21) insieme alle condizioni (2.22) e (2.23) costituiscono un problema con un'equazione differenziale ordinaria con un'unica funzione incognita  $\vartheta$  e

con un'unica variabile indipendente,  $\eta$ , oltre ad essere un problema chiuso, dato che vi è un'equazione di secondo ordine con due condizioni.

È importante notare poi che la risoluzione del problema termico presuppone però la conoscenza della soluzione del problema dinamico, data la presenza nella (2.21) della funzione  $f$  e della sua derivata seconda  $f''$ .

## 2.2.1 Caso senza dissipazione viscosa ( $Ec \rightarrow 0$ ) e sua risoluzione

Di solito, poiché  $c$  è generalmente dell'ordine di  $10^3 \frac{J}{K Kg}$  il numero di Eckert è di molto inferiore ad 1, tanto da trascurare il relativo termine fin dall'inizio. In altre parole, l'equazione di partenza sarebbe:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

Dalla (2.24), applicando lo stesso ragionamento di prima, è possibile ottenere l'associata equazione in  $\vartheta$  ed  $\eta$ :

$$\vartheta'' + \frac{1}{2} Pr f \vartheta' = 0 \quad (2.25)$$

Essa altro non è che l'omogenea associata alla (2.21), e per la quale valgono le stesse condizioni (2.22) e (2.23). La (2.25) può essere risolta andando a riscriverla come:

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta'} = -\frac{1}{2} Pr f \quad (2.26)$$

Dall'equazione di Blasius (2.15) si ricava il seguente rapporto:

$$\frac{f'''}{f''} = -\frac{1}{2} f \quad (2.27)$$

Combinando quindi le ultime due relazioni si ottiene:

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta'} = Pr \frac{f'''}{f''} \quad (2.28)$$

Integrando la (2.28) due volte ed applicando le condizioni (2.22) e (2.23) per valutare le costanti di integrazione si ottiene l'espressione di  $\vartheta(\eta)$ :

$$\vartheta(\eta) = \frac{\int_0^\eta f''(\eta^*)^{Pr} d\eta^*}{\int_0^\infty f''(\eta^*)^{Pr} d\eta^*} \quad (2.29)$$

### 2.2.2 Caso con $Ec \rightarrow \infty$

Un caso particolare sussiste quando  $Ec \rightarrow \infty$ . Fisicamente parlando, esso avviene quando lamina e fluido indisturbato coesistono alla stessa temperatura. Questo ci permette di andare ad approssimare la (2.18) con una nuova definizione di  $\vartheta$ , che per distinzione verrà indicata con  $\theta$ :

$$\theta = \frac{T - T_w}{U_\infty^2} c \quad (2.30)$$

Applicando lo stesso ragionamento del paragrafo 2.2, il problema risultante è:

$$\theta'' + \frac{1}{2} Pr f \theta' + Pr (f'')^2 = 0 \quad (2.31)$$

Con condizioni:

- $y = 0$ :  $T = T_w$ , condizione alla parete;
- $y \rightarrow \infty$ :  $T = T_w$ , condizione all'infinito.

Che tradotte in termini di  $\vartheta$  e di  $\eta$ , diventano:

$$\eta = 0 : \theta = 0, \quad (2.32)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \theta = 0. \quad (2.33)$$

### 2.2.3 Caso con $Pr \rightarrow \infty$ e sua risoluzione

Anche in presenza di  $Pr \rightarrow \infty$  l'equazione (2.21) subisce delle modifiche e quindi permette un diverso tipo di approccio risolutivo. Si tratta di una situazione in cui il fluido in esame presenta quindi una elevata viscosità insieme ad una conducibilità termica molto

bassa. L'effetto matematico di tale proprietà si nota andando a dividere nella (2.21) per  $Pr$ , cosa che permettere di elidere il primo termine data la tendenza di  $Pr$  ad  $\infty$ . Il risultato è quindi il seguente:

$$\frac{1}{2}f\vartheta' + Ec(f'')^2 = 0 \quad (2.34)$$

Da notare che la condizione al contorno (2.22) non può essere applicata in questo caso dato che non avrebbe fisicamente senso. Da un fluido con tali proprietà, ci si aspetta infatti un valore della temperatura adimensionale per  $\eta \rightarrow 0$  divergente all'infinito. Si conserva quindi solo la condizione all'infinito (2.23), il che porta infatti alla chiusura del problema visto che la (2.34) è del primo ordine.

Andando ad esplicitare  $\vartheta'$  nella (2.34), integrando una volta ed applicando la condizione all'infinito per ricavare la costante di integrazione si ottiene il seguente risultato:

$$\vartheta(\eta) = 1 + 2Ec \int_{\eta}^{\infty} \frac{f''(\eta^*)^2}{f(\eta^*)} d\eta^* \quad (2.35)$$

Espressione dell'andamento di  $\vartheta(\eta)$ .

## 2.2.4 Caso con $Pr \rightarrow 0$ e sua risoluzione

Considerando  $Pr \rightarrow 0$  l'equazione (2.21) può essere rielaborata indicando con  $\Gamma = PrEc$ , ottenendo:

$$\vartheta'' + \Gamma(f'')^2 = 0 \quad (2.36)$$

Per quest'ultima equazione può essere invece applicata la condizione al contorno (2.22) che ci permette di ottenere l'andamento di  $\vartheta(\eta)$  per diversi valori di  $\Gamma$ :

$$\vartheta(\eta) = \Gamma \int_0^{\eta} \left[ \int_p^{\infty} f''(\eta^*)^2 d\eta^* \right] dp \quad (2.37)$$

La condizione all'infinito (2.23) non è generalmente valida, ma può essere applicata alla (2.37) per ricavare il valore di  $\Gamma$  che soddisfa la condizione stessa. Tale valore, che verrà chiamato  $\Gamma$  di soglia ed indicato con  $\Gamma_0$ , è quindi ricavabile da:



$$\Gamma_0 = \left\{ \int_0^\infty \left[ \int_p^\infty f''(\eta^*)^2 d\eta^* \right] dp \right\}^{-1} \quad (2.38)$$

## 2.3 Deduzione delle espressioni per il calcolo di grandezze di interesse applicativo

Una volta individuato l'andamento di  $\vartheta(\eta)$  è di particolare importanza la determinazione di  $\vartheta'(0)$ . Con il valore di quest'ultimo è possibile infatti determinare grandezze quali il flusso termico trasmesso dalla parete solida al fluido ( $q_w$ ) tramite la legge di Fourier, il coefficiente locale di convezione ( $h_x$ ) tramite la legge del raffreddamento di Newton insieme al coefficiente di scambio termico medio ( $h$ ), ed infine il numero di Nusselt locale ( $Nu_x$ ) e medio ( $Nu$ ). L'espressione per il calcolo delle grandezze appena elencate varia però in base alla definizione data alla temperatura adimensionale.

Nel caso essa sia definita come  $\vartheta$ , ovvero come quanto espresso dalla (2.19), per mezzo della legge di Fourier, si ottiene la seguente espressione di  $q_w$ :

$$q_w(x) = -k \frac{\partial T}{\partial y} (y = 0) = -k(T_\infty - T_w) \vartheta'(0) \frac{\partial \eta}{\partial y} = -k(T_\infty - T_w) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \vartheta'(0) \quad (2.39)$$

In cui si è indicato con  $k \left[ \frac{W}{m K} \right]$  la conduttività termica del fluido. Con la legge del raffreddamento di Newton si ottiene invece l'espressione di  $h_x$ :

$$h_x = \frac{q_w(x)}{(T_w - T_\infty)} = \vartheta'(0) \frac{k}{x} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}} = \vartheta'(0) \frac{k}{x} Re_x^{1/2} \quad (2.40)$$

Da cui è possibile ricavare  $h$ , considerando una lamina di lunghezza finita  $L$ , nel seguente modo:

$$h = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \vartheta'(0) \frac{k}{L} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} \int_0^L \frac{dx}{x^{1/2}} = 2\vartheta'(0) \frac{k}{L} Re_L^{1/2} \quad (2.41)$$

Ed infine, il numero di Nusselt:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = \vartheta'(0) Re_x^{1/2} \quad (2.42)$$

Come anticipato, sono tutte grandezze dipendenti da  $\vartheta'(0)$ .

Con lo stesso metodo è possibile ricavare l'espressione delle medesime grandezze nel caso in cui la temperatura adimensionale sia definita come  $\theta$ , ovvero come quanto espresso dalla (2.30). In tal caso tali espressioni saranno:

$$q_w(x) = -k \frac{U_\infty^2}{c} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \theta'(0), \quad (2.43)$$

$$h_x = \frac{q_w(x)}{U_\infty^2} c = -\theta'(0) \frac{k}{x} Re_x^{1/2}, \quad (2.44)$$

$$h = -2\theta'(0) \frac{k}{L} Re_L^{1/2} \quad (2.45)$$

$$Nu_x = -\theta'(0) Re_x^{1/2}. \quad (2.46)$$

## Capitolo 3

### Risoluzione delle equazioni dello strato limite

Tralasciando il caso descritto nei paragrafi 2.2.1, 2.2.3 e 2.2.4 in cui le soluzioni sono già state riportate in forma analitica, il problema dello strato limite con dissipazione viscosa vede quindi la risoluzione di due equazioni differenziali, una per lo strato limite dinamico:

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (3.1)$$

$$\eta = 0 : f = 0, f' = 0. \quad (3.2)$$

$$\eta \rightarrow \infty : f' = 1. \quad (3.3)$$

Ed una per lo strato limite termico:

$$\vartheta'' + \frac{1}{2}Prf\vartheta' + PrEc(f'')^2 = 0 \quad (3.4)$$

$$\eta = 0 : \vartheta = 0. \quad (3.5)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \vartheta = 1. \quad (3.6)$$

Nel caso di  $Ec \rightarrow \infty$  il problema termico assume la forma:

$$\theta'' + \frac{1}{2}Prf\theta' + Pr(f'')^2 = 0 \quad (3.7)$$

$$\eta = 0 : \theta = 0. \quad (3.8)$$

$$\eta \rightarrow \infty : \theta = 0. \quad (3.9)$$

I problemi appena mostrati riassumono quindi l'approccio matematico-teorico per lo strato limite con dissipazione viscosa. Tale problema vede la sua comparsa molto tempo addietro, ed è stato oggetto di studio da parte di numerosi accademici. La teoria della dissipazione viscosa nello strato limite, infatti, ha origine con Pohlhausen nel 1921 [6]. È stato poi riconsiderato da Eckert e Drewitz [5] e successivamente da Morgan, Pipkin e Warner [1][7]. Le idee fondamentali però, per lo studio del problema della dissipazione viscosa ad elevati valori di Pr si hanno con gli studi di Levèque, Fage e Falkner [8], e

Lighthill [9], che sfruttarono il fatto che ad elevati Pr lo strato limite termico è così sottile che il profilo di velocità può essere considerato lineare.

### 3.1 Risoluzione dello strato limite dinamico con metodo per serie

La risoluzione dell'equazione di Blasius (3.1) può essere raggiunta tramite il *matched asymptotic expansions method* (come fatto da Morgan, Pipkin e Warner [1][7] o da Narasimha, Vasantha [2]) oppure ancora applicando in principio la trasformazione di Merkin per poi ricavare una soluzione analitica in serie di  $f''(\eta)$  [3]. In questo lavoro si riporta come metodo risolutivo, il metodo per serie, che consiste nell'andare ad approssimare analiticamente la funzione  $f(\eta)$  espandendola in serie di potenze, ovvero:

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} \eta^n \quad (3.10)$$

E da cui è possibile ricavare le rispettive espressioni delle derivate di  $f(\eta)$ :

$$f'(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nA_n}{n!} \eta^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(n-1)!} \eta^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+1}}{n!} \eta^n \quad (3.11)$$

$$f''(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nA_{n+1}}{n!} \eta^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n+1}}{(n-1)!} \eta^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+2}}{n!} \eta^n \quad (3.12)$$

$$f'''(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nA_{n+2}}{n!} \eta^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n+2}}{(n-1)!} \eta^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+3}}{n!} \eta^n \quad (3.13)$$

Tenendo conto della regola relativa al prodotto tra due serie di potenze<sup>1</sup> Sostituendo le espressioni (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) nella (3.1) si ottiene la seguente espressione:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n+3}}{n!} \eta^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{A_j}{j!} \frac{A_{n-j+2}}{(n-j)!} \right) \eta^n = 0 \quad (3.14)$$

Che può essere riscritta come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2 \frac{A_{n+3}}{n!} + \left( \sum_{j=0}^n \frac{A_j}{j!} \frac{A_{n-j+2}}{(n-j)!} \right) \right] \eta^n = 0 \quad (3.15)$$

Da cui, siccome una serie di potenze è identicamente nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, allora:

$$2 \frac{A_{n+3}}{n!} + \left( \sum_{j=0}^n \frac{A_j}{j!} \frac{A_{n-j+2}}{(n-j)!} \right) = 0, n = 0,1,2,3, \dots \quad (3.16)$$

Quindi in definitiva si ottiene:

$$A_{n+3} = -\frac{n!}{2} \left( \sum_{j=0}^n \frac{A_j}{j!} \frac{A_{n-j+2}}{(n-j)!} \right), n = 0,1,2,3, \dots \quad (3.17)$$

La (3.17) può essere usata per calcolare qualunque coefficiente  $A_n$  con  $n \geq 3$ , una volta noti  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$ . Per ricavare questi ultimi, è possibile ricorrere alle seguenti relazioni ottenute dalla (3.10) e dalla (3.2):

$$f(0) = A_0, f'(0) = A_1, f''(0) = A_2, f'''(0) = A_3. \quad (3.18)$$

Da cui risulta che:

$$A_0 = A_1 = 0 \quad (3.19)$$

---

<sup>1</sup> Siano date due serie:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^n$ . Il prodotto tra le due dà come risultato la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n, \text{ con } c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Denominando poi:

$$f''(0) = A_2 = \gamma \quad (3.20)$$

Ed applicando la (3.17), si ottengono i coefficienti di interesse:

$$\begin{aligned} A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = \gamma, A_3 = 0, A_4 = 0, \\ A_5 = -\frac{\gamma^2}{2}, A_6 = 0, A_7 = 0, A_8 = \frac{11\gamma^3}{4}, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dalla (3.21) si nota come tali coefficienti presentano una sequenza ben definita, ovvero due nulli seguiti da uno non nullo. Possiamo quindi andare a riscrivere una nuova serie  $B_n$  comprendente solo termini non nulli, definita come:

$$B_n = \frac{A_{3n-1}}{\gamma^n}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.22)$$

Si passa perciò alla scrittura di  $f(\eta)$  in termini di  $B_n$ , che assumerà la forma:

$$f(\eta) = \gamma^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(3n-1)!} (\gamma^{1/3}\eta)^{3n-1} \quad (3.23)$$

Non rimane quindi che determinare il valore di  $\gamma$  per poter esprimere ogni coefficiente di  $f(\eta)$ . Si potrebbe pensare di sfruttare la condizione non ancora utilizzata, ovvero quella all'infinito (3.3), se non fosse per il fatto che la serie in esame, ovvero genericamente:

$$R(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(3n-1)!} \varepsilon^{3n-1} \quad (3.24)$$

converge solo per  $|\varepsilon| < 3.94021124$ . Quindi il valore massimo che  $\varepsilon$  può assumere garantendo la convergenza è  $\varepsilon_{max} = 3.94021124$ .

Di conseguenza non ci si può avvalere della (3.3), ma il valore di  $\gamma$  può essere ottenuto solo numericamente. Vari sono i metodi numerici applicabili a tale scopo, nell'Appendice A ne vengono riportati alcuni con relativa spiegazione. In questo lavoro di tesi il valore di  $\gamma$  è stato ottenuto tramite "shooting method" operato con il software Mathematica (© Wolfram Research Inc.), i cui script vengono riportati in Appendice B. Il risultato è quindi:

$$\gamma = 0.3320573362 \dots \quad (3.25)$$

in linea con ciò che compare in letteratura. Sapendo che la serie  $R(\varepsilon)$  converge soltanto per  $|\varepsilon| < 3.94021$  e conoscendo il valore di  $\gamma$  è possibile ricavarsi il valore di  $\eta$  massimo per il quale la serie  $R(\gamma^{1/3}\eta)$  converge, ovvero:

$$\eta_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{\gamma} = 5.69003773 \quad (3.26)$$

Con la (3.25) si può procedere anche alla determinazione dello spessore dello strato limite, calcolando dapprima il relativo valore della variabile di similarità, denominato con  $\eta_0$ , nel seguente modo:

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(\eta) \Rightarrow f'(\eta_0) = 0.99 \Rightarrow \eta_0 = 4.90998951 \quad (3.27)$$

Nella (3.27) si può notare come  $\eta_0 < \eta_{max}$ , consentendo quindi il rispetto della convergenza. Si può quindi ricavare lo spessore dello strato limite  $\delta(x)$  come segue:

$$\eta_0 = \delta \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \Rightarrow \delta = 4.90998951 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{4.90998951}{Re_x^{1/2}} \quad (3.28)$$

In linea generale poi, oltre al calcolo di specifici valori quali  $\eta_{max}$  ed  $\eta_0$ , la conoscenza di  $\gamma$  comporta quindi la determinazione dei coefficienti espressi nelle relazioni (3.21) che a loro volta permettono di individuare  $f(\eta)$  in maniera completa tramite la (3.10). Ciò è il punto di partenza per il trattamento del problema dello strato limite termico in cui  $f(\eta)$  si presenta come un coefficiente.

## 3.2 Risoluzione dello strato limite termico: esempi risolutivi

### 3.2.1 Esempio di soluzione analitica

Si può quindi procedere allo studio dello strato limite termico, partendo dal caso generale ovvero quello descritto dalle (3.4), (3.5) e (3.6). La soluzione di tale problema è già stata discussa in passato in primis da Pohlhausen, che si occupò anche del calcolo dei relativi parametri di interesse applicativo quale lo sforzo tangenziale subito dalla lamina [4], e successivamente anche da E. Eckert O. Drewitz [5]. Nell'articolo scritto da questi ultimi nel 1940 [5] viene riportata un'espressione analitica di  $\vartheta(\eta)$  ottenuta con il metodo delle variazioni delle costanti<sup>2</sup>, nella quale vengono distinti due diversi contributi. Per esplicitarli gli autori ricavano prima la soluzione dell'omogenea associata alla (3.4), denominata con  $\vartheta_1$ , che assume l'espressione:

---

<sup>2</sup> Al fine di spiegare il metodo in linea generale, si consideri un'equazione differenziale ordinaria, lineare e non omogenea:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + a(z) \frac{df(z)}{dz} + b(z)f(z) = g(z)$$

definita per  $z_1 < z < z_2$ . Siano  $f_1(z)$  e  $f_2(z)$  due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + a(z) \frac{df(z)}{dz} + b(z)f(z) = 0$$

Le due soluzioni  $f_1(z)$  e  $f_2(z)$  sono indipendenti de il loro Wronskiano:

$$W(z) = f_1(z) \frac{df_2(z)}{dz} - f_2(z) \frac{df_1(z)}{dz}$$

è diverso da zero per ogni valore di  $z$ . Si può dimostrare che la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea è data da:

$$f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) - f_1(z) \int_{z_0}^z \frac{f_2(z')g(z')}{W(z')} dz' + f_2(z) \int_{z_0}^z \frac{f_1(z')g(z')}{W(z')} dz'$$

dove  $z_0$  è un qualunque numero reale tale che  $z_1 < z_0 < z_2$ .



$$\vartheta_1(\eta) = (T_w - T_\infty) \left[ 1 - a \int_0^\eta e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta \right] \text{ con } \frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta \quad (3.29)$$

Tale soluzione esprime l'andamento della temperatura adimensionale per basse velocità, dove la dissipazione viscosa è trascurabile. Il termine noto della (3.4) infatti quantifica l'effetto della dissipazione viscosa stessa, ed essendo direttamente proporzionale a  $U_\infty^2$  (contenuto nel numero di Eckert) esso è trascurabile a basse velocità. Ad alte velocità invece tale semplificazione non può essere effettuata. L'equazione (3.4) viene risolta da E. Eckert O. Drewitz [5], ottenendo la seguente espressione di  $\vartheta(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(\eta) &= (T_w - T_\infty) \left[ 1 - a \int_0^\eta e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta \right] + \\ &+ \frac{U_\infty^2}{2c} \left[ ab \int_0^\eta e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta - \frac{Pr}{2} \int_0^\eta \left( e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} \int_0^\eta (f'')^2 e^{(Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta \right) d\eta \right], \\ \text{con } \frac{1}{a} &= \int_0^\infty e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta \\ \text{con } b &= \frac{Pr}{2} \int_0^\infty \left( e^{(-Pr \int_0^\eta f(s) ds)} \int_0^\eta (f'')^2 e^{(Pr \int_0^\eta f(s) ds)} d\eta \right) d\eta \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nella (3.30) il primo termine rappresenta il calore scambiato dalla parete solida al fluido a causa della differenza di temperatura fra i due, il secondo termine rappresenta invece il contributo legato al calore generato dalla dissipazione viscosa.

### 3.2.2 Esempio di soluzione numerica nel caso di sola dissipazione viscosa

Un esempio di andamento di  $\vartheta(\eta)$  per diversi valori di  $Pr$  vengono individuati da E. Magyari nell'articolo [3], in cui però si considera solo l'effetto della dissipazione viscosa, supponendo la lamina solida isolata termicamente. In altre parole, si fa riferimento solo al secondo termine della (3.30). L'autore considera poi, come condizione al contorno,  $\vartheta'(0) = 0$  diversamente da quanto espresso nella (3.8), segno che si va a considerare una lamina adiabatica invece che isoterma. Da notare che l'equazione per lo strato limite

termico affrontata da E. Magyari [3] è analoga a quella già descritta nel paragrafo 2.2.2, nonostante le differenze sui coefficienti degli ultimi due termini dovute semplicemente ad una diversa definizione della costante di similarità. Di seguito si riportano gli andamenti ottenuti per diversi valori di  $Pr$ , si faccia solo riferimento a  $\vartheta_P$  poiché le curve relative a  $\vartheta_M$  riguardano il parallelo studio sullo strato limite formato da una lastra piana in movimento all'interno di un fluido quiescente (flusso di Sakiadis), non di interesse in questa tesi:

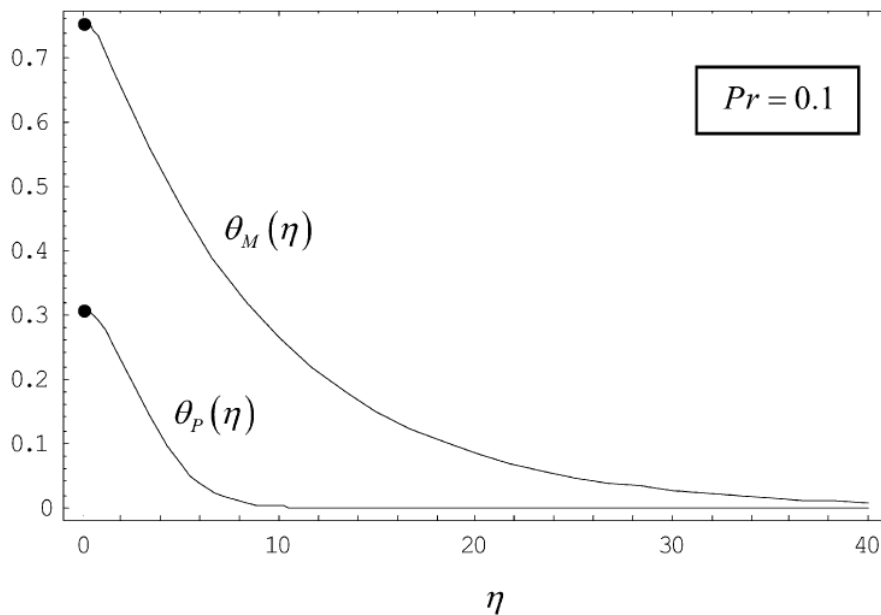


Figura 3.1. a) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=0.1$  [3].

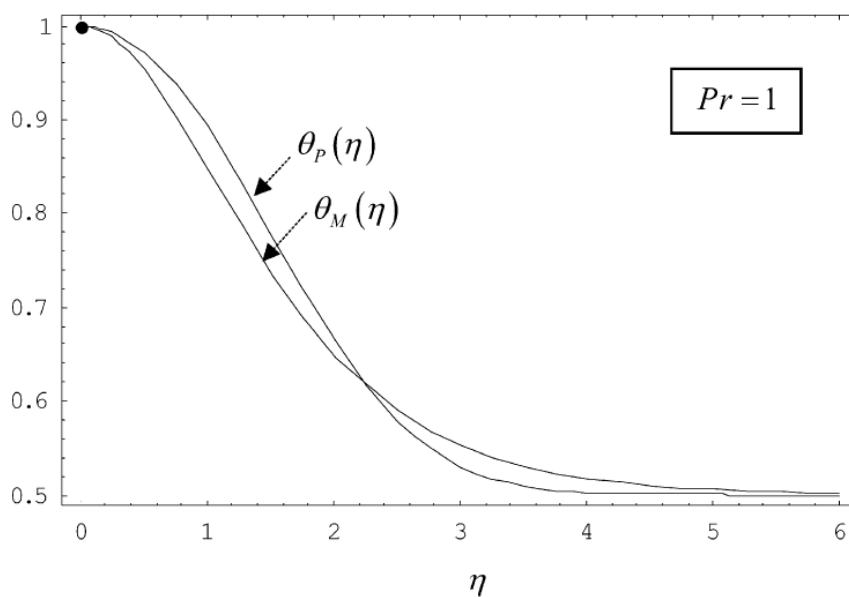


Figura 3.1. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  [3].

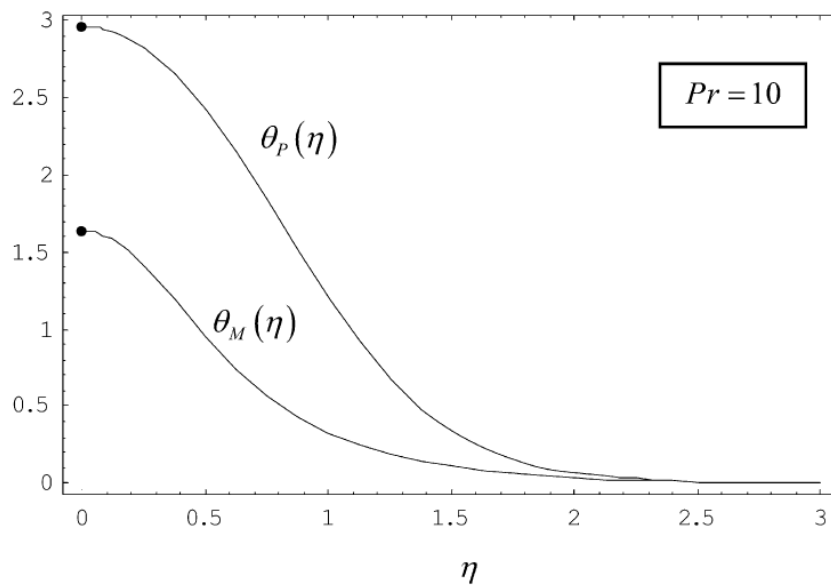


Figura 3.1. c) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=10$  [3].

In tali figure si nota come il comportamento adiabatico della lamina determini un andamento inizialmente orizzontale, mentre mano a mano che ci si allontana dalla lamina (adimensionalmente parlando, mano a mano che  $\eta$  aumenta) la temperatura adimensionale decresce tendendo in maniera asintotica al valore nullo. In termini qualitativi, il comportamento descritto non cambia al variare di  $Pr$ , ciò che determina il cambiamento di quest'ultimo è invece il valore di  $\vartheta$  in zero e la pendenza della curva. All'aumentare di  $Pr$  il valore di partenza di  $\vartheta$  aumenta a sua volta, così come la ripidità della curva che diventa sempre più severa. Ciò rispecchia l'effettivo comportamento fisico. Infatti, un numero di  $Pr$  elevato comporta un fluido maggiormente viscoso e contemporaneamente termicamente poco conduttivo. La maggiore viscosità determina una generazione di calore per dissipazione più importante, ecco perché  $\vartheta(0)$  è più intenso per  $Pr$  alti. Invece, una diffusività termica meno spinta comporta una trasmissione del calore alle zone del fluido distanti dalla parete solida più difficoltosa, "concentrando" il calore a ridosso della parete stessa, così anche l'elevata pendenza per valori di  $Pr$  maggiori è giustificata.

# Capitolo 4

## Soluzioni numeriche dello strato limite termico

Nei paragrafi successivi verranno riportati i risultati dei calcoli eseguiti con il software Mathematica (© Wolfram Research Inc.) in relazione allo strato limite termico di fluidi con diverse proprietà. Gli script dettagliati sono tutti consultabili in Appendice B.

### 4.1 Caso senza dissipazione viscosa

In questo lavoro il trattamento dello strato limite termico è iniziato considerando il caso senza dissipazione. Come visto in precedenza la soluzione analitica per questo caso viene espressa dalla (2.29), tramite il comando “NDSolve” applicato al sistema composto dalle equazioni (2.25) e (3.1), con relative condizioni al contorno ed all’infinito e considerando  $Pr$  pari a 0.71, 1, 10, 100, seguono i risultati sottostanti:

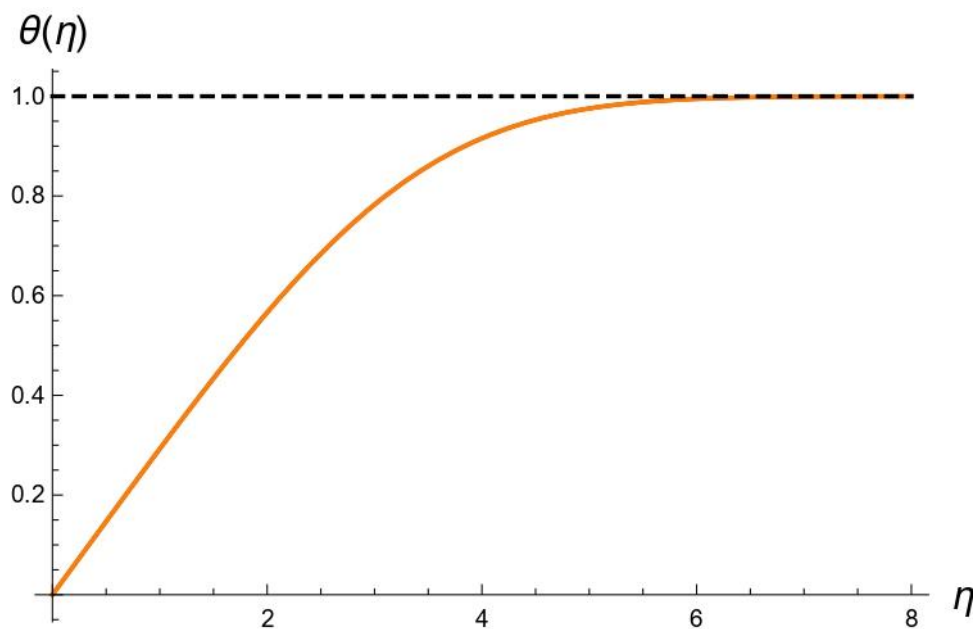


Figura 4.1. a) Caso senza dissipazione viscosa. Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=0.71$ .

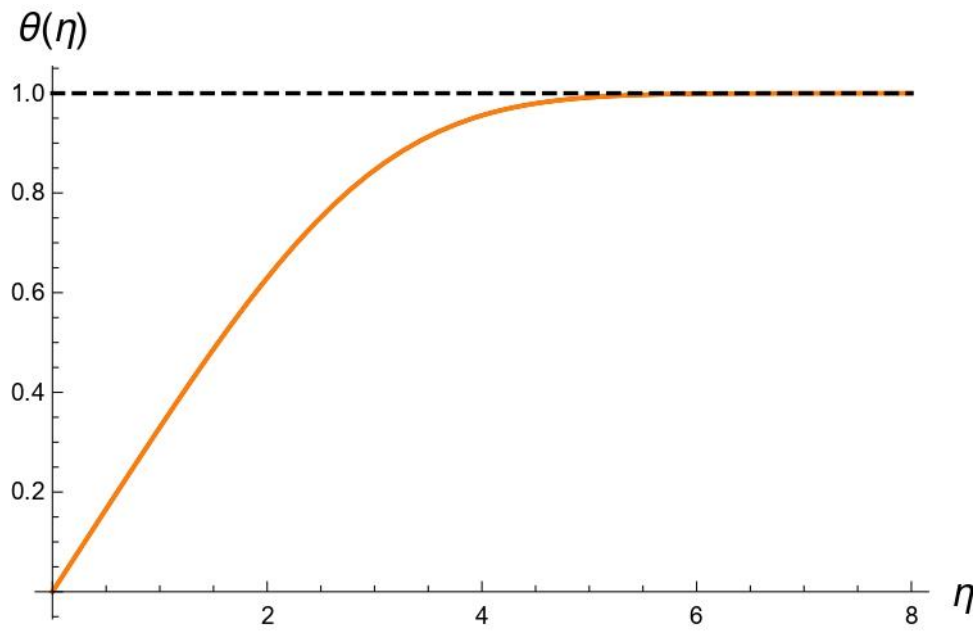


Figura 4.1. b) Caso senza dissipazione viscosa. Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=1$ .

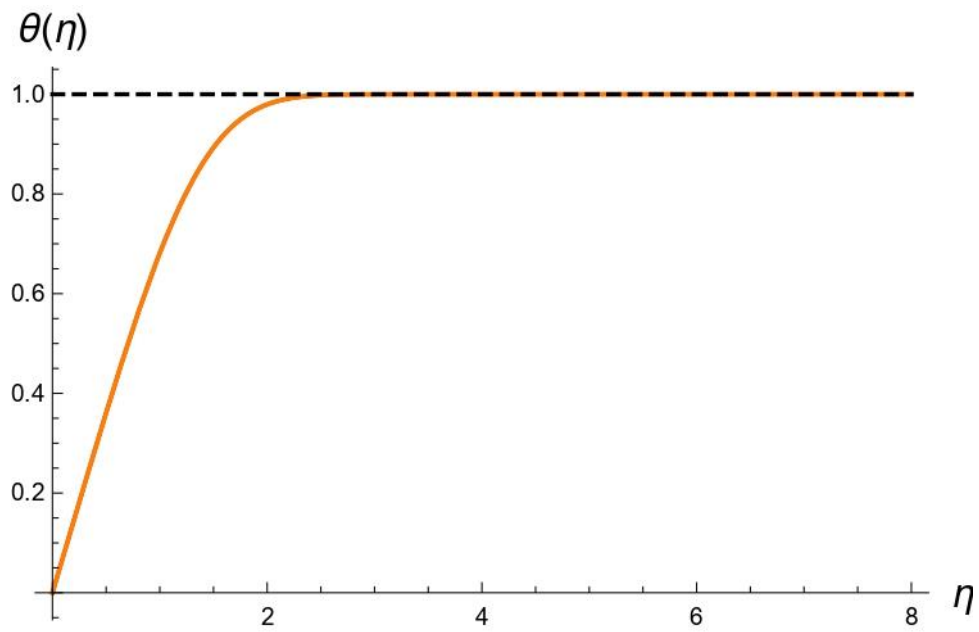


Figura 4.1. c) Caso senza dissipazione viscosa. Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=10$ .

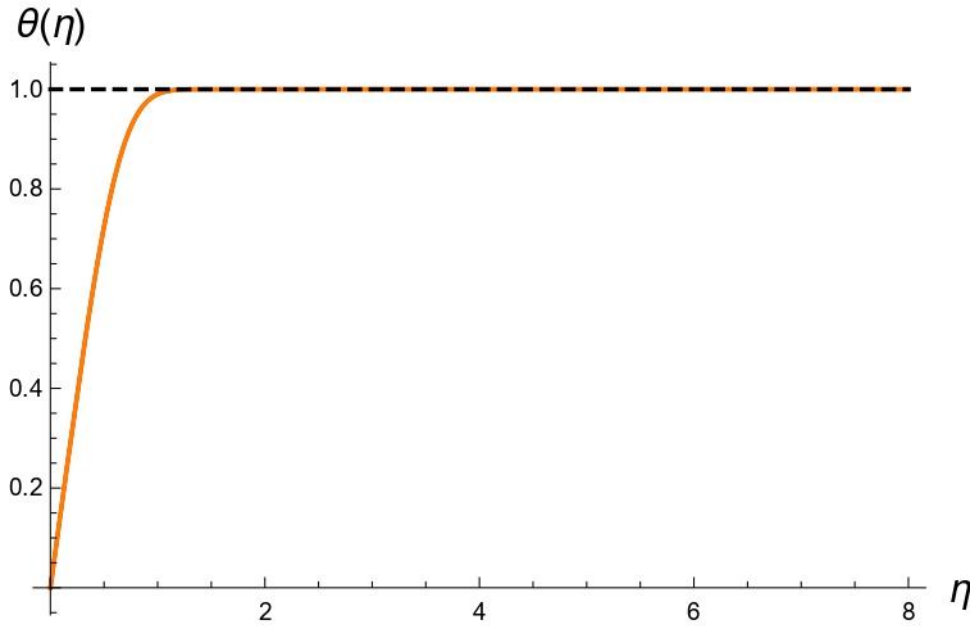


Figura 4.1. d) Caso senza dissipazione viscosa. Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=100$ .

Il comportamento di  $\vartheta$  è essenzialmente quello di una funzione monotona crescente, tendente asintoticamente ad 1 all'infinito. Un aumento del valore del numero di Prandtl determina un andamento più ripido, ovvero  $\vartheta$  tende ad 1 più rapidamente, cosa ben evidente notando i cambiamenti nei grafici dalla Figura 4.1. a) alla Figura 4.1. d). Anche in questo caso i risultati combaciano con le caratteristiche fisiche del fluido poiché un fluido termicamente meno conduttivo (ovvero  $Pr$  elevato) comporta una peggiore distribuzione del calore.

Per la determinazione di varie grandezze di interesse pratico è necessario il calcolo di  $\vartheta'(0)$ , il che nella situazione in questione è facilmente ricavabile dalla (2.29), ottenendo quindi:

$$\vartheta'(0) = \frac{f''(0)^{Pr}}{\int_0^{\infty} f''(\eta^*)^{Pr} d\eta^*} \quad (4.1)$$

in cui si evidenzia la dipendenza di  $\vartheta'(0)$  da  $Pr$ . Un esempio di risultati ottenuti con la (4.1) sono esposti in Tabella 4.1.

$\vartheta'(0)$	$Pr$
0,292680223	0,7
0,306916874	0,8
0,319970518	0,9
0,332057336	1
0,422308172	2
0,485047971	3
0,534787309	4
0,576688891	5
0,613257855	6
0,645921979	7
0,675581193	8
0,702843529	9
0,728141305	10
0,918402019	20
1,051693534	30
1,157751202	40
1,247287497	50
1,571831753	100
2,688271663	500
3,387085296	1000

Tabella 4.1. Esempio di valori di  $\vartheta'(0)$  per diversi  $Pr$ .

Pohlhausen propose poi nel 1921 un'approssimazione di questa legge di interdipendenza riportata di seguito:

$$\vartheta'(0) = 0.332Pr^{1/3} \quad (4.2)$$

Si è quindi andati a confrontare i due metodi, ovvero il (4.1) ed il (4.2) non riscontrando particolari differenze se non un leggero discostamento per elevati  $Pr$ , come testimonia il grafico in Figura 4.2.

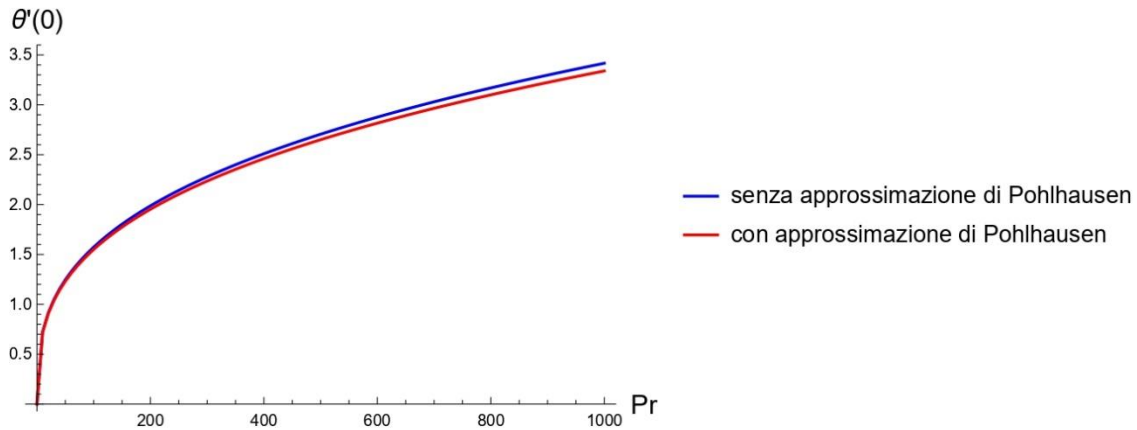


Figura 4.2. Andamento di  $\vartheta'(0)$  per diversi  $Pr$ , con e senza approssimazione di Pohlhausen.

## 4.2 Caso con dissipazione viscosa

Lo studio ha poi proseguito con il trattamento dell'equazione completa, ovvero la (3.4), anch'essa sottoposta al comando “NDSolve” assieme all'equazione (3.1) e con tutte le condizioni associate. In prima analisi si è calcolato  $\vartheta'(0)$  per gli stessi valori di  $Pr$  della Tabella 4.1 considerando  $Ec = 0$ , riscontrando i medesimi risultati del paragrafo 4.1, ovvero una curva di  $\vartheta'(0)$  in funzione di  $Pr$  sovrapposta a quella blu in Figura 4.2. Si sono poi analizzati diverse possibilità in termini di valori di  $Pr$  ed  $Ec$  al fine di valutare gli effetti delle loro variazioni. Si porga l'attenzione ai grafici sottostanti, relativi  $Pr = 0.71$  ed  $Ec$  variabile da 1 a 10, fino a 100:

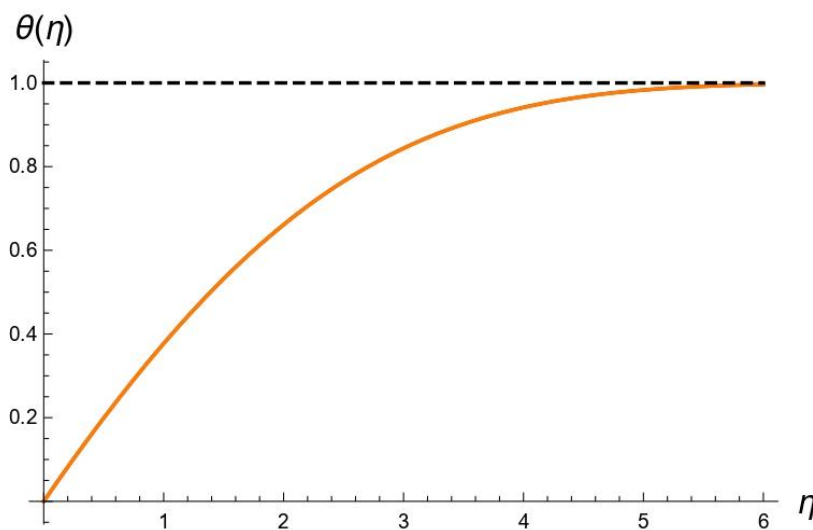


Figura 4.3. a) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=0.71$  ed  $Ec=1$ .



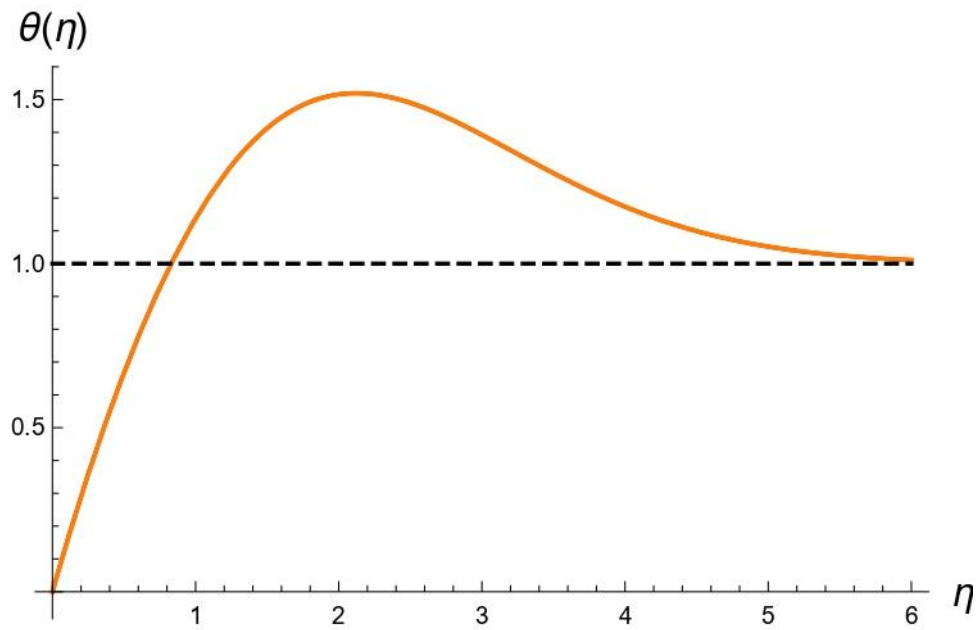


Figura 4.3. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=0.71$  ed  $Ec=10$ .

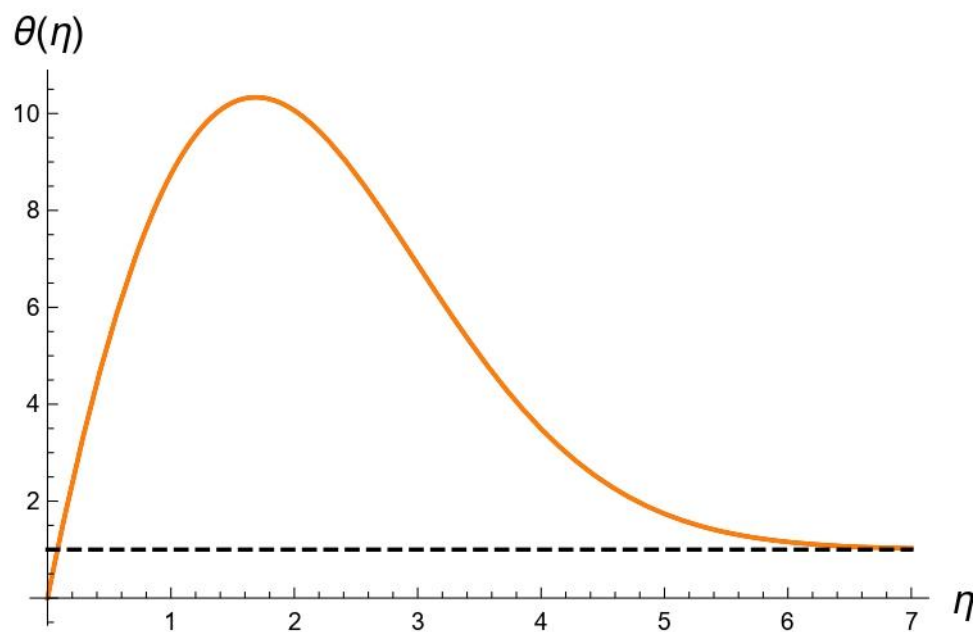


Figura 4.3. c) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=0.71$  ed  $Ec=100$ .

Nei grafici in Figura 4.3 a), b), c), la dissipazione viscosa si manifesta con un diverso andamento (rispetto al caso senza dissipazione) di  $\vartheta$  al di sopra di un certo  $Ec$ . Si tratta infatti non più di una funzione monotona crescente ma una funzione con un massimo, con valore maggiore di 1. La viscosità del fluido comporta la comparsa di uno “strato” in cui viene generato calore per dissipazione e che porta alla comparsa dell’andamento

caratteristico. Al crescere del numero di Eckert tale massimo raggiunge valori più elevati, considerando la definizione di  $Ec$  ciò ha senso in quanto se quest'ultimo è elevato si è di fronte ad un fluido con basso calore specifico e/o ad elevata velocità, oppure ancora si ha una differenza trascurabile di temperatura tra lamina e fluido indisturbato. Basso calore specifico determina la richiesta di minore energia (quindi calore) per aumentare la temperatura di un determinato intervallo, la velocità elevata ha come conseguenza l'aggravarsi dei fenomeni dissipativi, mentre una bassa differenza di temperatura tra lamina e fluido porta ad avere un massimo più pronunciato. Ciò quindi giustifica la variazione delle curve nei grafici precedenti.

Tale tendenza è confermata anche per diversi valori di  $Pr$  come confermano i grafici in Figura 4.4 a), b) e c), relativi a  $Pr = 1$  ed  $Ec = 1, 10, 100$ .

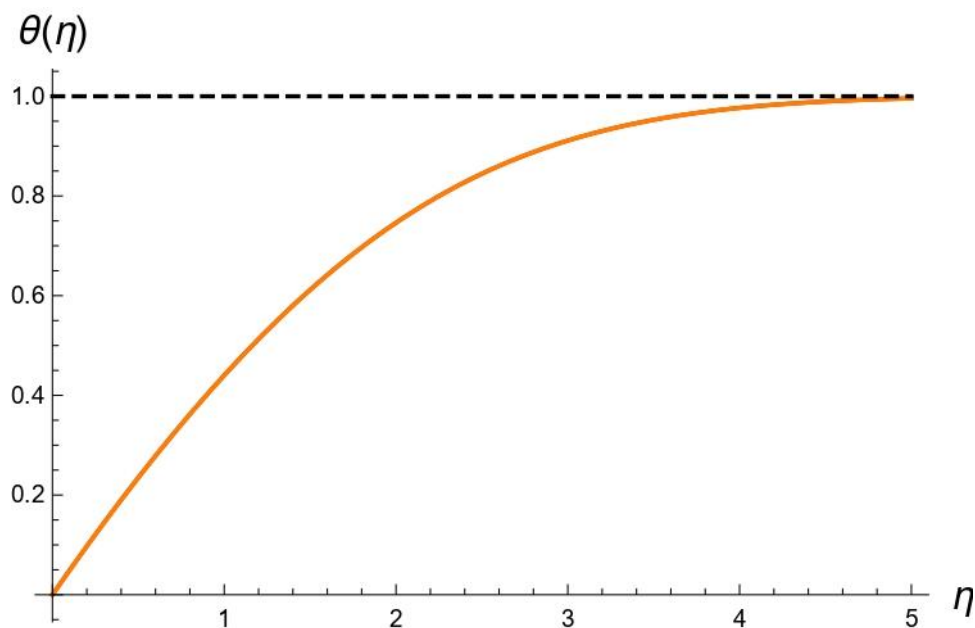


Figura 4.4. a) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $Ec=1$ .

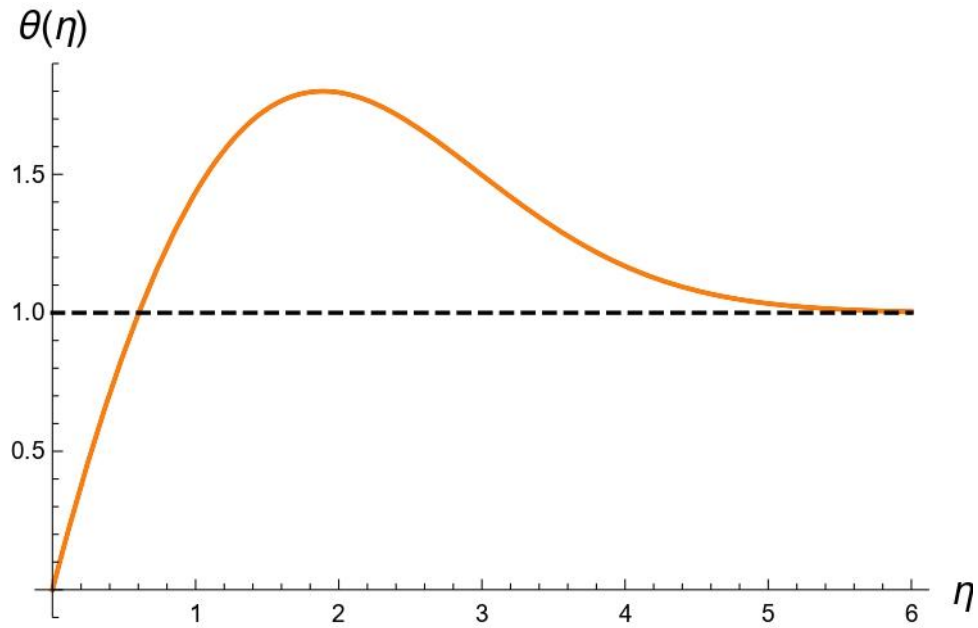


Figura 4.4. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $Ec=10$ .

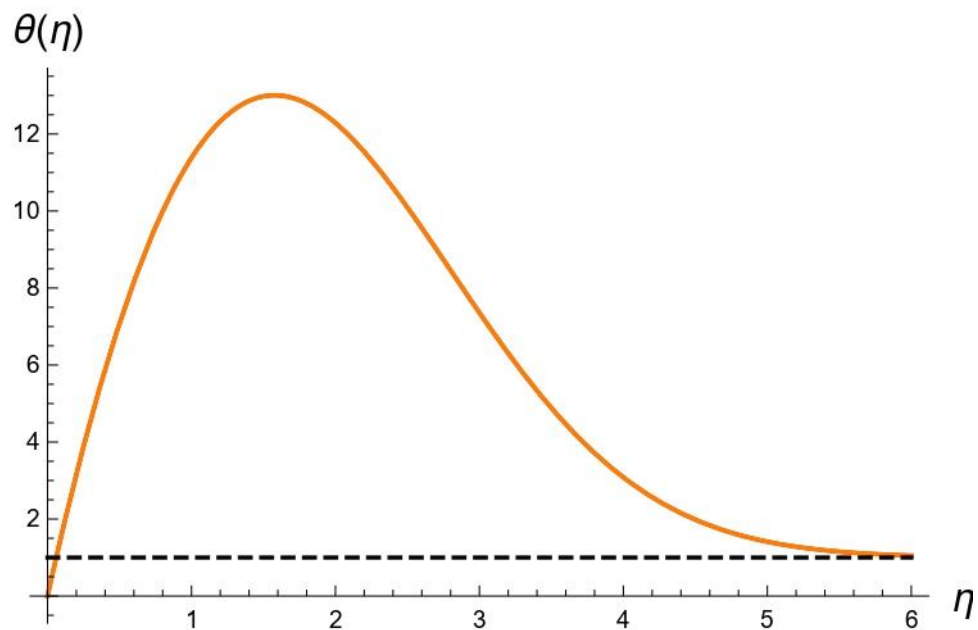


Figura 4.4. c) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $Ec=100$ .

Non sono state infatti riscontrate particolari differenze, se non fosse per il fatto che i valori dei massimi sono più elevati rispetto ai casi con  $Pr = 0.71$ , fatto che non stupisce poiché è diretta conseguenza della maggiore intensità della viscosità (quindi aumento del calore generato per dissipazione) e diminuzione della diffusività termica (ovvero concentrazione del calore generato). Si evidenzia però il fatto che le caratteristiche dell'effetto della

dissipazione viscosa sono determinate contemporaneamente dai valori assunti da  $Pr$  ed  $Ec$ .

Di seguito si riportano i risultati per  $Pr = 10$  ed  $Ec = 0.01, 1, 5$ .

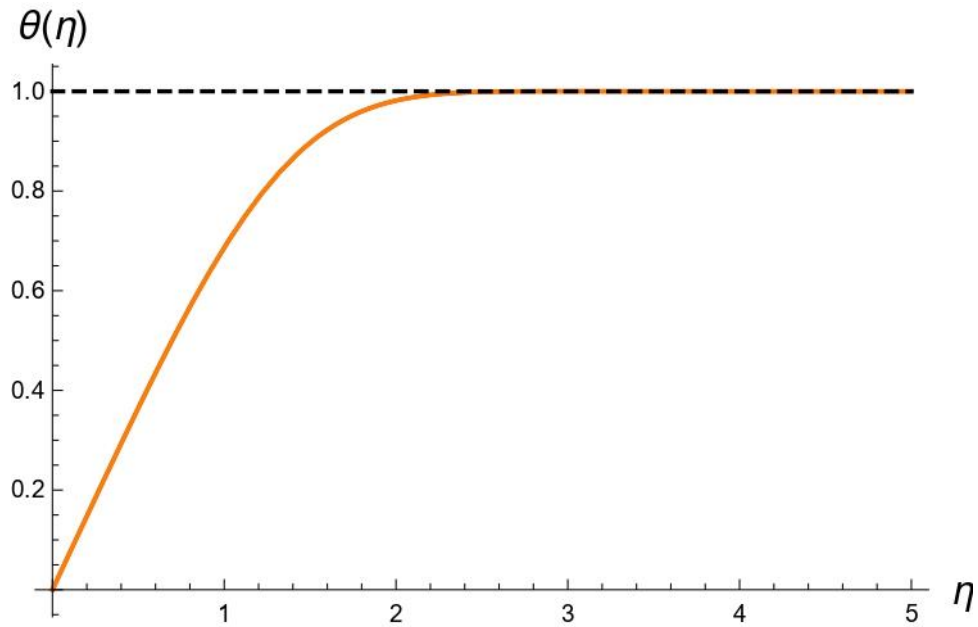


Figura 4.5. a) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=10$  ed  $Ec=0.01$ .

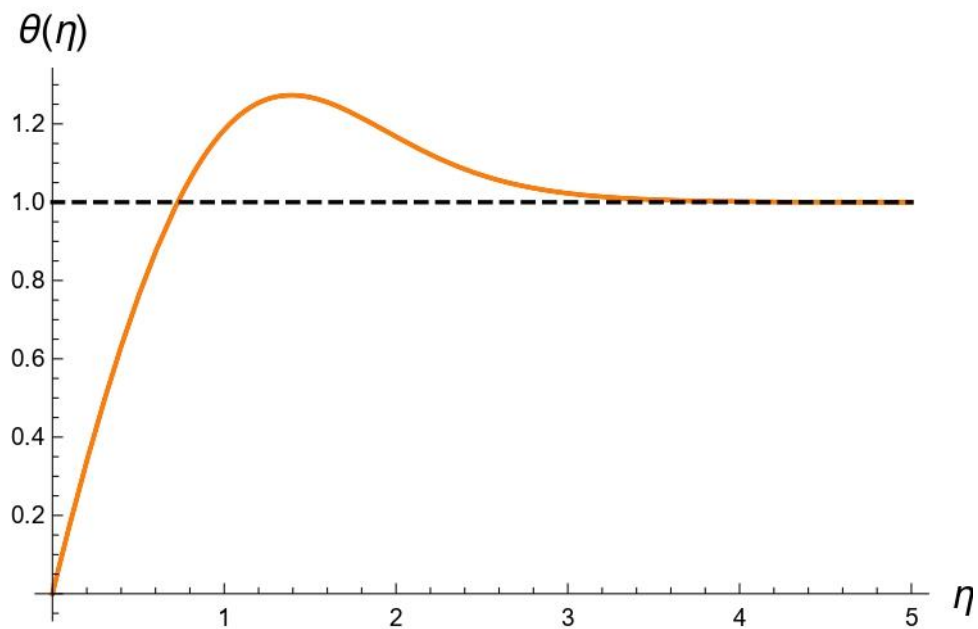


Figura 4.5. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=10$  ed  $Ec=1$ .

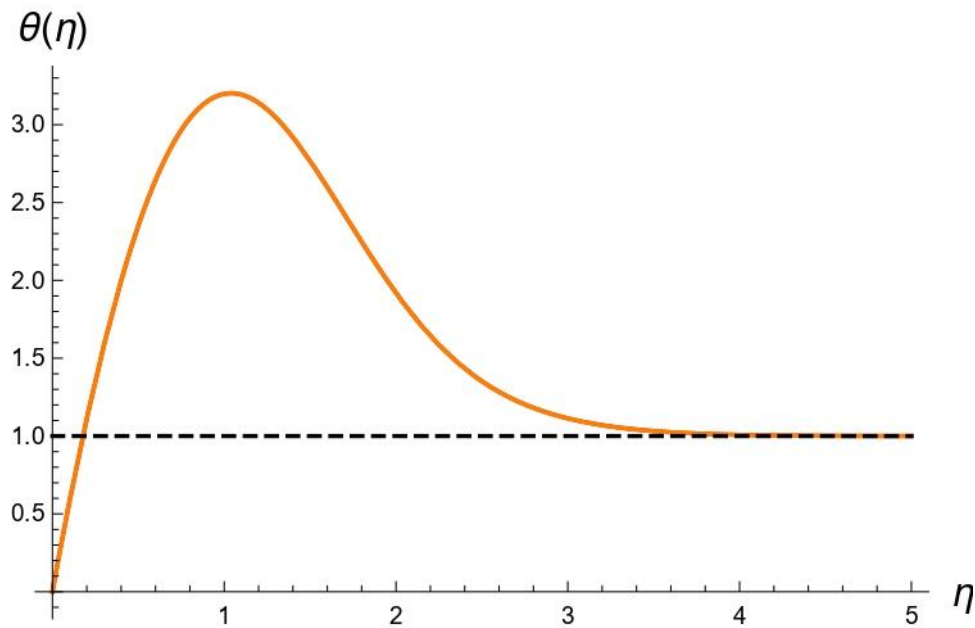


Figura 4.5. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=10$  ed  $Ec=5$ .

Come prima, all'aumentare di  $Pr$  (rispetto ai casi precedenti) e di  $Ec$  a parità di  $Pr$  consegue un aumento del valore del massimo assunto dalla temperatura. È poi più evidente l'effetto dell'aumento della ripidità, sia nella zona crescente che nella zona decrescente, dovuto a  $Pr$  più elevato (i motivi sono descritti nel paragrafo 4.1). È però importante notare come gli effetti dell'incremento di  $Ec$  sono molto più severi rispetto a  $Pr$  piccoli, basti notare che con  $Pr = 10$  il punto di massimo si presenta già ad  $Ec = 1$ . Ciò suggerisce infatti la presenza di una relazione che lega un determinato  $Pr$  ad un relativo  $Ec$  di "soglia", cosa che viene ulteriormente confermata dall'ultimo caso analizzato, ovvero quello mostrato in Figura 4.6 a), b) e c), per  $Pr = 100$  ed  $Ec = 0.001, 0.1, 1$ .

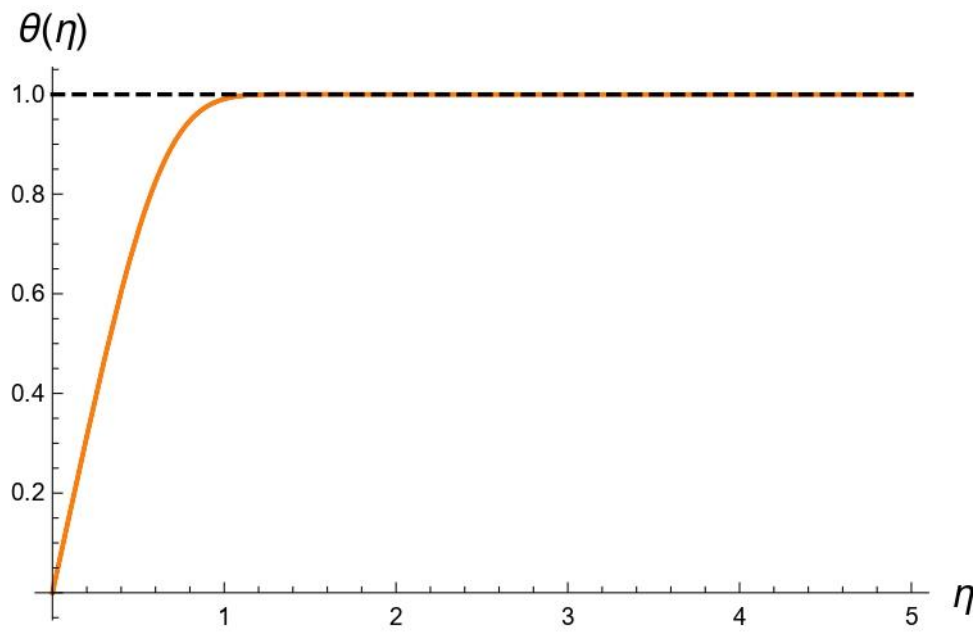


Figura 4.6. a) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=100$  ed  $Ec=0.001$ .

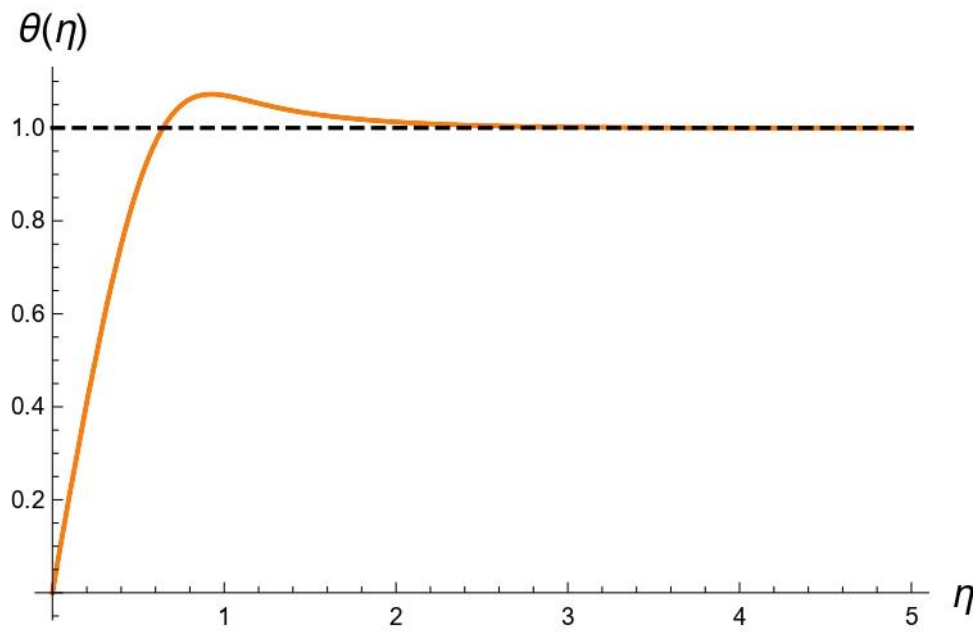


Figura 4.6. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=100$  ed  $Ec=0.1$ .

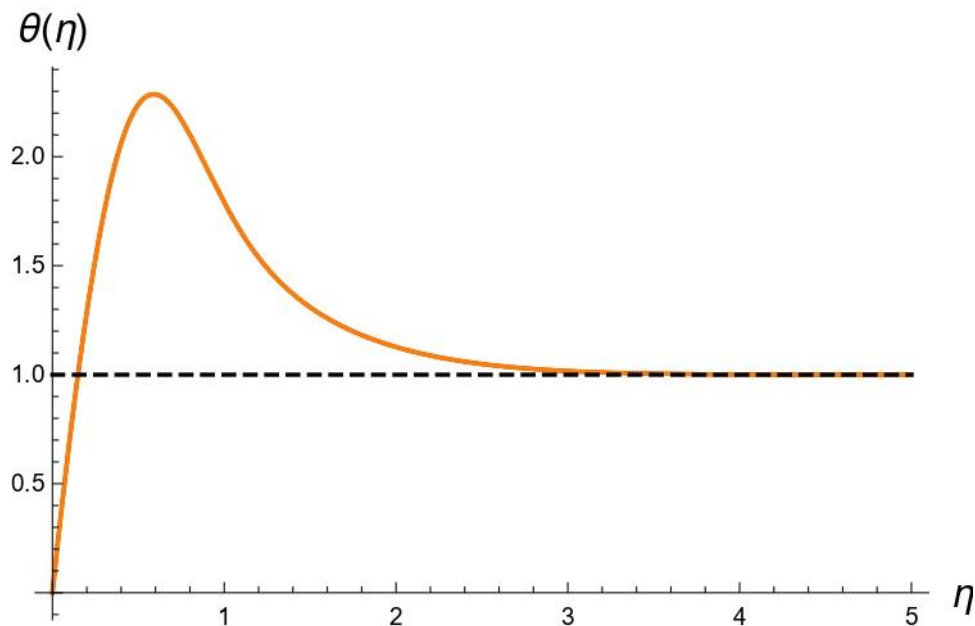


Figura 4.6. c) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=100$  ed  $Ec=1$ .

In questi ultimi grafici si evidenziano ancora di più i comportamenti descritti in precedenza come risultato delle variazioni di  $Pr$  ed  $Ec$ .

## 4.2.1 Valutazione di $Ec_0$

Dai grafici riscontrati si è notato come per bassi (in relazione al numero di Prandtl) valori di  $Ec$  la curva  $\vartheta(\eta)$  sia monotona crescente, mentre per alti valori di  $Ec$  vi è la comparsa di un massimo. Per questi motivi ci si è posti l'obiettivo di ricerca del valore di soglia di  $Ec$ , che si è denominato con  $Ec_0$ , in corrispondenza del quale avviene il cambiamento di comportamento di  $\vartheta(\eta)$ . Si è proseguito alla determinazione di tale valore per diversi valori di  $Pr$  tramite un metodo grafico. Esso consiste, fissando un determinato  $Pr$ , nell'andare a porre nello stesso grafico diverse curve di  $\vartheta(\eta)$  relative a diversi numeri di Eckert, valutare le due curve fra le quali si considera avvenga il cambiamento di andamento di  $\vartheta(\eta)$ , andare ad individuare nuovamente un numero di curve di  $\vartheta(\eta)$  pari a quelle di prima ed associate a diversi  $Ec$  ma questa volta limitati dai due valori delle due curve scelte in precedenza e quindi con un numero in più di cifre significative,

valutare le due curve fra le quali si considera avvenga il cambiamento di andamento di  $\vartheta(\eta)$  e così via. Per ogni iterazione si ha quindi l'aggiunta di una cifra significativa a  $Ec_0$ . Per chiarire il metodo si prenda come esempio il caso raffigurato in Figura 4.7 a), b), c) e d):

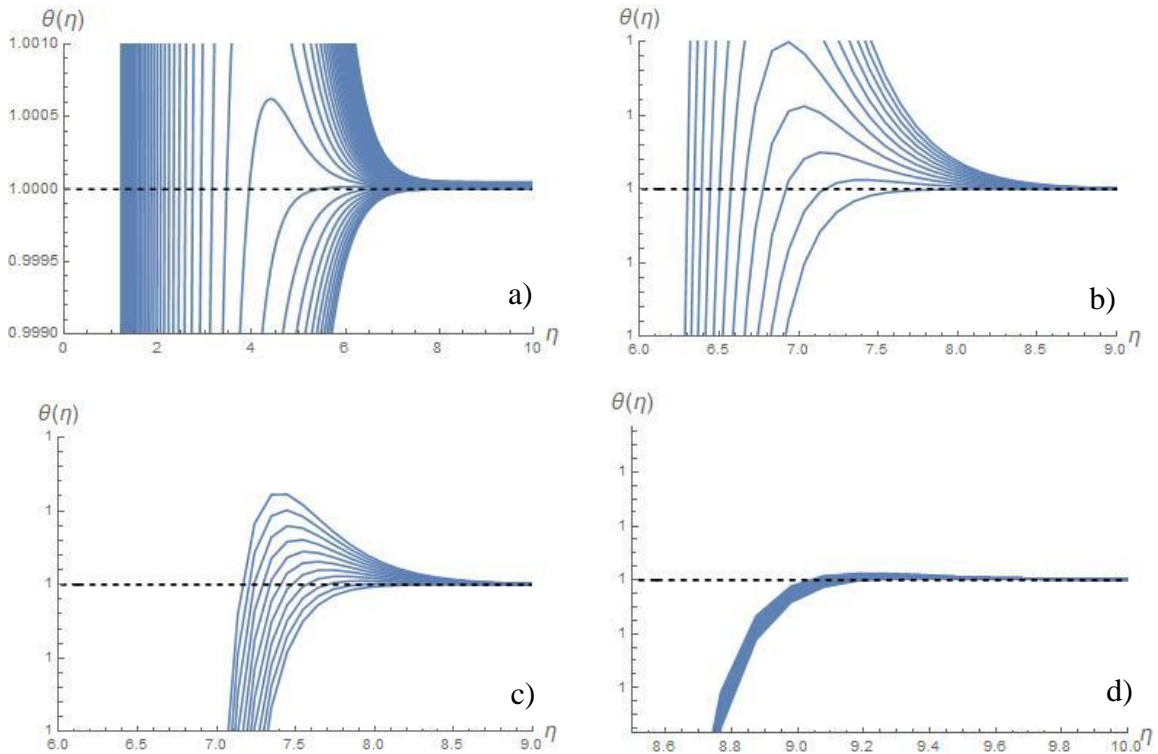


Figura 4.7. a) Curve della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $1.0 < Ec < 5.0$  con passo 0.1. b) Curve della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $2.00 < Ec < 2.01$  con passo 0.01. c) Curve della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $2.000 < Ec < 2.001$  con passo 0.001. d) Curve della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  e  $2.000000 < Ec < 2.000001$  con passo 0.000001.

Nella quattro immagini sopra riportate si è preso in considerazione il caso con  $Pr = 1$ . Nella prima immagine (Figura 4.7 a) ) sono riportati i grafici di  $\vartheta(\eta)$  relativi ad  $Ec$  variabile tra 1.0 e 5.0 con passo pari a 0.1. Si nota come il cambiamento di andamento di  $\vartheta(\eta)$  avviene fra le due curve centrali, vale a dire quelle relative ad  $Ec = 2.0$  ed  $Ec = 2.1$ . Si è quindi proceduto a porre in grafico le curve di  $\vartheta(\eta)$  associate ad  $Ec$  compreso tra 2.00 e 2.10 con passo pari a 0.01, come è possibile vedere in Figura 4.7 b). Si itera quindi il processo selezionando le due curve in cui avviene il cambiamento di andamento, ovvero la prima e la seconda, quindi quelle associate ad  $Ec = 2.00$  ed  $Ec = 2.01$ . Si procede quindi per un numero  $N$  di volte, affinando sempre di più il valore di  $Ec_0$  ed analizzando curve sempre meno distanziate (si veda il passaggio dalla Figura 4.7 b) alla



Figura 4.7 c) fino alla Figura 4.7 d) ). Nell'esempio riportato si è giunti ad un  $Ec_0 = 2.0000001$ .

Quanto appena descritto è stato applicato per diversi valori di  $Pr$ , inoltre è possibile effettuare il procedimento anche in maniera inversa, ovvero fissando  $Ec$  e facendo variare  $Pr$  per ricavare un  $Pr$  di soglia  $Pr_0$ . Infatti, la così chiamata soglia risulta essere individuata da una coppia di valori di  $Ec_0$  e  $Pr_0$  corrispondenti biunivocamente. I casi analizzati sono riportati nella Tabella 4.2, i cui sono stati considerati valori con 6 cifre significative.

$Pr_0$	$Ec_0$
0,01	283,559
0,10	27,6880
0,20	13,4650
0,30	8,71770
0,40	6,33900
0,50	4,90700
0,71	3,20145
1,00	2,00000
1,50	1,00000
2,00	0,24500
2,10	0,14000
2,50	0,00000
10,00	0,00000

*Tabella 4.2. Valori di  $Ec_0$  con rispettivi valori di  $Pr_0$ , calcolati con metodo grafico.*

Nonostante i dati riportati in Tabella 4.2 è da precisare che  $Ec_0$ , per  $Pr_0$  elevati, non raggiunge valori nulli ma estremamente vicini a 0, in altre parole tende asintoticamente a 0 per  $Pr_0$  che tende all'infinito. Vale poi il viceversa. Si è quindi di fronte ad una struttura relativa ad un ramo di iperbole, che in scala doppio-logaritmica si presenta con un andamento lineare, esattamente come mostra il grafico associato alla Tabella 4.2 e posto in Figura 4.8.

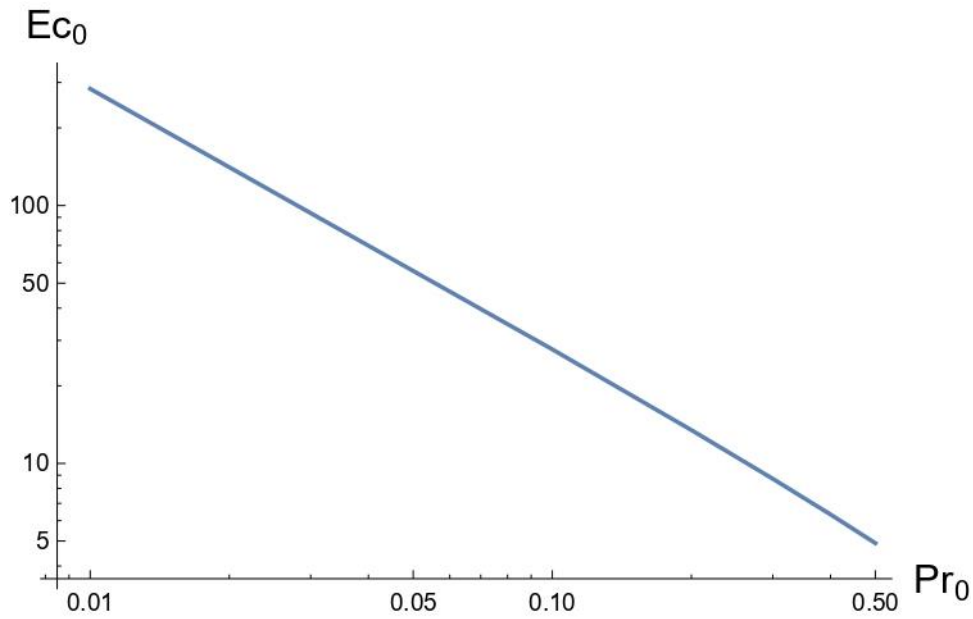


Figura 4.8. Relazione tra  $Ec_0$  e  $Pr_0$  in scala doppio-logaritmica.

## 4.2.2 Valutazione di $\vartheta'(0)$

Si è infine svolto il calcolo di  $\vartheta'(0)$  per diversi valori di  $Pr$  ed  $Ec$ , data l'importanza di tale parametro per la valutazione di grandezze di interesse applicativo. I valori di  $\vartheta'(0)$  ottenuti sono riportati in Tabella 4.3.

$\vartheta'(0)$	$Pr$	$Ec$	$\vartheta'(0)$	$Pr$	$Ec$
0,294288710	0,71	0,001	0,729219532	10	0,001
0,295402951	0,71	0,01	0,738923574	10	0,01
0,306545369	0,71	0,1	0,835963988	10	0,1
0,417969541	0,71	1	1,806368129	10	1
0,913188087	0,71	5	6,119275421	10	5
1,532211269	0,71	10	11,510409537	10	10
12,674628547	0,71	100	108,550823621	10	100
0,332223365	1	0,001	1,577826365	100	0,001
0,333717623	1	0,01	1,631777875	100	0,01
0,348660203	1	0,1	2,171292970	100	0,1
0,498086004	1	1	7,566443924	100	1
1,162200677	1	5	31,544892606	100	5
1,992344017	1	10	61,517953461	100	10
16,934924147	1	100	601,033048824	100	100

Tabella 4.3. Valori di  $\vartheta'(0)$  per diversi valori di  $Ec$  e  $Pr$ .

In termini grafici, i risultati della Tabella 4.3 vengono raffigurati di seguito:

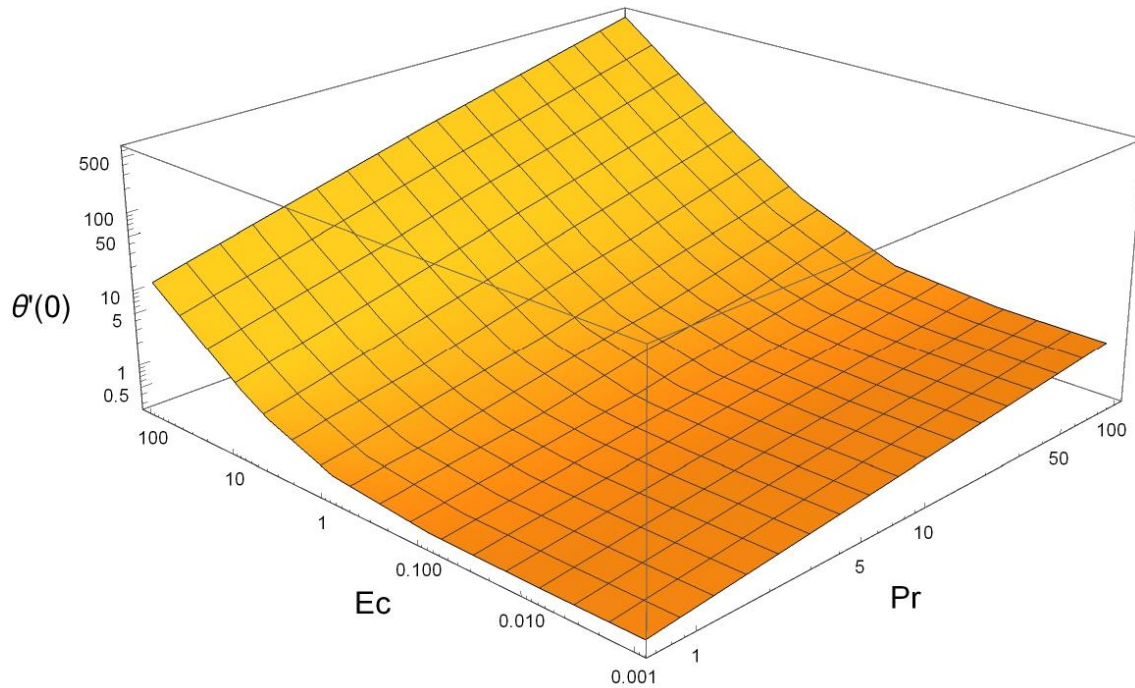


Figura 4.9. Grafico di  $\theta'(0)$  per diversi valori di  $Ec$  e  $Pr$ . Ogni asse è posto in scala logaritmica.

### 4.3 Caso con $Ec \rightarrow \infty$

Il problema individuato dal sistema espresso dalle (3.7), (3.8) e (3.9) è relativo alla situazione in cui non vi è differenza di temperatura tra lamina e fluido. I relativi risultati grafici infatti mostrano un andamento asintotico non più tendente ad 1 ma a 0. Vengono riportati sotto i casi studiati, ovvero quelli relativi a  $Pr = 0.71, 1, 10, 100$ .

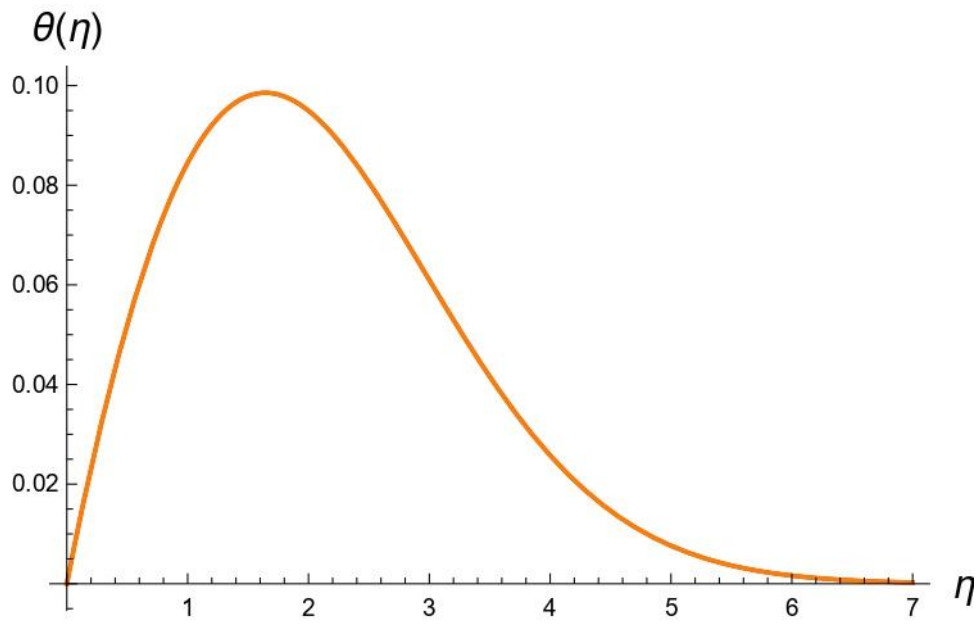


Figura 4.10. a) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=0.71$  ed  $Ec \rightarrow \infty$ .

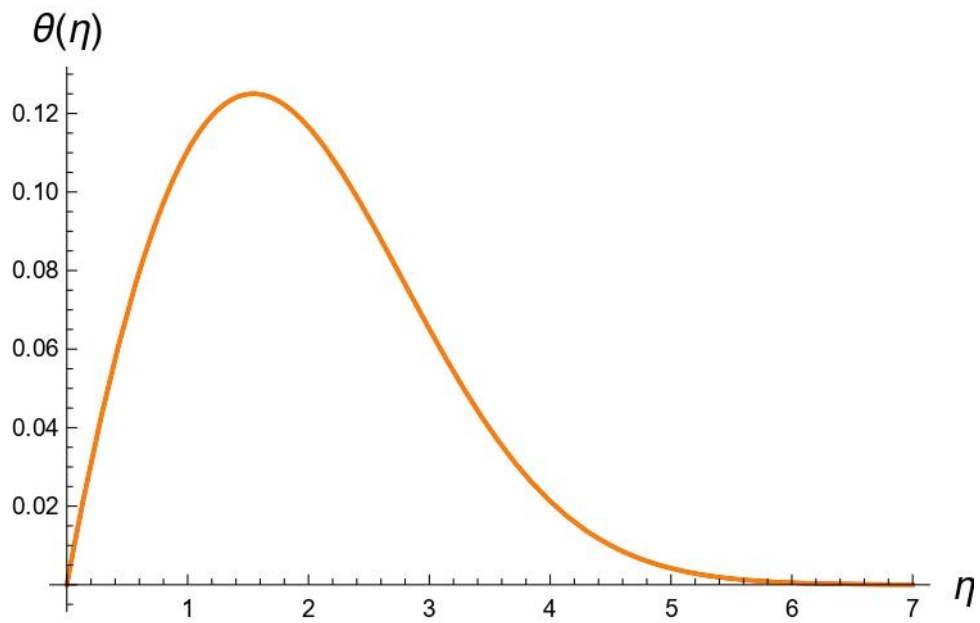


Figura 4.10. b) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=1$  ed  $Ec \rightarrow \infty$ .

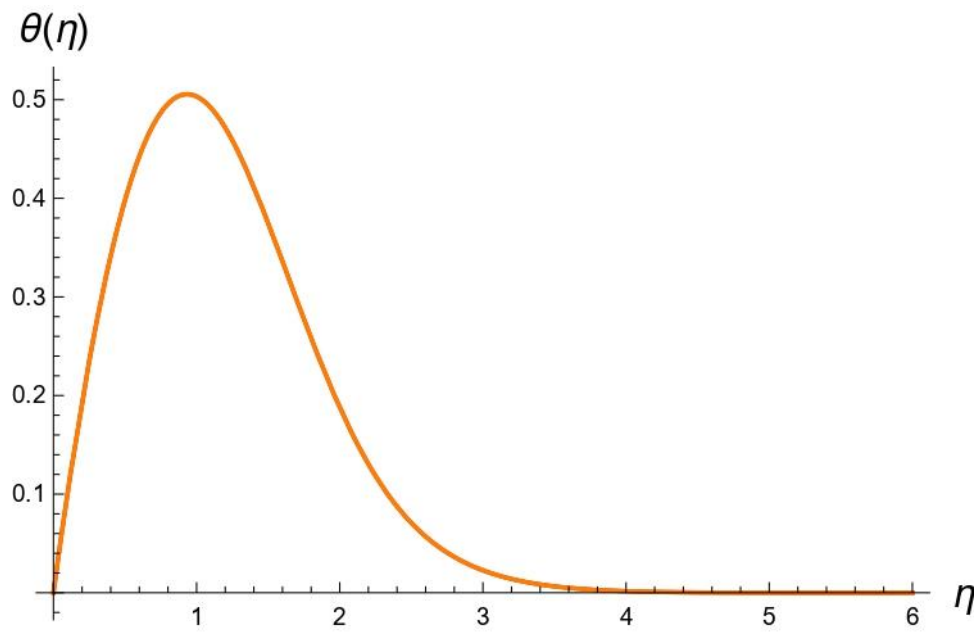


Figura 4.10. c) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=10$  ed  $Ec \rightarrow \infty$ .

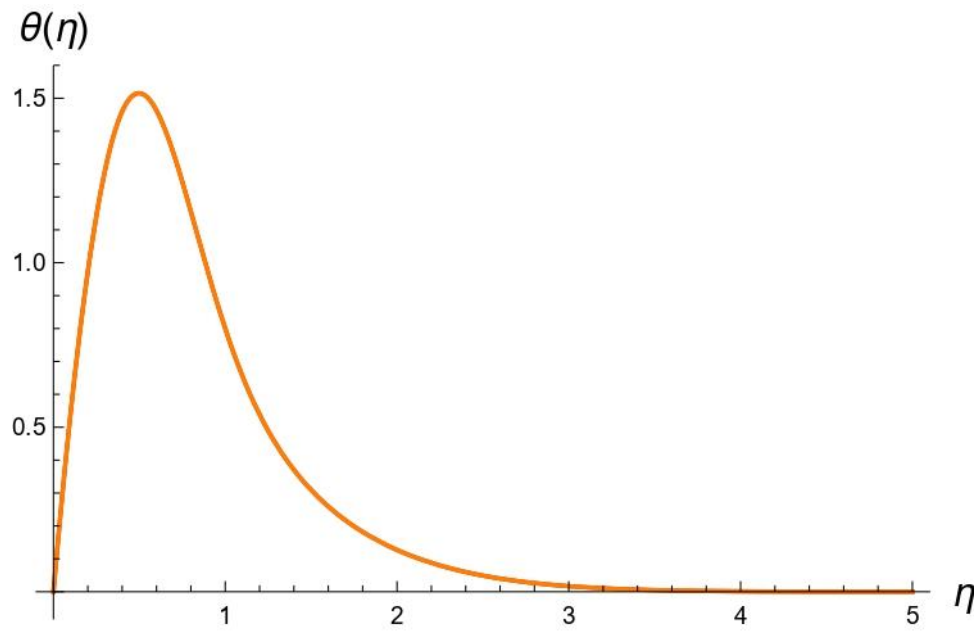


Figura 4.10. d) Andamento della temperatura adimensionale per  $Pr=100$  ed  $Ec \rightarrow \infty$ .

Tali grafici vanno a confermare ancora una volta gli effetti dell'aumento del numero di Prandtl. In particolare, si è posta l'attenzione sul relativo aumento del valore massimo assunto dalla temperatura adimensionale. L'andamento di quest'ultimo in funzione di  $Pr$  è esposto in Figura 4.11.

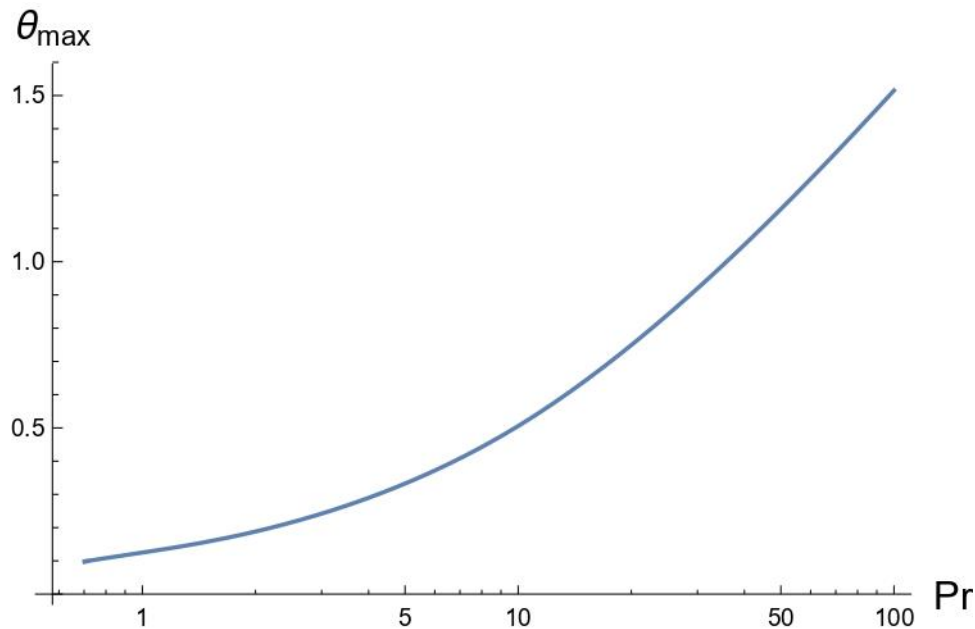


Figura 4.11. Andamento del massimo raggiunto dalla temperatura adimensionale in funzione di  $Pr$ , nel caso  $Ec \rightarrow \infty$ .

È importante notare come non solo l'influenza di  $Pr$  sia evidente sul valore assunto dal massimo, ma anche la posizione di quest'ultimo (in termini di ascisse) vari. Scorrendo dalla Figura 4.10 a) alla figura 4.10 d) infatti è possibile notare che, in linea generale, aumentare  $Pr$  significa aumentare il valore assunto dal massimo e contemporaneamente spostare il punto di massimo verso l'origine, ovvero si va verso uno strato limite termico sempre più piccolo. Tale osservazione è alla base degli ultimi due casi limite studiati. Ovvero lo studio dello strato limite termico nel caso in cui  $Pr \rightarrow 0$  e in cui  $Pr \rightarrow \infty$ .

## 4.4 Caso con $Pr \rightarrow 0$

Si ricorda che in situazione di  $Pr \rightarrow 0$  l'equazione da adottare per lo studio dello strato limite è la (2.36), in cui era stato introdotto il parametro  $\Gamma$  inteso come prodotto tra  $Pr$  ed  $Ec$ . Nel relativo paragrafo 2.2.4 si era anche detto che la condizione al limite (vale a dire per  $\eta \rightarrow \infty : \vartheta = 1$ ) non poteva essere applicata in linea generale. Come scritto precedentemente, per  $Pr$  piccoli lo strato limite termico diventa sempre più ampio e di conseguenza il massimo di temperatura si sposta verso valori di  $\eta$  sempre più grandi. Nel caso estremo di  $Pr \rightarrow 0$  tale massimo si va a collocare per valori di  $\eta \rightarrow \infty$ , per questo non ha senso imporre la condizione al limite per risolvere la (2.36). Il valore al limite della temperatura adimensionale viene infatti determinato da  $\Gamma$ . Aumentare  $\Gamma$  infatti significa considerare un fluido con  $Ec$  più elevato (dato che appunto  $Pr \rightarrow 0$ ) il che, per i motivi già descritti nel paragrafo 4.2, si manifesta con un accumulo di calore nello strato limite ovvero un innalzamento della curva  $\vartheta(\eta)$ . Come già esplicitato nel paragrafo 2.2.4, la condizione al limite però può essere sfruttata per ricavare il valore di soglia di  $\Gamma$ , ovvero  $\Gamma_0$  espresso dalla (2.38). Per comprendere appieno quanto appena detto si consideri il grafico posto in Figura 4.12, in cui vengono riportate tre curve  $\vartheta(\eta)$  relative a tre valori di  $\Gamma$ , uno maggiore, uno minore ed uno uguale a  $\Gamma_0$ .

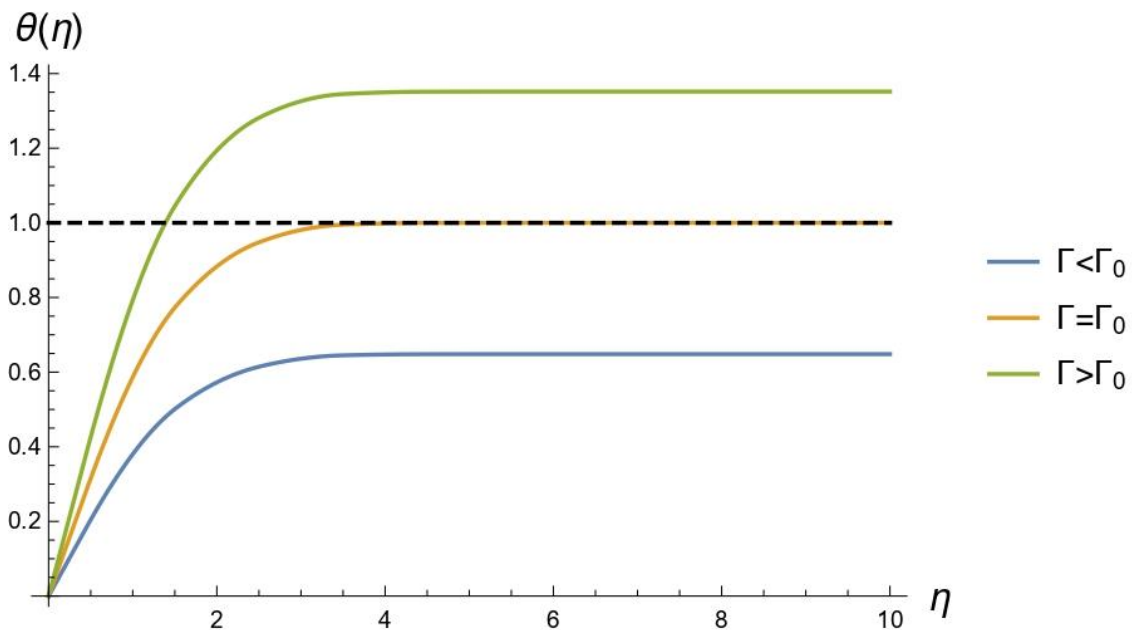


Figura 4.12. Andamento della temperatura adimensionale nel caso  $Pr \rightarrow 0$ , con tre diversi valori di  $\Gamma$ .

È chiaramente visibile come all'aumentare di  $\Gamma$ , a parità di  $\eta$ ,  $\vartheta$  assuma valori sempre più importanti, passando per quello relativo alla soglia.

#### 4.4.1 Valutazione di $\Gamma_0$

Il calcolo del valore di  $\Gamma_0$  è stato svolto con due metodi. In primo luogo, con lo stesso metodo grafico descritto nel paragrafo 4.2.1 (ovviamente applicato all'equazione (2.36), insieme ad entrambe le condizioni, sia quella al contorno che quella al limite), in seconda istanza applicando il metodo integrale sfruttando la relazione (2.38). In entrambi i casi il valore ottenuto è stato il seguente:

$$\Gamma_0 = 2.84292977637 \dots \quad (4.3)$$

Esso è ovviamente relativo alla stessa soglia espressa da  $Pr_0$  ed  $Ec_0$ , di conseguenza solo per bassi valori di  $Pr$  è possibile scrivere che:

$$\Gamma_0 = Pr_0 Ec_0 \quad (4.4)$$

E tale relazione è tanto più giusta più  $Pr$  assume valori vicini allo 0 (proprio perché  $\Gamma_0$  è stato valutato per  $Pr \rightarrow 0$ ). A dimostrazione di ciò, si consideri la Tabella 4.4, in cui vengono riportati i valori calcolati di  $Ec_0$  tramite la (4.4) con gli stessi valori di  $Pr$  della Tabella 4.2:

$Pr_0$	$Ec_0$
0,01	284,293
0,10	28,4293
0,20	14,2146
0,30	9,47643
0,40	7,10732
0,50	5,68586
0,71	4,00413
1,00	2,84293
1,50	1,89529
2,00	1,42146
2,10	1,35378
2,50	1,13717
10,00	0,28429

Tabella 4.4. Valori di  $Ec_0$  calcolati a partire da dati  $Pr_0$ , tramite conoscenza di  $\Gamma_0$ .



Confrontando la Tabella 4.4 con la Tabella 4.2 si possono ricavare gli errori percentuali relativi ad ogni riga, quindi ad ogni valore di  $Pr$ . Gli errori commessi con la (4.4) sono posti nel grafico in Figura 4.13, per valori di  $Pr$  compresi tra 0 e 10:

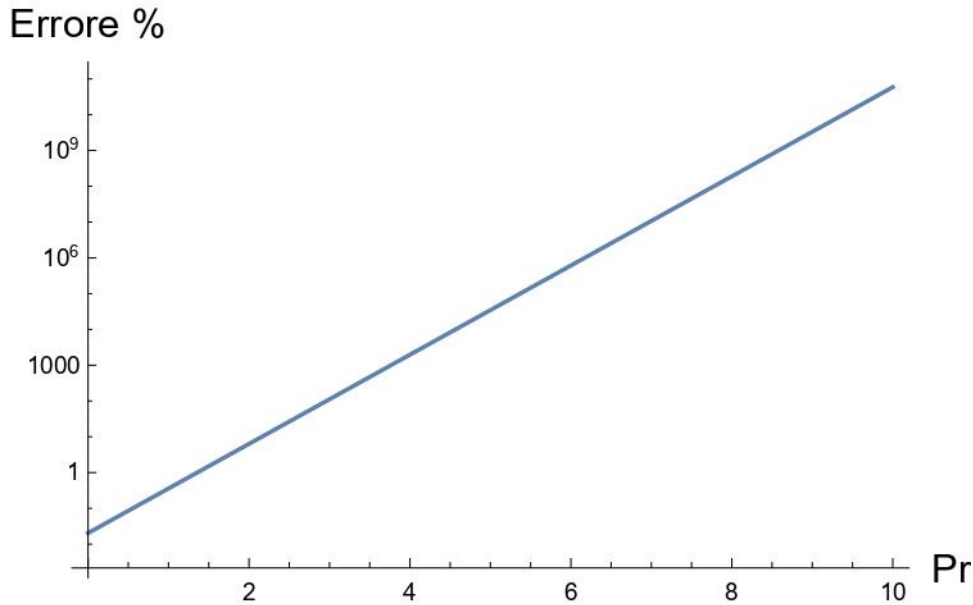


Figura 4.13. Errore percentuale relativo al calcolo di  $Ec_0$  con la (4.4) in confronto con il metodo grafico, in funzione di  $Pr$ .

Il grafico conferma come l'errore diventi sempre più grande con il crescere di  $Pr$ .

## 4.5 Caso con $Pr \rightarrow \infty$

L'ultimo caso studiato vede infine la risoluzione dell'integrale (2.35), per diversi valori del numero di Eckert. Questo caso limite porta alla massimizzazione, a parità di  $Ec$ , del valore del punto di massimo oltre che al suo spostamento in corrispondenza di  $\eta = 0$ . Ciò testimonia la degenerazione dello strato limite termico, che non occupa più una regione bidimensionale ma concentra il suo spessore in corrispondenza del valore 0 di  $\eta$ . La variazione del numero di Eckert in questo caso contribuisce solo ad aumentare il valore del punto di massimo, spostando la curva  $\vartheta(\eta)$ . È possibile notare tale effetto in Figura 4.14, in cui sono state poste in grafico dieci curve relative ad  $Ec$  variabile da 0 a 10 con passo pari ad 1.

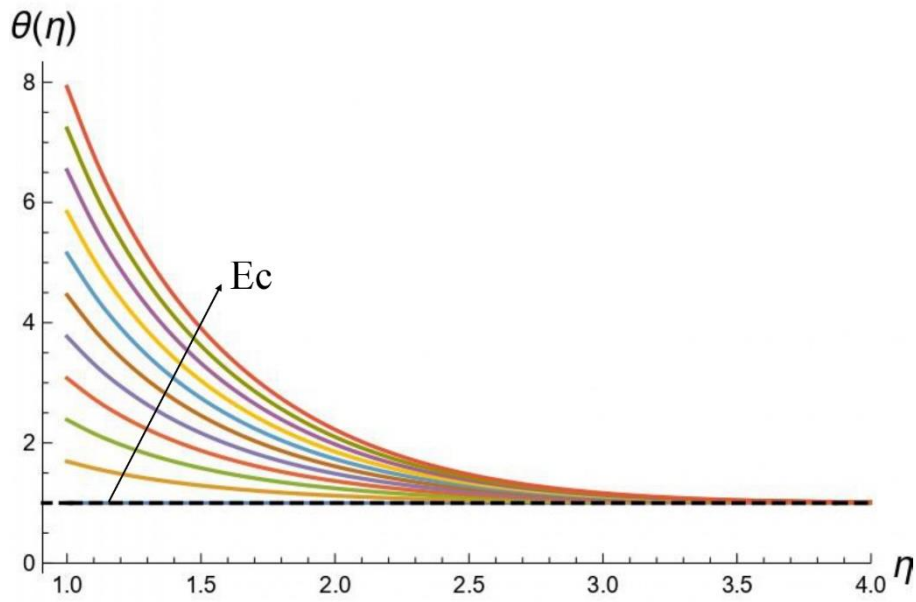


Figura 4.14. Andamento della temperatura adimensionale nel caso  $Pr \rightarrow \infty$ , con  $Ec$  crescente da 1 a 10.

Le curve assumono di conseguenza un andamento monotono decrescente, con la sola eccezione del caso  $Ec = 0$  in cui si manifesta il caso degenere  $\vartheta = 1$ . In realtà si è notato come per  $\eta = 0$  vi sia un particolare caso di singolarità, data la struttura della soluzione espressa dalla (2.35). Infatti, per  $\eta = 0$  il termine al denominatore nell'integrale della (2.35), vale a dire  $f(\eta)$ , va a 0, generando la singolarità. Anche dal punto di vista fisico, tale comportamento è giustificato poiché si avrebbe un comportamento della temperatura adimensionale per  $\eta = 0$  pari quello della delta di Dirac.

# Capitolo 5

## Conclusioni

In questo lavoro di tesi si è studiato l'effetto della dissipazione viscosa sullo strato limite termico generato da un fluido a ridosso di una lamina piana a partire dalla originaria formulazione matematica del problema, passando per la risoluzione dello strato limite dinamico con metodo numerico fino alla trattazione e descrizione dello strato limite termico, anch'esso studiato numericamente. In particolare, si è visto come lo strato limite termico, in presenza di dissipazione viscosa, sia matematicamente caratterizzato da un'equazione dipendente da due parametri, ovvero il numero di Prandtl ed il numero di Eckert. Dal punto di vista fisico invece esso è caratterizzato, per determinati valori di  $Pr$  ed  $Ec$ , dalla presenza di un massimo, conferendo quindi alla temperatura adimensionale un andamento prima crescente e poi decrescente per tendere poi asintoticamente ad 1 all'infinito, al contrario dell'andamento tipico del caso senza dissipazione in cui la temperatura adimensionale presenta un andamento crescente e tendente asintoticamente ad 1 all'infinito. Sono stati poi individuati i valori di  $Pr$  e di  $Ec$  (denominati valori di soglia) oltre i quali, nel caso con dissipazione viscosa, si presentava il comportamento con il massimo, trovando una relazione di tipo iperbolico fra i due. Al fine poi di valutare gli effetti sull'andamento della temperatura da parte della variazione dei due parametri  $Pr$  ed  $Ec$ , sono stati fatti variare gli stessi mantenendone uno costante. A parità di  $Pr$  si è notato come aumentando  $Ec$  l'unico effetto è l'aumento pressoché lineare del valore assunto dal massimo di temperatura, inoltre più  $Pr$  è elevato minore sarà l'incremento di  $Ec$  necessario per avere un aumento del massimo di temperatura uguale ad un caso con  $Pr$  basso. A parità di  $Ec$  la variazione di  $Pr$  agisce sia sul valore del massimo di temperatura e sia sullo spessore dello strato limite termico, quindi sulla posizione del massimo stesso. In particolare, aumentando il numero di Prandtl si ha un aumento del valore assunto dal massimo di temperatura e contemporaneamente uno spostamento di esso verso la lamina piana, ovvero la restrizione dello strato limite termico. Per entrambi i casi, descritti nel caso di incremento dei parametri, vale il viceversa. Quanto spiegato è stato valutato sia per il caso generale e sia per quattro situazioni limite, vale a dire quando

$Ec = 0$  (caso senza dissipazione), quando  $Ec \rightarrow \infty$  (caso in cui lamina e fluido hanno stessa temperatura), quando  $Pr \rightarrow 0$  (estensione dello strato limite ovunque) e quando  $Pr \rightarrow \infty$  (degenerazione dello strato limite in corrispondenza della lamina piana). Con  $Ec = 0$ ,  $Pr \rightarrow 0$  e  $Pr \rightarrow \infty$  si è potuto valutare delle soluzioni analiticamente mentre nel caso  $Ec \rightarrow \infty$  si è ricorso ad una nuova definizione della temperatura adimensionale con conseguente formulazione di un diverso problema dal punto di vista matematico. Si è osservato come per  $Ec = 0$  la temperatura adimensionale presenti sempre un andamento crescente con tendenza asintotica ad 1 all'infinito, mentre per  $Ec \rightarrow \infty$  un andamento con massimo con tendenza asintotica a 0 all'infinito. Nella situazione invece di  $Pr \rightarrow 0$  si è osservato un andamento sempre crescente della temperatura adimensionale con, all'infinito, tendenza asintotica ad un valore variabile a seconda di un parametro denominato  $\Gamma$  e definito come il prodotto tra  $Pr$  ed  $Ec$ . Per tale parametro si è trovato il valore di soglia in corrispondenza del quale si ha una tendenza asintotica ad 1 all'infinito. Infine, nel caso  $Pr \rightarrow \infty$  la temperatura adimensionale presenta un andamento sempre decrescente con tendenza asintotica ad 1 all'infinito, solo quando  $Ec = 1$  si ha un valore della temperatura adimensionale pari ad 1 ovunque.

# Appendice A

## Metodo di Eulero

Si consideri il seguente problema ai valori iniziali, dotato di una ODE (acronimo di *ordinary differential equation*) di primo ordine con relativa condizione iniziale:

$$\begin{cases} f'(x) = F(x, f(x)) \\ f(0) = f_0 \end{cases} \quad (A.1)$$

In cui  $f(x)$  è la soluzione da determinare in  $x \in [0, x_{max}]$ ,  $F$  è una data funzione di due variabili e  $f_0$  è una costante nota. Un primo semplice modo per individuare una soluzione numerica della (A.1) è il *metodo di Eulero*. Esso consiste nell'andare a dividere l'intervallo  $[0, x_{max}]$  in  $N$  intervalli di uguale ampiezza  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \frac{x_{max}}{N} \quad (A.2)$$

Si introduce quindi la notazione:

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \dots, x_n = n\Delta x, \dots, x_N = x_{max} \quad (A.3)$$

E, allo stesso modo:

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), \dots, f_n = f(x_n), \dots, f_N = f(x_{max}) \quad (A.4)$$

Si prosegue all'espansione in serie di Taylor della funzione  $f(x)$ :

$$f(x) = f(s) + f'(s)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad (A.5)$$

Con  $s \in [0, x_{max}]$ . Dalla (A.5) è possibile ricavare la formula approssimata:

$$f_n = f(x_n) \approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})\Delta x = f_{n-1} + F(x_{n-1}, f_{n-1})\Delta x, n = 1, 2, \dots, N \quad (A.6)$$

Nella (A.6) si è andato ad omettere il termine di ordine  $\Delta x^2$ , conferendo così l'approssimazione. La (A.6) è conosciuta come formula di Eulero e fornisce un'approssimazione numerica della soluzione. Inoltre, essendo l'equazione ottenuta il risultato di un troncamento al primo ordine, essa è più accurata man mano che si diminuisce l'ampiezza  $\Delta x$  o aumenta  $N$ . La (A.6) implica poi un algoritmo iterativo,

dovento essa essere applicata in primis per  $n = 1$  per valutare  $f_1$ . Conoscendo poi  $f_1$  è possibile procedere per  $n = 2$  per valutare  $f_2$  e così via, fino ad  $n = N$ .

Il metodo di Eulero prevede anche un'applicazione per risolvere problemi ai valori iniziali contenenti delle ODE anche di ordine superiore al primo. Come esempio si riporta il problema dello strato limite di Blasius:

$$\begin{cases} 2f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) = 0 \\ f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = \gamma \end{cases} \quad (A.7)$$

Si procede andando ricondurre il tutto ad un sistema del primo ordine grazie alle seguenti definizioni:

$$g(\eta) = f'(\eta), h(\eta) = g'(\eta) = f''(\eta). \quad (A.8)$$

Così da modificare la (A.7) in:

$$f'(\eta) = g(\eta), \quad (A.9)$$

$$g'(\eta) = h(\eta), \quad (A.10)$$

$$h'(\eta) = -\frac{1}{2}f(\eta)h(\eta), \quad (A.11)$$

$$f(0) = 0, g(0) = 0, h(0) = \gamma. \quad (A.12)$$

Avendo quindi ottenuto un sistema del primo ordine è possibile applicare il metodo di Eulero descritto in precedenza, definendo con la costante  $\eta$  degli intervalli di ampiezza  $\Delta\eta$ , ottenendo così la sequenza di punti:

$$\eta_0 = 0, \eta_1 = \Delta\eta, \dots, \eta_n = n\Delta\eta \quad (A.13)$$

Procedendo quindi come prima, considerando però che  $\eta \in [0, \infty]$ , si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$f_0 = f(\eta_0) = 0, f_1 = f(\eta_1) = 0, \dots, f_n = f(\eta_n), \dots, \quad (A.14)$$

$$g_0 = g(\eta_0) = 0, g_1 = g(\eta_1) = 0, \dots, g_n = g(\eta_n), \dots, \quad (A.15)$$

$$h_0 = h(\eta_0) = 0, h_1 = h(\eta_1) = 0, \dots, h_n = h(\eta_n), \dots, \quad (A.16)$$

Di conseguenza, l'applicazione del metodo di Eulero al sistema descritto dalle (A.9), (A.10), (A.11), (A.12) porta alle seguenti formule ricorsive:

$$f_n = f_{n-1} + g_{n-1}\Delta\eta, \quad (A.17)$$

$$g_n = g_{n-1} + h_{n-1}\Delta\eta, \quad (A.18)$$

$$h_n = h_{n-1} - \frac{1}{2}f_{n-1}h_{n-1}\Delta\eta. \quad (A.19)$$

Da attuare a partire da  $n = 1$  fino ad un numero finito  $n = N$ . A seconda di come vengono scelti i valori di  $\Delta\eta$  e  $N$  che andranno a definire l'intervallo operativo  $[0, N\Delta\eta]$ , parte del dominio  $[0, \infty]$  permesso dalla variabile di similarità  $\eta$ . Da notare che gli obiettivi da raggiungere con questo metodo sono due: avere un dominio per  $\eta$  il più ampio possibile, avere un'ottima accuratezza del metodo di Eulero. Il primo si ottiene con valori di  $N\Delta\eta$  elevati, il secondo con valori di  $\Delta\eta$  molto piccoli. In altre parole, la combinazione ottimale è l'adozione di  $\Delta\eta$  piccoli e  $N$  molto grande (a parità di  $\Delta\eta$ , incrementare  $N$  prende il nome di *grid refinement*).

## Estensioni del metodo di Eulero

Una variante del metodo di Eulero prevede l'applicazione dell'espansione in serie di Taylor di  $f(x_{n-1})$  partendo da  $x_n$ . In questo modo la (A.6) viene sostituita da:

$$f_{n-1} = f(x_{n-1}) \approx f(x_n) + f'(x_n)\Delta x = f_n + F(x_n, f_n)\Delta x, \text{ con } n = 1, 2, \dots, N \quad (A.20)$$

La (A.20) permette il calcolo di  $f_{n-1}$  conoscendo  $f_n$ . Siccome si dispone di una  $f_0$  nota ma non si conosce il valore di  $f_N$ , l'unico modo per usare la (A.20) è quello di valutare  $f_n$  conoscendo  $f_{n-1}$ , tramite la seguente formula:

$$f_n = f_{n-1} + F(x_n, f_n)\Delta x \quad (A.21)$$

Quest'ultima differisce dalla (A.6) per il fatto di determinare  $f_n$  implicitamente. Sommando la (A.21) con la (A.6) si ottiene la formula per la valutazione di  $f_n$ :

$$f_n = f_{n-1} + [F(x_{n-1}, f_{n-1}) + F(x_n, f_n)] \frac{\Delta x}{2} \quad (A.22)$$

Quella ottenuta è ancora una formula di valutazione implicita di  $f_n$  che può essere resa esplicita esprimendo  $F(x_n, f_n)$  in termini di  $f_n$  sfruttando la (A.6):

$$f_n = f_{n-1} + [F(x_{n-1}, f_{n-1}) + F(x_n, f_{n-1} + F(x_{n-1}, f_{n-1})\Delta x)] \frac{\Delta x}{2} \quad (A.23)$$

La (A.23) è conosciuta come *formula di Heun*.

Un altro metodo inteso come perfezionamento del metodo di Eulero in termini di accuratezza è il *metodo di Runge-Kutta*, il quale poggia sulla seguente formula:

$$f_n = f_{n-1} + \Delta x \sum_{i=1}^r b_i k_i \quad (A.24)$$

In cui  $k_i$  è:

$$k_i = F \left( x_{n-1} + c_i \Delta x, f_{n-1} + \Delta x \sum_{j=1}^r A_{ij} k_j \right), \text{ con } i = 1, 2, \dots, r \quad (A.25)$$

Si può dimostrare che devono essere inclusi anche i seguenti vincoli:

$$\sum_{i=1}^r b_i = 1, c_i = \sum_{j=1}^r A_{ij}. \quad (A.26)$$

Nel caso in cui la matrice  $r \times r$  di coefficienti  $A_{ij}$  presenti la struttura triangolare sottostante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (A.27)$$

Allora ogni  $k_i$  dipenderà unicamente da  $k_1, k_2, \dots, k_{i-1}$ . Quindi, in questo caso, il metodo Runge-Kutta fornisce una formula esplicita per il calcolo di  $f_n$ . Si prenda in esame il caso del metodo di Runge-Kutta del quarto ordine, individuato dall'acronimo RK4, ovvero caratterizzato da  $r = 4$  e da:



$$b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = \frac{1}{6}, c_1 = 0, c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, c_4 = 1. \quad (\text{A.28})$$

In questo modo, la matrice con generico elemento  $A_{ij}$  presenta la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

Si può verificare che le relazioni espresse nella (A.28) e nella (A.29) soddisfano le (A.26).

In pratica, il metodo RK4 è basato sulla formula ricorsiva sottostante:

$$f_n = f_{n-1} + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{A.30})$$

Dove:

$$k_1 = F(x_{n-1}, f_{n-1}), \quad (\text{A.31})$$

$$k_2 = F\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, f_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}k_1\right), \quad (\text{A.32})$$

$$k_3 = F\left(x_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}, f_{n-1} + \frac{\Delta x}{2}k_2\right), \quad (\text{A.33})$$

$$k_4 = F\left(x_{n-1} + \Delta x, f_{n-1} + \Delta x k_3\right). \quad (\text{A.34})$$

Quindi, assumendo la conoscenza di  $(x_{n-1}, f_{n-1})$ , si procede al calcolo di  $k_1$ , per poter poi calcolare  $k_2$ , poi  $k_3$ , poi  $k_4$  per andare infine, tramite la (A.30), a calcolare  $f_n$ . Ciò viene ripetuto per un numero di step pari ad  $n = N$ .

# Appendice B

## Script

---

### Strato limite dinamico Blasius

```
In[ ]:= eqn = 2 f'''[η] + f[η] × f''[η];
bc1 = f[0];
bc2 = f'[0];
bc3 = f''[0];

sol[γ_?NumericQ] := Flatten[NDSolve[{eqn == 0, bc1 == 0, bc2 == 0, bc3 == γ}, f,
  {η, 0, 300}, MaxSteps → Infinity, InterpolationOrder → All, WorkingPrecision → 30]]

In[ ]:= sol[γ_?NumericQ] := NDSolve[{eqn == 0, bc1 == 0, bc2 == 0, bc3 == γ}, f, {η, 0, 300},
  MaxSteps → Infinity, InterpolationOrder → All, WorkingPrecision → 30][[1, 1, 2]]

In[ ]:= Clear[γ];
Do[Print[{ηη, FindRoot[Evaluate[f'[100] /. {f → (sol[γ][#1] &)}] == 1,
  {γ, 32/100}, WorkingPrecision → 30]}], {ηη, 100, 250, 10}]

{100, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{110, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{120, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{130, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{140, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{150, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{160, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{170, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{180, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{190, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{200, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{210, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{220, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{230, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{240, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
{250, {γ → 0.332057336215201438827543555504}}
```

```

In[ ]:=  $\gamma\gamma = 0.3320573362152016837217615870133029391095997937860662693798^{\wedge}30.$ 
 $\xi_{\max} = 3.94021124283194947183097895933548496075^{\wedge}15.$ 
 $\eta_{\max} = \frac{\xi_{\max}}{\gamma\gamma^{\frac{1}{3}}}$ 
Out[ ]:= 0.332057336215201683721761587013
Out[ ]:= 3.94021124283195
Out[ ]:= 5.69003772773101

In[ ]:= FindRoot[Evaluate[f'[\eta] /. {f -> (sol[\gamma\gamma])}] == 99/100, {\eta, 5}, WorkingPrecision -> 30]
Out[ ]:= {\eta -> 4.90998951329531342238211311948}

```

## Strato limite termico Blasius

```

In[ ]:= sol4[Pr_, NN_] := NDSolve[{f[\eta] f''[\eta] + 2 f'''[\eta] == 0,
 $\theta''[\eta] + \frac{Pr}{2} f[\eta] \times \theta'[\eta] == 0, f[0] == 0, f'[0] == 0, f'[NN] == 1, \theta[0] == 0, \theta[NN] == 1},$ 
{f, \theta}, {\eta, 0, NN}, WorkingPrecision -> 20, AccuracyGoal -> 15]

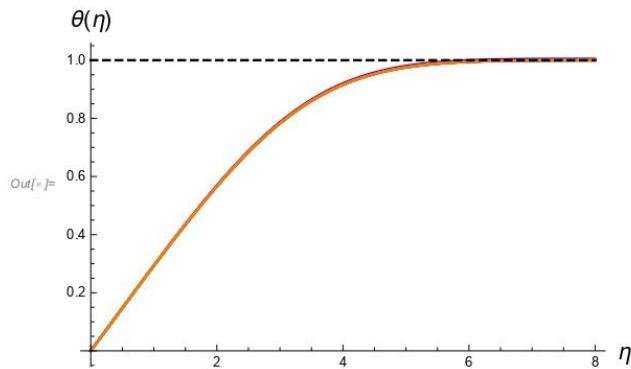
```

### Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 0.71$

```

In[ ]:= Table[auxA[cc] = sol4[ $\frac{71}{100}$ , cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
In[ ]:= Show[Plot[{(\theta[\eta\eta] /. auxA[6]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[7]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[8]),
(\theta[\eta\eta] /. auxA[9]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[10]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[20]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[30]),
(\theta[\eta\eta] /. auxA[40]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[50]), (\theta[\eta\eta] /. auxA[500])},
{\eta, 0, 8}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Style["\eta", 15], Style["\theta(\eta)", 15]},
PlotStyle -> {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
Plot[1, {x, 0, 8}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```

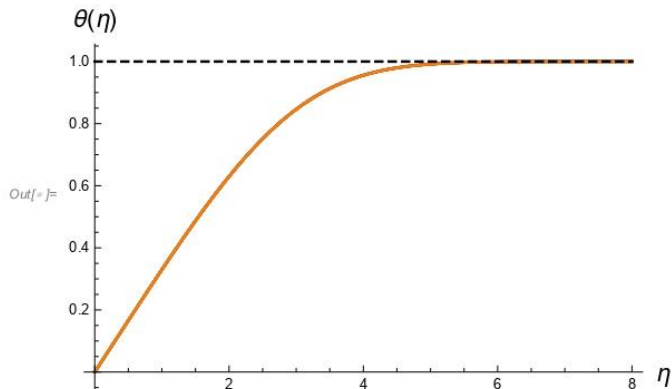


## Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 1$

```

In[*]:= Table[auxB[cc] = sol4[1, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
In[*]:= Show[Plot[{(theta[eta] /. auxB[6]), (theta[eta] /. auxB[7]), (theta[eta] /. auxB[8]),
  (theta[eta] /. auxB[9]), (theta[eta] /. auxB[10]), (theta[eta] /. auxB[20]), (theta[eta] /. auxB[30]),
  (theta[eta] /. auxB[40]), (theta[eta] /. auxB[50]), (theta[eta] /. auxB[500])},
  {eta, 0, 8}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Style["eta", 15], Style["theta(eta)", 15]},
  PlotStyle -> {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 8}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```

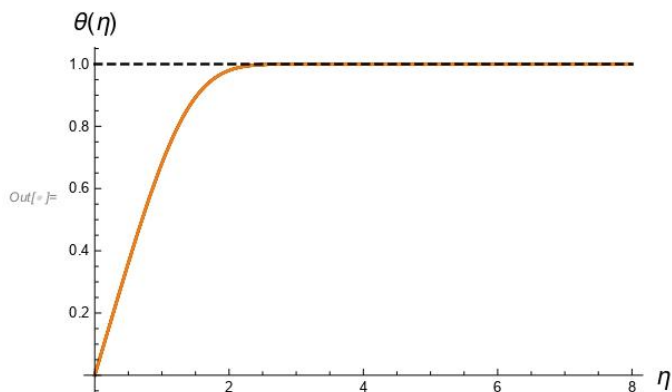


## Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 10$

```

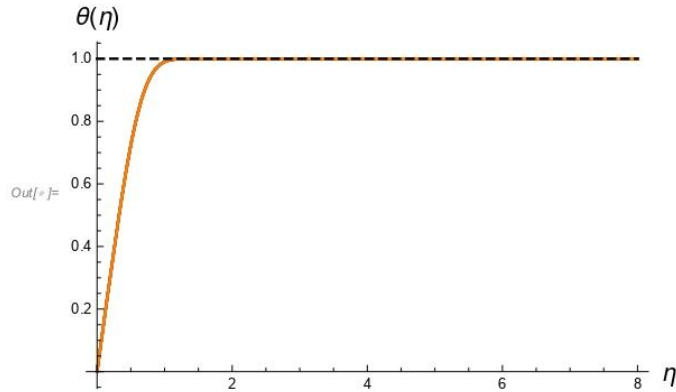
In[*]:= Table[auxC[cc] = sol4[10, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
In[*]:= Show[Plot[{(theta[eta] /. auxC[6]), (theta[eta] /. auxC[7]), (theta[eta] /. auxC[8]),
  (theta[eta] /. auxC[9]), (theta[eta] /. auxC[10]), (theta[eta] /. auxC[20]), (theta[eta] /. auxC[30]),
  (theta[eta] /. auxC[40]), (theta[eta] /. auxC[50]), (theta[eta] /. auxC[500])},
  {eta, 0, 8}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Style["eta", 15], Style["theta(eta)", 15]},
  PlotStyle -> {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 8}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



## Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 100$

```
In[ ]:= Table[auxD[cc] = sol4[100, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. auxD[6]), (θ[ηη] /. auxD[7]), (θ[ηη] /. auxD[8]),
  (θ[ηη] /. auxD[9]), (θ[ηη] /. auxD[10]), (θ[ηη] /. auxD[20]), (θ[ηη] /. auxD[30]),
  (θ[ηη] /. auxD[40]), (θ[ηη] /. auxD[50]), (θ[ηη] /. auxD[500])},
  {ηη, 0, 8}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
  PlotStyle → {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 8}, PlotStyle → {Black, Dashed}]]
```



## Valutazione di $\theta'(0)$ per diversi valori di $Pr$ con formula Blasius

### Pr da 0.7 a 1

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Chop[γγPr/NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[γγ]}],
  {x, 0, 6, 200}, WorkingPrecision → 22, MaxRecursion → 100]},
  Chop[γγPr/NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. f -> sol[γγ]], {x, 0, 6, 300},
  WorkingPrecision → 22, MaxRecursion → 100]}], {Pr,  $\frac{7}{10}$ , 1,  $\frac{1}{10}$ }]
Out[ ]:= {{0.7, 0.2926802226294508192952, 0.2926802226302914335201},
  {0.8, 0.3069168737471420988541, 0.3069168737471835550384},
  {0.9, 0.3199705178722409311036, 0.3199705178722421357109},
  {1., 0.3320573362152020195375, 0.3320573362152020476339}}
In[ ]:= f1 = {{0.7, 0.2926802226302914335201},
  {0.8, 0.3069168737471835550384},
  {0.9, 0.3199705178722421357109},
  {1., 0.3320573362152020476339}};
```

## Pr da 1 a 10

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}],  
{x, 0, 6, 200}, WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]},  
Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}], {x, 0, 6, 300},  
WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]}], {Pr, 1, 10, 1}]
```

```
Out[ ]:= {{1., 0.3320573362152020195375, 0.3320573362152020476339},  
{2., 0.4223081722951766838246, 0.4223081722951766838246},  
{3., 0.4850479710142935799140, 0.4850479710142935799140},  
{4., 0.5347873090726622607898, 0.5347873090726622607898},  
{5., 0.5766888905818526514421, 0.5766888905818526514421},  
{6., 0.6132578546355005975944, 0.6132578546355005975944},  
{7., 0.6459219790006931097938, 0.6459219790006931097938},  
{8., 0.6755811925315767311388, 0.6755811925315767311388},  
{9., 0.7028435285627045717372, 0.7028435285627045717372},  
{10., 0.7281413054678168048173, 0.7281413054678168048173}}
```

```
In[ ]:= f2 = {{1., 0.3320573362152020476339},  
{2., 0.4223081722951766838246},  
{3., 0.4850479710142935799140},  
{4., 0.5347873090726622607898},  
{5., 0.5766888905818526514421},  
{6., 0.6132578546355005975944},  
{7., 0.6459219790006931097938},  
{8., 0.6755811925315767311388},  
{9., 0.7028435285627045717372},  
{10., 0.7281413054678168048173}};
```

## Pr da 10 a 50

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}],  
{x, 0, 6, 200}, WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]},  
Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}], {x, 0, 6, 300},  
WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]}], {Pr, 10, 50, 10}]
```

```
Out[ ]:= {{10., 0.7281413054678168048173, 0.7281413054678168048173},  
{20., 0.9184020194812995390344, 0.9184020194812995390344},  
{30., 1.051693380838681297269, 1.051693380838681297269},  
{40., 1.157751202286900205623, 1.157751202286900205623},  
{50., 1.247287497099083942447, 1.247287497099083942447}}
```

```
In[ ]:= f3 = {{10., 0.7281413054678168048173},  
{20., 0.9184020194812995390344},  
{30., 1.051693380838681297269},  
{40., 1.157751202286900205623},  
{50., 1.247287497099083942447}};
```



### Pr da 50 a 100

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}],  
{x, 0, 6, 200}, WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]},  
Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}], {x, 0, 6, 300},  
WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]}], {Pr, 50, 100, 50}]  
Out[ ]:= {{50., 1.247287497099083942447, 1.247287497099083942447},  
{100., 1.571831753146078362150, 1.571831753146078362150}}  
In[ ]:= f4 = {{50., 1.247287497099083942447},  
{100., 1.571831753146078362150}};
```

### Pr da 500 a 1000

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}],  
{x, 0, 200}, WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]},  
Chop[ $\gamma\gamma^{Pr}$ /NIntegrate[Evaluate[f''[x]Pr /. {f -> sol[ $\gamma\gamma$ ]}], {x, 0, 300},  
WorkingPrecision -> 22, MaxRecursion -> 100]}], {Pr, 500, 1000, 500}]  
Out[ ]:= {{500., 2.688271662641460770481, 2.688271662641460770481},  
{1000., 3.387085295733371321588, 3.387085295733371321588}}  
In[ ]:= f5 = {{500., 2.688271662641460770481},  
{1000., 3.387085295733371321588}};
```

## Valutazione di $\theta'$ (0) per diversi valori di Pr con Pohlhausen

### Pr da 0.7 a 1

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Evaluate[0.334 N[Pr]1/3]}, {Pr, 7/10, 1, 1/10}]  
Out[ ]:= {{0.7, 0.29656}, {0.8, 0.310058}, {0.9, 0.322473}, {1., 0.334}}  
In[ ]:= fA = {{0.7, 0.29656},  
{0.8, 0.310058},  
{0.9, 0.322473},  
{1., 0.334}};
```

### Pr da 1 a 10

```
In[ ]:= Table[{N[Pr], Evaluate[0.334 N[Pr]1/3]}, {Pr, 1, 10, 1}]  
Out[ ]:= {{1., 0.334}, {2., 0.420814}, {3., 0.481711}, {4., 0.530192}, {5., 0.571132},  
{6., 0.606918}, {7., 0.638919}, {8., 0.668}, {9., 0.694748}, {10., 0.719581}}
```

```

In[*]:= FB = {{1., 0.334},
              {2., 0.420814},
              {3., 0.481711},
              {4., 0.530192},
              {5., 0.571132},
              {6., 0.606918},
              {7., 0.638919},
              {8., 0.668},
              {9., 0.694748},
              {10., 0.719581}};

```

### Pr da 10 a 50

```

In[*]:= Table[{N[Pr], Evaluate[0.334 N[Pr]^(1/3)]}, {Pr, 10, 50, 10}]
Out[*]:= {{10., 0.719581}, {20., 0.906615}, {30., 1.03782}, {40., 1.14226}, {50., 1.23047}}

```

```

In[*]:= FC = {{10., 0.719581},
              {20., 0.906615},
              {30., 1.03782},
              {40., 1.14226},
              {50., 1.23047}};

```

### Pr da 50 a 100

```

In[*]:= Table[{N[Pr], Evaluate[0.334 N[Pr]^(1/3)]}, {Pr, 50, 100, 50}]
Out[*]:= {{50., 1.23047}, {100., 1.55029}}

```

```

In[*]:= FD = {{50., 1.23047},
              {100., 1.55029}};

```

### Pr da 500 a 1000

```

In[*]:= Table[{N[Pr], Evaluate[0.334 N[Pr]^(1/3)]}, {Pr, 500, 1000, 500}]
Out[*]:= {{500., 2.65096}, {1000., 3.34}}

```

```

In[*]:= FE = {{500., 2.65096},
              {1000., 3.34}};

```



## Confronto dei due metodi di calcolo per $\theta'$ (0)

$In[ ]:=$  {f1, f2, f3, f4, f5}

```
Out[ ]:= {{0.7, 0.292680222630291433520}, {0.8, 0.306916873747183555038},
{0.9, 0.3199705178722421357109}, {1., 0.332057336215202047634}},
{{1., 0.332057336215202047634}, {2., 0.422308172295176683825},
{3., 0.485047971014293579914}, {4., 0.5347873090726622607898},
{5., 0.576688890581852651442}, {6., 0.613257854635500597594},
{7., 0.6459219790006931097938}, {8., 0.675581192531576731139},
{9., 0.7028435285627045717372}, {10., 0.728141305467816804817}},
{{10., 0.728141305467816804817}, {20., 0.918402019481299539034},
{30., 1.05169338083868129727}, {40., 1.15775120228690020562},
{50., 1.24728749709908394245}},
{{50., 1.24728749709908394245}, {100., 1.57183175314607836215}},
{{500., 2.68827166264146077048}, {1000., 3.38708529573337132159}}}
```

```
 $In[ ]:=$  f6 = {{0.7, 0.292680222630291433520},
{0.8, 0.306916873747183555038},
{0.9, 0.3199705178722421357109},
{1., 0.332057336215202047634},
{1., 0.332057336215202047634},
{2., 0.422308172295176683825},
{3., 0.485047971014293579914},
{4., 0.5347873090726622607898},
{5., 0.576688890581852651442},
{6., 0.613257854635500597594},
{7., 0.6459219790006931097938},
{8., 0.675581192531576731139},
{9., 0.7028435285627045717372},
{10., 0.728141305467816804817},
{10., 0.728141305467816804817},
{20., 0.918402019481299539034},
{30., 1.05169338083868129727},
{40., 1.15775120228690020562},
{50., 1.24728749709908394245},
{50., 1.24728749709908394245},
{100., 1.57183175314607836215},
{500., 2.68827166264146077048},
{1000., 3.38708529573337132159}};
```

$In[ ]:=$  {fA, fB, fC, fD, fE}

```
Out[ ]:= {{0.7, 0.29656}, {0.8, 0.310058}, {0.9, 0.322473}, {1., 0.334}},
{{1., 0.334}, {2., 0.420814}, {3., 0.481711}, {4., 0.530192}, {5., 0.571132},
{6., 0.606918}, {7., 0.638919}, {8., 0.668}, {9., 0.694748}, {10., 0.719581}},
{{10., 0.719581}, {20., 0.906615}, {30., 1.03782}, {40., 1.14226}, {50., 1.23047}},
{{50., 1.23047}, {100., 1.55029}}, {{500., 2.65096}, {1000., 3.34}}}
```

```

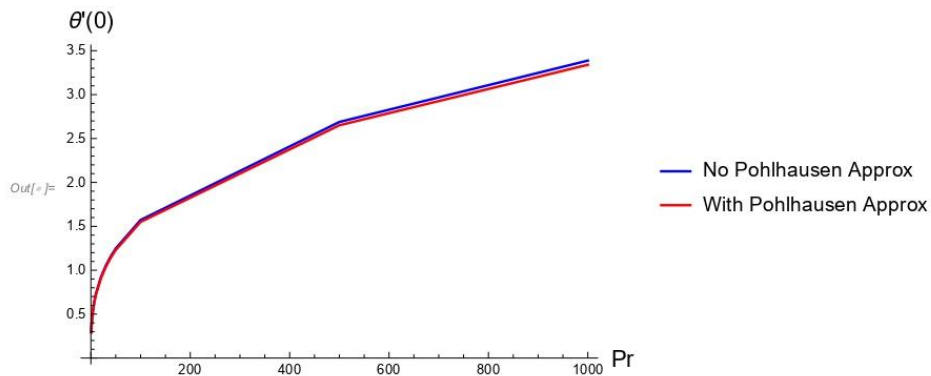
In[ ]:= fF = {{0.7, 0.29656},
             {0.8, 0.310058},
             {0.9, 0.322473},
             {1., 0.334},
             {1., 0.334},
             {2., 0.420814},
             {3., 0.481711},
             {4., 0.530192},
             {5., 0.571132},
             {6., 0.606918},
             {7., 0.638919},
             {8., 0.668},
             {9., 0.694748},
             {10., 0.719581},
             {10., 0.719581},
             {20., 0.906615},
             {30., 1.03782},
             {40., 1.14226},
             {50., 1.23047},
             {50., 1.23047},
             {100., 1.55029},
             {500., 2.65096},
             {1000., 3.34}};

```

```

In[ ]:= ListPlot[{f6, fF}, Joined -> True,
  AxesLabel -> {Style["Pr", 15], Style["θ' (θ)", 15]}, PlotRange -> All,
  PlotStyle -> {Blue, Red}, PlotLegends -> {"No Pohlhausen Approx", "With Pohlhausen Approx"}]

```



## Strato limite termico Blasius con termine di dissipazione

```

In[ ]:= sol1[Pr_, Ec_, NN_] :=
  NDSolve[{f[η] f''[η] + 2 f'''[η] == 0, θ'[η] +  $\frac{Pr}{2}$  f[η] × θ'[η] + Pr Ec (f'''[η])2 == 0,
    f[0] == 0, f'[0] == 0, f'[NN] == 1, θ[0] == 0, θ[NN] == 1},
    {f, θ}, {η, 0, NN}, WorkingPrecision -> 20, AccuracyGoal -> 15]

```

```
In[ ]:= Clear [Pr, Ec]
```

## Confronto calcolo $\theta'$ (0)

```
In[ ]:= Table[{Pr, Evaluate[ $\theta'$  [0] /. sol1[Pr, 0, 100]]}, {Pr, 0.7, 0.9, 0.1}]
Table[{Pr, Evaluate[ $\theta'$  [0] /. sol1[Pr, 0, 100]]}, {Pr, 1, 9, 1}]
Table[{Pr, Evaluate[ $\theta'$  [0] /. sol1[Pr, 0, 100]]}, {Pr, 10, 40, 10}]
Table[{Pr, Evaluate[ $\theta'$  [0] /. sol1[Pr, 0, 100]]}, {Pr, 50, 100, 50}]
Table[{Pr, Evaluate[ $\theta'$  [0] /. sol1[Pr, 0, 100]]}, {Pr, 500, 1000, 500}]

Out[ ]:= {{0.7, {0.29268}}, {0.8, {0.306917}}, {0.9, {0.319971}}}

Out[ ]:= {{1, {0.332057}}, {2, {0.422308}}, {3, {0.485048}}, {4, {0.534787}},
{5, {0.576689}}, {6, {0.613258}}, {7, {0.645922}}, {8, {0.675581}}, {9, {0.702844}}}}

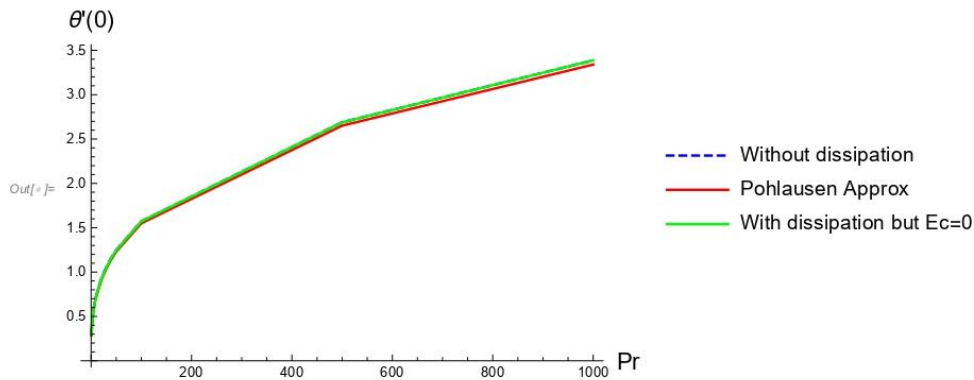
Out[ ]:= {{10, {0.728141}}, {20, {0.918402}}, {30, {1.05169}}, {40, {1.15775}}}}

Out[ ]:= {{50, {1.24729}}, {100, {1.57183}}}}

Out[ ]:= {{500, {2.68827}}, {1000, {3.38709}}}}

In[ ]:= f7 = {{0.7, 0.29268},
{0.8, 0.306917},
{0.9, 0.319971},
{1, 0.332057},
{2, 0.422308},
{3, 0.485048},
{4, 0.534787},
{5, 0.576689},
{6, 0.613258},
{7, 0.645922},
{8, 0.675581},
{9, 0.702844},
{10, 0.728141},
{20, 0.918402},
{30, 1.05169},
{40, 1.15775},
{50, 1.24729},
{100, 1.57183},
{500, 2.68827},
{1000, 3.38709}};
```

```
In[ ]:= ListPlot[{f6, fF, f7}, Joined → True, AxesLabel → {Style["Pr", 15], Style["θ'(0)", 15]},
  PlotRange → All, PlotStyle → {{Blue, Dashed}, Red, Green},
  PlotLegends → {"Without dissipation", "Pohlhausen Approx", "With dissipation but Ec=0"}]
```

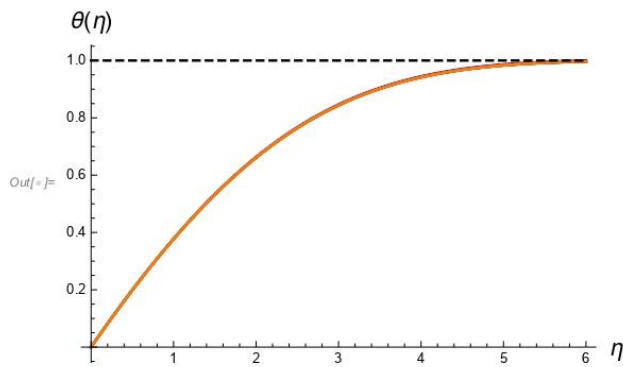


Calcolo  $\theta(\eta)$  con  $Pr = 0.71$

$Ec=1$

```
In[ ]:= Table[aux11[cc] = sol1[ $\frac{71}{100}$ , 1, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
```

```
In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. aux11[6]), (θ[ηη] /. aux11[7]), (θ[ηη] /. aux11[8]),
  (θ[ηη] /. aux11[9]), (θ[ηη] /. aux11[10]), (θ[ηη] /. aux11[20]), (θ[ηη] /. aux11[30]),
  (θ[ηη] /. aux11[40]), (θ[ηη] /. aux11[50]), (θ[ηη] /. aux11[500])},
  {η, 0, 6}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
  PlotStyle → {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Dashed}]]
```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[( $\theta$ [cc] /. aux11[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{0.156171928719874}, {0.0585243363440660},
          {0.0168442590338536}, {0.00357626237095144}, {0.000549901557858264},
          {0.0000607139119593664}, {4.78774022667977  $\times 10^{-6}$ }, {2.68645035793881  $\times 10^{-7}$ }}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[( $\theta$ [8] /. aux11[cc]) - ( $\theta$ [8] /. aux11[500])] / ( $\theta$ [8] /. aux11[500]), 0],
  15], {cc, {8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{0.0000607175983126011}, {4.78770371736053  $\times 10^{-6}$ },
          {2.68638925206124  $\times 10^{-7}$ }, {4.58042717495274  $\times 10^{-16}$ }, {4.58036539924869  $\times 10^{-16}$ },
          {4.58039103460087  $\times 10^{-16}$ }, {4.58026035404409  $\times 10^{-16}$ }}

```

## Ec=10

```

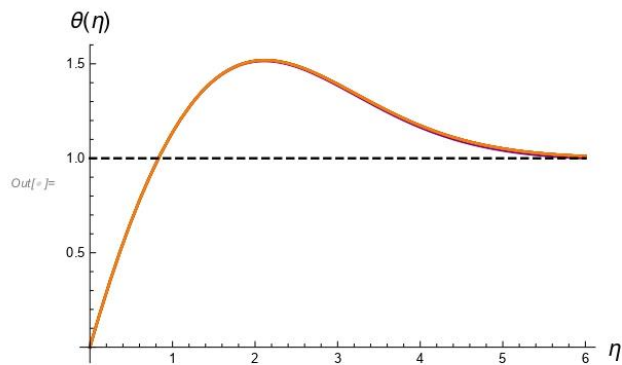
In[ ]:= Table[aux12[cc] = sol1[ $\frac{71}{100}$ , 10, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[Plot[{( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[6]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[7]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[8]),
  ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[9]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[10]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[20]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[30]),
  ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[40]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[50]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux12[500])},
  { $\eta$ , 0, 6}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  PlotStyle -> {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 6}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



## "Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[( $\theta$ [cc] /. aux12[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{0.392648100922305}, {0.173369703008144},
          {0.0517550874307994}, {0.0110403966739216}, {0.00169818327490787},
          {0.000187489007522743}, {0.0000147769427854898}, {8.21024055794529  $\times 10^{-7}$ }}

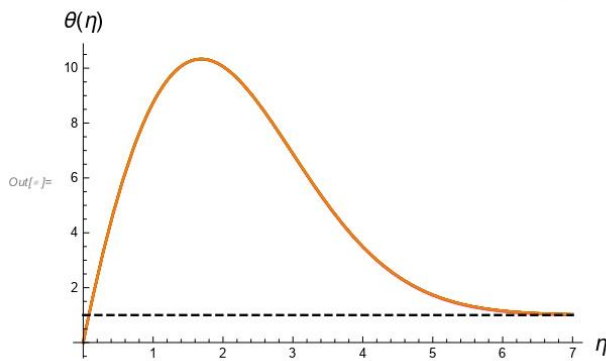
```

```
In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[( $\theta$ [9] /. aux12[cc]) - ( $\theta$ [9] /. aux12[500])] / ( $\theta$ [9] /. aux12[500]), 0],
  15], {cc, {9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{0.0000147853618840796}, {8.29622584481027  $\times 10^{-7}$ }, {1.04974959871954  $\times 10^{-11}$ },
  {1.04335207845347  $\times 10^{-11}$ }, {1.04116563287376  $\times 10^{-11}$ }, {1.03994774625558  $\times 10^{-11}$ }}
```

**Ec = 100**

```
In[ ]:= Table[aux13[cc] = sol1[ $\frac{71}{100}$ , 100, cc], {cc, {7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
```

```
In[ ]:= Show[Plot[{( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[7]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[8]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[9]),
  ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[10]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[20]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[30]),
  ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[40]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[50]), ( $\theta$ [ $\eta\eta$ ] /. aux13[500])},
  { $\eta$ , 0, 7}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  PlotStyle -> {Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 7}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]
```



"Convergenza"

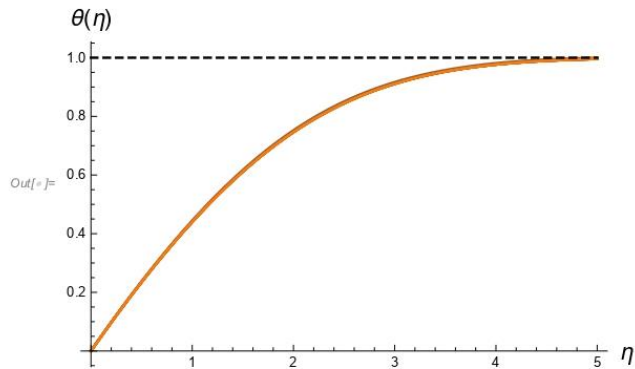
```
In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[( $\theta$ [cc] /. aux13[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{5.88084842748699}, {2.49231012528421},
  {0.737748579072949}, {0.157207012647320}, {0.0241790572564354},
  {0.00266954384009347}, {0.000210450235242237}, {0.0000117439860932516}}
```

```
In[ ]:= Table[N[
  Rationalize[Abs[( $\theta$ [10] /. aux13[cc]) - ( $\theta$ [10] /. aux13[500])] / ( $\theta$ [10] /. aux13[500]), 0],
  15], {cc, {10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{0.0000118122971865769}, {1.05692865296676  $\times 10^{-11}$ },
  {1.05679133974075  $\times 10^{-11}$ }, {1.05677983204256  $\times 10^{-11}$ }, {1.05658039088352  $\times 10^{-11}$ }}
```

## Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 1$

**Ec=1**

```
In[ ]:= Table[aux21[cc] = sol1[1, 1, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
In[ ]:= Show[
  Plot[{{(θ[ηη] /. aux21[5]), (θ[ηη] /. aux21[6]), (θ[ηη] /. aux21[7]), (θ[ηη] /. aux21[8]),
    (θ[ηη] /. aux21[9]), (θ[ηη] /. aux21[10]), (θ[ηη] /. aux21[20]), (θ[ηη] /. aux21[30]),
    (θ[ηη] /. aux21[40]), (θ[ηη] /. aux21[50]), (θ[ηη] /. aux21[500])},
    {ηη, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]]
```



**"Convergenza"**

```
In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux21[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{0.0888289350319709}, {0.0232301991712349},
  {0.00426481980700271}, {0.000514091428150292}, {0.0000392011363465033},
  {1.86286472941023 × 10-6}, {5.48992571179073 × 10-8}, {1.11710964390520 × 10-9}}

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[7] /. aux21[cc]) - (θ[7] /. aux21[500])] / (θ[7] /. aux21[500]), 0],
  15], {cc, {7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{0.0000392025749377533}, {1.86432862236149 × 10-6},
  {5.48459253580288 × 10-8}, {1.01271219072079 × 10-9}, {3.22197942114546 × 10-12},
  {1.37019427363058 × 10-12}, {7.11741822168689 × 10-13}, {4.13450280962283 × 10-13}}
```

**Ec = 10**

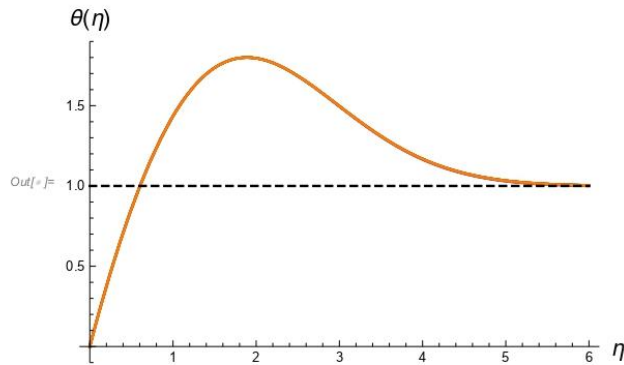
```
In[ ]:= Table[aux22[cc] = sol1[1, 10, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
```



```

In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. aux22[6]), (θ[ηη] /. aux22[7]), (θ[ηη] /. aux22[8]),
  (θ[ηη] /. aux22[9]), (θ[ηη] /. aux22[10]), (θ[ηη] /. aux22[20]), (θ[ηη] /. aux22[30]),
  (θ[ηη] /. aux22[40]), (θ[ηη] /. aux22[50]), (θ[ηη] /. aux22[500])},
  {ηη, 0, 6}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
  PlotStyle → {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Dashed}]]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux22[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.497310642975973}, {0.168033921998587},
  {0.0334746830607372}, {0.00410321618692681}, {0.000313533595030784},
  {0.0000148826817795369}, {4.19066325601457 × 10-7}, {1.11821280561418 × 10-8}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[8] /. aux22[cc]) - (θ[8] /. aux22[500])] / (θ[8] /. aux22[500]), 0],
  15], {cc, {8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.0000149015545055853}, {4.38188444605719 × 10-7},
  {7.93665447774050 × 10-9}, {1.52989296949079 × 10-12}, {1.51061372348592 × 10-12},
  {1.50256462766871 × 10-12}, {1.50929927731753 × 10-12}}

```

**Ec = 100**

```

In[ ]:= Table[aux23[cc] = sol1[1, 100, cc], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

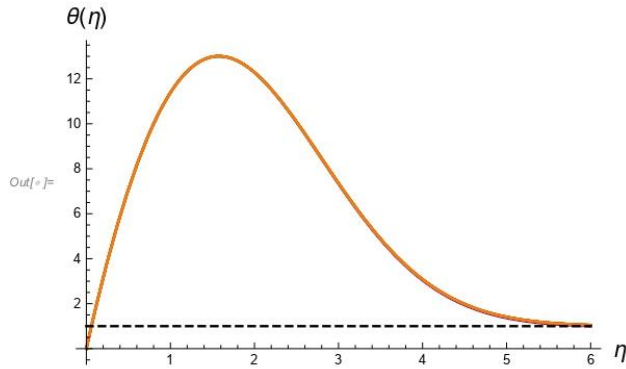
```



```

In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. aux23[6]), (θ[ηη] /. aux23[7]), (θ[ηη] /. aux23[8]),
  (θ[ηη] /. aux23[9]), (θ[ηη] /. aux23[10]), (θ[ηη] /. aux23[20]), (θ[ηη] /. aux23[30]),
  (θ[ηη] /. aux23[40]), (θ[ηη] /. aux23[50]), (θ[ηη] /. aux23[500])}],
  {η, 0, 6}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
  PlotStyle → {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 6}, PlotStyle → {Black, Dashed}]]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux23[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{6.35870650913046}, {2.08067524478889}, {0.410869813243985},
  {0.0502763945085183}, {0.00384098295577218}, {0.000182440616703965},
  {5.26131435584152 × 10-6}, {9.20220402686481 × 10-9}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[9] /. aux23[cc]) - (θ[9] /. aux23[500])] / (θ[9] /. aux23[500]), 0],
  15], {cc, {9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{5.36775038992817 × 10-6}, {9.72595238140975 × 10-8}, {1.41838781287462 × 10-11},
  {1.41831832192382 × 10-11}, {1.41845641464253 × 10-11}, {1.41726701835842 × 10-11}}

```

## Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 10$

$Ec = 0.01$

```

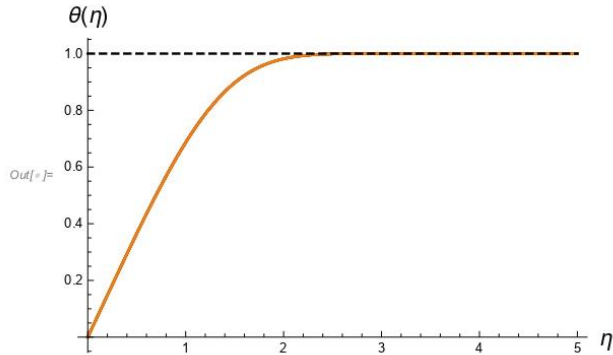
In[ ]:= Table[aux31[cc] = sol1[10, 1/100, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[{(θ[ηη] /. aux31[5]), (θ[ηη] /. aux31[6]), (θ[ηη] /. aux31[7]), (θ[ηη] /. aux31[8]),
    (θ[ηη] /. aux31[9]), (θ[ηη] /. aux31[10]), (θ[ηη] /. aux31[20]), (θ[ηη] /. aux31[30]),
    (θ[ηη] /. aux31[40]), (θ[ηη] /. aux31[50]), (θ[ηη] /. aux31[500])},
    {ηη, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux31[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.000156246438136800}, {0.0000156187866756244},
  {5.15344909545676 × 10-7}, {6.46460624884236 × 10-9}, {7.48548114393090 × 10-10},
  {7.85764100422110 × 10-10}, {7.89822238792096 × 10-10}, {7.89812319851614 × 10-10}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[5] /. aux31[cc]) - (θ[5] /. aux31[500])] / (θ[5] /. aux31[500]), 0],
  15], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{5.15919041067097 × 10-7}, {1.09730959120264 × 10-8},
  {2.22650271475795 × 10-10}, {8.36117960306788 × 10-11},
  {7.90481792859307 × 10-11}, {6.54791412691371 × 10-11}, {1.73096277356501 × 10-11},
  {7.76174468753659 × 10-12}, {4.37043693534380 × 10-12}, {2.79191548448786 × 10-12}}

```

**Ec = 1**

```

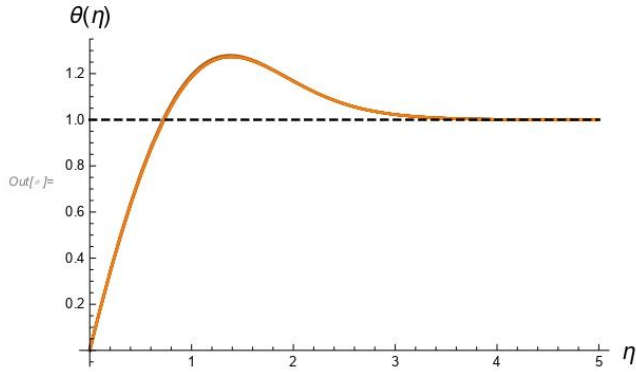
In[ ]:= Table[aux32[cc] = sol1[10, 1, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[{(θ[ηη] /. aux32[5]), (θ[ηη] /. aux32[6]), (θ[ηη] /. aux32[7]), (θ[ηη] /. aux32[8]),
    (θ[ηη] /. aux32[9]), (θ[ηη] /. aux32[10]), (θ[ηη] /. aux32[20]), (θ[ηη] /. aux32[30]),
    (θ[ηη] /. aux32[40]), (θ[ηη] /. aux32[50]), (θ[ηη] /. aux32[500])},
    {η, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}},
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux32[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.0226602852069133}, {0.00156240245852323},
  {0.0000516145540707523}, {7.26327390175897 × 10-7}, {5.09972743195522 × 10-9},
  {1.00001427956754 × 10-9}, {9.92033696621890 × 10-10}, {9.90921848511410 × 10-10}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[6] /. aux32[cc]) - (θ[6] /. aux32[500])] / (θ[6] /. aux32[500]), 0],
    15], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{7.25306603377262 × 10-7}, {4.78178558480969 × 10-9}, {3.38786383112625 × 10-11},
  {5.41380601917930 × 10-12}, {5.16674496075732 × 10-12}, {1.30892389214680 × 10-12},
  {5.81744872132424 × 10-13}, {3.26540035057096 × 10-13}, {2.08300985135204 × 10-13}}

```

**Ec = 5**

```

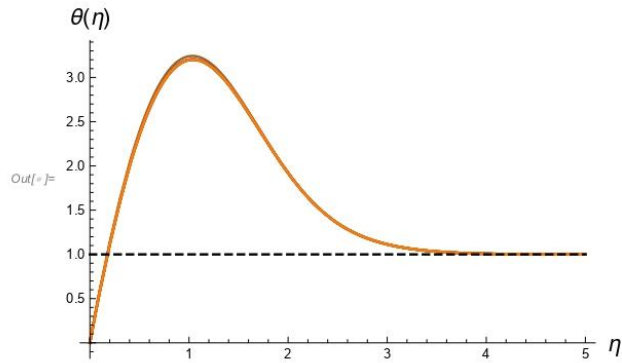
Table[aux33[cc] = sol1[10, 5, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[{{(θ[ηη] /. aux33[5]), (θ[ηη] /. aux33[6]), (θ[ηη] /. aux33[7]), (θ[ηη] /. aux33[8]),
    (θ[ηη] /. aux33[9]), (θ[ηη] /. aux33[10]), (θ[ηη] /. aux33[20]), (θ[ηη] /. aux33[30]),
    (θ[ηη] /. aux33[40]), (θ[ηη] /. aux33[50]), (θ[ηη] /. aux33[500])}},
    {η, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}},
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux33[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.113585687364530}, {0.00781202589098328},
  {0.000258068334699836}, {3.62791558378400 × 10-6}, {2.18133493794132 × 10-8},
  {1.31400233127193 × 10-9}, {1.27058050342012 × 10-9}, {1.26858702584580 × 10-9}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[6] /. aux33[cc]) - (θ[6] /. aux33[500])] / (θ[6] /. aux33[500]), 0],
    15], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{3.62663501704142 × 10-6}, {2.39627817921720 × 10-8}, {2.09377908376922 × 10-10},
  {4.68386274222328 × 10-12}, {5.54515999180742 × 10-14}, {3.56241901331736 × 10-14},
  {1.58054470431801 × 10-14}, {8.86138866991618 × 10-15}, {5.69513770408775 × 10-15}}

```

Calcolo  $\theta(\eta)$  con  $Pr = 100$

$Ec = 0.001$

```

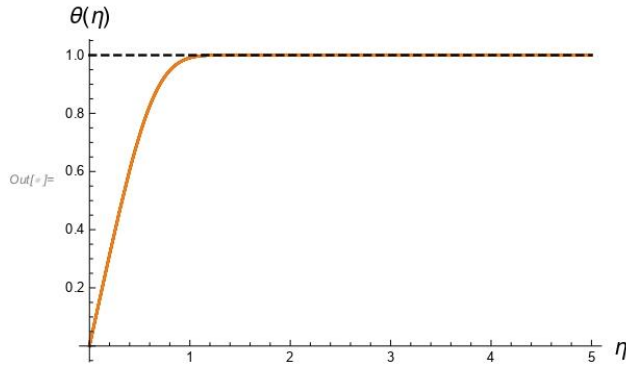
In[ ]:= Table[aux41[cc] = sol1[100, 1/1000, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[{(θ[ηη] /. aux41[5]), (θ[ηη] /. aux41[6]), (θ[ηη] /. aux41[7]), (θ[ηη] /. aux41[8]),
    (θ[ηη] /. aux41[9]), (θ[ηη] /. aux41[10]), (θ[ηη] /. aux41[20]), (θ[ηη] /. aux41[30]),
    (θ[ηη] /. aux41[40]), (θ[ηη] /. aux41[50]), (θ[ηη] /. aux41[500])},
    {ηη, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux41[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{0.0000168200073916851}, {1.21043280605619 × 10-6},
  {2.36040687945483 × 10-8}, {1.71224336084143 × 10-8}, {1.77053660827266 × 10-8},
  {1.77143129288293 × 10-8}, {1.77145623168778 × 10-8}, {1.77103621628820 × 10-8}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[5] /. aux41[cc]) - (θ[5] /. aux41[500])] / (θ[5] /. aux41[500]), 0],
    15], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{4.13189040463732 × 10-8}, {8.32584115691691 × 10-10},
  {1.89491116044026 × 10-11}, {3.24612705619686 × 10-11},
  {2.66543206291494 × 10-11}, {2.74995699104390 × 10-11}, {6.29392967590723 × 10-13},
  {5.40832991776964 × 10-12}, {3.47630276913092 × 10-12}, {8.89895912746632 × 10-13}}

```

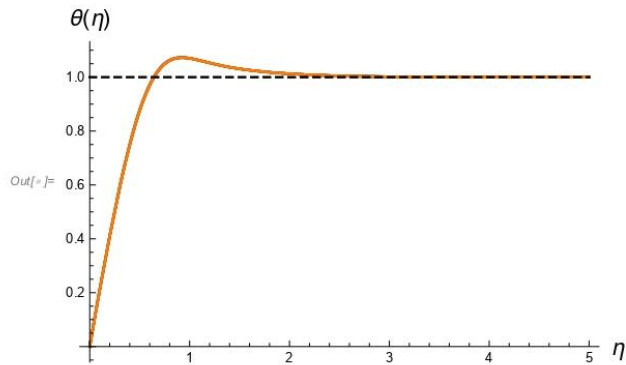
**Ec = 0.1**

```

In[ ]:= Table[aux42[cc] = sol1[100, 1/10, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```
In[ ]:= Show[
  Plot[{(θ[ηη] /. aux42[5]), (θ[ηη] /. aux42[6]), (θ[ηη] /. aux42[7]), (θ[ηη] /. aux42[8]),
    (θ[ηη] /. aux42[9]), (θ[ηη] /. aux42[10]), (θ[ηη] /. aux42[20]), (θ[ηη] /. aux42[30]),
    (θ[ηη] /. aux42[40]), (θ[ηη] /. aux42[50]), (θ[ηη] /. aux42[500])},
    {ηη, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]]
```



"Convergenza"

```
In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux42[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
Out[ ]:= {{0.00168377080064597}, {0.000122814426681644},
  {4.13169302651219 × 10-6}, {5.88861981276603 × 10-8}, {7.08852040194845 × 10-10},
  {3.76354040403767 × 10-10}, {3.73883997301823 × 10-10}, {3.75415663577991 × 10-10}}
```

```
In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[6] /. aux42[cc]) - (θ[6] /. aux42[500])] / (θ[6] /. aux42[500]), 0],
  15], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
Out[ ]:= {{5.85393144711774 × 10-8}, {3.78214401602825 × 10-10}, {8.13591691223362 × 10-12},
  {7.84368914849756 × 10-12}, {7.06757873274823 × 10-12}, {3.21558906070480 × 10-12},
  {2.89487748793014 × 10-12}, {1.56751354381495 × 10-12}, {1.81810630661722 × 10-12}}
```

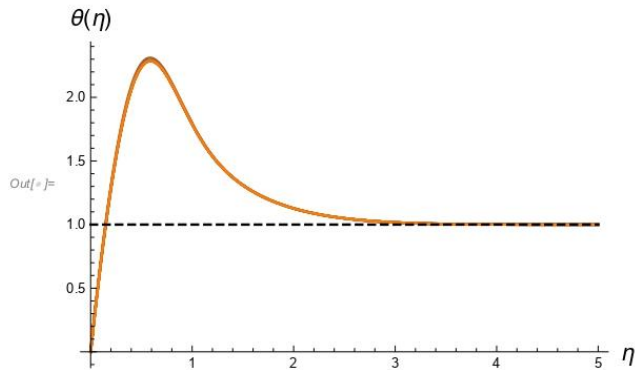
**Ec = 1**

```
In[ ]:= Table[aux43[cc] = sol1[100, 1, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[{(θ[ηη] /. aux43[5]), (θ[ηη] /. aux43[6]), (θ[ηη] /. aux43[7]), (θ[ηη] /. aux43[8]),
    (θ[ηη] /. aux43[9]), (θ[ηη] /. aux43[10]), (θ[ηη] /. aux43[20]), (θ[ηη] /. aux43[30]),
    (θ[ηη] /. aux43[40]), (θ[ηη] /. aux43[50]), (θ[ηη] /. aux43[500])},
    {η, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}],
  Plot[1, {x, 0, 5}, PlotStyle → {Black, Dashed}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux43[500]) - 1], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.0168377154200733}, {0.00122814338697832},
  {0.0000413153565964336}, {5.87221954191141 × 10-7}, {5.44632882863136 × 10-9},
  {2.12971681284320 × 10-9}, {2.12231219683063 × 10-9}, {2.12412333093381 × 10-9}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[6] /. aux43[cc]) - (θ[6] /. aux43[500])] / (θ[6] /. aux43[500]), 0],
  15], {cc, {6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{5.85092096979024 × 10-7}, {3.87767554060514 × 10-9}, {3.35311009380189 × 10-11},
  {4.29498946437418 × 10-13}, {1.65470238464200 × 10-13}, {4.17570654211435 × 10-14},
  {1.01873830281875 × 10-14}, {9.02958676862373 × 10-15}, {9.27844166792892 × 10-15}}

```

## Calcolo Ec soglia

Ec soglia - Pr=0.71

```

In[ ]:= Table[Ec[cc] = sol1[ $\frac{71}{100}$ , cc, 1000],
  {cc, 320144977/100000000, 320144980/100000000, 1/100000000}];

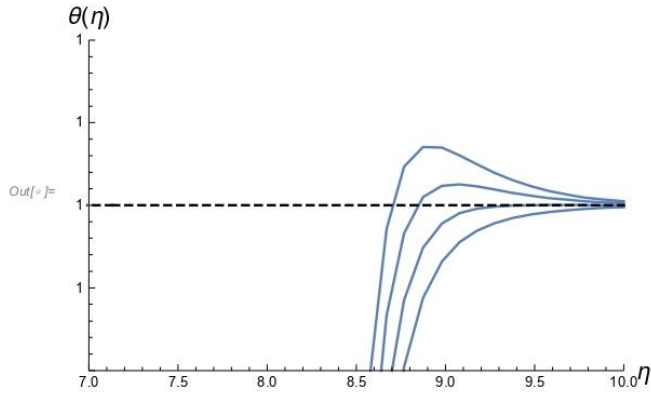
```



```

In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta\eta]$  /.
  Table[Ec[cc], {cc, 320144977/100000000, 320144980/100000000, 1/100000000}],
  { $\eta\eta$ , 0, 10}, PlotRange -> {{7, 10}, { $1 - 10^{-13}$ ,  $1 + 10^{-13}$ }},
  AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```

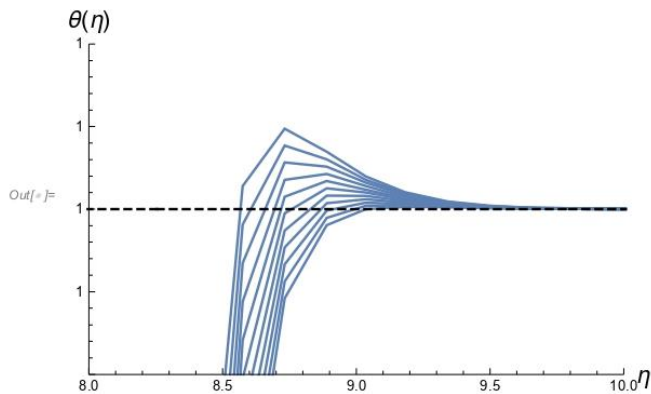


### Ec soglia - Pr=1.5

```

In[ ]:= Table[Ec4[cc] = sol1[cc, 1, 1000], {cc, 14662/10000, 14663/10000, 1/100000}];
In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta\eta]$  /. Table[Ec4[cc], {cc, 14662/10000, 14663/10000, 1/100000}],
  { $\eta\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{8, 10}, { $1 - 10^{-13}$ ,  $1 + 10^{-13}$ }},
  AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Ec soglia - Pr=0.5

```

In[ ]:= Table[Ec5[cc] = sol1[1/2, cc, 1000], {cc, 4907/1000, 4908/1000, 1/10000}];

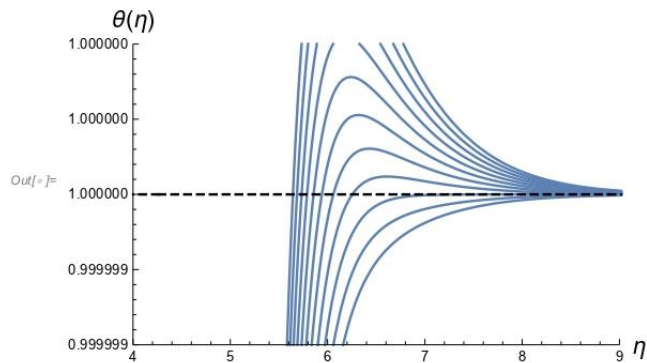
```



```

In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta\eta]$  /. Table[Ec5[cc], {cc, 4907/1000, 4908/1000, 1/10000}],
{ $\eta\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{4, 9}, {1 - 10-6, 1 + 10-6}},
WorkingPrecision -> 55, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```

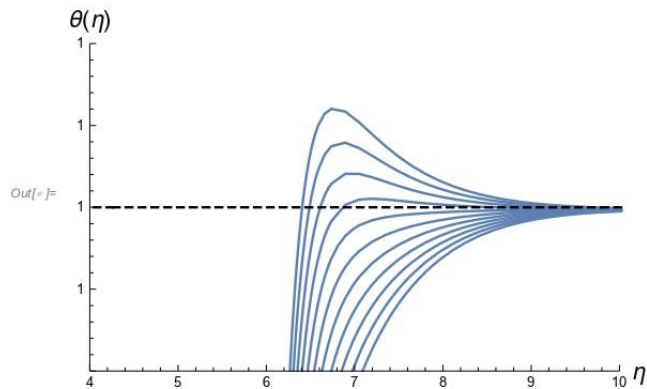


### Ec soglia - Pr=0.4

```

In[ ]:= Table[Ec6[cc] = sol1[4/10, cc, 1000], {cc, 63389/10000, 63390/10000, 1/100000}];
In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta\eta]$  /. Table[Ec6[cc], {cc, 63389/10000, 63390/10000, 1/100000}],
{ $\eta\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{4, 10}, {1 - 10-7, 1 + 10-7}},
WorkingPrecision -> 55, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Ec soglia - Pr=0.3

```

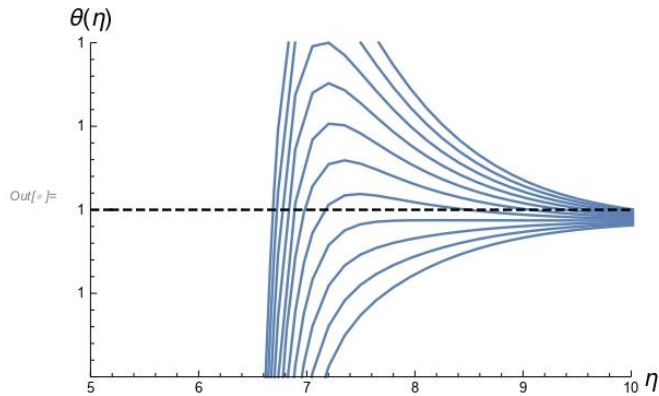
In[ ]:= Table[Ec7[cc] = sol1[3/10, cc, 1000], {cc, 871775/100000, 871776/100000, 1/1000000}];

```

```

In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta\eta]$  /. Table[Ec7[cc], {cc, 871775/100000, 871776/100000, 1/1000000}],
  { $\eta\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{5, 10}, { $1 - 10^{-8}$ ,  $1 + 10^{-8}$ }},
  WorkingPrecision -> 55, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```

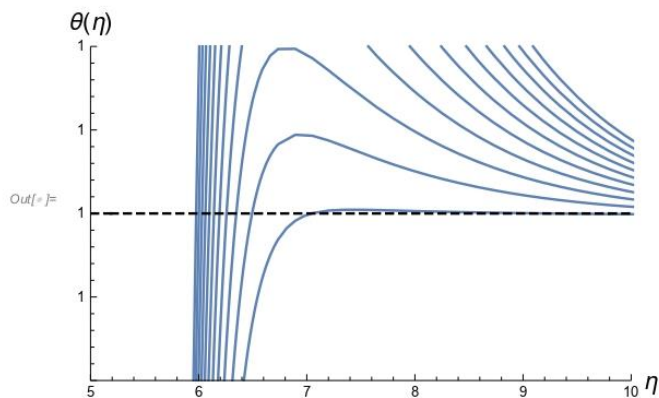


### Ec soglia - Pr = 0.2

```

In[ ]:= Table[Ec8[cc] = sol1[2/10, cc, 1000], {cc, 134651/10000, 134652/10000, 1/100000}];
In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta\eta]$  /. Table[Ec8[cc], {cc, 134651/10000, 134652/10000, 1/100000}],
  { $\eta\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{5, 10}, { $1 - 10^{-7}$ ,  $1 + 10^{-7}$ }},
  WorkingPrecision -> 55, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Ec soglia - Pr = 0.1

```

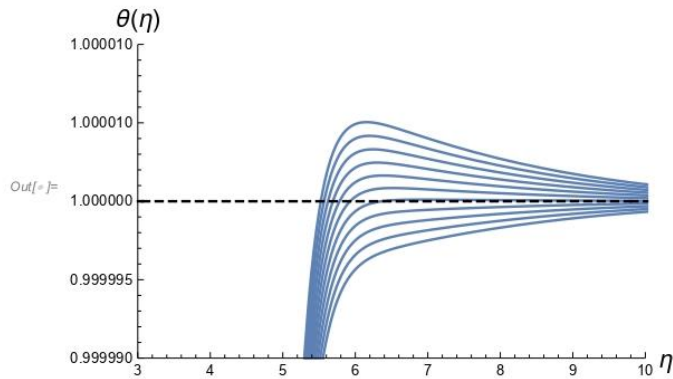
In[ ]:= Table[Ec9[cc] = sol1[1/10, cc, 1000], {cc, 27688/1000, 27689/1000, 1/100000}];

```

```

In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta]$ ] /. Table[Ec9[cc], {cc, 27688/1000, 27689/1000, 1/10000}],
  { $\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{3, 10}, {1 - 10-5, 1 + 10-5}},
  WorkingPrecision -> 55, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```

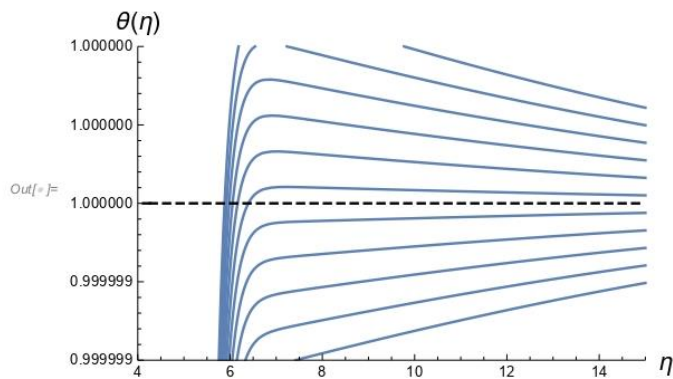


### Ec soglia - Pr = 0.01

```

In[ ]:= Table[Ec10[cc] = sol1[1/100, cc, 1000], {cc, 283559/1000, 283560/1000, 1/10000}];
In[ ]:= Show[Plot[ $\theta[\eta]$ ] /. Table[Ec10[cc], {cc, 283559/1000, 283560/1000, 1/10000}],
  { $\eta$ , 0, 15}, PlotRange -> {{4, 15}, {1 - 10-6, 1 + 10-6}},
  WorkingPrecision -> 55, AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 15}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Ec soglia - Pr = 1

```

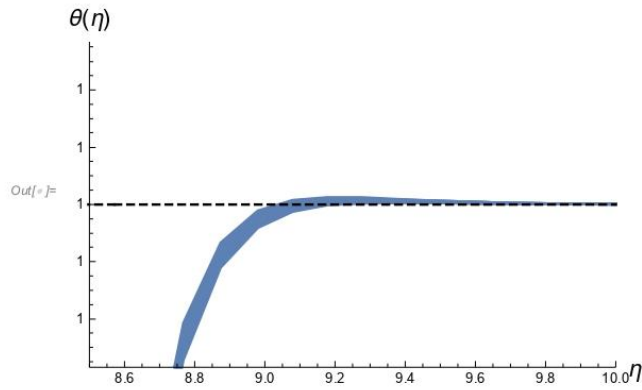
In[ ]:= Table[Ec1[cc] = sol1[1, cc, 1000],
  {cc, 20000001/10000000, 20000002/10000000, 1/100000000}];

```

```

In[ ]:= Show[Plot[
   $\theta[\eta]$  /. Table[Ec1[cc], {cc, 20000001/10000000, 20000002/10000000, 1/100000000}],
  { $\eta$ , 0, 10}, PlotRange -> {{8.5, 10}, {1 - 10-13.245, 1 + 10-13.245}},
  AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Ec soglia - Pr = 10

```

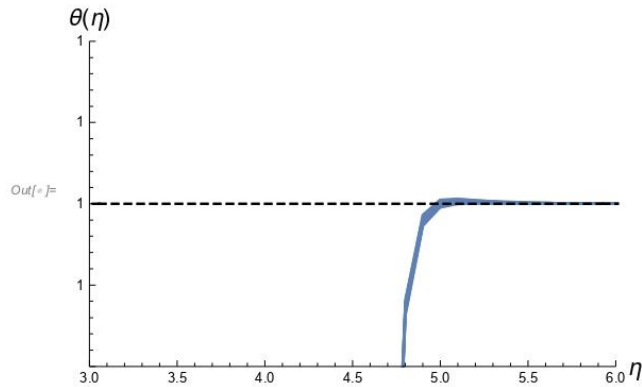
In[ ]:= Table[Ec2[cc] = sol1[10, cc, 1000],
  {cc, 1/100000000000, 10/100000000000, 1/100000000000}];

```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[ $\theta[\eta]$  /. Table[Ec2[cc], {cc, 1/100000000000, 10/100000000000, 1/100000000000}],
  { $\eta$ , 0, 10}, PlotRange -> {{3, 6}, {1 - 10-13, 1 + 10-13}},
  AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

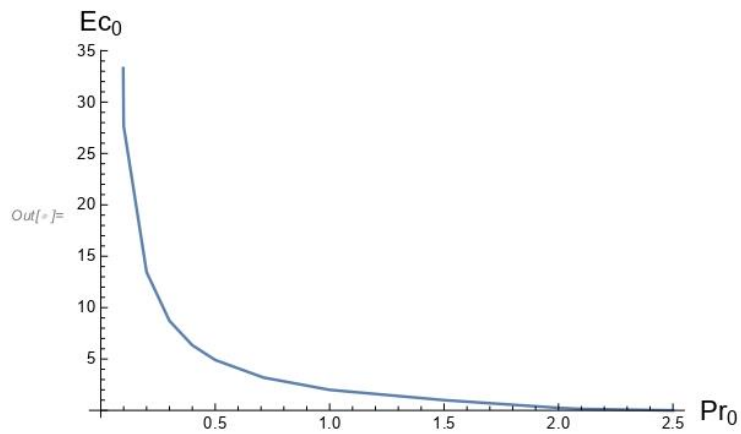
```



## Grafico Ec soglia-Pr soglia

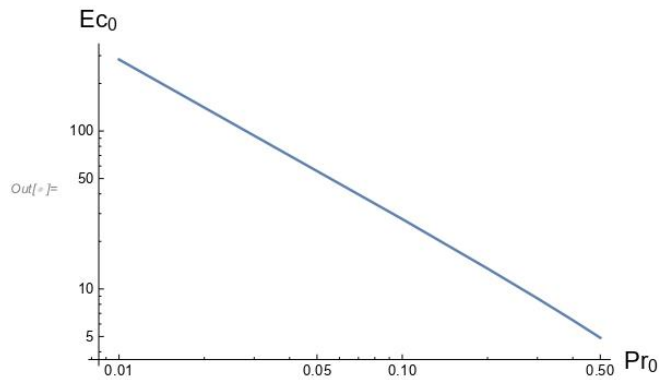
```
In[ ]:= f8 = {{ $\frac{1}{100}$ , 283.559},  
             { $\frac{1}{10}$ , 27.688},  
             { $\frac{2}{10}$ , 13.465},  
             { $\frac{3}{10}$ , 8.7177},  
             { $\frac{4}{10}$ , 6.339},  
             { $\frac{5}{10}$ , 4.907},  
             { $\frac{71}{100}$ , 3.2014497},  
             {1, 2.0000001},  
             { $\frac{3}{2}$ , 1},  
             {2, 0.245},  
             { $\frac{21}{10}$ , 0.140},  
             { $\frac{25}{10}$ ,  $10^{-8}$ }};
```

```
In[ ]:= ListPlot[f8, Joined → True, AxesLabel → {Style["Pr0", 15], Style["Ec0", 15]}]
```



```
In[ ]:= f9 = {{ $\frac{1}{100}$ , 283.559},
             { $\frac{1}{10}$ , 27.688},
             { $\frac{2}{10}$ , 13.465},
             { $\frac{3}{10}$ , 8.7177},
             { $\frac{4}{10}$ , 6.339},
             { $\frac{5}{10}$ , 4.907}};
```

```
In[ ]:= ListLogLogPlot[f9, Joined -> True, AxesLabel -> {Style["Pr0", 15], Style["Ec0", 15]}]
```



### Calcolo $\theta(\eta)$ per $Pr \rightarrow 0$

```
In[ ]:= sol3[Γ_, NN_] := NDSolve[{f[η] f''[η] + 2 f'''[η] == 0,
  θ'[η] + Γ (f''[η])2 == 0, f[0] == 0, f'[0] == 0, f'[NN] == 1, θ[0] == 0, θ[NN] == 1},
  {f, θ}, {η, 0, NN}, WorkingPrecision -> 20, AccuracyGoal -> 15]
```

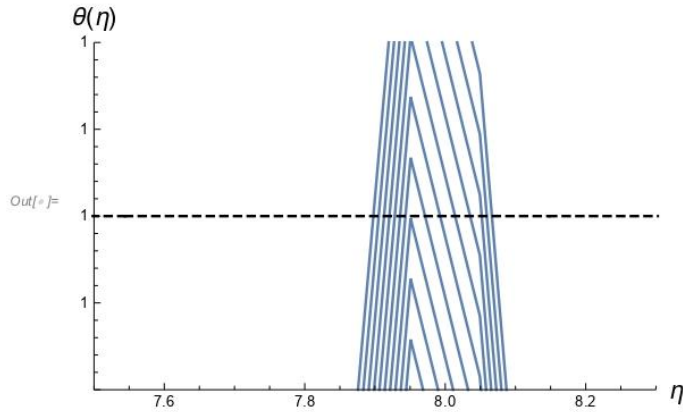
### Valutazione $\Gamma$ di soglia con metodo grafico

```
In[ ]:= Table[S1[cc] = sol3[cc, 1000],
  {cc, 284 292 977 637 / 100 000 000 000, 284 292 977 638 / 100 000 000 000, 1 / 1 000 000 000 000}];
```

```

In[ ]:= Show[Plot[ $\theta(\eta)$  /. Table[S1[cc],
  {cc, 284292977637/100000000000, 284292977638/100000000000, 1/100000000000}],
  { $\eta$ , 0, 10}, PlotRange -> {{7.5, 8.3}, {1 - 10-12, 1 + 10-12}},
  AxesLabel -> {Style[" $\eta$ ", 15], Style[" $\theta(\eta)$ ", 15]},
  Plot[1, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



```

In[ ]:= N[ $\frac{284292977637}{100000000000}$ ]

```

Out[ ]:= 2.84293

```

In[ ]:=  $\Gamma_0 = 2.84292977637$ 

```

Out[ ]:= 2.84293

### Valutazione $\Gamma$ di soglia con integrale

```

In[ ]:= solAux := NDSolve[{f[ $\eta$ ] f''[ $\eta$ ] + 2 f'[ $\eta$ ] == 0, f[0] == 0, f'[0] == 0, f'[100] == 1},
  {f}, { $\eta$ , 0, 10}, WorkingPrecision -> 20, AccuracyGoal -> 15];

```

```

In[ ]:= ddfSol = f'' /. solAux[[1]];

```

```

In[ ]:= int1[p_?NumericQ] := NIntegrate[ddfSol[s] * ddfSol[s], {s, p, 10}];

```

```

In[ ]:=  $\Gamma_0 = 1/NIntegrate[int1[pp], {pp, 0, 10}]$ 

```

Out[ ]:= 2.84293

### Calcolo $\theta(\eta)$ con diversi $\Gamma$

```

In[ ]:= sol[x_, gamma_] := gamma * NIntegrate[int1[pp], {pp, 0, x}];

```

```

In[ ]:= zz = Table[{x, sol[x, 2.842929251279928 - 1]}, {x, 0, 10, 1}];

```

```

In[ ]:= zz2 = Table[{x, sol[x, 2.842929251279928]}, {x, 0, 10, 1}];

```

```

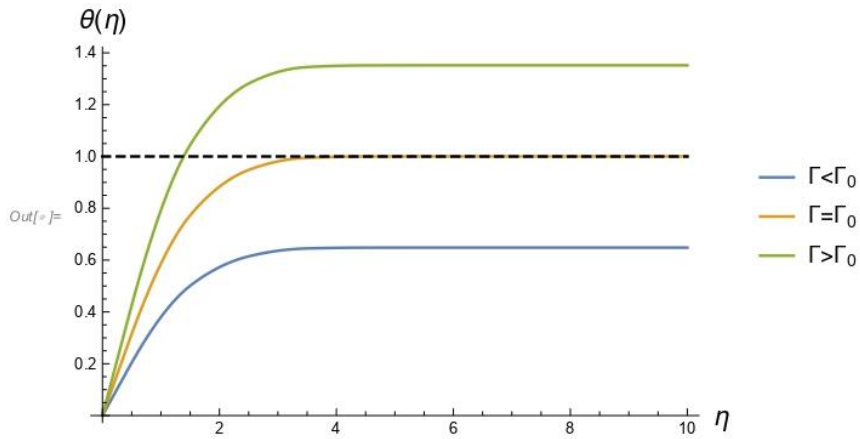
In[ ]:= zz3 = Table[{x, sol[x, 2.842929251279928 + 1]}, {x, 0, 10, 1}];

```

```

In[ ]:= Show[ListPlot[{zz, zz2, zz3}, Joined -> True, PlotRange -> All,
  InterpolationOrder -> 2, PlotLegends -> {"Γ<Γ₀", "Γ=Γ₀", "Γ>Γ₀"},
  AxesLabel -> {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]}],
Plot[1, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Errore percentuale

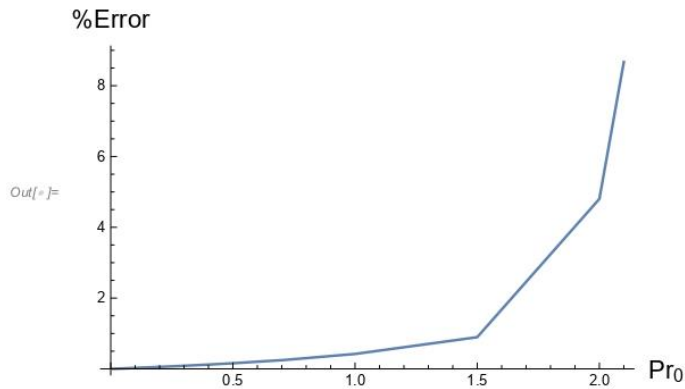
```

In[ ]:= f11 = {{1/100, 0.002588448},
  {1/10, 0.026773251},
  {2/10, 0.055673887},
  {3/10, 0.087033574},
  {4/10, 0.121205938},
  {5/10, 0.15872418},
  {71/100, 0.250722898},
  {1, 0.421464817},
  {3/2, 0.895286518},
  {2, 4.801897503},
  {21/10, 8.669829171}};

```



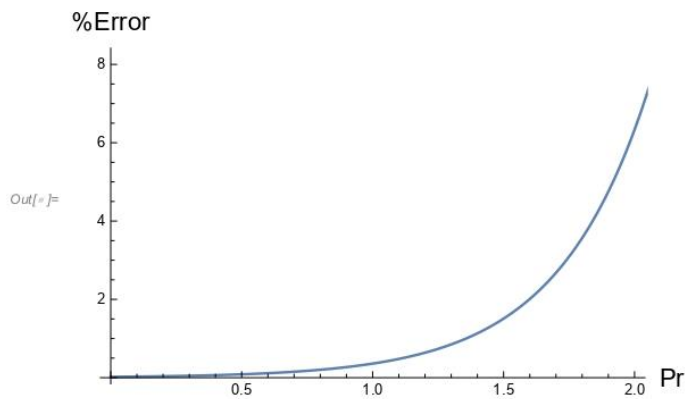
```
In[ ]:= ListPlot[f11, Joined → True, AxesLabel → {Style["Pr0", 15], Style["%Error", 15]}]
```



```
In[ ]:= esp[Pr_] := 0.0204 E2.8689 Pr;
```

```
In[ ]:= zz4 = Table[{x, esp[x]}, {x, 0, 10,  $\frac{1}{100}$ }]
```

```
In[ ]:= Show[ListPlot[zz4, Joined → True], PlotRange → {{0, 2}, {0, 8}},  
AxesLabel → {Style["Pr", 15], Style["%Error", 15]}]
```



### Calcolo $\theta(\eta)$ per $Pr \rightarrow \infty$

```
In[ ]:= solAux2 := NDSolve[{f[η] f''[η] + 2 f'''[η] == 0, f[0] == 0, f'[0] == 0, f'[100] == 1},  
{f}, {η, 0, 10}, WorkingPrecision → 20, AccuracyGoal → 15];
```

```
In[ ]:= ddfSol2 = f'' /. solAux2[[1]];
```

```
In[ ]:= ddfSol3 = f /. solAux2[[1]];
```

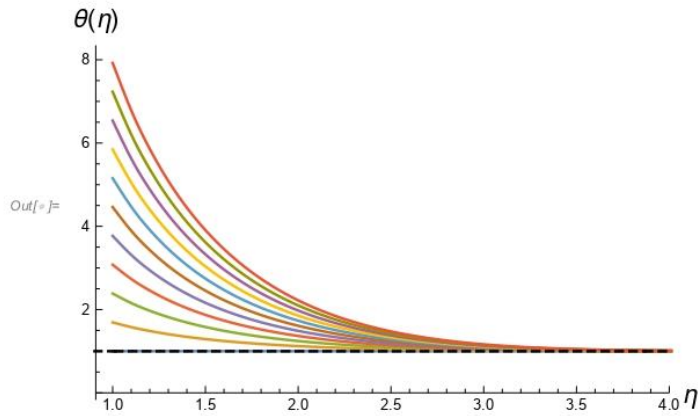
```
In[ ]:= sol8[Ec_, p_] := 1 + 2 Ec NIntegrate[ddfSol2[s]  $\frac{ddfSol2[s]}{ddfSol3[s]}$ , {s, p, 10}];
```

```
In[ ]:= ff1 = Table[{dd, sol8[cc, dd]}, {cc, 0, 10, 1}, {dd, 1, 10,  $\frac{1}{10}$ }]
```

```

In[ ]:= Show[ListPlot[ff1, Joined -> True, PlotRange -> {{1/1.1, 4}, All},
  InterpolationOrder -> 2, AxesLabel -> {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]}],
  Plot[1, {x, 0, 10}, PlotStyle -> {Black, Dashed}]]

```



### Calcolo $\theta(\eta)$ per $Ec \rightarrow \infty$

```

In[ ]:= sol2[Pr_, NN_] :=
  NDSolve[{f[η] f''[η] + 2 f'''[η] == 0, θ'[η] + Pr/2 f[η] × θ'[η] + Pr (f''[η])^2 == 0,
    f[0] == 0, f'[0] == 0, f'[NN] == 1, θ[0] == 0, θ[NN] == 0},
    {f, θ}, {η, 0, NN}, WorkingPrecision -> 20, AccuracyGoal -> 15]

```

```

In[ ]:= Clear[Pr]

```

### Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 0.71$

```

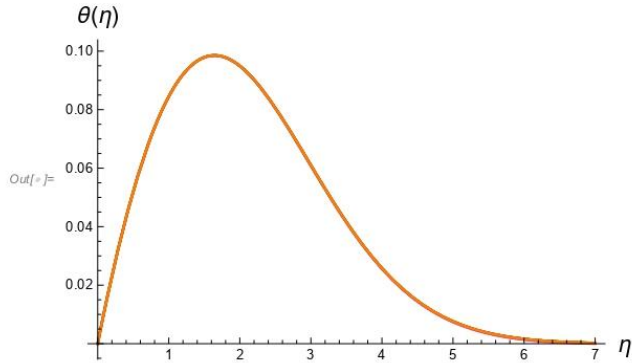
In[ ]:= Table[aux51[cc] = sol2[71/100, cc], {cc, {7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. aux51[7]), (θ[ηη] /. aux51[8]), (θ[ηη] /. aux51[9]),
  (θ[ηη] /. aux51[10]), (θ[ηη] /. aux51[20]), (θ[ηη] /. aux51[30]),
  (θ[ηη] /. aux51[40]), (θ[ηη] /. aux51[50]), (θ[ηη] /. aux51[500])},
  {ηη, 0, 7}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
  PlotStyle → {Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux51[500])], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.0609800041475172}, {0.0257660053178825},
  {0.00762215058499309}, {0.00162407420552237}, {0.000249788183339667},
  {0.0000275790813218442}, {2.17484092223218 × 10-6}, {1.22059512237967 × 10-7}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[8] /. aux51[cc]) - (θ[8] /. aux51[500])] / (θ[8] /. aux51[500]), 0],
  15], {cc, {8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.99998958754106}, {0.0788516345656825},
  {0.00442439025665528}, {1.85826700183658 × 10-11}, {1.85821910534220 × 10-11},
  {1.85822315148186 × 10-11}, {1.85816323731602 × 10-11}}

```

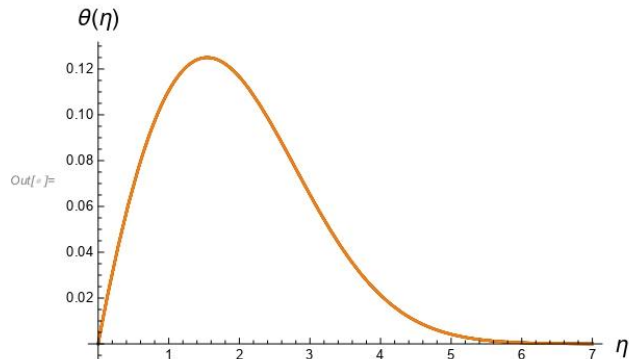
### Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 1$

```

In[ ]:= Table[aux52[cc] = sol2[1, cc], {cc, {7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```
In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. aux52[7]), (θ[ηη] /. aux52[8]), (θ[ηη] /. aux52[9]),
(θ[ηη] /. aux52[10]), (θ[ηη] /. aux52[20]), (θ[ηη] /. aux52[30]),
(θ[ηη] /. aux52[40]), (θ[ηη] /. aux52[50]), (θ[ηη] /. aux52[500])},
{ηη, 0, 7}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
PlotStyle → {Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}]]
```



"Convergenza"

```
In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux52[500])], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]
```

```
Out[ ]:= {{0.0651266214791184}, {0.0212515711806906},
{0.00419328022334889}, {0.000513036318645567}, {0.0000391948854806540},
{1.86275782710170 × 10-6}, {5.48055097771866 × 10-8}, {1.02472015849946 × 10-9}}
```

```
In[ ]:= Table[
N[Rationalize[Abs[(θ[7] /. aux52[cc]) - (θ[7] /. aux52[500])] / (θ[7] /. aux52[500]), 0],
15], {cc, {7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]
```

```
Out[ ]:= {{0.999999173570533}, {0.0475483487645624},
{0.00139820105953404}, {0.0000253307513038013}, {8.51368256725067 × 10-13},
{8.51372203972052 × 10-13}, {8.51421650034602 × 10-13}, {8.51094906574662 × 10-13}}
```

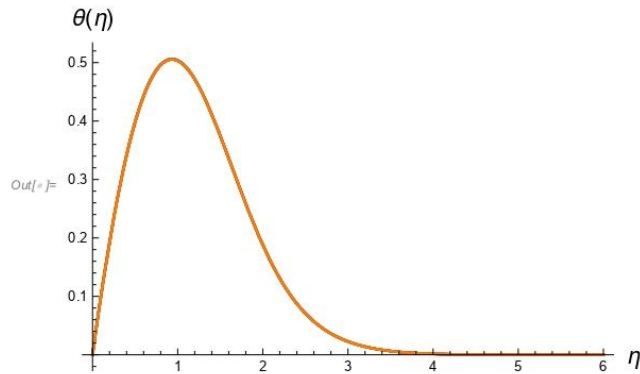
### Calcolo $\theta(\eta)$ con $Pr = 10$

```
In[ ]:= Table[aux53[cc] = sol2[10, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];
```

```

In[ ]:= Show[Plot[{(θ[ηη] /. aux53[6]), (θ[ηη] /. aux53[7]), (θ[ηη] /. aux53[8]),
  (θ[ηη] /. aux53[9]), (θ[ηη] /. aux53[10]), (θ[ηη] /. aux53[20]), (θ[ηη] /. aux53[30]),
  (θ[ηη] /. aux53[40]), (θ[ηη] /. aux53[50]), (θ[ηη] /. aux53[500])},
  {ηη, 0, 6}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
  PlotStyle → {Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux53[500])], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}]

```

```

Out[ ]:= {{0.0227313500733033}, {0.00156240543944485},
  {0.0000516129990118199}, {7.24951015519541 × 10-7}, {3.73604656320706 × 10-9},
  {3.63486632972214 × 10-10}, {3.72596278885663 × 10-10}, {3.72604066203337 × 10-10}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[5] /. aux53[cc]) - (θ[5] /. aux53[500])] / (θ[5] /. aux53[500]), 0],
  15], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}]

```

```

Out[ ]:= {{1.00000285626317}, {0.0215674860331910}, {0.000671906079091858},
  {0.0000283544045202104}, {8.28756753203022 × 10-7}, {1.50116365879947 × 10-8},
  {2.62318547815637 × 10-16}, {3.63769382395193 × 10-16},
  {3.98152549403964 × 10-16}, {3.84625655103924 × 10-16}}

```

Calcolo  $\theta(\eta)$  con Pr = 100

```

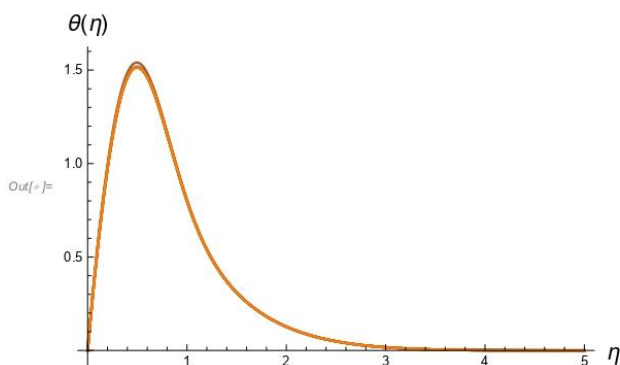
In[ ]:= Table[aux54[cc] = sol2[100, cc], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 500}}];

```

```

In[ ]:= Show[
  Plot[{(θ[ηη] /. aux54[5]), (θ[ηη] /. aux54[6]), (θ[ηη] /. aux54[7]), (θ[ηη] /. aux54[8]),
    (θ[ηη] /. aux54[9]), (θ[ηη] /. aux54[10]), (θ[ηη] /. aux54[20]), (θ[ηη] /. aux54[30]),
    (θ[ηη] /. aux54[40]), (θ[ηη] /. aux54[50]), (θ[ηη] /. aux54[500])},
    {η, 0, 5}, PlotRange → All, AxesLabel → {Style["η", 15], Style["θ(η)", 15]},
    PlotStyle → {Brown, Purple, Magenta, Pink, Gray, Green, Cyan, Blue, Yellow, Red, Orange}]

```



"Convergenza"

```

In[ ]:= Table[N[Rationalize[Abs[(θ[cc] /. aux54[500])], 0], 15], {cc, {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}}

```

```

Out[ ]:= {{0.0168377150633806}, {0.00122814165947338},
  {0.0000413134914307488}, {5.85343960537439 × 10-7}, {3.56740565688157 × 10-9},
  {2.47297424612628 × 10-10}, {2.39902954436217 × 10-10}, {2.39896621929123 × 10-10}}

```

```

In[ ]:= Table[
  N[Rationalize[Abs[(θ[5] /. aux54[cc]) - (θ[5] /. aux54[500])] / (θ[5] /. aux54[500]), 0],
    15], {cc, {5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50}}

```

```

Out[ ]:= {{0.999993634309640}, {0.0216520608737030},
  {0.000670619058149577}, {0.0000282442153919624}, {8.25616216255572 × 10-7},
  {1.49547649298542 × 10-8}, {6.35463264178133 × 10-14}, {6.36338309486408 × 10-14},
  {6.34536594134232 × 10-14}, {6.32573315619404 × 10-14}}

```

### Calcolo del θmax

```

In[ ]:= FindMaximum[sol2[ $\frac{71}{100}$ , 500][[1, 2, 2]][a], a][[1]]

```

```

Out[ ]:= 0.098548

```

```

In[ ]:= FindMaximum[sol2[1, 500][[1, 2, 2]][a], a][[1]]

```

```

Out[ ]:= 0.125

```

```

In[ ]:= FindMaximum[sol2[10, 500][[1, 2, 2]][a], a][[1]]

```

```

Out[ ]:= 0.505527

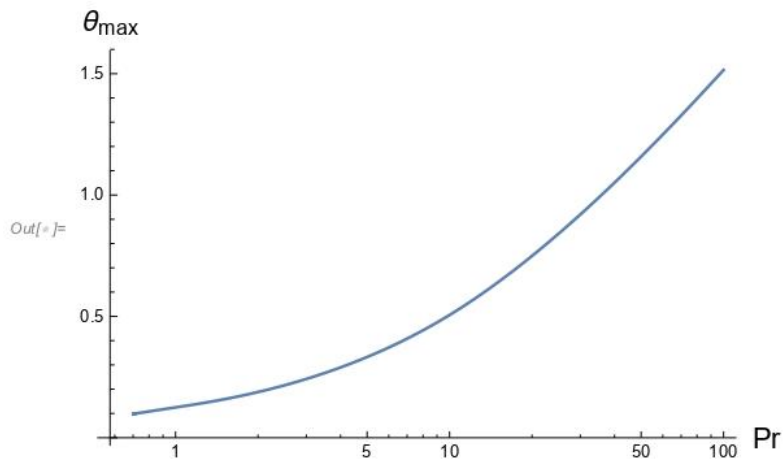
```

```
In[*]:= FindMaximum[sol2[100, 500][[1, 2, 2]][a], a][[1]]
```

```
Out[*]:= 1.51513
```

```
In[*]:= f9 = {{ $\frac{71}{100}$ , 0.09854798055716807`},  
             {1, 0.12499999995271757`},  
             {10, 0.5055270291272764`},  
             {100, 1.515134803320318`}};
```

```
In[*]:= ListLogLinearPlot[f9, Joined → True, InterpolationOrder → 3,  
                          AxesLabel → {Style["Pr", 15], Style[" $\theta_{\max}$ ", 15]}]
```



## $\theta'(0)$ per diversi Ec e Pr

```

In[*]:= Table[{Pr, Ec, Evaluate[\theta'[0] /. sol1[Pr, Ec, 100]}],
  {Pr, { $\frac{71}{100}$ , 1, 10, 100}}, {Ec, { $\frac{1}{1000}$ ,  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{10}$ , 1, 5, 10, 100}}]
Out[*]:= {{{ $\frac{71}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$ , {0.2942887096374463483}}, { $\frac{71}{100}$ ,  $\frac{1}{100}$ , {0.2954029513597263400}},
  { $\frac{71}{100}$ ,  $\frac{1}{10}$ , {0.3065453686320879804}}, { $\frac{71}{100}$ , 1, {0.4179695414135579804}},
  { $\frac{71}{100}$ , 5, {0.913188087068516704}}, { $\frac{71}{100}$ , 10, {1.532211269145392523}},
  { $\frac{71}{100}$ , 100, {12.67462854654966660}}, {{1,  $\frac{1}{1000}$ , {0.3322233648856069288}},
  {1,  $\frac{1}{100}$ , {0.3337176228949599968}}, {1,  $\frac{1}{10}$ , {0.3486602030271817402}},
  {1, 1, {0.4980860043134349866}}, {1, 5, {1.162200676751934095}},
  {1, 10, {1.992344017277740868}}, {1, 100, {16.93492414695027871}}},
  {{10,  $\frac{1}{1000}$ , {0.729219532289537638}}, {10,  $\frac{1}{100}$ , {0.738923573712469315}},
  {10,  $\frac{1}{10}$ , {0.835963987806292722}}, {10, 1, {1.806368128639508977}},
  {10, 5, {6.11927542112766439}}, {10, 10, {11.51040953730307553}},
  {10, 100, {108.5508236210373445}}, {{100,  $\frac{1}{1000}$ , {1.577826365463757783}},
  {100,  $\frac{1}{100}$ , {1.631777874868983705}}, {100,  $\frac{1}{10}$ , {2.171292970250334743}},
  {100, 1, {7.56644392368025310}}, {100, 5, {31.54489260635596008}},
  {100, 10, {61.5179534605303693}}, {100, 100, {601.033048824056712}}}]

```

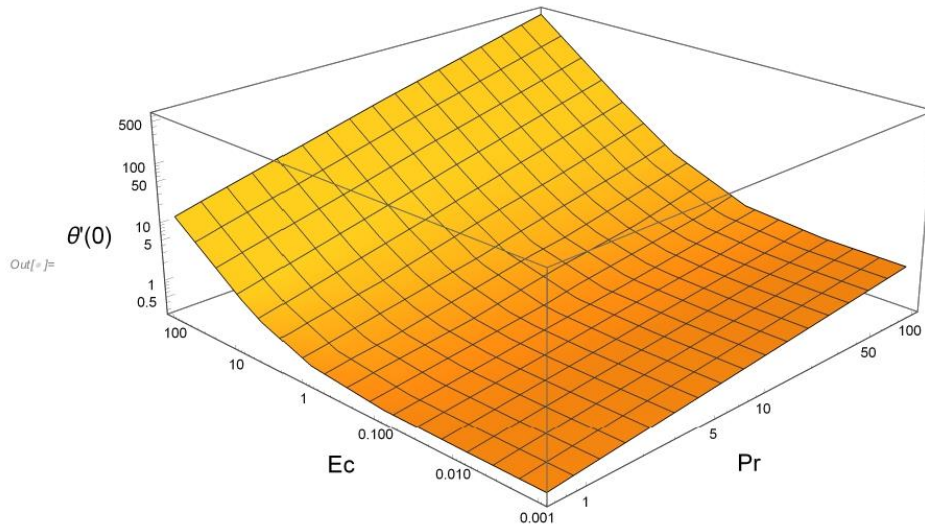


```

ln[*]:= f9 = {{71/100, 1/1000, 0.2942887096374463483},
             {71/100, 1/100, 0.2954029513597263400},
             {71/100, 1/10, 0.3065453686320879804},
             {71/100, 1, 0.4179695414135579804},
             {71/100, 5, 0.913188087068516704},
             {71/100, 10, 1.532211269145392523},
             {71/100, 100, 12.67462854654966660},
             {1, 1/1000, 0.3322233648856069288},
             {1, 1/100, 0.3337176228949599968},
             {1, 1/10, 0.3486602030271817402},
             {1, 1, 0.4980860043134349866},
             {1, 5, 1.162200676751934095},
             {1, 10, 1.992344017277740868},
             {1, 100, 16.93492414695027871},
             {10, 1/1000, 0.729219532289537638},
             {10, 1/100, 0.738923573712469315},
             {10, 1/10, 0.835963987806292722},
             {10, 1, 1.806368128639508977},
             {10, 5, 6.11927542112766439},
             {10, 10, 11.51040953730307553},
             {10, 100, 108.5508236210373445},
             {100, 1/1000, 1.577826365463757783},
             {100, 1/100, 1.631777874868983705},
             {100, 1/10, 2.171292970250334743},
             {100, 1, 7.56644392368025310},
             {100, 5, 31.54489260635596008},
             {100, 10, 61.5179534605303693},
             {100, 100, 601.033048824056712}};

```

```
In[ ]:= ListPlot3D[f9, PlotRange -> All,  
  AxesLabel -> {Style["Pr", 15], Style["Ec", 15], Style[" $\theta'$  ( $\theta$ )", 15]},  
  ScalingFunctions -> {"Log", "Log", "Log"}]
```



# Bibliografia

- [1] S. A. Korpela. "On the viscous dissipation in the boundary layer of a high Prandtl number fluid in laminar flow over a flat plate". *Journal of Applied Mathematics and Physics*. Vol. 36, pp 624. **1985**.
- [2] R. Narasimha, S. S. Vasantha. "Laminar Boundary Layer on a Flat Plate at High Prandtl Number". *Journal of Applied Mathematics and Physics*. Vol. 17, pp 585-588. **1966**.
- [3] E. Magyari. "The moving plate thermometer". *International Journal of Thermal Sciences, Elsevier, Amsterdam*. Vol. 47, pp 1438-1440. **2008**.
- [4] Von K. Pohlhausen. "Zur näherungsweise integration der differentialgleichung der laminaren grenzschicht". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. Vol. 4, pp 252-288. **1921**.
- [5] E. Eckert, O. Drewitz. "The Heat transfer to a plate in flow at high speed". *National Advisory Committee for Aeronautics, Technical memorandum n. 1045, Washington*. Vol. 11, No. 3, pp 5-12. **1940**.
- [6] Von K. Pohlhausen. "Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung". *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. Vol. 1, pp 115-121. **1921**.
- [7] G. W. Morgan, A. C. Pipkin, W. H. Warner. "On heat transfer in laminar boundary layer flows of liquids having a very small Prandtl number". *Journal of Aerospace Sciences*. Vol. 35, pp 172. **1958**.
- [8] A. Fage, V. M. Falkner. "Modern developments in fluid mechanics". *S. Goldstein*. Dover, New York. **1965**.
- [9] M. J. Lighthill. "Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. Vol. 202, pp 359. **1950**.