

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il principio di D'Alembert e il principio dei lavori virtuali

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Alice Casali

Sessione Unica
Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è l'analisi del principio di D'Alembert e il confronto con il principio dei lavori virtuali. Nell'elaborato viene anche proposto un inquadramento storico, che si sviluppa nel contesto delle applicazioni.

L'importanza del principio di D'Alembert in meccanica classica risiede, oltre che nell'utilizzo che se ne può fare nelle applicazioni, nell'originalità della visione che introduce, che consiste nel riguardare la dinamica dei sistemi meccanici come caso particolare della statica dei corpi. Più precisamente tale principio permette di tradurre un generico problema di dinamica, ossia relativo al moto di un qualunque corpo, in un equivalente problema di statica, introducendo all'uopo un opportuno sistema di forze dette "forze perdute". L'osservazione che sta alla base di questa intuizione riguarda la relazione che c'è tra l'equazione che dà l'equilibrio di un punto

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 , \quad (1)$$

per cui il punto si trova in una configurazione di equilibrio se e solo se il vettore risultante delle forze attive \vec{F} e quello delle reazioni vincolari $\vec{\Phi}$ hanno somma nulla, e l'equazione che dà il moto del punto (legge di Newton)

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = m\vec{a} , \quad (2)$$

dove \vec{a} rappresenta l'accelerazione del punto e m la sua massa. Poiché la (2) può essere riscritta come

$$(\vec{F} - m\vec{a}) + \vec{\Phi} = 0 , \quad (3)$$

essa corrisponde a una condizione di equilibrio se invece delle forze attive \vec{F} si considerano le forze perdute $\vec{F} - m\vec{a}$. A questo punto, combinando questa osservazione

con il principio dei lavori virtuali per le forze attive (condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio), si arriva all'equazione simbolica della dinamica, valida per una qualunque configurazione, non solo di equilibrio:

$$(\vec{F} - m\vec{a}) \cdot \delta P \leq 0, \quad \forall \delta P; \quad (4)$$

ovvero il lavoro virtuale delle forze perdute non è mai positivo. Naturalmente questi risultati si estendono a un qualunque corpo, costituito da un numero arbitrario di punti. Il vantaggio della (4), e delle equazioni di Lagrange che ne conseguono, rispetto alla (3), è che le prime consentono di determinare il moto di un qualunque sistema meccanico senza fare intervenire le reazioni vincolari, che in generale sono delle incognite.

Per sviluppare queste tematiche, la tesi è stata suddivisa in tre capitoli. In particolare nel primo capitolo sono richiamati alcuni concetti fondamentali della meccanica, tra cui la nozione di equilibrio di un corpo, e vengono ricavate le equazioni cardinali della statica, che rappresentano condizioni necessarie per l'equilibrio di un sistema meccanico.

Il secondo capitolo si apre con un altro metodo per determinare le condizioni di equilibrio, il principio dei lavori virtuali per le forze attive, da non confondere con quello per le reazioni vincolari, che esprime invece una condizione di coerenza fra le reazioni vincolari e i vincoli che rappresentano e che sono valide in una qualunque configurazione. Successivamente, troviamo lo sviluppo della dinamica attraverso le sue equazioni cardinali e il collegamento tra statica e dinamica tramite il principio di D'Alembert. Come anticipato, verrà chiarito il modo in cui questo principio ci permette di ricondurre un problema di dinamica ad un problema equivalente di statica: sostituendo, nelle condizioni di equilibrio di un sistema, alle forze attive le forze perdute, si ottengono le equazioni del moto del sistema stesso. Il capitolo si conclude con un approfondimento sulle equazioni di Lagrange, ottenute dall'equazione simbolica della dinamica e dal principio di D'Alembert. Questi primi due capitoli sono tratti soprattutto da [4], ma si possono trovare alcuni suggerimenti da [6].

Nell'ultimo capitolo troviamo una sintesi storica di come si è arrivati alla formulazione moderna dei due principi, a partire dalle prime teorie matematiche di Aristotele e

Archimede. La trattazione prosegue richiamando i risultati sulle macchine semplici di Giordano Nemorario, Guidobaldo Dal Monte e Galilei, e i tentativi di trovare principi fondanti di tutta la statica di Pierre Varignon e Johann I Bernoulli, che propone una prima formulazione generale del principio dei lavori virtuali. Il capitolo si sviluppa poi, con la prima formulazione del principio di D'Alembert del 1742, che viene ripresa, insieme al principio dei lavori virtuali, da Lagrange nell'opera *Mécanique analytique*, in cui troviamo la sua formulazione più moderna. La struttura di questo approfondimento storico è stata ripresa da [5], ma sono presenti alcuni spunti tratti da [1], [2] e [3]. In conclusione troviamo alcune applicazioni significative, da [4], che mostrano come la storia di questi due principi sia caratterizzata da risultati teorici e pratici.

Indice

Introduzione	i
1 Principi fondamentali della meccanica	1
1.1 Forza e principi della dinamica	2
1.2 Vincoli e reazioni vincolari	5
1.3 Equilibrio di un sistema ed equazioni cardinali della statica	6
2 Equazioni cardinali della dinamica e principio di D'Alembert	13
2.1 Principio dei lavori virtuali	13
2.2 Equazioni cardinali della dinamica	17
2.3 Principio di D'Alembert ed equazione simbolica della dinamica	20
3 Approfondimento storico e applicazioni	27
Bibliografia	35

Capitolo 1

Principi fondamentali della meccanica

Nell'ambito della meccanica ci interesseranno alcuni aspetti della statica, le equazioni cardinali, e della dinamica, la seconda legge di Newton, per arrivare alla formulazione del principio di D'Alembert.

Richiamiamo in questo capitolo alcune nozioni e principi che ci serviranno come base per lo sviluppo della trattazione.

Innanzitutto denoteremo un generico vettore di \mathbb{R}^3 con una lettera sormontata da una freccia: $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$; questo rappresenterà una terna ordinata di numeri reali $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, le sue componenti rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 . Ogni vettore può essere identificato con una classe di equivalenza di segmenti orientati (dotati di freccia), aventi stessa lunghezza, che rappresenta il modulo di \vec{a} indicato con $|\vec{a}|$, stessa direzione e stesso verso. Se il vettore \vec{a} è rappresentato dal segmento orientato con origine in un punto A e secondo estremo con freccia in B , scriveremo $\vec{a} = \vec{AB} = B - A$. Fissato un sistema di riferimento cartesiano (O, x, y, z) , il vettore \vec{a} sarà rappresentato da un segmento orientato con origine in O e freccia in un punto P , univocamente determinato, per cui si potrà identificare il vettore \vec{a} col suo punto P : $\vec{a} = P - O = P$.

In meccanica, interessa studiare l'evoluzione nel tempo dei sistemi meccanici, in particolare del singolo punto materiale. Pertanto se P è il punto materiale in esame, identificheremo con $P(t)$ la sua configurazione dello spazio al generico istante $t \in \mathbb{R}$, e la sua equazione vettoriale del moto

$$P = P(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

corrisponde alle tre equazioni scalari relative alle sue tre componenti (x, y, z) :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^3 .$$

In questo contesto la derivata prima rispetto al tempo t di una funzione $f(t)$, verrà indicata con un punto e la derivata seconda con due punti:

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t), \quad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \ddot{f}(t) .$$

La velocità \vec{v} e l'accelerazione \vec{a} del punto P all'istante t sono definite rispettivamente come la derivata prima e seconda di P rispetto al tempo e verranno pertanto denotate

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{P} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \vec{a} = \frac{d^2 P}{dt^2} = \ddot{P} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}). \end{cases} \quad (1.1)$$

1.1 Forza e principi della dinamica

Introduciamo ora un concetto fondamentale, quello di forza.

Definizione 1.1. *Dal punto di vista fisico, una forza è un ente fisico in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo, quindi di alterare la velocità, ovvero produrre accelerazione.*

Dal punto di vista matematico, una forza è un vettore applicato, ossia una coppia (\vec{F}, P) , dove \vec{F} è il vettore della forza e P il punto di applicazione.

Nel caso generale, una forza è una sestupla (F_x, F_y, F_z, x, y, z) dove (F_x, F_y, F_z) sono le componenti di \vec{F} rispetto alla base canonica che verrà denotata $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ossia $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Si può scrivere allora $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ così come $P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Inoltre nel caso più generale, il vettore della forza \vec{F} è funzione della posizione del punto di applicazione P , della sua velocità e del tempo t , pertanto si può scrivere $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$ o più esplicitamente dalla (1.1) $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$.

Una forza si dice costante quando è costante il suo vettore \vec{F} . Una forza si dice nulla quando è nullo il suo vettore, $\vec{F} = 0$. La linea di azione di una forza è la retta passante per P e parallela a \vec{F} .

Le quantità appena definite si legano a partire dai tre principi della dinamica, le *leggi di Newton*.

- Primo principio (o *principio di inerzia*): un punto materiale non soggetto a forze si trova in quiete o in moto rettilineo uniforme.
- Secondo principio (o *equazione fondamentale della dinamica*): un punto materiale di massa m soggetto a una forza di vettore \vec{F} si muove con un'accelerazione data da

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.2)$$

Nel caso in cui il punto sia soggetto a un sistema di più forze (\vec{F}_1, P) , (\vec{F}_2, P) , ..., (\vec{F}_N, P) la (1.2) si generalizza secondo la seguente equazione

$$\vec{R} = m\vec{a} \quad (1.3)$$

dove $\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s$ è il *vettore risultante* del sistema di forze.

- Terzo principio (o *principio di azione e reazione*): se su un punto materiale A agisce una forza dovuta ad un altro punto B , (\vec{F}, A) , allora su B agisce una forza dovuta ad A , $(-\vec{F}, B)$, di vettore opposto avente la stessa linea d'azione, la retta AB .

Osservazione 1.2. La legge fondamentale della dinamica (1.3) dal punto di vista analitico, rappresenta un'equazione differenziale di secondo ordine in \mathbb{R}^3 nell'incognita $P = P(t)$:

$$m \frac{d^2 P(t)}{dt^2} = \vec{R}(P(t), \frac{dP(t)}{dt}, t) . \quad (1.4)$$

Assegnando le condizioni iniziali, posizione P_0 e velocità \vec{v}_0 del punto P all'istante iniziale $t = t_0 \in \mathbb{R}$, si ha sempre uno e un solo moto in corrispondenza delle forze assegnate.

Dal punto di vista matematico questo significa che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\ddot{P} = \vec{R}(P, \dot{P}, t) \\ P(t_0) = P_0, \dot{P}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

deve ammettere una e una sola soluzione $P = P(t)$, per essere ben posto.

Ricordiamo che la condizione di validità del teorema di unicità della soluzione è che $\vec{R}(P, \dot{P}, t)$ sia lipschitziana rispetto a P e \dot{P} . Per le forze fisiche conosciute questa condizione è sempre verificata.

Un esempio di forza è la forza peso. Per un punto P di massa m , si chiama forza peso la forza applicata in P e di vettore $\vec{P} = m\vec{g}$, con \vec{g} accelerazione di gravità, diretta lungo la verticale verso il basso.

Per un sistema meccanico costituito da N punti materiali P_1, P_2, \dots, P_N di masse rispettivamente m_1, m_2, \dots, m_N , la forza peso è equivalente ad una sola forza di vettore $\vec{P} = M\vec{g}$ con punto di applicazione il baricentro (o centro di massa) G , dove $M = \sum_{s=1}^N m_s$ rappresenta la massa totale del corpo.

Rispetto a un sistema di riferimento cartesiano con origine in O , la posizione del baricentro G del sistema di punti è data da:

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^N m_s (P_s - O)}{M} .$$

Se G coincide con O , si ottiene

$$\sum_{s=1}^N m_s (P_s - G) = 0 . \quad (1.5)$$

1.2 Vincoli e reazioni vincolari

La dinamica si occupa di predire il moto di un corpo soggetto a forze, ovvero la sua posizione nel tempo. Per determinare la posizione di un corpo, introduciamo i seguenti concetti.

La configurazione di un corpo è l'insieme dei punti geometrici di \mathbb{R}^3 occupati dai punti fisici che costituiscono il corpo. Il grado di libertà di un sistema meccanico è il numero di parametri necessari e sufficienti a determinare la configurazione del sistema in ogni istante. I parametri scelti per determinare la configurazione del corpo in ogni istante di tempo, sono detti parametri lagrangiani.

Consideriamo un sistema meccanico con grado di libertà $n \in \mathbb{N}$ e parametri lagrangiani q_1, \dots, q_n , ogni n -pla di parametri lagrangiani individua univocamente ogni configurazione del sistema che sarà quindi indicata con $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

In una certa configurazione, un corpo può essere libero o vincolato da dispositivi esterni. Un sistema meccanico si dice *libero*, in una certa configurazione $q_0 \in \mathbb{R}^n$ quando può passare da quella configurazione a tutte le altre configurazioni vicine geometricamente possibili. Se ci sono dispositivi che impediscono questo passaggio, il sistema si dice *vincolato* e i dispositivi si dicono vincoli.

Ad esempio è vincolato un libro posto su un tavolo, perché non può spostarsi sotto il tavolo, attraversandolo; un corpo rigido con un punto fisso, perché non può assumere le configurazioni che corrispondono allo spostamento di quel punto; un corpo rigido con un asse fisso, ecc..

Nel caso di un corpo rigido, ossia di un corpo costituito da punti le cui distanze reciproche si mantengono costanti nel tempo, ogni punto del corpo è vincolato agli altri dal vincolo di rigidità, che è un esempio di vincolo interno.

In generale, i vincoli si distinguono in vincoli *interni*, quando sono dovuti all'azione di punti interni al corpo, ed *esterni*, dovuti all'azione di punti o corpi esterni al sistema. Inoltre un vincolo può essere *mobile* (o *reonomo*), se varia nel tempo, oppure *fisso* (o *scleronomo*), se non varia nel tempo.

Possiamo associare i vincoli a forze che li rappresentano utilizzando il seguente *postulato delle reazioni vincolari*:

Postulato 1.3. *È sempre possibile rendere libero un qualunque sistema vincolato, purchè si introduca un opportuno sistema di forze, dette reazioni vincolari.*

Le azioni dei vincoli si manifestano quindi mediante forze, i cui vettori vengono solitamente denotati con la lettera greca $\vec{\Phi}$ per distinguerle dalle forze di natura non vincolare, chiamate forze attive, con vettore denotato usualmente con \vec{F} . Con questa convenzione il secondo principio di Newton (1.3) si riscrive:

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = m\vec{a} \quad (1.6)$$

dove \vec{F} e $\vec{\Phi}$ indicano rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su P .

Va osservato che, per determinare il moto di un punto, da una legge come la precedente (1.6), occorre conoscere le forze; tuttavia, normalmente, si riesce a conoscere solo la forza attiva agente su un punto, mentre la reazione vincolare è un'ulteriore incognita. Per determinare sia il moto sia $\vec{\Phi}$ occorre aggiungere qualche informazione sui vincoli, legate alla definizione di vincolo liscio.

Definizione 1.4. *Un vincolo si dice liscio se è in grado di esplicitare l'azione di una sola reazione vincolare avente la stessa direzione e il verso opposto di uno spostamento totalmente proibito. Diremo spostamento totalmente proibito di un punto P ogni spostamento che lo porterebbe in una configurazione P' , alla quale P non si può avvicinare in alcun modo con spostamenti consentiti dai vincoli.*

Naturalmente anche per le reazioni vincolari vale il principio di azione e reazione, visto in precedenza, essendo forze a tutti gli effetti.

1.3 Equilibrio di un sistema ed equazioni cardinali della statica

Prima di occuparci dell'equilibrio di un sistema meccanico, vediamo le quantità che lo caratterizzano.

Definizione 1.5. Data una forza (\vec{F}, P) e un punto $O \in \mathbb{R}^3$, chiamiamo momento della forza rispetto al polo O , il vettore $\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P)$.

Per un sistema di N forze $(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ il momento risultante rispetto al polo O è definito da:

$$\vec{\Omega}(O) = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O - P_s) . \quad (1.7)$$

In generale il momento $\vec{\Omega}(O)$ dipende dal polo O . Una condizione perché ne sia indipendente è data dalla seguente.

Proposizione 1.6. Il momento di un sistema di forze non dipende dalla scelta del polo se e solo se $\vec{R} = 0$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto cosa succede cambiando polo, rispetto cui calcolare il momento.

$$\begin{aligned} \forall O_1 \in \mathbb{R}^3, \vec{\Omega}(O_1) &= \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O_1 - P_s) = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O_1 - O + O - P_s) = \\ &= \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O_1 - O) + \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O - P_s) = \vec{\Omega}(O) + \vec{R} \times (O_1 - O) \end{aligned}$$

Perciò se $\vec{R} = 0$, si ha che $\vec{\Omega}(O_1) = \vec{\Omega}(O) \forall O, O_1 \in \mathbb{R}^3$.

Il viceversa si può dimostrare come segue.

$$\vec{\Omega}(O_1) = \vec{\Omega}(O) \iff \vec{R} \times (O_1 - O) = 0, \forall O, O_1 \in \mathbb{R}^3.$$

Scegliendo $O_1, O \in \mathbb{R}^3$ tali che $O_1 - O \neq 0$ e $O_1 - O$ non sia parallela a \vec{R} , si ottiene la tesi: $\vec{R} = 0$. □

Osservazione 1.7. Data una forza (\vec{F}, P) , il suo momento rispetto a qualunque polo appartenente alla linea di azione della forza r è nullo.

$$\forall O \in r, \vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P) = 0$$

Dette forze interne quelle dovute ai punti di un sistema meccanico, abbiamo che esse si possono sempre considerare del tipo azione e reazione. Infatti per ogni forza

interna, ne esiste una opposta che ha la stessa linea di azione.

Nel caso di un sistema formato da una coppia di forze di tipo "azione e reazione", (\vec{F}, A) e $(-\vec{F}, B)$, si ha:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = 0 \\ \vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - A) - \vec{F} \times (O - B) = \vec{F} \times (B - A) = 0, \forall O \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.8)$$

Quindi per il sistema delle forze interne, sia complessivamente sia se distinte in forze attive e reazioni vincolari, si ha

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{\Omega}(O) = 0, \forall O \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.9)$$

Conoscendo il vettore risultante e il momento risultante di un sistema di forze, possiamo ottenere condizioni per l'equilibrio del corpo.

Introduciamo quindi la definizione di equilibrio di un punto materiale e di un sistema meccanico.

Definizione 1.8. Una configurazione $P_0 \in \mathbb{R}^3$ si dice configurazione di equilibrio per un punto P se, posto il punto in P_0 a un certo istante iniziale di tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ con velocità nulla, il punto resta in P_0 ad ogni istante successivo:

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow P(t) = P_0, \forall t \geq t_0. \quad (1.10)$$

Proposizione 1.9. Se le forze agenti sul punto sono tali che $\vec{R} \in C^\infty$, allora $P_0 \in \mathbb{R}^3$ è una configurazione di equilibrio se e solo se $\vec{R}(P_0, 0, t) = 0, \forall t \geq t_0$.

Dimostrazione. Dalla (1.10) si ha che P_0 è condizione di equilibrio se e solo se $P(t) = P_0$ è soluzione dell'equazione di Newton (1.4) relativa al dato iniziale $\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \frac{dP}{dt}(t_0) = 0 \end{cases}$.

Pertanto sostituiamo $P(t) = P_0, \frac{dP}{dt}(t) = 0, \frac{d^2P}{dt^2}(t) = 0, \forall t \geq t_0$ nell'equazione

$$m \frac{d^2P(t)}{dt^2} = \vec{R}(P(t), \frac{dP(t)}{dt}, t),$$

che equivale ad avere $\vec{R}(P_0, 0, t) = 0, \forall t \geq t_0$. □

Corollario 1.10. *Se tutte le forze agenti su P sono posizionali, cioè i loro vettori dipendono solo dalla posizione di P (ma non dalla loro velocità né dal tempo), e pertanto il vettore risultante $\vec{R} = \vec{R}(P)$ è funzione solo della posizione di P , condizione necessaria e sufficiente affinché $P_0 \in \mathbb{R}^3$ sia configurazione di equilibrio è che sia*

$$\vec{R}(P_0) = 0 . \quad (1.11)$$

Definizione 1.11. *Per un generico sistema meccanico a n gradi di libertà, una configurazione $q^0 \in \mathbb{R}^n$ si dice configurazione di equilibrio per il corpo se è una configurazione di equilibrio per ciascuno dei suoi punti, ovvero se e solo se, posto il corpo in q^0 a un certo istante iniziale di tempo $t_0 \in \mathbb{R}$ con velocità nulla, il corpo resta in q^0 ad ogni istante successivo.*

Se il corpo è costituito da N punti materiali P_1, \dots, P_N , indichiamo con \vec{F}_s e $\vec{\Phi}_s$ rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti sul punto P_s , $\forall s = 1, \dots, N$. Supponendo ora che tutte le forze agenti sul corpo siano posizionali, ossia tali che i loro vettori dipendono solo dalla configurazione $q \in \mathbb{R}^n$ del sistema, e non dalla velocità dei punti né dal tempo t , segue da (1.10) che $q^0 \in \mathbb{R}^n$ è una configurazione di equilibrio per il corpo se e solo se

$$\vec{F}_s(q^0) + \vec{\Phi}_s(q^0) = 0 , \quad \forall s = 1, \dots, N. \quad (1.12)$$

Indicando ora con \vec{F} e $\vec{\Phi}$ i vettori risultanti delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti sul corpo, ossia $\vec{F} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s$ e $\vec{\Phi} = \sum_{s=1}^N \vec{\Phi}_s$, se $q^0 \in \mathbb{R}^n$ è una configurazione di equilibrio dalla (1.12) segue, sommando su $s = 1, \dots, N$ e omettendo per semplicità nella scrittura la dipendenza da q^0 ,

$$\vec{F} + \vec{\Phi} = 0 . \quad (1.13)$$

Ricordiamo ora che le forze di un sistema si dividono in forze interne e forze esterne. Indicando con $\vec{F}^{(e)}$ e $\vec{F}^{(i)}$ i vettori risultanti delle forze attive esterne ed interne rispettivamente, e analogamente per le reazioni vincolari, la (1.13) può essere riscritta come

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} + \vec{\Phi}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(i)} = 0 \quad (1.14)$$

Inoltre le forze interne sono del tipo azione e reazione, perciò dalla prima del sistema (1.9), si ha $\vec{F}^{(i)} + \vec{\Phi}^{(i)} = 0$, e pertanto la (1.14) può essere riscritta come

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} = 0 . \quad (1.15)$$

La (1.15) diventa quindi una condizione necessaria affinché una configurazione sia di equilibrio.

Possiamo ragionare in modo analogo sui momenti delle forze attive e delle reazioni vincolari. Scelto un polo $O \in \mathbb{R}^3$, dalla condizione di equilibrio del corpo, moltiplicando vettorialmente per $(O - P_s)$, si ottiene:

$$\vec{F}_s \times (O - P_s) + \vec{\Phi}_s \times (O - P_s) = 0 , \quad \forall s = 1, \dots, N.$$

Sommando su $s = 1, \dots, N$, si ottiene:

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N \vec{\Phi}_s \times (O - P_s) = 0$$

ossia

$$\vec{\Omega}(O) + \vec{\Psi}(O) = 0, \quad \forall O \in \mathbb{R}^3, \quad (1.16)$$

dove $\vec{\Omega}(O)$ e $\vec{\Psi}(O)$ denotano rispettivamente il momento risultante delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti sul corpo. Distinguendo tra momenti delle forze interne ed esterne e ricordando che i momenti delle forze interne sono nulli per la seconda di (1.9), si ha

$$\vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) = 0 , \quad \forall O \in \mathbb{R}^3 \quad (1.17)$$

con evidente significato della notazione. Combinando la (1.15) e la (1.17) possiamo concludere che il seguente sistema rappresenta una condizione necessaria per l'equilibrio di un qualunque sistema meccanico

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} = 0 \\ \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) = 0, \quad \forall O \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (1.18)$$

Le equazioni del sistema (1.18) prendono il nome di *equazioni cardinali della statica*. In esse non sono più presenti le forze interne ma, per eliminarle, abbiamo combinato

linearmente le condizioni di equilibrio relative ai singoli punti del corpo, diminuendo il numero di equazioni linearmente indipendenti. Quindi le equazioni ottenute non sono più sufficienti per l'equilibrio del sistema. Infatti il sistema delle equazioni cardinali (1.18), nel caso più generale, è formato da sei equazioni, perciò con le equazioni cardinali si può risolvere al massimo un problema a sei incognite. Il tipico sistema che ha un massimo di sei gradi di libertà è il corpo rigido libero. Nel caso di un corpo rigido, le equazioni cardinali della statica sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del corpo. Un esempio per cui non vale invece il viceversa, ovvero alle equazioni cardinali non segue in generale l'equilibrio del corpo, è il caso di un corpo elastico.

Capitolo 2

Equazioni cardinali della dinamica e principio di D'Alembert

Vedremo ora come un problema di dinamica possa essere riformulato in un problema di statica, tramite il principio di D'Alembert. Il rapporto tra statica e dinamica sarà sottolineato dalle equazioni cardinali della dinamica.

Prima di sviluppare la trattazione è opportuno approfondire un altro metodo per determinare le condizioni di equilibrio di un sistema meccanico, il principio dei lavori virtuali.

2.1 Principio dei lavori virtuali

In questo paragrafo ci occupiamo del principio dei lavori virtuali. Esso offre il vantaggio, rispetto alle equazioni cardinali della statica, di considerare solamente le forze attive per determinare le configurazioni di equilibrio di un sistema, ignorando le reazioni vincolari, che sono normalmente delle incognite aggiuntive rispetto al problema dell'equilibrio.

Dobbiamo innanzitutto introdurre alcune nozioni preliminari riguardo gli spostamenti infinitesimi dei punti. Più precisamente uno spostamento infinitesimo di un punto P si dice *reale* se esso avviene effettivamente nella realtà portando il punto da una

configurazione a un'altra infinitamente vicina in un tempo dt con velocità finita \vec{v} . Lo si denota con dP e matematicamente è rappresentato dall'espressione differenziale

$$dP = \vec{v}dt . \quad (2.1)$$

Se il punto P fa parte di un sistema meccanico a n gradi di libertà con parametri lagrangiani q_1, \dots, q_n , in generale la posizione del punto P è rappresentata dalla seguente funzione di $q = (q_1, \dots, q_n)$ e di t :

$$P = P(q_1, \dots, q_n; t) \quad (2.2)$$

dove la dipendenza esplicita dal tempo t si verifica se e solo se i vincoli a cui è soggetto il corpo sono dipendenti dal tempo (mobili). Allora per lo spostamento reale dP si ha

$$dP = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P}{\partial t} dt . \quad (2.3)$$

Alla nozione di spostamento infinitesimo reale si aggiunge quella di *spostamento virtuale*, denotato δP , compatibile con i vincoli: non si tratta di un passaggio reale da una configurazione a un'altra, a seguito di un moto effettivo del punto, bensì di uno spostamento ipotetico, che si immagina avvenga in un tempo nullo ($\delta t = 0$) con velocità infinita. Dal punto di vista matematico si tratta del differenziale della funzione rappresentata in (2.2), in cui il tempo t viene bloccato. Si ha pertanto

$$\delta P = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial q_k} \delta q_k , \quad (2.4)$$

dove, rispetto allo spostamento reale, si può notare l'assenza dell'ultimo termine nella (2.3).

Nel caso di vincoli fissi, formalmente le due espressioni (2.3) e (2.4) risultano equivalenti, ma è utile sottolineare che in (2.3), i parametri lagrangiani sono funzioni del tempo t :

$$q_k = q_k(t) , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

cioè lo spostamento dP viene rappresentato durante il moto reale, effettivo, del punto P . Invece nella (2.4), i parametri q_1, \dots, q_n sono da vedere come variabili indipendenti

che possono assumere ogni generico valore, indipendentemente dall'effettivo moto di P , purchè compatibile con i vincoli. Cioè δP rappresenta un generico ipotetico spostamento fra tutti quelli a priori consentiti per P .

Possiamo ora definire il lavoro elementare di un sistema di forze. Il *lavoro elementare virtuale* di un sistema di N forze $(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ relativo a uno spostamento virtuale del sistema $\delta P_s, \forall s = 1, \dots, N$ è dato da

$$\delta L = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta P_s . \quad (2.5)$$

Poiché dalla (2.4) si ha $\delta P_s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \delta q_k, \forall s = 1, \dots, N$, la (2.5) si può riscrivere nel seguente modo:

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \right) \delta q_k .$$

Ponendo $Q_k = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k}$, il lavoro elementare virtuale risulta una forma differenziale lineare nelle q_k :

$$\delta L = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k . \quad (2.6)$$

Le quantità $Q_k, k = 1, \dots, n$ sono dette forze generalizzate di Lagrange o componenti lagrangiane delle forze. Infatti, nel caso particolare di un singolo punto libero, esse rappresentano esattamente le componenti F_x, F_y, F_z del vettore risultante delle forze attive $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$.

Enunciamo infine il *principio dei lavori virtuali* per le forze attive.

Principio 2.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema meccanico a vincoli lisci sia in equilibrio in una configurazione $q^0 \in \mathbb{R}^n$ è che il lavoro virtuale del sistema delle forze attive agenti sul corpo $(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ per un qualunque spostamento virtuale, sia minore o uguale a zero, ossia*

$$\delta L = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta P_s \leq 0 , \quad \forall (\delta P_s : s = 1, \dots, N) . \quad (2.7)$$

In particolare δL deve essere nullo per spostamenti virtuali invertibili, negativo o eccezionalmente nullo per spostamenti virtuali non invertibili.

Nel caso di configurazioni interne, ogni spostamento virtuale è invertibile quindi condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che $\delta L = 0$. Perciò se i vincoli sono bilaterali, ossia ammettono solo configurazioni interne, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è

$$\delta L = 0, \quad \forall (\delta P_s : s = 1, \dots, N). \quad (2.8)$$

In questo caso, dalla (2.6) segue che una configurazione è di equilibrio se e solo se

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = 0, \quad \forall (\delta q_1, \dots, \delta q_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

ovvero se e solo se

$$Q_k = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Si può formulare una versione del principio dei lavori virtuali anche per le reazioni vincolari, che però non esprime una condizione per l'equilibrio, bensì una condizione di coerenza fra le reazioni vincolari e i vincoli che rappresentano.

Principio 2.2. *Nel caso di vincoli lisci (assenza di attrito), condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di reazioni vincolari $(\vec{\Phi}_1, P_1), \dots, (\vec{\Phi}_N, P_N)$ sia compatibile con la natura dei vincoli è che il lavoro virtuale del sistema sia positivo o nullo, per ogni spostamento virtuale.*

$$\delta \rho = \sum_{s=1}^N \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0, \quad \forall (\delta P_s : s = 1, \dots, N). \quad (2.11)$$

In particolare $\delta \rho$ deve essere nullo per spostamenti virtuali invertibili e positivo o eccezionalmente nullo per spostamenti virtuali non invertibili.

Osservazione 2.3. Mentre la condizione (2.7) per le forze attive, vale se e solo se il sistema si trova in una configurazione di equilibrio, e quindi è vera solo nel contesto della statica, la (2.11) deve essere soddisfatta "sempre", cioè in corrispondenza a una qualunque configurazione in cui si trovi il corpo, cioè è vera nel più generale contesto della dinamica.

2.2 Equazioni cardinali della dinamica

Per derivare le equazioni cardinali della dinamica, vediamo prima alcune definizioni utili.

Definizione 2.4. *La quantità di moto di un punto materiale P di massa m , nell'istante in cui ha velocità \vec{v} , è*

$$\vec{Q} = m\vec{v} .$$

Dato un sistema meccanico di N punti P_1, \dots, P_N di massa m_s e con velocità \vec{v}_s , $\forall s = 1, \dots, N$, la quantità di moto del corpo è

$$\vec{Q} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s .$$

Osservazione 2.5. Fino ad ora abbiamo sempre sottinteso che la massa dei corpi fosse costante. In generale questo non è sempre vero, basti pensare a un razzo che espelle gas. Osserviamo che solamente sotto l'ipotesi di $m = \text{cost}$, è valida la seconda legge di Newton (1.3), la quale corrisponde a $\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = m\vec{a}$, che quindi sarà a sua volta valida solo se $m = \text{cost}$. Alternativamente possiamo ottenere una legge più generale, valida anche per un corpo con massa non costante:

$$\frac{d\vec{Q}(t)}{dt} = \vec{R} . \quad (2.12)$$

Definizione 2.6. *Chiamiamo momento della quantità di moto (o momento angolare) di un punto materiale P rispetto al polo $O \in \mathbb{R}^3$, l'espressione:*

$$\vec{K}(O) = m\vec{v} \times (O - P) = \vec{Q} \times (O - P) .$$

Il momento delle quantità di moto (o momento angolare) di un sistema meccanico di N punti P_1, \dots, P_N di massa m_s e con velocità \vec{v}_s , $\forall s = 1, \dots, N$, rispetto al polo $O \in \mathbb{R}^3$ è:

$$\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) .$$

Nel caso di un punto materiale P , se il polo $O \in \mathbb{R}^3$ è fisso, possiamo derivare il momento angolare e si ottiene:

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = m\vec{a} \times (O - P) .$$

Applicando la legge fondamentale della dinamica (1.3), si ha:

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{R} \times (O - P) .$$

Infine ricordiamo la Definizione 1.5 di momento di una forza rispetto al polo O e la distinzione tra forze attive e reazioni vincolari, da cui:

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}(O) + \vec{\Psi}(O) . \quad (2.13)$$

Possiamo ricavare ora le equazioni cardinali della dinamica che generalizzano le (2.12) e (2.13), valide per il singolo punto, a un generico corpo.

Consideriamo un sistema di N punti materiali P_1, \dots, P_N di massa $m_s, s = 1, \dots, N$. Differenziamo le forze agenti su ciascun punto in forze attive e reazioni vincolari, dividendole in interne ed esterne. Quindi dalla (1.3), ricordando che $\vec{a}_s = \frac{d\vec{v}_s}{dt}$, si ha:

$$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}_s^{(e)} + \vec{F}_s^{(i)} + \vec{\Phi}_s^{(e)} + \vec{\Phi}_s^{(i)} , \quad \forall s = 1, \dots, N. \quad (2.14)$$

Procediamo in modo analogo al caso della statica, ovvero sommiamo le equazioni rispetto a $s = 1, \dots, N$ e ricordiamo che il vettore risultante delle forze attive interne e quello delle reazioni vincolari interne è nullo. Si ottiene pertanto

$$\sum_{s=1}^N m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} .$$

Per la linearità della derivata, si ottiene:

$$\frac{d(\sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s)}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} .$$

Come possiamo notare il primo termine dell'equazione è la derivata della quantità di moto del sistema. Si ha quindi

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} . \quad (2.15)$$

L'espressione (2.15) rappresenta la *prima equazione cardinale della dinamica* e viene chiamata anche *teorema della quantità di moto*. Come anticipato essa generalizza la (2.12).

Osserviamo ora cosa si ottiene derivando la formula (1.5) del capitolo precedente:

$$\sum_{s=1}^N m_s \left(\frac{dP_s}{dt} - \frac{dG}{dt} \right) = 0 .$$

Da qui, indicando con M la massa totale, possiamo ricavare:

$$\vec{Q} = M \frac{dG}{dt} . \quad (2.16)$$

In altre parole la quantità di moto di un sistema di punti materiali corrisponde alla quantità di moto che avrebbe il sistema se fosse concentrato nel baricentro.

Da questo risultato, la (2.15) si può riscrivere nella seguente forma:

$$M \frac{d^2G}{dt^2} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} . \quad (2.17)$$

Quindi possiamo enunciare il *teorema del moto del baricentro*.

Teorema 2.7. *Il baricentro di un sistema si muove come se in esso fosse concentrata la massa del sistema e ad esso fossero applicate tutte le forze esterne. Inoltre il suo moto non è influenzato dalle forze interne agenti sul corpo.*

Consideriamo un polo $O \in \mathbb{R}^3$, non per forza fisso. Deriviamo il momento delle quantità di moto:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}(O)}{dt} &= \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \times (O - P_s) + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \frac{d(O - P_s)}{dt} = \\ &= \sum_{s=1}^N (\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s) \times (O - P_s) + \vec{Q} \times \vec{v}_O - \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times \vec{v}_s , \end{aligned}$$

dove $\vec{v}_O = \frac{dO}{dt}$ rappresenta la velocità del polo O .

Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo, perciò l'ultimo termine è nullo.

Dalla definizione di momento risultante delle forze attive $\vec{\Omega}(O)$ e delle reazioni vincolari $\vec{\Psi}(O)$ (Definizione 1.5) e dalla (2.16), si ha:

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}(O) + \vec{\Psi}(O) + M\vec{v}_G \times \vec{v}_O .$$

Ricordiamo infine che i momenti delle forze attive e delle reazioni vincolari interne sono nulli, quindi:

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)} + \vec{\Psi}^{(e)} + M\vec{v}_G \times \vec{v}_O .$$

Esaminiamo ora i casi in cui l'ultimo termine è nullo. Questo vale se e solo se il polo O è fisso ($\vec{v}_O = 0$) oppure coincide con il baricentro del sistema ($\vec{v}_G = \vec{v}_O$) oppure ha velocità parallela a quella del baricentro (\vec{v}_O parallela a \vec{v}_G). Possiamo concludere quindi che:

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) \quad (2.18)$$

per ogni polo O fisso oppure coincidente con il baricentro del sistema oppure con velocità parallela a quella del baricentro.

La relazione precedente (2.18) rappresenta la *seconda equazione cardinale della dinamica* e prende anche il nome di *teorema del momento della quantità di moto*.

Unendo (2.15) e (2.18), si ottengono le *equazioni cardinali della dinamica*:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{\Phi}^{(e)} \\ \frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}^{(e)}(O) + \vec{\Psi}^{(e)}(O) \end{cases}, \quad \forall O \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } \vec{v}_O = 0 \vee \vec{v}_G = \vec{v}_O \vee \vec{v}_O \parallel \vec{v}_G . \quad (2.19)$$

2.3 Principio di D'Alembert ed equazione simbolica della dinamica

Consideriamo un sistema meccanico formato da N punti materiali P_1, \dots, P_N rispettivamente aventi masse m_1, \dots, m_N e accelerazioni $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N$. Su ogni punto P_s agiscono la forza attiva \vec{F}_s e la reazione vincolare $\vec{\Phi}_s$, relative ad un istante generico t .

Dall'identità:

$$\vec{F}_s = m_s \vec{a}_s + (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) ,$$

che vale $\forall s = 1, \dots, N$, possiamo osservare che la forza attiva applicata ad un punto del sistema, in un istante generico di tempo, si può pensare come somma della forza $m_s \vec{a}_s$ che produrrebbe l'accelerazione \vec{a}_s se il punto fosse libero, e di un termine $(\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s)$ detto, *forza perduta*, perché è la forza che viene spesa per equilibrare la reazione vincolare.

Infatti dall'equazione fondamentale della dinamica (1.6), si ha

$$m_s \vec{a}_s = \vec{F}_s + \vec{\Phi}_s$$

che può essere riscritta

$$(\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) + \vec{\Phi}_s = 0 . \quad (2.20)$$

Ricordando la (1.12), che rappresenta una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, la (2.20) indica che la reazione vincolare e la forza perduta determinano in ogni istante una condizione di equilibrio, in corrispondenza a qualunque configurazione del corpo, non solo per una configurazione di equilibrio. Queste osservazioni sono alla base del seguente *principio di D'Alembert*.

Principio 2.8. *Se alle forze attive si sostituiscono le forze perdute, allora, se il sistema era inizialmente in quiete, rimane in quiete ad ogni istante successivo.*

In altre parole, in ogni istante le forze perdute di un sistema meccanico sono in equilibrio, grazie all'azione del vincolo, ovvero le forze perdute costituiscono un insieme di forze che manterrebbe il sistema meccanico in equilibrio.

Di conseguenza, ogni equazione che esprime una condizione di equilibrio di un sistema meccanico è valida anche per il movimento dello stesso sistema se sostituiamo le forze attive con le forze perdute. In questo modo, quindi, si ottengono le equazioni del moto del sistema. Perciò il principio di D'Alembert permette di ricondurre un problema di dinamica ad un problema equivalente di statica e fornisce un metodo generale per lo studio del moto di un qualunque sistema meccanico.

Riprendiamo il Principio 2.1 dei lavori virtuali per le forze attive. Dall'osservazione (2.5) e dal Principio 2.8 di D'Alembert, sostituendo le forze attive con le forze perdute, si ha che è sempre valida per ogni configurazione, la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{s=1}^N (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) \cdot \delta P_s \leq 0, \quad \forall (\delta P_s : s = 1, \dots, N). \quad (2.21)$$

In particolare la sommatoria in (2.21) è nulla per spostamenti virtuali invertibili, ovvero

$$\sum_{s=1}^N (\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s) \cdot \delta P_s = 0, \quad \forall (\delta P_s \text{ invertibile} : s = 1, \dots, N). \quad (2.22)$$

La (2.21) è chiamata *equazione fondamentale della dinamica*.

Dalla (2.20) si deduce che $\vec{F}_s - m_s \vec{a}_s = -\vec{\Phi}_s$. Sostituendo le forze perdute con l'opposto delle reazioni vincolari, l'equazione fondamentale della dinamica (2.21) si può riscrivere come

$$\sum_{s=1}^N \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s \leq 0, \quad \forall (\delta P_s : s = 1, \dots, N). \quad (2.23)$$

che è condizione necessaria e sufficiente affinché le reazioni vincolari siano compatibili con i vincoli. Quindi abbiamo ottenuto il principio dei lavori virtuali per le reazioni vincolari (2.2).

Ci occupiamo ora del caso di vincoli bilaterali. Visto che tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili, si ha che la (2.21) è un'equazione per ogni configurazione; perciò si ottiene

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta P_s = \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \cdot \delta P_s, \quad \forall \delta P_s : s = 1, \dots, N, \quad (2.24)$$

dove il primo termine è il lavoro elementare virtuale delle forze attive δL . Il secondo termine si può riscrivere come segue, sostituendo $\delta P_s = \sum_{k=1}^n \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \delta q_k$ (utilizzando la (2.4)):

$$\sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \cdot \delta P_s = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \delta q_k \right) \delta q_k.$$

Infine indichiamo con τ_k la quantità $\sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \delta q_k$, con $k = 1, \dots, n$, e ricordiamo che $\delta L = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$ dalla (2.6), perciò si ricava la relazione

$$\sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k = \sum_{k=1}^n \tau_k \delta q_k, \quad \forall \delta q_k, k = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Poiché la (2.25) deve essere soddisfatta per qualunque scelta arbitraria di δq_k , $\forall k = 1, \dots, n$, ne segue che

$$Q_k = \tau_k, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

Osservazione 2.9 (Approfondimento sulle equazioni di Lagrange). Di seguito vedremo le equazioni di Lagrange, equazioni differenziali nei parametri lagrangiani che permettono di descrivere il moto di qualunque sistema meccanico ad n gradi di libertà. Per ottenere queste equazioni, premettiamo l'espressione e alcune proprietà dell'energia cinetica di un sistema meccanico in funzione dei parametri lagrangiani. Supponiamo di essere nel caso di vincoli lisci bilaterali e consideriamo un sistema meccanico costituito da N punti materiali con n gradi di libertà. Ogni punto P_s del sistema dipende da n parametri lagrangiani, perciò scriviamo $P_s = P_s(q_1(t), \dots, q_n(t), t)$. Per la velocità \vec{v}_s di P_s si ha dunque

$$\vec{v}_s = \frac{dP_s}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Una grandezza meccanica fondamentale in questo contesto è l'*energia cinetica* del corpo, indicata con T e definita da

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \vec{v}_s. \quad (2.28)$$

Fissato $i = 1, \dots, n$, deriviamo l'energia cinetica T rispetto a q_i e \dot{q}_i :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i}. \quad (2.29)$$

Dalla (2.27), si ha

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial P_s}{\partial q_i},$$

da cui

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i}. \quad (2.30)$$

Derivando ora la (2.30) rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right), \quad (2.31)$$

in cui il primo termine è τ_i e come abbiamo visto in precedenza nella (2.26) $\tau_i = Q_i$. Per il secondo termine osserviamo che, nelle ipotesi di regolarità assunte in questo contesto, applicando il teorema di Schwartz, si ha

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dP_s}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i}.$$

Pertanto la (2.31) può essere così riscritta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial q_i} = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo usato la seconda delle (2.29).

Otteniamo così che le *equazioni di Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

Esse corrispondono a un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle incognite q_1, \dots, q_n , perciò, opportunamente completate da condizioni iniziali e note le Q_i , permettono di conoscere il moto di un qualunque sistema meccanico.

Possiamo osservare che in queste equazioni non compaiono le reazioni vincolari, infatti le informazioni sui vincoli sono date dai parametri q_i .

Ricaviamo le equazioni di Lagrange, nel caso particolare del punto materiale libero P di massa m . Questo sistema ha tre gradi di libertà. Siano perciò x, y, z le coordinate del punto P , coincidenti con i parametri lagrangiani q_1, q_2, q_3 che definiscono il moto del punto. Siano poi F_x, F_y, F_z le componenti della forza agente sul punto, coincidenti con i parametri lagrangiani Q_1, Q_2, Q_3 .

Ricordando che $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sono le componenti della velocità, otteniamo che l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Pertanto, per ogni coordinata vale:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}.$$

Dalle equazioni di Lagrange (2.32) si ha infine che:

$$m\ddot{x} = F_x \quad , \quad m\ddot{y} = F_y \quad , \quad m\ddot{z} = F_z \quad .$$

Perciò abbiamo ritrovato la legge fondamentale della dinamica (1.3) in forma cartesiana. Si può osservare quindi, che le equazioni di Lagrange sono una generalizzazione della seconda legge di Newton.

Capitolo 3

Approfondimento storico e applicazioni

Nel seguente capitolo percorreremo in sintesi, gli aspetti più salienti relativi all'evoluzione storica del principio dei lavori virtuali e del principio di D'Alembert, dalle prime teorie di Aristotele fino alla teoria più completa e moderna esposta da Lagrange nella sua opera *Méchanique analytique*.

Nell'antichità, lo studio della statica si è sviluppato secondo due indirizzi differenti. Il primo, dovuto ad Aristotele (IV secolo a.C.), cerca di determinare l'equilibrio esaminando direttamente le relazioni tra i moti compatibili delle sue parti. Il secondo indirizzo, dovuto essenzialmente ad Archimede (II secolo a.C.), si pone invece il proposito di fondare la statica sull'analisi dei centri di gravità, tramite il modello euclideo. Entrambi questi indirizzi sono utilizzati da Erone di Alessandria per affrontare e risolvere i problemi meccanici esposti nella sua opera *L'elevatore*. A partire da questi primi problemi di meccanica, soprattutto in collegamento con le ricerche sulla leva, si trovano le premesse per la formulazione e l'applicazione del principio dei lavori virtuali.

Nonostante i notevoli risultati ottenuti, per riprendere lo sviluppo della meccanica, occorrerà aspettare il XIII secolo, quando Giordano Nemorario utilizza il principio nella forma secondo cui qualcosa che può sollevare un peso G a una certa altezza

h , può anche sollevare un peso n volte maggiore all'altezza h/n , da cui deduce il principio della leva e che applica per le ricerche sull'equilibrio nel piano inclinato.

Guidobaldo Dal Monte (1545-1607) estende l'applicazione del principio al caso della carrucola, tra l'altro prima di Simon Stevin (1548-1620) a cui è stato attribuito il merito. Galilei si riallaccia a Dal Monte e, in una delle sue prime opere, *Le mecaniche*, scritta intorno al 1600, dimostra il principio nel caso della leva, e in tale occasione introduce il termine "momento", per il prodotto del peso di una massa con il suo spostamento infinitesimale iniziale.

Solo verso la fine del XVII secolo, l'interesse si sposta dalla formulazione di principi per le macchine semplici (come leva, piano inclinato e carrucola), a principi fondamentali per tutta la statica, partendo da Pierre Varignon (1654-1722), che intraprende il tentativo di fondare la statica sul principio del parallelogramma per le forze. Discute di questo tentativo con Johann I Bernoulli (1667-1748) tramite corrispondenza epistolare, fra cui troviamo una lettera del 26 gennaio 1717, dove Bernoulli formula il principio dei lavori virtuali in una forma generale.

Nella sua opera postuma *Nouvelle mécanique ou statique*, Varignon riprende la formulazione di Bernoulli e tratta numerosi esempi seguendo la sua impostazione. Riconosce l'utilità del principio di Bernoulli soprattutto per il fatto che è sufficiente conoscere tutte le possibilità di spostamento senza tuttavia dover conoscere il meccanismo concreto che le realizza ed è proprio questa caratteristica che risulta poi vantaggiosa nelle applicazioni. Con notazione moderna, il principio dei lavori virtuali di Bernoulli e Varignon esprime, in coordinate cartesiane, l'equilibrio di un punto P soggetto a più forze di vettore \vec{F}_i , nel seguente modo:

$$\sum_i F_i \cos(F_i \delta s_i) \delta s_i = \sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

dove X_i, Y_i, Z_i sono le componenti cartesiane delle forze \vec{F}_i ; $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ sono le componenti cartesiane dello spostamento virtuale δs_i secondo la direzione omologa e $(F_i \delta s_i)$ rappresenta l'angolo tra la direzione della forza e lo spostamento virtuale.

Per trovare la formulazione dell'equilibrio tramite una disequazione bisogna aspettare Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) con *Mémoire sur la statique* (1798).

Tornando alla storia del principio, troviamo una seconda linea di sviluppo, che accenna già al successivo principio di D'Alembert. Questa risale a Galilei e alle sue ricerche sul pendolo matematico, costituito da un filo considerato privo di massa, al cui estremo libero è attaccato un punto materiale, che oscilla sotto l'influsso della forza di gravità. Secondo quanto riferisce il suo allievo Vincenzo Viviani, Galilei già nel 1583 aveva determinato l'isocronismo di un tale pendolo, cioè il fatto che il tempo di oscillazione T non dipende dalla deviazione iniziale del punto materiale rispetto alla verticale, e neppure dalla stessa massa, ma soltanto dalla lunghezza l del pendolo, infatti si dimostra che T è proporzionale alla radice quadrata di l .

A differenza di Galilei, che determinò sperimentalmente i suoi risultati, Christiaan Huygens (1629-1695) verificò teoricamente l'isocronismo con l'aiuto del principio di conservazione della forza viva.

Successivamente, Jakob I Bernoulli (1654-1705) analizza i risultati precedenti e immagina un nuovo modello geometrico che rappresenta il pendolo fisico, costituito da due punti materiali P_1 e P_2 su un'asta AB priva di massa e libera di ruotare, distanti rispettivamente l_1 e l_2 ($l_1 < l_2$) dal centro di rotazione. Egli osserva che se il movimento dei punti materiali non fosse impedito dall'asta AB , essi cadrebbero con uguale velocità a causa della forza di gravità. Invece avviene che il punto materiale P_1 più vicino al centro di rotazione perde accelerazione, mentre l'altro punto materiale P_2 la guadagna, complessivamente però la perdita e il guadagno si equilibrano tramite l'asta.

Il nipote di Jakob I Bernoulli, Daniel (1700-1782) conduce un ragionamento analogo per i sistemi di masse puntiformi collegate fra loro in modo elastico, immaginando che a un determinato istante di tempo i singoli corpi del sistema si liberino dai loro vincoli, così che i punti assumano, in un intervallo di tempo infinitesimale dt , una nuova configurazione che non avrebbero potuto assumere in presenza di vincoli. Daniel cerca poi di risalire alle cause meccaniche che avrebbero potuto portare il sistema nello stesso stato che avrebbe raggiunto con i vincoli, in modo da determinare le effettive accelerazioni di un qualunque corpo del sistema, e verifica che l'ostacolo al moto è causato da forze di reazione, che non contribuiscono all'accelerazione del sistema.

I risultati di Jakob I e Daniel Bernoulli e di altri loro contemporanei, sono stati significativi per la formulazione del principio D'Alembert, che viene presentato nel 1742 in una lettera all'*Académie Royale des Sciences*, ma poi sviluppato dettagliatamente soltanto nel *Traité de dynamique*, apparso nel 1743 e ripresentato nel 1758 in una nuova edizione ampliata.

Anche D'Alembert parte dal problema generale di un sistema vincolato di punti materiali che si muove e in cui le singole parti del sistema non possono seguire il movimento incondizionatamente. Egli cerca quindi il moto che corrisponde effettivamente a ogni elemento del sistema. Perciò assume che le parti $A, B, C...$ del sistema subiscano in un infinitesimo intervallo di tempo, un movimento $a, b, c...$ che si considera composto da un movimento libero, cioè non soggetto a vincoli, $a', b', c'...$ e dai movimenti risultanti dai vincoli $\alpha, \beta, \gamma...$. Vengono chiamate "forze di reazione" queste forze interne, che ora dipendono dalle connessioni geometriche del sistema e vengono introdotte per la loro realizzazione fisica, e vengono chiamate "forze attive" quelle forze che agiscono dal di fuori, sul sistema e sono determinate fisicamente. D'Alembert arriva a concepire le forze di reazione dF_0 necessarie alla "correzione" del movimento (dal movimento libero) come nuove forze attive, cioè come causa dei movimenti $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ risultanti dai vincoli che agiscono sui singoli elementi materiali dm . Allora, dalla legge di Newton (1.3), per ogni corpo $A, B, C...$ vale

$$dF + dF_0 = a dm$$

ovvero

$$dF - a dm = -dF_0 ,$$

dove a è l'accelerazione. L'ultima equazione rappresenta il fatto che le forze attive dF , pur producendo accelerazione, non vengono "consumate" completamente, e ciò che rimane, la forza $-dF_0$, è perso ai fini dell'accelerazione. Ma dato che il movimento è determinato soltanto dalla forza dF , il resto deve in totale essere nullo, ossia deve avvenire che $\sum dF_0 = 0$, ovvero che le forze perdute si mantengono in equilibrio. L'originalità di questa impostazione non consiste ovviamente nel precedente, banale passaggio, ma proprio nel fatto che si aggiungono alle forze attive dF le accelerazioni negative delle masse $-a dm$ come "forze apparenti", così che il sistema possa essere

considerato statico.

La formulazione moderna del principio di D'Alembert risale a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) che non solo riprende il *Traité de dynamique* di D'Alembert, ma anche lo sviluppo più antico del principio dei lavori virtuali. Lagrange stesso definisce la propria formulazione come una combinazione di quest'ultimo principio con quello di D'Alembert (2.22).

Nella sua opera *Méchanique analytique* del 1788, Lagrange osserva che principio di D'Alembert non fornisce direttamente le equazioni necessarie alla soluzione dei problemi della dinamica, ma indica comunque come poter derivare queste equazioni dalle condizioni di equilibrio. Osserva inoltre che i risultati ottenuti in base a tale principio sarebbero quasi sempre più difficili da derivare di quelli ottenuti da principi semplici e diretti. Per questo suggerisce di non partire dalle forze perdute dF_0 come D'Alembert, ma di richiedere l'equilibrio delle forze $dF - a dm$. Su queste condizioni applica poi il principio dei lavori virtuali e constata che, nel caso di equilibrio, il lavoro virtuale scompare per qualsiasi spostamento virtuale δr . Così si ottiene:

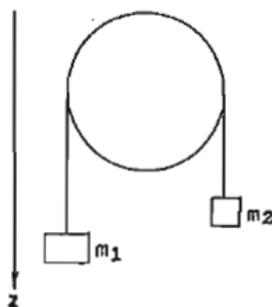
$$\sum (dF - a dm)\delta r = 0,$$

dove la somma è estesa a tutti gli elementi di massa dm . Se usiamo tale forma per un sistema con n elementi materiali discreti m_i , sui quali agiscono le forze $\vec{F}_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, otteniamo la forma canonica di quello che oggi si chiama principio di D'Alembert.

L'obiettivo principale di Lagrange era quello di unificare tutta la meccanica conosciuta ai suoi tempi e, a questo proposito egli ritenne di poter ricondurre "l'intera teoria della dinamica" alla sua nuova formulazione che combinava i due principi.

Come abbiamo appena visto, per giungere alla formulazione del principio di D'Alembert e del principio dei lavori virtuali è stato necessario un continuo studio dei problemi meccanici. Di seguito vediamo alcune applicazioni più significative che hanno segnato la storia dei due principi.

Esempio 3.1. Si considerino due corpi di massa m_1 e m_2 collegati da un filo che passa attraverso una carrucola, come nella seguente Figura 3.1.

Figura 3.1: carrucola con masse m_1 e m_2

Il sistema è in equilibrio se le forze ai due capi del filo sono uguali, ovvero

$$m_1 g = m_2 g . \quad (3.1)$$

Supponendo che $m_1 > m_2$, il corpo di massa m_1 si sposta verticalmente verso il basso e il corpo di massa m_2 verso l'alto, con accelerazioni rispettivamente uguali a \ddot{z} e $-\ddot{z}$, avendo posto l'asse z verticale diretto verso il basso.

Perciò i vettori delle forze perdute ai due capi del filo saranno verticali e con modulo rispettivamente uguale a

$$m_1 g - m_1 \ddot{z} \quad \text{e} \quad m_2 g + m_2 \ddot{z} . \quad (3.2)$$

Per determinare le equazioni del moto, possiamo utilizzare il Principio 2.8 di D'Alembert e nella condizione di equilibrio (3.1) del sistema sostituire alle forze attive le forze perdute (3.2), ottenendo

$$m_1 g - m_1 \ddot{z} = m_2 g + m_2 \ddot{z} ,$$

da cui

$$\ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Perciò il corpo m_1 scende di moto accelerato con una accelerazione g ridotta nel rapporto $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$.

Esempio 3.2. Consideriamo il caso del pendolo semplice (o ideale), rappresentato in Figura 3.2, in cui un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sotto l'azione del suo peso mg , su una circonferenza verticale di raggio l .

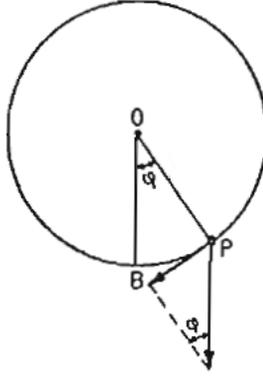


Figura 3.2: pendolo ideale

Poniamo l'origine degli archi nel punto B di equilibrio del pendolo e consideriamo positivo il senso antiorario. Possiamo denotare quindi con φ l'angolo \widehat{BOP} corrispondente all'angolo al centro dell'arco s , perciò $s = l\varphi$.

Dal Principio 2.8 di D'Alembert e dalle condizioni di equilibrio del sistema, possiamo ricavare le equazioni del moto. Ricordiamo che il pendolo ideale si trova in una condizione di equilibrio se è nulla la somma delle componenti delle forze tangenziali alla circonferenza descritta dal punto.

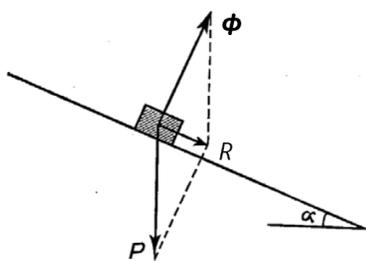
Osserviamo che il vincolo del sistema è un vincolo liscio, perciò la reazione vincolare che lo rappresenta deve essere diretta lungo il filo (Definizione 1.4) quindi deve avere componente tangenziale nulla lungo la circonferenza descritta dal punto P . La componente tangenziale del peso sarà $-mg \sin \varphi$ e quella dell'accelerazione $l\ddot{\varphi}$, quindi per il principio di D'Alembert

$$-mg \sin \varphi - ml\ddot{\varphi} = 0$$

da cui si ottiene l'equazione del moto del pendolo ideale.

Esempio 3.3. Infine, si consideri una massa vincolata a muoversi su un piano (privo di attrito) inclinato di un angolo α , sotto l'azione del suo peso $P = mg$, come si vede in Figura 3.3.

Chiamiamo \vec{R} la risultante della composizione della forza peso \vec{P} con la reazione vincolare (incognita) del piano $\vec{\Phi}$.

Figura 3.3: piano inclinato di un angolo α

Dalla legge di Newton (1.3), si ha quindi

$$\vec{R} = m \vec{a} ,$$

dove \vec{a} è l'accelerazione del corpo, parallela al piano.

Il principio di D'Alembert stabilisce che le forze \vec{P} , $\vec{\Phi}$, $-\vec{R}$ sono in equilibrio, perciò, conoscendo le condizioni di equilibrio su un piano inclinato, otteniamo le equazioni del moto del sistema. Ricordiamo quindi che un sistema di forze agenti su un corpo posto su un piano inclinato è in equilibrio se la risultante delle forze è normale al piano, ovvero è nulla la somma delle proiezioni ortogonali delle forze sul piano stesso. Tornando al nostro caso, osserviamo che il vettore della reazione vincolare $\vec{\Phi}$ è perpendicolare al piano inclinato (vincolo liscio, Definizione 1.4) perciò la sua proiezione sul piano stesso sarà nulla. Se proiettiamo, invece, la forza peso \vec{P} e la risultante $-\vec{R}$ otteniamo rispettivamente il vettore $\vec{P} \sin \alpha$ e $-\vec{R}$ stesso, perché parallelo al piano inclinato. Pertanto, la condizione di equilibrio del sistema è

$$\vec{P} \sin \alpha - \vec{R} = 0 ,$$

ossia

$$m g \sin \alpha - m a = 0 ,$$

dalla quale si ricava subito:

$$a = g \sin \alpha .$$

Bibliografia

- [1] E. Antona, E. Carrera, *Nota sul principio dei lavori virtuali, Scritti e testimonianze in ricordo di Attilio Lausetti*, Ed. Dipartimento di Ingegneria Aeronautica e Spaziale, Politecnico di Torino, aprile 1993
http://www.mul2.polito.it/materiale/Proceedings/1993/AntonaCarrera_AppuntiPLV.pdf

- [2] S. Caparrini, *La storia della Méchanique Analitique*, in "*Lettera Matematica Pristem*", n. 88-89, Springer, marzo 2014
http://matematica.unibocconi.it/sites/default/files/LM%2088-89_Caparrini.pdf

- [3] B. Carazza, *Da Galileo a Einstein*, Edizioni Zara, Parma, 1982

- [4] D. Graffi, *Elementi di Meccanica Razionale*, Pàtron Editore, Bologna, 1973

- [5] H. Pulte, R. Thiele, *L'Età dei Lumi: matematica. Meccanica variazionale*, in *Storia della Scienza*, Enciclopedia Italiana-Treccani, 2002
http://www.treccani.it/enciclopedia/1-eta-dei-lumi-matematica-meccanica-variazionale_%28Storia-della-Scienza%29/

- [6] A. Strumia, *Meccanica Razionale*, Casa Editrice Nautilus, Bologna, 1996