

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

DINAMICA DEI FLUIDI

Tesi di Laurea

Presentata da:
Sebastiano Cantarella

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Appello III
Anno Accademico 2018-2019

Sommario

La dinamica dei fluidi studia il moto dei fluidi avvalendosi delle leggi di conservazione già incluse nella meccanica newtoniana. Tali leggi possono essere lette mediante due descrizioni, lagrangiana ed euleriana, che verranno presentate nell'*Introduzione* insieme alle nozioni di base per poter studiare un dato fenomeno fisico con le equazioni della fluidodinamica. Mediante il teorema del trasporto di Reynolds, nel *Capitolo 1* verranno ricavate le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, si presenterà un approccio di base ai fluidi viscosi con l'equazione di Navier-Stokes e si studierà la propagazione dei parametri fluidodinamici con le onde sonore. Il *Capitolo 2*, seppur molto breve, mira a presentare le onde magnetoidrodinamiche di Alfvén in un plasma magnetizzato. Nel *Capitolo 3*, infine, si propongono quattro esempi di applicazioni astrofisiche della fluidodinamica: l'instabilità gravitazionale di Jeans, le onde d'urto, le onde di Alfvén nelle Nubi Molecolari Giganti e il concetto di *ram pressure stripping* nelle galassie 'medusa'.

Indice

Introduzione	i
1 Idrodinamica	1
1.1 Equazioni di continuità	1
1.1.1 Conservazione della massa	2
1.1.2 Conservazione della quantità di moto	2
1.1.3 Conservazione dell'energia	4
1.2 Fluidi viscosi	6
1.2.1 Equazione di Navier-Stokes	6
1.3 Onde sonore	7
1.3.1 Velocità del suono	7
2 Magnetoidrodinamica	9
2.1 Onde di Alfvén	9
3 Applicazioni astrofisiche: esempi	10
3.1 Instabilità gravitazionale di Jeans	10
3.2 Onde d'urto	12
3.3 Onde di Alfvén nelle Nubi Molecolari Giganti	13
3.4 Galassie 'medusa' e <i>ram pressure stripping</i>	13
Bibliografia	14

Introduzione

Un *fluido* è, nella sua definizione più semplice, ‘qualcosa che fluisce’ e lo studio del suo moto rientra nella *fluidodinamica*. Il concetto primitivo sopra esposto pone un’immediata distinzione tra fluidi e solidi, poiché questi ultimi manifestano macroscopicamente una propria forma e in essi gli atomi sono legati più rigidamente.

I fluidi possono essere classificati sostanzialmente in due fasi: liquida e gassosa. La differenza tra esse consiste principalmente nei legami intermolecolari dei materiali considerati. La fase liquida è di solito riscontrabile in ambienti ad alta densità (come sulla Terra) ed è caratterizzata da una bassa tendenza alla comprimibilità. I gas, invece, sono più facilmente comprimibili¹ e non necessitano di particolari condizioni ambientali (quali densità, temperatura e pressione) per poter essere classificati come tali. In astrofisica, la trattazione dei fluidi come fase gassosa (che si tratti di gas perfetto o degenere) è usualmente la più appropriata, perché non richiede delle particolari condizioni ontologiche da rispettare.

Non esiste un confine netto sulle possibili applicazioni della fluidodinamica nel campo della fisica e, in particolare, dell’astrofisica. Un fluido può essere l’acqua di un fiume o l’atmosfera terrestre, per esempio. Esso, però, può anche essere la materia interstellare (Interstellar Medium, ISM), il vento stellare, il materiale espulso dall’esplosione di una supernova, una stella di neutroni in una galassia, il mezzo intergalattico (Intergalactic Medium, IGM) o un ammasso di galassie. Si osserva, pertanto, che il concetto di fluido può essere applicato a più casi, anche a quelli meno intuitivi.

Affinché sia possibile studiare un determinato fenomeno fisico mediante la trattazione fluidodinamica, a esso si applica l’*ipotesi del continuo*, che consiste nel considerare l’insieme degli oggetti studiati (atomi, molecole, stelle, ...) come un corpo continuo. Si definisce *corpo continuo* l’insieme infinito dei punti materiali che riempiono un’intera regione regolare dello spazio. L’ipotesi del continuo è valida quando, posto un sistema fisico, è possibile trascurarne la struttura molecolare². Ciò implica che una piccola porzione di materia (più formalmente detta *elemento di volume*) contiene un numero elevato di particelle: se così non fosse, non si potrebbe trascurare la struttura atomica e le proprietà locali termodinamiche (per esempio, la pressione, la densità, il volume, la temperatura, l’entropia) non sarebbero uniformi nell’elemento di volume.

Si assume, quindi, che un elemento di fluido rispetti le seguenti caratteristiche:

1. Le dimensioni della regione di spazio considerata sono molto più piccole di una *lunghezza di scala* nella quale una qualsiasi variabile fisica q varia in maniera significativa. Quindi:

$$l_{\text{regione}} \ll l_{\text{scala}} \sim \frac{q}{\nabla q} \quad (1)$$

¹Si vedrà più nel dettaglio la condizione di comprimibilità di un fluido.

²Con questa approssimazione, la materia contenuta in un piccolo elemento di volume viene considerata diffusa uniformemente in esso, invece di essere concentrata in una sua piccola frazione.

2. Contiene un quantitativo sufficientemente elevato di particelle affinché si possano ignorare le fluttuazioni dovute al numero discreto di particelle. Posta n la densità numerica di particelle per unità di volume e $l_{regione}$ il volume rappresentativo della regione, la condizione può essere scritta come:

$$nl_{regione}^3 \gg 1 \quad (2)$$

3. Se il fluido è anche *collisionale*, allora le sue dimensioni devono essere molto più grandi di quelle del cammino libero medio λ :

$$l_{regione} \gg \lambda \quad (3)$$

Un fluido è detto *collisionale* quando dalle interazioni tra le particelle di un fluido³ segue una distribuzione di velocità delle particelle che massimizza l'entropia⁴ del sistema a una temperatura fissata. Date temperatura, densità e distribuzione delle velocità delle particelle nel sistema, è possibile ricavare la pressione e, di conseguenza, l'equazione di stato per un fluido collisionale.

Esistono due approcci per formulare le equazioni della fluidodinamica:

- DESCRIZIONE EULERIANA: si studiano le variazioni delle proprietà fisiche di una piccola regione di fluido posta a una posizione spaziale fissata nel tempo. Le quantità fisiche considerate sono funzione della posizione \mathbf{r} dell'elemento di volume e del tempo. La variazione temporale di una qualsiasi quantità q a una posizione fissata è espressa, nella descrizione euleriana, come $\partial q/\partial t$.
- DESCRIZIONE LAGRANGIANA: si sceglie un particolare elemento di fluido e si studia come cambiano le sue proprietà fisiche. In questa descrizione, il sistema di riferimento (spaziale) dell'osservatore è *comovente* con il fluido e le proprietà fisiche dipendono dal tempo e dalla posizione (variabile) \mathbf{a} dell'elemento di volume. La derivata temporale lagrangiana di una quantità fisica q , denotata con Dq/Dt , è costituita dalla derivata parziale temporale di q ad \mathbf{a} fissato⁵, ossia la derivata temporale euleriana di q , e dalla variazione di q nella nuova posizione dell'elemento di fluido, poiché esso si muove nel tempo con velocità \mathbf{v} . In sintesi, approssimando al primo ordine, si può scrivere:

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q \quad (4)$$

Dq/Dt è anche detta *derivata materiale* ovvero *derivata convettiva*.

In conclusione, la descrizione euleriana si riferisce allo studio dei fluidi visto da un sistema di riferimento fisso nel tempo, mentre la descrizione lagrangiana studia la fluidodinamica con un sistema di riferimento solidale al particolare elemento di fluido considerato. Si nota che la seconda descrizione risulta conveniente per focalizzarsi sul comportamento di un determinato elemento di fluido. Indifferentemente dall'uso del primo o del secondo approccio per lo studio, le equazioni utilizzate sono espressione dei principi di conservazione, alla base della fisica.

³Ciò non implica, di per sé, che il fluido collida fisicamente.

⁴L'entropia di un sistema può essere vista come la misura del numero di configurazioni microscopiche distinte che corrispondono a una data proprietà locale macroscopica del fluido.

⁵L'elemento di fluido, nella derivata temporale, viene quindi considerato fissato spazialmente.

Capitolo 1

Idrodinamica

1.1 Equazioni di continuità

Le equazioni della fluidodinamica, come accennato nell'introduzione, si basano sulle leggi di conservazione, già presenti nella meccanica newtoniana. Le equazioni che esprimono localmente la conservazione di una grandezza fisica sono dette *equazioni di continuità*. Esistono principalmente due metodiche per ricavarle.

Il primo propone un'analisi dal punto di vista molecolare: si considera il fluido composto da un numero elevato di particelle, il cui moto è dettato dalle leggi della dinamica. Il fenomeno fisico macroscopico, pertanto, è visto come una conseguenza della visione microscopica e il suo comportamento complessivo viene predetto dalle leggi della meccanica e dalla teoria della probabilità. Posto il fluido in equilibrio, con questa trattazione si ricavano le equazioni di continuità e i coefficienti legati al trasporto di un fluido, come quello di viscosità cinematica. Questo metodo, tuttavia, risulta incompleto per i gas poliatomici e per i liquidi.

Il secondo procedimento si basa sulla derivazione delle equazioni del moto dei fluidi tramite l'ipotesi del continuo. In ciascun elemento di volume, che sotto le assunzioni precedenti può essere assimilato a un punto del continuo, le variabili di campo (velocità, pressione, densità, ...) assumono un unico valore. Queste ultime sono governate da un sistema di equazioni differenziali, originato dalle equazioni di continuità della massa, della quantità di moto e dell'energia. La risoluzione di tale sistema esprime la dipendenza delle variabili di campo dallo spazio e dal tempo.

Applicando sul fluido l'ipotesi del continuo, le equazioni di continuità possono essere dimostrate mediante il *teorema del trasporto di Reynolds*, che, in una data regione di volume, consente di passare dal sistema di coordinate lagrangiane al sistema di coordinate euleriane. Definita α come la proprietà di un fluido – dipendente dal tempo, poiché la regione di volume si muove con il fluido –, la sua variazione temporale integrata sul volume considerato si può esprimere come:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{v}) \right) dV \quad (1.1)$$

ove \mathbf{v} è la velocità di un elemento di fluido.

Il formalismo lagrangiano all'interno del teorema di Reynolds consentirà di derivare con immediatezza le equazioni di continuità.

1.1.1 Conservazione della massa

Si consideri una porzione di fluido a una singola fase di massa m e volume V arbitrario. Posto che la regione di fluido fluisca nel tempo, se si considera un sistema di riferimento comovente con essa, allora le sue dimensioni e la sua forma possono variare, ma la sua massa rimane invariata¹. Dal teorema del trasporto di Reynolds, ponendo la densità locale $\rho(t) = \alpha(t)$, si osserva che nel sistema di riferimento lagrangiano:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.2)$$

La massa, quindi, si conserva nel sistema di riferimento solidale alla regione di fluido. Dal sistema di riferimento euleriano, considerando il membro a destra di (1.1), si ha che:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0 \quad (1.3)$$

Data l'arbitrarietà sulla forma del volume, l'integrale vale zero per qualunque volume scelto. Pertanto, l'integrando deve essere nullo. Ne segue che l'equazione di continuità della massa si può esprimere come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.4)$$

Quest'ultima espressione è detta *equazione di continuità* perché non esprime solo la continuità della massa, ma implica anche la continuità della velocità nel fluido.

Se la variazione temporale di densità in un fluido può essere trascurata, come spesso accade per i liquidi, allora si dice che il fluido è *incompressibile*. In questo caso, si conservano la massa, il volume e, di conseguenza, la densità. Matematicamente parlando:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (1.5)$$

Nota la (4) e sapendo che $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha$, la (1.4) può essere espressa come:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (1.6)$$

Poiché vale (1.5), allora la *condizione di incompressibilità* diventa²:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (1.7)$$

Questa condizione non vale solo nel caso in cui la densità ρ sia costante ovunque, ma anche quando gli elementi di fluido mantengono la propria densità costante nella loro traiettoria. Allora, dal punto di vista lagrangiano, $D\rho/Dt = 0$, ma $\nabla \rho \neq 0$, perché la densità non è ovunque costante.

1.1.2 Conservazione della quantità di moto

Il principio di conservazione della quantità di moto si ricava utilizzando la seconda legge di Newton. Si considera un elemento di fluido e un sistema di riferimento comovente con esso (coordinate lagrangiane). Allora la variazione temporale della quantità

¹Si considerano irrilevanti le reazioni nucleari avvenenti al suo interno.

² $\rho = 0$ non può essere una soluzione fisica accettabile.

di moto equivale alla forza netta agente sull'elemento di massa³. Le forze esterne possono essere suddivise in forze di volume (per esempio, forza gravitazionale e forza elettromagnetica⁴) e in forze di superficie (come le forze di pressione e le forze viscosive⁵). Se \mathbf{f} è la forza risultante per unità di massa, allora la forza netta esterna \mathbf{F} che agisce su una massa di volume V è:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (1.8)$$

Se \mathbf{p} , invece, è la forza di pressione risultante per unità di area, allora la forza netta di pressione \mathbf{P} agente su una superficie S di un volume V è:

$$\mathbf{P} = - \int_{\partial V} \mathbf{p} dS \quad (1.9)$$

Il segno meno si spiega considerando che la forza di pressione agisce verso l'esterno, mentre la forza di superficie verso l'interno. La somma di (1.8) e di (1.9) deve essere uguale alla variazione temporale della quantità di moto. Esprimendo la quantità di moto per unità di volume come $\rho \mathbf{v}$, si ha che la quantità di moto contenuta in una massa dal volume V è $\int_V \rho \mathbf{v} dV$. In un sistema di riferimento lagrangiano, la variazione temporale della quantità di moto contenuta nella massa m di volume V è:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial V} \mathbf{p} dS \quad (1.10)$$

In generale, la forza superficiale non è necessariamente perpendicolare alla superficie su cui agisce. Per questo motivo, le forze di superficie agenti su un elemento di fluido devono essere rappresentate da un tensore del secondo ordine $\boldsymbol{\sigma}$, detto *tensore degli sforzi*. Le nove componenti del tensore sono suddivise nel modo seguente: per ogni piano delle coordinate, una componente è normale a esso e le altre due sono di taglio. Gli elementi della matrice di rappresentazione del tensore degli sforzi sono denotati come σ_{ij} , ove i e j indicano che la tensione agisce sul piano $x_i = \text{costante}$ nella direzione x_j .

Poiché ogni componente della forza di superficie agisce su un piano $x_i = \text{costante}$ nella direzione x_j , allora si può relazione il vettore componente \mathbf{p}_j con il tensore degli sforzi:

$$\mathbf{p}_j = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{n}}_i \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad (1.11)$$

ove $\hat{\mathbf{n}}_i$ è il versore normale al piano $x_i = \text{costante}$.

L'equazione di conservazione della quantità di moto diventa:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho \mathbf{f} dV - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (1.12)$$

³Si può anche pensare che la forza di inerzia dovuta all'accelerazione dell'elemento sia uguale alla forza netta che agisce su di esso.

⁴In questo capitolo non si considererà la presenza di campo magnetico nel fluido.

⁵Queste ultime verranno considerate nella sezione 1.2.

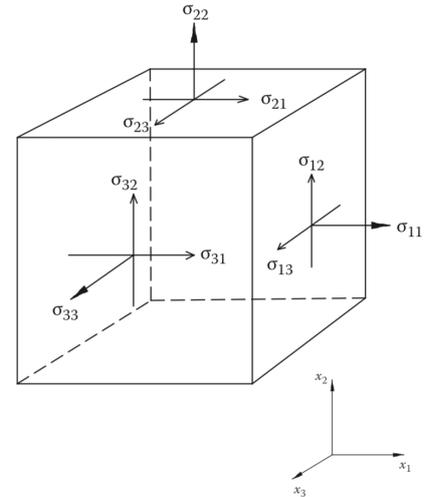


Figura 1.1: Rappresentazione delle nove componenti del tensore degli sforzi agenti su un cubo di dimensioni arbitrarie.

Si osserva l'applicazione del teorema della divergenza nell'integrale di superficie. L'equazione (1.12) può essere scritta nella forma $\int_V (...)dV = 0$ dopo aver trasformato la derivata lagrangiana nel primo membro con il teorema di Reynolds e dopo aver trasportato il membro di destra in quello di sinistra. Si ottiene, dunque:

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) dV = 0 \quad (1.13)$$

Si segue, a questo punto, lo stesso ragionamento svolto per la conservazione della massa: se l'integrale di volume è nullo per ogni scelta di V , allora l'integrando è anch'esso nullo. L'equazione di conservazione della quantità di moto è:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} = \rho\mathbf{f} - \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.14)$$

Le componenti del tensore associato al termine $(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ sono fisicamente equivalenti a una pressione. La pressione dovuta a questo termine viene spesso detta *pressione di ariete*. Essa è associata al moto d'insieme del fluido e differisce dalla pressione termica in quanto quest'ultima si riferisce ai moti termici del fluido, che sono isotropi. In caso di moti termici casuali, la pressione termica è indipendente dalla direzione dei moti ed è solo una quantità scalare. Ciò implica, in altri termini, che la pressione termica agisce sempre perpendicolarmente a ogni superficie del fluido. La pressione di ariete, invece, poiché dovuta al moto d'insieme del fluido, dipende dalla direzione del moto.

Se dalla (1.14) si svolgono le derivate $\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t = \rho(\partial\mathbf{v}/\partial t) + \mathbf{v}(\partial\rho/\partial t)$ e $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}))$ e sapendo che dall'equazione di continuità (1.4) che $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = -\partial\rho/\partial t$, nel membro di sinistra si ottiene:

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial\rho}{\partial t} - \mathbf{v} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

da cui segue una riscrittura dell'equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \rho\mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.15)$$

Si può osservare che i termini a sinistra dell'equazione esprimono ancora la variazione della quantità di moto, mentre i termini a destra le forze agenti sull'elemento di fluido.

1.1.3 Conservazione dell'energia

Il principio di conservazione dell'energia può essere ricavato mediante il primo principio della termodinamica. Considerato l'elemento di fluido in movimento, si ha che la sua energia istantanea è somma dell'energia interna per unità di massa e e dell'energia cinetica per unità di massa $\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

$$E = \int_V \left(\rho e + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (1.16)$$

La variazione temporale di energia totale, pertanto, è dato dalla variazione del lavoro svolto dalle forze esterne e dal calore dovuto alla conduzione. Le forze esterne sono divise, come visto nella sottosezione precedente, in forze di volume e in forze di superficie. La variazione temporale di energia per le prime e per le seconde può essere scritta, rispettivamente, $\int_V \mathbf{v} \cdot \rho\mathbf{f} dV$ e $-\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} dS$.

Se \mathbf{q} è il vettore *flusso di calore conduttivo* che abbandona la regione di fluido e $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale alla superficie da cui fuoriesce il calore, allora la quantità di calore che fuoriesce dalla regione di volume V nell'unità di tempo e nell'unità di area è $-\int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$. Il segno meno è dovuto alla fuoriuscita di calore, quindi a una perdita energetica. Applicando il teorema della divergenza in tale espressione, si osserva che:

$$-\int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad (1.17)$$

Utilizzando il formalismo lagrangiano, la variazione di energia totale di una regione arbitraria di volume V si scrive:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} dS - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} dS \quad (1.18)$$

Utilizzando il teorema del trasporto di Reynolds (1.1) nel membro a destra, ricordando le condizioni (1.11) e (1.17) e applicando il teorema della divergenza nella (1.9), l'equazione (1.18) può essere scritta nella forma $\int_V (\dots) dV = 0$. Con il medesimo ragionamento di prima (se l'integrale di volume è nullo per ogni V scelto, allora anche l'integrando deve essere nullo) si ottiene, pertanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot \left(\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1.19)$$

Espandendo i termini del membro di sinistra, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e + \\ & + e \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \\ & = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + (\rho \mathbf{v}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \\ & = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Espandendo i termini del membro di destra e uguagliando a (1.20), segue che:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e + \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1.21)$$

Si osservi che i termini tra parentesi nei membri a destra e a sinistra della (1.21) sono uguali per la conservazione della quantità di moto. Si arriva, pertanto, alla riscrittura dell'equazione di conservazione dell'energia (1.18) in forma locale:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1.22)$$

Si noti l'assenza di contributi da parte delle forze di volume, che non modificano l'energia totale di un fluido.

1.2 Fluidi viscosi

Si considerano, adesso, gli effetti della dissipazione dell'energia, fenomeno che può accadere o durante il moto o a causa del moto stesso. La dissipazione energetica è il risultato dell'irreversibilità termodinamica del moto, la quale è dovuta alla conduzione termica e alla frizione interna, detta altrimenti *viscosità*.

Nell'equazione di conservazione della quantità di moto (1.14) si può notare la presenza di una componente tensoriale, la quale è divisa sostanzialmente in due parti: una è legata alla pressione di ariete ($\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$) e l'altra è legata alle aggiuntive forze di superficie ($\boldsymbol{\sigma}$). Il significato fisico della divergenza di queste due grandezze tensoriali consiste nel trasferimento di quantità di moto attraverso una superficie. In caso di un fluido ideale, il tensore degli sforzi può essere espresso da una pressione isotropa:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbb{I} \quad (1.23)$$

ove \mathbb{I} è la matrice identità e p la pressione (scalare).

Il trasferimento di quantità di moto, in questo caso, è un processo completamente reversibile, in quanto è causato dal trasporto meccanico delle varie particelle del fluido da un punto a un altro e dalle forze di pressione che agiscono nel fluido. La viscosità, invece, costituisce un trasferimento irreversibile di quantità di moto da un punto dove la velocità è maggiore in modulo a un punto dove la velocità ha intensità minore. Nel caso di un fluido viscoso, il tensore degli sforzi è costituito da una componente isotropa di pressione e da una componente di trasferimento irreversibile viscoso di quantità di moto all'interno del fluido.

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbb{I} - \boldsymbol{\sigma}' \quad (1.24)$$

ove $\boldsymbol{\sigma}'$ è detto *tensore degli sforzi viscosi*. Utilizzando la scelta costitutiva⁶ di Maxwell per il caso di un fluido visco-elastico, si può scrivere il tensore degli sforzi viscosi come:

$$\boldsymbol{\sigma}' = -2\eta\mathbf{D} - \lambda\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbb{I} \quad (1.25)$$

ove il tensore \mathbf{D} è detto *mobilità diffusiva*, η è il coefficiente di *viscosità di scorrimento*, $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\eta$ è un altro coefficiente di viscosità, che include ζ , il coefficiente di *viscosità di profondità*. Il tensore degli sforzi di un fluido viscoso, con la scelta costitutiva di Maxwell, diventa:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbb{I} - 2\eta\mathbf{D} - \lambda\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbb{I} \quad (1.26)$$

Il segno negativo nei termini del tensore degli sforzi viscosi è giustificato se si guarda l'equazione di conservazione della quantità di moto (1.15): il contributo finale alla variazione temporale della quantità di moto è positiva perché esiste un aggiuntivo trasferimento di quantità di moto dentro il fluido.

1.2.1 Equazione di Navier-Stokes

Introducendo il tensore degli sforzi con i contributi viscosi (1.26) nell'equazione di conservazione della quantità di moto (1.15), per un fluido visco-elastico si ricava l'*equazione di Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \rho\mathbf{f} - \nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.27)$$

⁶Per *scelta costitutiva* si indica l'insieme delle equazioni matematiche che modellano il comportamento macroscopico del fluido.

Dividendo entrambi i membri per la densità, l'equazione può essere riscritta come:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.28)$$

Il rapporto $\nu = \eta/\rho$ è detto *viscosità cinematica* e indica la tendenza del materiale del fluido a mantenere la non-conservatività.

È, inoltre, interessante analizzare il rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosse dall'equazione di Navier-Stokes. Tale rapporto è adimensionale ed è indicato dal *numero di Reynolds* R_e :

$$R_e = \frac{\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\eta \Delta \mathbf{v}} \approx \frac{\rho L \mathbf{v}}{\eta} = \frac{L \mathbf{v}}{\nu} \quad (1.29)$$

Si noti l'inversa proporzionalità tra il numero di Reynolds R_e e la viscosità cinematica ν : ciò implica che fluidi molto viscosi hanno un basso numero di Reynolds (le forze di attrito preponderano sulle forze di inerzia), mentre un fluido non viscoso possiede un numero di Reynolds alto (le forze di inerzia preponderano sulle forze di attrito). Il moto dei fluidi viscosi è *laminare* e la stratificazione del fluido è causata dalle forze viscosse. Il moto *turbolento* dei fluidi non viscosi, invece, è dovuto al moto caotico delle particelle del fluido e, pertanto, generato dalle forze di inerzia. In quest'ultimo caso, il tensore degli sforzi è dato solo da (1.23) e l'equazione (1.15) corrisponde all'*equazione di Eulero*.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.30)$$

I numeri di Reynolds hanno un ruolo significativo nell'analisi di stabilità dei moti di fluido. Difatti, se alla base delle equazioni della fluidodinamica sono presenti delle condizioni di stabilità, allora *deve* esistere in linea di principio una soluzione esatta stazionaria. L'insieme di queste soluzioni esiste per qualsiasi numero di Reynolds considerato. Tuttavia, sebbene esistenti, non tutte le soluzioni delle equazioni del moto possono essere fisicamente accettabili: possono essere stabili ma non obbedire alle equazioni della fluidodinamica. Per esempio, ogni piccola perturbazione deve diminuire nel corso del tempo, altrimenti renderebbe instabile il flusso del fluido e non può essere accettata. I dati sperimentali sembrano indicare l'esistenza di un *numero di Reynolds critico* R_{cr} oltre il quale il flusso è instabile rispetto alle perturbazioni infinitesimali.

1.3 Onde sonore

Si consideri un fluido compressibile e si ipotizzi la presenza di una piccola oscillazione al suo interno: il moto oscillatorio di piccola ampiezza nel fluido compressibile è detto *onda sonora*. Il ruolo fisico di un'onda sonora consiste nelle periodiche e alternate compressioni e rarefazioni del mezzo in un punto del fluido, così da propagare nel mezzo una data informazione. Le onde sonore costituiscono il principale meccanismo astrofisico per propagare le perturbazioni in un fluido⁷.

1.3.1 Velocità del suono

Per semplificazioni di calcoli, si suppone un fluido compressibile non viscoso inizialmente a riposo ($\mathbf{v}_0 = 0$) in cui le forze di volume sono trascurabili ($\mathbf{f} \sim 0$). Si introduce

⁷Nel Capitolo 2 si guarderà anche all'esistenza di onde non sonore.

uno stato di piccole perturbazioni $s' = (p', \rho', \mathbf{v}')$ nello stato di configurazione iniziale (di equilibrio) $s_0 = (p_0, \rho_0, \mathbf{v}_0)$. I parametri fluidodinamici citati diventano:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' = \mathbf{v}' \quad (1.31)$$

Con $p' \ll p_0, \rho' \ll \rho_0, v' \ll 1$. Si inseriscono i parametri perturbati nell'equazione di continuità (1.4) e nell'equazione di Eulero (1.30). Linearizzandole⁸, si ottiene:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0 \quad (1.32a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' = 0 \quad (1.32b)$$

Applicando $\frac{\partial}{\partial t}$ (1.32a) e $\nabla \cdot$ (1.32b) e sottraendo il secondo risultato al primo, si ha:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (1.33)$$

Questo modello descrive le onde sonore di piccola ampiezza. Poiché è stato considerato un fluido ideale, le onde sonore al suo interno sono adiabatiche. Quindi è possibile collegare la perturbazione p' a ρ' :

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho' \quad (1.34)$$

Sostituendo (1.34) in (1.33), si ricava l'equazione d'onda per il modello delle onde sonore di piccola ampiezza⁹:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \rho' = 0 \quad (1.35)$$

dove è stata esplicitata la *velocità del suono* c_s :

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}^{1/2} \quad (1.36)$$

Le onde sonore sono onde *longitudinali* che si propagano nel fluido in quanto una perturbazione nella densità genera un gradiente di pressione che accelera l'elemento di fluido. La velocità del fluido risultante induce a ulteriori perturbazioni di densità e la perturbazione si propaga.

Trattandosi di una perturbazione adiabatica, si ha la dipendenza $p \propto \rho^\gamma$ e sapendo che in un gas ideale

$$p = \frac{k\rho T}{\mu} \quad (1.37)$$

ove $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K è la costante di Boltzmann, T la temperatura e μ il peso molecolare medio, si può scrivere la velocità del suono come:

$$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}^{1/2} = \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{kT}{\mu} \quad (1.38)$$

Nella maggioranza dei casi, in un ambiente astrofisico l'elemento più abbondante è l'idrogeno atomico (HI). Pertanto, $\mu = m_p = 1.67 \cdot 10^{-24}$ g, $\gamma = 4/3$ e la velocità del suono può essere espressa come:

$$c_s \simeq 10^2 \sqrt{T} \text{ m/s} \quad (1.39)$$

⁸Si trascurano, pertanto, i termini del secondo ordine.

⁹Si osservi che l'espressione 'piccola ampiezza' è legata alle perturbazioni infinitesimali.

Capitolo 2

Magnetoidrodinamica

Si parla di *magnetoidrodinamica* (abbreviato in MHD) quando nello studio di un fluido si considerano i campi elettrici \mathbf{E} e magnetici \mathbf{B} al suo interno. Il ruolo del campo magnetico in un fluido diventa importante quando lo diventa anche la densità elettronica n_e (o ionica n_z). In termini di temperatura, i campi magnetici non possono essere trascurati a partire da $T > 10^4$ K. Un fluido totalmente ionizzato ma globalmente neutro è definito *plasma* e può essere trattato come tale se la lunghezza lineare della regione considerata è maggiore della *lunghezza di Debye* λ_D :

$$\lambda_D = 6.9 \text{ cm} T^{1/2} [\text{K}] n_e^{-1/2} [\text{cm}^{-3}] \quad (2.1)$$

Inoltre, in astrofisica, un fluido deve avere velocità non relativistiche ($v \ll c$), conduttività elettrica elevata¹ ($\sigma \rightarrow \infty$) ed essere collisionale ($\lambda_{mfp} \ll \lambda_D \ll l_{regione}$).

Nella prossima sezione si discuterà qualitativamente di una modalità ulteriore per propagare delle informazioni all'interno di un fluido magnetizzato.

2.1 Onde di Alfvén

Si ipotizzi un fluido magnetizzato a elevata conduttività elettrica, non viscoso ($\eta = 0$) e con densità $\rho = \text{costante}$ (fluido incompressibile). Nell'equazione di Eulero (1.30) si introduce una forza di volume magnetica $\mathbf{F}_m = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0}$, con μ_0 permeabilità magnetica nel vuoto.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (2.2)$$

Si linearizza il sistema costituito da (2.2), dall'equazione di continuità (1.4), dalla condizione di incompressibilità del campo magnetico ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) e dall'equazione di Maxwell della magnetoidrodinamica ideale ($\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v})$). Le soluzioni del tipo *onde dispersive*² forniscono le *onde dispersive di Alfvén*, la cui velocità di fase è:

$$v_A^\pm = \pm \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (2.3)$$

Le onde di Alfvén sono onde magnetoidrodinamiche *trasversali*: lo spostamento del fluido è perpendicolare sia al campo magnetico \mathbf{B}_0 sia al vettore d'onda \mathbf{k} . Esse non sono onde di compressione, come quelle sonore, ma sono perturbazioni la cui velocità tende a deformare le linee di campo magnetico.

¹In questo modo, i campi elettrici $\mathbf{E} = \mathbf{j} / \sigma$, con \mathbf{j} densità di corrente, sono trascurabili.

²Ovvero onde del tipo $0 \neq \delta s = s_1 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$, con \mathbf{k} vettore d'onda reale e ω pulsazione.

Capitolo 3

Applicazioni astrofisiche: esempi

3.1 Instabilità gravitazionale di Jeans

Nella sezione 1.3.1 sono state ricavate le onde sonore di un fluido a riposo ($\mathbf{v}_0 = 0$) ideale senza considerare la gravità. Se adesso quest'ultima, nel ruolo di autogravità, venisse introdotta nell'equazione di Eulero (1.30), allora si dovrebbe introdurre anche una perturbazione nel campo gravitazionale mediante il potenziale gravitazionale per unità di volume ψ . Inoltre, all'equazione di Eulero bisognerebbe affiancare l'equazione di continuità (1.4) e l'equazione di Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$. Inserendo le perturbazioni

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad \psi = \psi_0 + \psi' \quad (3.1)$$

nel sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \psi \\ \Delta \psi = 4\pi G \rho \end{cases} \quad (3.2)$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\nabla \rho'}{\rho_0} - \nabla \psi' \\ \Delta \psi' = 4\pi G \rho' \end{cases} \quad (3.3)$$

Si cercano soluzioni del tipo onde dispersive:

$$\delta \rho = \rho_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad \delta \psi = \psi_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (3.4)$$

Sostituendo le (3.4) nel sistema (3.3), si ha:

$$\begin{cases} -\rho_1 \omega + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ -\rho_0 \omega \mathbf{v}_1 = -c_s^2 \rho_1 \mathbf{k} - \rho_0 \psi_1 \mathbf{k} \\ -k^2 \psi_1 = 4\pi G \rho_1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Si moltiplica la seconda equazione del sistema scalarmente per \mathbf{k} e, collegandola alla prima e alla terza equazione, si ricava:

$$-\omega(\rho_0 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k}) = -c_s^2 \rho_1 k^2 - \rho_0 (\psi_1 k^2) \Rightarrow -\rho_1 \omega^2 = -c_s^2 \rho_1 k^2 + 4\pi G \rho_0 \rho_1 \quad (3.6)$$

Semplificando ρ_1 presente in tutti i termini di (3.6) ed esplicitando ω :

$$\omega^2 = c_s^2 \left(k^2 - \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \right) \quad (3.7)$$

ove si definisce il *numero d'onda critico di Jeans*:

$$k_J^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \quad (3.8)$$

La (3.7) può essere riscritta come:

$$\omega^2 = c_s^2 (k^2 - k_J^2) \quad (3.9)$$

Condizione sufficiente per l'insorgenza del collasso gravitazionale è:

$$k^2 < k_J^2 \quad (3.10)$$

Ciò implica che la pulsazione ω è immaginaria e che il sistema è instabile: la pressione tende a smorzare le perturbazioni di densità, mentre la gravità comprime la materia all'esterno. La condizione (3.10) è, dunque, un criterio per stabilire quando in una determinata regione di spazio l'interazione gravitazionale prevale sulle altre forze, facendo collassare il sistema. Bisogna sottolineare, tuttavia, che in questa trattazione sono state trascurate la costante cosmologica Λ e l'ipotesi circa l'esistenza della materia oscura, che modificano il numero d'onda sopra riportato.

È anche utile definire la *lunghezza d'onda critica di Jeans*

$$\lambda_J := \frac{2\pi}{k_J} \quad (3.11)$$

che indica la massima lunghezza di stabilità. Una riscrittura della condizione (3.10) è $\lambda > \lambda_J$: in altri termini, lunghezze maggiori della lunghezza critica di Jeans comporterebbero il collasso gravitazionale nella regione considerata. La condizione di collasso può essere ulteriormente riscritta se si considera la *massa di Jeans*, ovvero la massa contenuta in una sfera di raggio λ_J :

$$M_J := \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\lambda_J}{2} \right)^3 \quad (3.12)$$

Per $M > M_J$, la soluzione è instabile e genera collasso gravitazionale.

L'instabilità di Jeans è di fondamentale importanza in astrofisica e spiega il motivo basilare per cui l'Universo non è uniforme: la presenza di numerose strutture auto-gravitanti nell'Universo, come le stelle e le galassie, è dovuta a regioni di spazio con una massa superiore a quella di Jeans, causa che ha dato inizio al collasso. Le onde sonore non riescono a superare il collasso e a generare un gradiente di pressione capace di controbilanciarlo. Di conseguenza, il collasso diventa non lineare e i termini del secondo ordine dei modelli non possono più essere trascurati.

È interessante notare che, grazie all'astronomia millimetrica è stato possibile osservare la struttura interna delle Nubi Molecolari Giganti, trovando densi nuclei gassosi con temperature $T \sim 10$ K e densità numeriche $n \sim 10^{11} \text{ m}^{-3}$. In quelle regioni, la massa di Jeans è dell'ordine delle masse solari, indice che tali nuclei densi nelle Nubi Molecolari Giganti possano coincidere con le regioni instabili di Jeans destinate alla formazione di stelle.

3.2 Onde d'urto

Se un elemento di fluido è soggetto a perturbazioni non lineari, come un'elevata compressione o accelerazioni a velocità maggiori di quella del suono nel mezzo, allora il risultato è la propagazione di un'onda d'urto (o *shock*, in inglese). In astrofisica, gli shock possono essere, per esempio, dovuti alla forza gravitazionale, che accelera il gas a elevate velocità, oppure causati dall'esplosione di una supernova nel mezzo interstellare.

Il rapporto adimensionale tra l'intensità della velocità di una regione di fluido e la velocità del suono all'interno del fluido è detto *numero di Mach*: $M = v/c_s$. Posto un ostacolo in un flusso supersonico, ossia con un numero di Mach $M > 1$, le perturbazioni non possono propagarsi in una direzione diversa a causa della presenza dell'ostacolo, si muovono indisturbato fino a incontrarlo e a modificare bruscamente le sue proprietà fisiche, generando in esse una discontinuità.

Risulta necessario studiare il flusso del fluido attraverso lo shock, che risulta una superficie¹ di confine tra la regione di fluido imperturbato e quella che ha subito l'onda d'urto. Anche in questo caso valgono le tre equazioni di continuità (massa, quantità di moto, energia), che possono essere adattate se l'origine del sistema di riferimento è posizionata nel fronte dello shock. Nella prospettiva del fronte dello shock, il fluido imperturbato giunge verso di esso con una velocità \mathbf{v}_1 , mentre il fluido perturbato si allontana da esso con una velocità \mathbf{v}_2 . Utilizzando l'equazione di continuità (1.4) e tenendo conto che il flusso di massa si mantiene costante, in quanto lo spessore della discontinuità è posto infinitesimo, si ricava:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (3.13)$$

Mediante l'equazione di Eulero (1.30), trascurando il contributo del potenziale gravitazionale, poiché continuo nello shock, si ha:

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad (3.14)$$

Dall'equazione dell'energia, considerando un urto adiabatico, si ottiene:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}v_2^2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (3.15)$$

(3.13), (3.14) e (3.15) sono dette *relazioni di Rankine-Hugoniot*. Se l'onda d'urto è adiabatica, allora $p = K\rho^\gamma$, ove K è una costante. Ne segue che l'energia interna per unità di massa può essere scritta come $e = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$. Supponendo un forte shock ($p_1 \ll p_2$) e che γ non cambi lungo lo shock, il rapporto tra le densità ρ_1 e ρ_2 diventa:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad (3.16)$$

Nel caso di un gas monoatomico, $\gamma = 5/3$ e la compressione massima del gas a seguito di un urto adiabatico è pari a un fattore 4.

¹Matematicamente, il fronte dello shock viene modellato come una discontinuità; fisicamente, lo spessore del fronte dello shock è piccolo, ma non nullo.

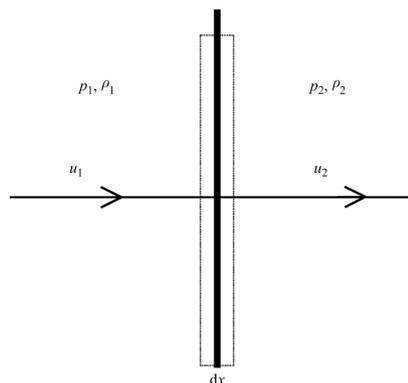


Figura 3.1: Rappresentazione grafica dello shock nel sistema di riferimento coincidente con il fronte dell'onda d'urto.

3.3 Onde di Alfvén nelle Nubi Molecolari Giganti

Le onde di Alfvén presentano un ruolo molto importante all'interno delle Nubi Molecolari Giganti, dove le densità di energia cinetica e magnetica sono comparabili ed eccedono l'energia termica del gas freddo delle nubi (si ricorda che $T \sim 10$ K) di oltre un ordine di grandezza. Ciò significa che le onde d'urto sono attenuate in questo ambiente: gli elementi di fluido possono collidere a velocità superiori a quella del suono, ma minori della velocità con cui viaggiano le onde di Alfvén. Conseguenza di questa osservazione è che non è necessario uno shock in presenza di un campo magnetico, dato che le onde di Alfvén sono capaci di trasportare abbastanza rapidamente le informazioni circa un'imminente collisione al fine di attenuarlo. Un tempo, si credeva che questo effetto sarebbe stato sufficiente per evitare forti urti anelastici all'interno delle nubi molecolari e che avrebbe, pertanto, esteso il tempo scala nel quale le nubi dissipano i moti interni e collassano. Tuttavia, recenti simulazioni magnetoidrodinamiche hanno messo in evidenza che questo tempo scala, nel complesso, non varia molto. Il motivo sussiste nei moti turbolenti del fluido, che comportano collisioni anche nelle direzioni delle linee di campo magnetico e dove le onde di Alfvén non risultano utili per propagare informazioni nel mezzo. Nonostante ciò, la presenza di onde d'urto magnetizzate spiega la struttura delle dense regioni del mezzo interstellare.

3.4 Galassie 'medusa' e *ram pressure stripping*

La quantità di gas e di polvere interstellare contenuti nelle galassie è solitamente collegata alla loro evoluzione nel corso del tempo e, di conseguenza, al tasso di formazione stellare (in inglese *Star Formation Rate*, SFR).

L'astronomia osservativa ha mostrato la presenza di galassie che, muovendosi nel mezzo intergalattico, hanno perso parte del proprio mezzo interstellare – che era legato gravitazionalmente alle strutture galattiche. Dall'immagine diretta si osservano dei filamenti di gas (e, quindi, anche di regioni di formazione stellare) fuoriuscenti dalle galassie. Per questo motivo, si parla di *galassie medusa* quando si osservano le strutture galattiche sopra descritte, che sono tuttora oggetto di studi approfonditi². Poiché le galassie medusa sono in moto all'interno del mezzo intergalattico, esse risentono di una pressione di ariete (che in questo caso particolare viene soprannominata *ram pressure stripping*) $P_r \approx \rho_e v^2$, dove ρ_e è la densità del mezzo intergalattico e v la velocità relativa della galassia nel mezzo. L'effetto netto della forza dovuta alla pressione di ariete è quello di privare la galassia del gas da una sola direzione, poiché tale forza di pressione è maggiore della forza gravitazionale che lega il gas alla galassia.

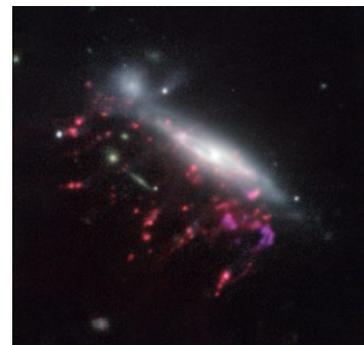


Figura 3.2: Esempio di una galassia medusa. Si notino i filamenti di gas espulsi dalla *ram pressure stripping* (evidenziati in viola).

²Si veda il progetto GASP (GAs Stripping Phenomena) dell'European Southern Observatory.

Bibliografia

- [1] Clarke C. J., Carswell R. F., *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] Currie I. G., *Fundamental Mechanics of Fluids*, quarta edizione, CRC Press, 2013.
- [3] Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics*, seconda edizione, Pergamon Press, 1987.
- [4] Batchelor G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2000.
- [5] Shu F. H., *The Physics of Astrophysics, Volume II: Gas Dynamics*, University Science Books, 1992.
- [6] Franchi F., *Meccanica dei Continui*, dispense del corso, 2018-2019.
- [7] Dallacasa D., *Processi di Radiazione e MHD*, dispense del corso, 2018-2019.
- [8] Media INAF, *Buchi neri pasteggiano nelle “galassie medusa”*, <https://www.media.inaf.it/2017/08/16/buchi-neri-ram-pressure/>, 2017.
- [9] Poggianti et al., *Ram-pressure feeding of supermassive black holes*, Nature, 2017.