

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Energia gravitazionale in astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:
Andrea Piccioni

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Sommario

Con energia gravitazionale si intende l'energia potenziale posseduta da un corpo massivo che si trova all'interno di un campo gravitazionale. Si introdurrà la gravità partendo dalle leggi del moto che racchiudono la prima definizione Newtoniana di forza, base fisica per la comprensione dell'argomento.

Si definirà poi il potenziale gravitazionale prestando particolare attenzione al caso dei sistemi sferici, essendo un'approssimazione molto utile in astrofisica. Si otterranno la velocità di fuga ed il *raggio di Schwarzschild*.

Nel **capitolo 2** si ricaverà il *teorema del viriale* per lo studio dell'energia di un sistema all'equilibrio. Si arriverà a esplicitare il teorema in forma scalare per sistemi autogravitanti.

Considerando la vastità di applicazioni astrofisiche riguardanti tale argomento si analizzeranno solo alcune di queste. In particolare, nel **capitolo 3**, si tratterà l'instabilità gravitazionale di Jeans e si confronteranno forza gravitazionale e forza di radiazione per ottenere la *luminosità di Eddington*.

Infine si utilizzeranno i teoremi di Newton per il potenziale gravitazionale di un guscio sferico per produrre la *curva di rotazione di una galassia a spirale*.

Data l'impossibilità di una trattazione approfondita e esaustiva di ogni argomento le varie questioni affrontate saranno una breve e generale descrizione dei problemi.

Indice

1	Introduzione alla gravità	2
1.1	Energia potenziale gravitazionale	2
1.2	Sistemi sferici	4
1.3	Velocità di fuga e raggio di Schwarzschild	5
2	Teorema del viriale	6
2.1	Sistemi autogravitanti	8
3	Applicazioni astrofisiche	10
3.1	Instabilità di Jeans	10
3.2	Luminosità di Eddington	11
3.3	Curva di rotazione galassie a spirale	13

Capitolo 1

Introduzione alla gravità

Le leggi del moto di Newton rappresentano la base per una comprensione fisica della forza dalla quale poi trarremo il potenziale gravitazionale. Le tre leggi riportate così come le scrisse Newton nei *Principia*¹ sono:

- *Ciascun corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, salvo che sia costretto a mutare quello stato da forze applicate ad esso;*
- *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice risultante applicata, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza stessa è stata esercitata;*
- *L'azione è sempre uguale e opposta alla reazione: le azioni dei due corpi sono vicendevolmente in direzioni uguali e opposte.*

Ci si limiterà ad una descrizione non relativistica della gravità, si partirà quindi dalle leggi di Newton che descrivono perfettamente la realtà entro i limiti classici, fornendoci una prima definizione di forza dalla quale inizierà la trattazione.

1.1 Energia potenziale gravitazionale

La forza Newtoniana agente lungo l'asse x su una massa m in una posizione x è:

$$F(x) = \frac{dp(x)}{dt} = m \frac{dv(x)}{dt} = ma(x) \quad (1.1)$$

Se si considera un sistema di riferimento tridimensionale e l'accelerazione gravitazionale $g(\vec{x})$ prodotta dall'interazione tra una distribuzione di massa $\rho(\vec{x}')$ in \vec{x}' e una massa m in \vec{x} si ottiene una forza;

$$F(\vec{x}) = mg(\vec{x}) = mG \int \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} d^3\vec{x}' \quad (1.2)$$

dove G rappresenta la costante di gravitazione universale². Si definisce ora il potenziale gravitazionale come:

$$\phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' \quad (1.3)$$

¹Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, Newton, prima pubblicazione in latino 1687.

² $G = 6.67300 \cdot 10^{-11} m^3 K g^{-1} s^{-2}$

Poichè

$$\nabla \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (1.4)$$

si mostra facilmente che

$$\nabla \int \frac{G\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3\vec{x}' = -\nabla\phi(\vec{x}) = g(\vec{x}) \quad (1.5)$$

Essendo il campo gravitazionale il gradiente del potenziale, è un campo conservativo. Il lavoro compiuto per assemblare una distribuzione di massa $\rho(\vec{x}')$ contro le forze gravitazionali non dipende dal cammino ma soltanto dagli estremi. Questa variazione di lavoro rappresenta l'energia potenziale gravitazionale della distribuzione di massa.

In generale si può quindi esprimere l'energia come:

$$W = \int F(\vec{x}) \cdot d^3\vec{x} \quad (1.6)$$

Si considera ora il lavoro compiuto per portare una quantità infinitesima di massa δm da una posizione infinita ad una posizione \vec{x} considerando il campo gravitazionale prodotto da una distribuzione di massa $\rho(\vec{x})$. Si ottiene una variazione di energia;

$$\delta W = - \int \delta\rho(\vec{x})\phi(\vec{x})d^3\vec{x} \quad (1.7)$$

Si introduce ora l'equazione di Poisson dimostrabile a partire dalle equazioni precedenti:

$$-\nabla^2\phi(\vec{x}) = \nabla \cdot g(\vec{x}) = -4\pi G\rho(\vec{x}) \quad (1.8)$$

Tale equazione è molto utile perché lega il potenziale e quindi il campo gravitazionale direttamente alla distribuzione di densità moltiplicata per una costante.

Dopo alcuni passaggi algebrici, applicando l'equazione di Poisson alla (1.7) e utilizzando il corollario del *teorema della divergenza*³ per il prodotto tra una funzione scalare ed un campo vettoriale, si può ottenere l'espressione per l'energia potenziale gravitazionale totale;

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x})\phi(\vec{x})d^3\vec{x} \quad (1.9)$$

³Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa coincide con l'integrale della divergenza del campo svolto nel volume di cui la superficie è frontiera.

1.2 Sistemi sferici

Si pone l'attenzione ora sul campo gravitazionale prodotto da una sfera, essendo un'ottima approssimazione per molti casi astrofisici. Anche questa trattazione è stata affrontata brillantemente da Newton e riassunta nei teoremi che seguono;

- *La forza gravitazionale esercitata da un guscio sferico avente densità uniforme su una particella posta al suo interno è nulla*

Se si considera una sfera di raggio R e massa M con $r < R$ si avrà quindi

$$F(r) = mg(r) = 0 \leftrightarrow g(r) = 0 \quad (1.10)$$

Dall'equazione (1.8) si ottiene;

$$\nabla\phi(r) = 0 \leftrightarrow \phi(r) = cost = -\frac{GM(r)}{R} \quad (1.11)$$

- *Un guscio sferico di massa M , avente densità uniforme, esercita su una particella esterna una forza gravitazionale pari a quella di una particella puntiforme di massa M posta nel suo centro*

Considerando il campo gravitazionale non nullo generato dalla sfera ad un raggio r

$$g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{r} \quad (1.12)$$

dove la massa è

$$M(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr \quad (1.13)$$

si avrà che per $r > R$ tutta la massa M genererà un campo come se fosse concentrata nell'origine della sfera. Se si considera la densità costante si può riscrivere la massa come

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (1.14)$$

1.3 Velocità di fuga e raggio di Schwarzschild

Si definisce velocità di fuga la velocità iniziale minima necessaria per andare da un punto in un campo gravitazionale, a distanza r dal centro del campo, fino all'infinito. Per ottenere questa grandezza si uguaglia l'energia cinetica di una particella di massa m con l'energia potenziale gravitazionale del sistema che agisce su di essa;

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = m\phi(r) \leftrightarrow v_f = \sqrt{2\phi(r)} \quad (1.15)$$

Se consideriamo il potenziale prodotto da un corpo a simmetria sferica di massa M e raggio R si ottiene;

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.16)$$

Quando la velocità di fuga è maggiore della velocità della luce quest'ultima è intrappolata dalla gravità e si ha un Buco Nero⁴. Ponendo la velocità di fuga uguale alla velocità della luce è possibile ottenere grazie alla (1.6) il raggio sotto al quale la luce non può sfuggire dall'attrazione gravitazionale⁵. Questo raggio è chiamato *raggio di Schwarzschild*;

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.17)$$

dove c è la velocità della luce⁶.

Tale trattazione classica considera la luce di natura corpuscolare e non utilizza la relatività generale, risulta quindi un modello molto semplificato.

⁴Definizione di Buco Nero di *Laplace*.

⁵In relatività generale rappresenta l'orizzonte degli eventi.

⁶ $c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$

Capitolo 2

Teorema del viriale

Il teorema del viriale è una relazione fra energia cinetica e potenziale totali di un sistema che, se soddisfatta, implica che questo sia in equilibrio. Dire che un sistema è virializzato equivale a dire che è all'equilibrio. In questa trattazione si descriverà concettualmente il teorema fino alla formulazione in forma tensoriale, per poi ricavare quella scalare. Una esposizione rigorosa di tale teorema richiederebbe molte più pagine di quelle a disposizione.

Essendo i principali sistemi di interesse astrofisico, come le galassie, considerabili sistemi dinamici autogravitanti costituiti da N particelle, si vuole risolvere il problema degli N corpi. Vista la sua non integrabilità si ricercano informazioni dalle equazioni senza una risoluzione diretta.

Si deve innanzitutto ridurre lo spazio delle fasi $6N$ -dimensionale a R^6 . Si considera il moto di una sola particella la quale sentirà un potenziale gravitazionale continuo ottenuto sostituendo la distribuzione discreta con una distribuzione di densità continua.

Condizione necessaria affinché il campo possa considerarsi continuo è che il sistema sia non collisionale. Questo implica tempi di rilassamento a due corpi molto alti che infatti, ad esempio per galassie ellittiche, sono $\simeq 10^{16}$ anni. Lo strumento per analizzare un sistema non collisionale è la *funzione di distribuzione*;

$$f = f(\vec{x}, \vec{v}, t); \int_{\gamma} f d^3\vec{v} d^3\vec{x} = M \quad (2.1)$$

dove $f d^3\vec{x} d^3\vec{v}$ esprime la probabilità che, al tempo t , una generica stella si trovi in un intorno $d^3\vec{x} d^3\vec{v}$ del punto (\vec{x}, \vec{v}) dello spazio delle fasi γ . L'integrale su tutto lo spazio delle fasi ci restituisce la massa del sistema.

L'evoluzione della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi è data dalla CBE¹. Tale equazione richiede che la derivata convettiva della funzione di distribuzione sia nulla;

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\langle \vec{v}, \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right\rangle = 0 \quad (2.2)$$

dove ϕ_{tot} è dato dalla somma di $\phi_{ext} + \phi_0$, quando $\phi_{ext} = 0$ il sistema è autogravitante. La CBE descrive come varia localmente la densità di probabilità se vista da un osservatore comovente con la stella.

¹Collisionless Boltzmann Equation.

Attraverso il *metodo dei momenti*² è possibile ottenere le equazioni di *Jeans* che al secondo ordine sono:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{DV_j}{Dt} = - \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} \quad (2.4)$$

$\forall i = 1, 2, 3$. Dove D/Dt è una derivata convettiva, V è la velocità media, ρ è la densità, ϕ_{tot} è il potenziale, $\sigma_{i,j}$ è il tensore di dispersione di velocità che esprime gli scarti quadratici medi delle velocità delle stelle attorno al loro valore medio.

Si Osserva che la (2.3) e la (2.4) rappresentano rispettivamente le equazioni di continuità e dell'impulso della idrodinamica. Per un sistema non collisionale però temperatura e pressione sono tensori anisotropi e non essendo ancora un sistema termodinamico non esiste un'equazione di stato che lo renda chiuso e risolvibile.

Si moltiplica ora l'equazione di Jeans (2.4) per \vec{x} e la si integra su tutte le posizioni. Così facendo si arriva ad un'unica equazione tensoriale semplice. Infine tramite alcuni passaggi³ si ottiene dall'equazione tensoriale semplice il teorema del viriale in forma tensoriale:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{kj}}{dt^2} = 2T_{kj} + Y_{kj} + W_{kj} \quad (2.5)$$

Dove I_{kj} è il *momento di inerzia polare*

$$I_{kj} = \int_{R^3} \rho x_k x_j d^3 \vec{x} \quad (2.6)$$

T_{kj} è il tensore *energia cinetica ordinata*

$$T_{kj} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho V_k V_j d^3 \vec{x} \quad (2.7)$$

Y_{kj} è il tensore *energia cinetica di dispersione di velocità*

$$Y_{kj} = \int_{R^3} \rho \sigma_{kj}^2 d^3 \vec{x} \quad (2.8)$$

W_{kj} è il tensore *energia di interazione*

$$W_{kj} = - \int_{R^3} \rho x_k \frac{\partial \phi_{tot}}{\partial x_j} d^3 \vec{x} \quad (2.9)$$

Inoltre si introduce il tensore *energia cinetica totale*

$$K_{kj} = T_{kj} + \frac{1}{2} Y_{kj} \quad (2.10)$$

²Questo metodo consente di ottenere dalla CBE una gerarchia infinita di equazioni differenziali ovvero le equazioni di Jeans

³La dimostrazione matematica rigorosa esula dallo scopo di questa trattazione.

che può essere definito come:

$$K_{kj} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho V_k V_j d^3 \vec{x} \quad (2.11)$$

sostituendo la (2.10) nella (2.5) e considerando un sistema in uno stato stazionario⁴ ($\frac{d^2 I_{kj}}{dt^2}$) si ottiene:

$$2K_{kj} + W_{kj} = 0 \quad (2.12)$$

Facendo la traccia della (2.12) si ricava il teorema in forma scalare:

$$2K + W = 0 \quad (2.13)$$

2.1 Sistemi autogravitanti

Si considera un sistema autogravitante cioè un sistema nel quale le particelle si muovono sotto l'azione del potenziale gravitazionale da esse stesse generato. Tale sistema è costituito da un' unica distribuzione di densità ed è tenuto legato dalle interazioni gravitazionali delle varie particelle.

Vale il teorema di conservazione dell'energia cioè si può scrivere;

$$E = K + U \quad (2.14)$$

Dove E è l'energia totale data dalla somma di quella cinetica K e quella potenziale U. Si consideri il sistema all'equilibrio allora è virializzato quindi vale l'equazione (2.13) che riscriviamo;

$$2K + U = 0 \quad (2.15)$$

Si utilizza ora l'equazione (1.9) per ottenere il potenziale di autogravità;

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d^3 \vec{x} \quad (2.16)$$

Poiché il potenziale che agisce sul sistema è generato dalla stessa distribuzione di densità ottengo che dalla (1.3) ho;

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \left(-G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3 \vec{x}' \right) d^3 \vec{x} \quad (2.17)$$

Si osserva quindi che mentre l'energia cinetica è sempre positiva quella potenziale è sempre negativa. Si può scrivere quindi;

$$E = K - 2K = -K = \frac{U}{2} = -\frac{|U|}{2} \leq 0 \quad (2.18)$$

Graficando l'energia potenziale sull'asse x e quella cinetica sull'asse y si può rappresentare con una retta di pendenza 1/2 il teorema del viriale in forma scalare e con un fascio di rette la conservazione dell'energia a diversi valori di E.

La prima osservazione che si può fare dal grafico in **figura 2.1** è che la retta $2K=|U|$

⁴Non c'è moto d'insieme, c'è equilibrio tra pressione e gravità.

interseca il fascio di rette solo per $E \leq 0$. Questo significa che un sistema autogravitante con $E > 0$ non può mai essere all'equilibrio, infatti implicherebbe una energia cinetica negativa ed una energia potenziale gravitazionale positiva. L'equilibrio si ha quindi solo per valori di E negativi o nel caso limite $E=0$ cioè nell'origine del grafico quando $K=|U|=0$.

Un sistema all'equilibrio può guadagnare energia uscendo dalla retta viriale (tratto $b \rightarrow d$ nel grafico in **figura 2.1**), per ripristinare tale equilibrio deve diminuire l'energia cinetica e il modulo dell'energia potenziale, quindi il sistema si ritrova in uno stato più energetico ma più freddo e più rarefatto (tratto $d \rightarrow a$ nel grafico in **figura 2.1**). Se invece il sistema autogravitante dovesse perdere energia (tratto $b \rightarrow c$ nel grafico in **figura 2.1**) tornerebbe all'equilibrio in uno stato meno energetico ma più contratto e più caldo (tratto $c \rightarrow e$ nel grafico in **figura 2.1**).

Questo processo descritto descrive perfettamente il fenomeno di evaporazione gravitazionale dove un sistema autogravitante si sposta a stati di equilibrio diversi. Tale meccanismo avviene negli ammassi stellari galattici e negli ammassi stellari globulari.

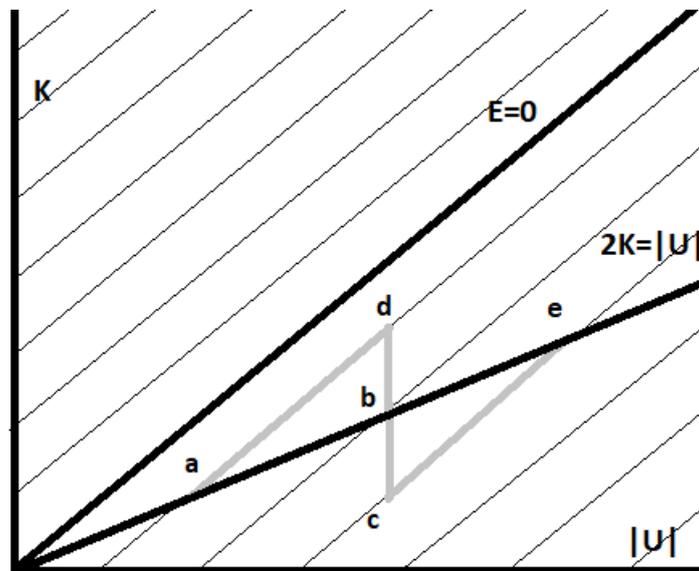


Figura 2.1: Grafico bidimensionale retta viriale

Capitolo 3

Applicazioni astrofisiche

Come già accennato nel **sommario** si analizzeranno solo alcune delle possibile applicazioni astrofisiche riguardanti l'energia gravitazionale. In primis si analizzerà *l'instabilità di Jeans* quindi un'applicazione dell'energia gravitazionale riguardante la formazione stellare. In seguito si ricaverà la *luminosità di Eddington* partendo dal potenziale gravitazionale prodotto dalla massa di un buco nero. Infine si sfrutteranno i teoremi di Newton sul campo gravitazionale di un guscio sferico per ottenere la *curva di rotazione di una galassia a spirale*. Si vuole sottolineare quindi come l'energia gravitazionale sia argomento imprescindibile in molti campi astrofisici.

3.1 Instabilità di Jeans

Si considera una regione di formazione stellare cioè una nube molecolare fredda approssimabile ad una sfera autogravitante con una distribuzione di densità uniforme e costante. Tramite questa approssimazione e trascurando possibili perturbazioni rotazionali o magnetiche si può considerare la nube all'equilibrio. Questo significa che deve valere il teorema del viriale. L'equilibrio viriale è racchiuso nel bilanciamento tra la pressione interna della nube e l'energia gravitazionale.

Infatti è possibile collegare la pressione alla temperatura tramite l'equazione dei gas perfetti;

$$P = nK_bT \quad (3.1)$$

dove P è la pressione, T la temperatura, n la densità numerica e K_b la *costante di Boltzmann*¹.

Inoltre la temperatura T è legata all'energia cinetica K della nube tramite l'equazione;

$$K = \frac{3}{2} \frac{M}{u m_H} K_b T \quad (3.2)$$

Dove u è il peso molecolare medio e m_H ² è la massa dell'idrogeno essendo queste regioni di formazione stellare prevalentemente composte da idrogeno neutro.

Si scrive infine il potenziale di energia gravitazionale per la nube di raggio R e massa M;

$$U \simeq -\frac{3}{5} \frac{GM}{R} \quad (3.3)$$

¹ $K_b = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{erg/Kelvin}$

² $m_H = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{Kg}$

Dal teorema del viriale si ricava la condizione affinché ci sia collasso gravitazionale;

$$2K < |U| \quad (3.4)$$

Sostituendo la (3.2) e la (3.3) nella (3.4) si ottiene

$$3 \frac{M}{um_H} K_b T < -\frac{3}{5} \frac{GM}{R} \quad (3.5)$$

Questa disuguaglianza rappresenta il *criterio di Jeans* per l'insorgenza di instabilità gravitazionale.

Si può facilmente trovare la massa critica detta *massa di Jeans* dalla (3.5);

$$M_j = \left(\frac{5K_b T}{Gum_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Con densità tipiche di $10 - 10^2 \text{cm}^{-3}$ si ha $M_j \simeq 10^{25} \text{g}$.

Sopra la *massa di Jeans* si verifica un collasso gravitazionale, la nube si contrae aumentando la temperatura e ionizzando la materia presente. In questa fase aumenta l'opacità e parte della radiazione non riesce ad uscire. Questo provoca un aumento della pressione che genera uno stato di equilibrio intermedio. Successivamente per il primo principio della termodinamica, essendo la nube più calda del mezzo circostante, inizia ad emettere energia per irraggiamento. Se infine si raggiungono le temperature di combustione del nucleo si accendono le reazioni termonucleari e la stella entra nella sequenza principale. L'energia gravitazionale ora è bilanciata dall'energia termonucleare che rallenta la contrazione stellare.

3.2 Luminosità di Eddington

La luminosità di Eddington rappresenta la luminosità massima che può raggiungere un buco nero prima che la forza di radiazione superi la forza gravitazionale e cessi l'accrescimento. Questo significa che sopra una certa massa l'accrescimento inizia a rallentare a causa della forza di radiazione che si oppone a quella gravitazionale. E' necessario sottolineare che circa un decimo della massa ³ catturata da un buco nero è trasformata in energia. Tramite questa luminosità si può anche ottenere un limite massimo per la massa della stella, oltre alla quale la stella evaporerebbe.

Per ricavare la Luminosità di Eddington si deve quindi considerare il caso limite in cui forza di radiazione e forza gravitazionale siano uguali.

La forza gravitazionale per un sistema sferico e stazionario che agisce su una distribuzione di densità si ottiene utilizzando il campo espresso nell'equazione (1.12) moltiplicato per la distribuzione di densità;

$$F_G = -\frac{GM_{BH}\rho(r)}{r^2} \quad (3.7)$$

La densità tiene conto solo della massa protonica essendo circa 2000 volte quella degli elettroni;

$$\rho(r) \simeq n_p(r)m_p \quad (3.8)$$

³L'efficienza di questa produzione di energia è maggiore anche delle reazioni stellari più efficienti.

con n_p densità numerica dei protoni e m_p massa dei protoni.

Si cerca ora la forza di radiazione ipotizzando che il gas in caduta sia otticamente sottile e composto di idrogeno ionizzato.

Si suppone di conoscere la luminosità bolometrica;

$$L = \int_0^{\infty} L(\nu) d\nu \quad (3.9)$$

Si considera il flusso $S(\nu)$ cioè l'energia per unità di frequenza e di tempo che attraversa un elemento di superficie a distanza r dal centro;

$$S(\nu) = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2} \quad (3.10)$$

Considerando che l'energia trasportata da ogni fotone è $E = h\nu$, dividendo il flusso per l'energia di un fotone si può ottenere il numero di fotoni per unità di tempo e frequenza che attraversano la superficie a distanza r .

$$N = \frac{1}{h\nu} \frac{L(\nu)}{4\pi r^2} \quad (3.11)$$

L'impulso totale sarà dato dall'impulso di un singolo fotone⁴ per il numero di fotoni;

$$P_{tot} = \frac{1}{h\nu} \frac{L(\nu)}{4\pi r^2} \frac{h\nu}{c} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} \quad (3.12)$$

Si tiene conto del fatto che avendo un gas di idrogeno ionizzato $n_e \simeq n_p$.

Essendoci interazioni tra fotoni e elettroni si definisce la sezione d'urto Thomson per gli elettroni⁵;

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (3.13)$$

Se l'urto fotone-elettrone avviene ad alte energie si deve introdurre la sezione d'urto di Klein-Nishina;

$$\sigma_{KN}(\nu) = \sigma_T \cdot g \left(\frac{\nu}{\nu_T} \right) \quad (3.14)$$

dove $\nu_T = \frac{m_e c^2}{h}$.

Aggiungendo una correzione $C_{KN} \simeq 10^{-1}$ per l'urto Klein-Nishina si arriva a scrivere la forza di radiazione opposta a quella gravitazionale per unità di volume ad un raggio r ;

$$F_{rad} = \frac{L n_e(r) \sigma_r}{4\pi r^2 c} C_{KN} \quad (3.15)$$

Si impone infine come detto in precedenza che la forza totale del nostro sistema sia nulla cioè che le due forze siano uguali;

$$(F_G = F_{rad}) = \left(- \frac{GM_{BH} n_p(r) m_p}{r^2} = \frac{L n_e(r) \sigma_r}{4\pi r^2 c} C_{KN} \right) \quad (3.16)$$

⁴ $P = \frac{h\nu}{c}$

⁵Si targa la sezione d'urto dei protoni poichè dipende da m^{-2} e la massa dei protoni è circa 2000 volte quella degli elettroni.

e esplicitando la luminosità si ottiene;

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c G M_{BH} m_p}{\sigma_T C_{KN}} \sim 10^{38} \left(\frac{M_{BH}}{M_\odot} \right) \left[\frac{erg}{s} \right] \quad (3.17)$$

Come già accennato la luminosità di Eddington può anche sancire una massa limite per le stelle oltre alla quale ci sarebbe evaporazione. Si calcola la L_{Edd} che risulta $\sim M$, si ricerca poi la massa limite utilizzando la relazione $L \sim M^{3.5}$, imponendo $L = L_{Edd}$.

Il risultato che si ottiene è una massa M_{limite} oltre la quale la stella si disgregherebbe

$$M_{limite} \simeq (70 - 100) M_{sun} \quad (3.18)$$

dove $M_{sun} = 2 \cdot 10^{30} Kg$.

3.3 Curva di rotazione galassie a spirale

La curva di rotazione di una galassia rappresenta l'andamento delle velocità in funzione della distanza dal centro. Questa curva è data dall'azione del potenziale gravitazionale. Sappiamo dalla sezione **Sistemi sferici** che in una configurazione a simmetria sferica possiamo semplificare il calcolo della forza di gravità considerando solo le regioni interne al corpo preso in considerazione. Per ottenere la velocità circolare v_c con la quale tale corpo orbita intorno al centro della galassia si pone l'accelerazione centripeta di una massa di prova uguale alla forza gravitazionale ricavata tramite il campo di gravità dell'equazione (1.12);

$$\frac{v_c^2}{r} = |F(r)| = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (3.19)$$

dove si ricorda dalla (1.13) che la massa è;

$$M(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \quad (3.20)$$

Si otterrà che al variare dei profili di densità la velocità circolare e quindi la curva di rotazione cambierà.

In una galassia a spirale come la *Via Lattea*⁶ si possono distinguere tre principali regimi di densità;

- Bulge⁷, modello sferico con densità omogenea $\rho(r) = \rho$

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad (3.21)$$

allora si ha dalla (3.19);

$$v_c(r) \simeq \sqrt{\pi GM(r)r} \sim r \quad (3.22)$$

⁶Il nome deriva dal fatto che dalla terra la si vede come una striscia nel cielo più luminosa e non come un spirale poiché il nostro sistema solare, e quindi noi ne facciamo parte.

⁷Nucleo centrale di una galassia a spirale.

- Disco sottile galattico, si ha una densità superficiale $\sigma(r)$, in questa regione non è più possibile considerare la simmetria a guscio sferico. Si può però dimostrare che la rotazione risulta essere differenziale cioè;

$$v_c \sim \text{cost} \quad (3.23)$$

- Infine a grandi distanze dalla galassia⁸ la massa può essere considerata puntiforme e si ha quindi un regime Kepleriano;

$$v_c(r) \simeq \sqrt{\frac{GM}{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (3.24)$$

Si confrontano ora queste predizioni teoriche che seguono dalla fisica Newtoniana con le osservazioni sperimentali. In **Figura 3.1** sono graficate in rosso la curva di rotazione predetta e in verde quella osservata. La prima parte della galassia rispetta la trattazione teorica però dopo un breve tratto dove coerentemente la v_c è costante non si ha una caduta kepleriana ma un andamento che continua ad essere costante. Per spiegare questa discrepanza si è pensato alla presenza di *dark matter* (materia oscura), ovvero una materia che non si riesce ad osservare ma è in grado di interagire gravitazionalmente.

Se si considera sempre un sistema a simmetria sferica e si ricerca una distribuzione di densità di questa materia che restituisca un andamento costante, si ha che poiché;

$$M(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr \quad (3.25)$$

se $\rho(r) \sim \frac{1}{r^2}$ si ottiene il risultato richiesto ovvero;

$$v_c \sim \sqrt{\frac{M(r)}{R}} \sim \sqrt{\frac{R}{R}} \sim \text{cost} \quad (3.26)$$

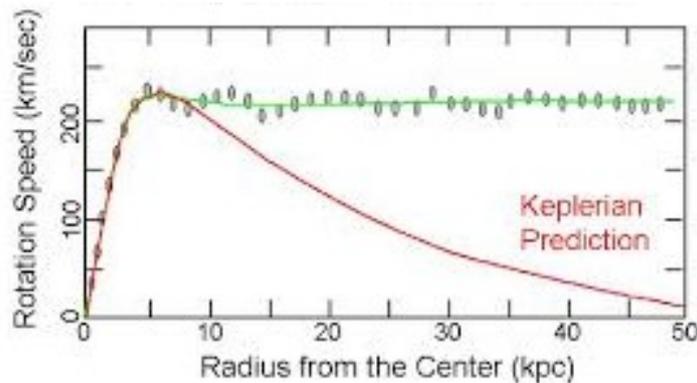


Figura 3.1: Curva di rotazione galassia a spirale

⁸Osservate grazie alla transizione proibita a 21cm dell'idrogeno neutro

Bibliografia

- [1] RICHARD FITZPATRICK. *An introduction to celestial Mechanics*. Cambridge University, 2012.
- [2] G.W. COLLINS, *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*,. 2003.
- [3] LUCA CIOTTI. *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 2002.
- [4] *Appunti personali del corso di Processi di radiazione e MHD*, presieduto dal Prof. Daniele Dallacasa. A.A. 2018/2019.
- [5] *Appunti personali del corso di Astrofisica Extragalattica*, presieduto dal Prof. Luca Ciotti. A.A. 2018/2019.