Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Triennale in Matematica - Scuola di Scienze

Tesi di Laurea Triennale

DISUGUAGLIANZE DI RIARRANGIAMENTO

Candidato:
Luca Massini

Relatore:
Ch.mo Prof. Nicola Arcozzi

Anno Accademico 2018-2019

Introduzione

Il concetto di "Riarrangiamento", e le successive disuguaglianze che questo comporta, hanno applicazioni e si riscontrano in molti ambiti della matematica. Quando si parla di *riarrangiare* un oggetto, come ad esempio un insieme o una funzione, in sostanza si parla di "simmetrizzare" questo oggetto. In questo caso, simmetrizzare un oggetto significa sostituirlo con un altro che abbia certe proprietà di simmetria, ma che mantenga certe caratteristiche quantitative dell'oggetto iniziale. L'utilità di questo procedimento è trasversale in molte discipline della matematica. In molti contesti infatti, quando si cerca di risolvere un problema, non sempre è possibile trovare una soluzione, e quindi può essere utile manipolare i dati in modo da trovare soluzioni con proprietà particolari, come ad esempio certe proprietà di simmetria.
Una volta trovate, queste soluzioni in molti casi sono delle buone approssimazioni di soluzioni del problema generale, proprio per il fatto che si mantengono certe caratteristiche quantitative. Può anche succedere che la soluzione "particolare" trovata sia proprio la soluzione del problema generale. Per esempio, un'interessante situazione, che in certi casi si realizza, avviene quando si cerca di risolvere un problema di minimo o massimo di un certo funzionale in una classe ben delimitata. Si scopre che la soluzione del problema generale è proprio quella con la massima simmetria.
Può accadere quindi che la conoscenza precisa di ciò che avviene in situazioni di massima simmetria ci dia delle informazioni sulla situazione generica che stiamo esaminando. Da qui viene l'importanza di trovare delle *Disuguaglianze di Riarrangiamento*, cioè l'insieme di tutte quelle disuguaglianze che si dimostrano essere vere e che coinvolgono certi oggetti e i relativi riarrangiamenti. In seguito, la trattazione dell'argomento si divide in due capitoli.
Nel Capitolo 1 ci occuperemo di mostrare la validità di certe disuguaglianze di riarrangiamento nel caso di insiemi finiti di elementi reali non negativi. Ci accorgeremo che in questo caso il concetto di "riarrangiamento" è essenzialmente legato alla relazione d'ordine che è presente su $\mathbb{R}$.
Nel Capitolo 2 estenderemo alcuni risultati visti nel primo capitolo alle funzioni reali non negative su $\mathbb{R}^n$. In questo ambito tratteremo due tipologie

fondamentali di riarrangiamenti: i *Riarrangiamenti simmetricamente decrescenti* e le *Polarizzazioni*. In particolare enunceremo i teoremi di Hardy-Littlewood e di Riesz "semplificato" per le due tipologie, mostrando che ogni riarrangiamento simmetricamente decrescente può essere approssimato da una serie di polarizzazioni.

Indice

Capitolo 1

Riarrangiamenti di insiemi finiti

In questo capitolo ci occuperemo di definire il concetto di riarrangiamento nel caso di insiemi finiti. Vedremo inoltre alcune importanti disuguaglianze ottimali che nei capitoli successivi estenderemo alle funzioni. In seguito, per tutto il resto del capitolo, lavoreremo con insiemi finiti di elementi reali non negativi.

1.1 Notazioni e Concetti Preliminari

Fissiamo le notazioni e diamo alcune definizioni che sfrutteremo durante la trattazione. Gli elementi degli insiemi di cui ci occuperemo saranno indicizzati in uno dei seguenti modi:

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \qquad b_1, b_2, \dots, b_n;$$

$$a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n.$$

Invece denoteremo gli insiemi in questione con (a),(b),. . . .

Definizione 1.1.1. Sia $(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme finito indicizzato. Diciamo che (a') è un *riarrangiamento di* (a) se esiste una permutazione

$$\Phi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

tale che

$$a_{\Phi(j)} = a'_j \qquad \forall j = 1, \dots n.$$

Osservazione 1.1.2. Definizioni simili possono essere date nel caso in cui l'insieme (a) sia indicizzato diversamente.

Tra tutti i riarrangiamenti possibili di un insieme (a) ce ne sono alcuni molto particolari che hanno proprietà decisamente interessanti. Denotiamo questi insiemi con

$$(\bar{a}), (\tilde{a}), (a^+), ({}^+a), (a^*)$$

e ci apprestiamo a definirli.
Supponiamo che (a) sia indicizzato $(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
Allora con $(\bar{a})$ indichiamo il riarrangiamento di (a) tale che

$$\bar{a}_1 \leq \bar{a}_2 \leq \dots \leq \bar{a}_n$$

e con $(\tilde{a})$ indichiamo il riarrangiamento di (a) tale che

$$\tilde{a}_1 \geq \tilde{a}_2 \geq \dots \geq \tilde{a}_n.$$

Supponiamo ora che (a) sia indicizzato come $(a) = \{a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n\}$.
Allora con (a^+) indichiamo il riarrangiamento di (a) tale che

$$a_0^+ \geq a_1^+ \geq a_{-1}^+ \geq a_2^+ \geq a_{-2}^+ \geq \dots$$

e con $({}^+a)$ indichiamo il riarrangiamento di (a) tale che

$${}^+a_0 \geq {}^+a_{-1} \geq {}^+a_1 \geq {}^+a_{-2} \geq {}^+a_2 \geq \dots$$

Nel caso particolare in cui ogni valore di (a), tranne il più grande, sia presente un numero pari di volte in (a) e il valore più grande sia presente un numero dispari di volte in (a), diremo che (a) è *simmetrico*. In questo caso (a^+) e $({}^+a)$ sono equivalenti, e scriviamo

$$a^* := a^+ = {}^+a$$

definendo (a^*) essere il riarrangiamento di (a) tale che

$$a_0^* \geq a_1^* = a_{-1}^* \geq a_2^* = a_{-2}^* \geq \dots.$$

Osservazione 1.1.3. In generale, i riarrangiamenti $(\bar{a}), (\tilde{a}), ({}^+a), (a^+), (a^*)$ di (a) non sono univocamente determinati, cioè esistono diverse permutazioni che li definiscono. Non è difficile dimostrare che i primi quattro sono univocamente determinati nel caso in cui (a) abbia tutti elementi distinti a due a due.

Osservazione 1.1.4. Fissato (a) vale che

$$\bar{a}_j = \tilde{a}_{n-j} \quad \text{e} \quad a_j^+ = {}^+a_{-j} \quad \forall j.$$

Definizione 1.1.5. Un insieme (a) indicizzato si dice

- *monotono crescente*, se $(a) = (\bar{a})$, cioè $a_j = \bar{a}_j \quad \forall j$;
- *monotono decrescente*, se $(a) = (\tilde{a})$, cioè $a_j = \tilde{a}_j \quad \forall j$;
- *simmetricamente decrescente*, se $(a) = (a^*)$, cioè $a_j = a_j^* \quad \forall j$.

Definizione 1.1.6. Due insiemi (a) e (b) si dicono *similmente ordinati* se quando $a_i \leq a_j \leq a_k$ si ha che

$$b_i \leq b_j \leq b_k$$

$\forall i, j, k$ indici (in un opportuno range di valori).

Osservazione 1.1.7. L'essere *similmente ordinati* è una relazione d'equivalenza.

Nelle sezioni successive supporremo che, se non specificato, il range degli indici sia sempre adeguato al riarrangiamento considerato.

1.2 Riarrangiamenti di due inisiemi finiti

Per cominciare consideriamo due insiemi indicizzati

$$(a) = \{a_1, a_2, \dots a_n\}, \qquad (b) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

finiti e con la stessa cardinalità.
Vediamo subito il risultato più importante nel caso di due insiemi. L'idea sarà quella di dimostrare il teorema che segue in due modi: il primo modo è il più semplice e sarebbe sufficiente per la dimostrazione del teorema; il secondo è più complesso, ma è un procedimento che useremo in seguito per la dimostrazione di un teorema simile nel caso di 3 insiemi finiti.

Teorema 1.2.1. *Siano dati (a) e (b) insiemi finiti indicizzati. Allora*

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \tilde{b}_j \overset{(2)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \bar{b}_j \tag{1.1}$$

cioè la sommatoria è maggiore se (a) e (b) sono monotoni nello stesso senso, ed è minore se sono monotoni in senso opposto.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che (a) sia monotono crescente, cioè $(a) = (\bar{a})$. Dimostriamo la disuguaglianza (1).
Se (b) è monotono crescente vale banalmente l'uguaglianza.
Supponiamo che (b) non sia monotono crescente. Allora $\exists\, j, k \in \mathbb{N}$, $j < k$, tali che $a_j \leq a_k$ e $b_j > b_k$.
Dunque

$$a_j b_k + a_k b_j - (a_j b_j + a_k b_k) = \underbrace{(a_k - a_j)}_{\geq 0}\underbrace{(b_j - b_k)}_{>0} \geq 0$$

e quindi $\sum ab$ viene maggiorata se scambiamo b_j con b_k. Siccome (b) è un insieme finito, possiamo iterare questo procedimento un numero finito di volte e maggioriamo la sommatoria, ottenendo che (b) diventa monotono crescente.
Dunque

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \bar{b}_j.$$

L'altra disuguaglianza si dimostra con un procedimento simile e facendo diventare (b) monotono decrescente.

$\square$

Osservazione 1.2.2. Le disuguaglianze del Teorema 1.2.1 valgono anche sostituendo $(\bar{a}), (\bar{b}), (\tilde{b})$ rispettivamente con $(\tilde{a}), (\tilde{b}), (\bar{b})$. Mostriamolo per la disuguaglianza (1). Infatti per l'Osservazione 1.1.4 vale che

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j \bar{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{n-j} \tilde{b}_{n-j} \underbrace{=}_{i=n-j+1} \sum_{i=n}^{1} \tilde{a}_i \tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j \tilde{b}_j.$$

Lo stesso si può dimostrare per la disuguaglianza (2).

Usando un'argomentazione simile a quella utilizzata della dimostrazione del teorema precedente, non è difficile dare prova della validità del seguente risultato.

Corollario 1.2.3. *Sia (a) un insieme indicizzato. Se vale che*

$$\sum_i a_i b_i' \leq \sum_i a_i b_i \tag{1.2}$$

per ogni (b') riarrangiamento di (b), allora (a) e (b) sono similmente ordinati.

Vediamo ora una seconda dimostrazione del Teorema 1.2.1 che, seppur più complicata, ci fornisce un metodo dimostrativo che applicheremo successivamente.

Seconda Dimostrazione Teorema 1.2.1. La dimostrazione si divide in tre parti:

- PRIMA PARTE. Consideriamo $(\alpha), (\beta)$ essere insiemi di elementi che possono assumere soltanto valore 0 o 1. Inoltre supponiamo che tali insiemi abbiano la stessa cardinalità di (a) e (b). In particolare quindi si ha che
$$\alpha_j = (\alpha_j)^2, \qquad \beta_j = (\beta_j)^2 \quad \forall j$$
e inoltre
$$\sum_j \alpha_j \beta_j \leq \sum_j \alpha_j, \qquad \sum_j \alpha_j \beta_j \leq \sum_j \beta_j$$
per cui
$$\sum_j \alpha_j \beta_j \leq \min \Big\{ \sum_j \alpha_j, \sum_j \beta_j \Big\} = \sum_j \bar{\alpha}_j \bar{\beta}_j.$$
Dunque l'enunciato vale per questa particolare tipologia di insiemi.

- SECONDA PARTE. Siano
$$(\alpha^1), (\alpha^2), \dots, (\alpha^k)$$
insiemi di 0 e 1 definiti come nella prima parte. Dunque ogni insieme (a) di elementi non negativi si può scrivere come combinazioni lineare di questi insiemi, e quindi esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tali che
$$a_j = \lambda_1 \alpha_j^1 + \lambda_2 \alpha_j^2 + \cdots + \lambda_k \alpha_j^k$$
e in particolare
$$\bar{a}_j = \lambda_1 \bar{\alpha}_j^1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_j^2 + \cdots + \lambda_k \bar{\alpha}_j^k$$
$$\tilde{a}_j = \lambda_1 \tilde{\alpha}_j^1 + \lambda_2 \tilde{\alpha}_j^2 + \cdots + \lambda_k \tilde{\alpha}_j^k.$$
Per esempio basta scrivere
$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1 * 1 + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) * 0 + (\bar{a}_3 - \bar{a}_1) * 0 + \dots$$
$$\bar{a}_2 = \bar{a}_1 * 1 + (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) * 1 + (\bar{a}_3 - \bar{a}_1) * 0 + \dots$$
$$\dots$$

- TERZA PARTE. Decomponendo (a) e (b) come nella seconda parte si ha che
$$a_j = \sum_r \lambda_r \alpha_j^r, \quad \bar{a}_j = \sum_r \lambda_r \bar{\alpha}_j^r, \quad b_j = \sum_s \rho_s \beta_j^s, \quad \bar{b}_j = \sum_s \rho_s \bar{\beta}_j^s$$

e dunque

$$\begin{aligned}\sum_j a_j b_j &= \sum_j (\sum_r \lambda_r \alpha_j^r)(\sum_s \rho_s \beta_j^s) \\ &= \sum_r \sum_s \lambda_r \rho_s \sum_j \alpha_j^r \beta_j^s \\ &\leq \sum_r \sum_s \lambda_r \rho_s \sum_j \bar{\alpha}_j^r \bar{\beta}_j^s \\ &= \sum_j (\sum_r \lambda_r \bar{\alpha}_j^r)(\sum_s \rho_s \bar{\beta}_j^s) \\ &= \sum_j \bar{a}_j \bar{b}_j.\end{aligned}$$

L'altra disuguaglianza si dimostra in modo simile.

$\square$

Il Teorema 1.2.1 può essere enunciato in un'altra forma che ci risulterà più comoda in seguito. Introduciamo la seguente definizione.

Definizione 1.2.4. Siano (a) insieme indicizzato con indice che varia in $\{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n\}$. Consideriamo la funzione polinomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j x^j.$$

Allora definiamo il *coefficiente centrale di* f come

$$\mathscr{C}(f(x)) := a_0.$$

Osservazione 1.2.5. É immediato dimostrare che

$$\mathscr{C}(f(x)) = \mathscr{C}(f(x^{-1})).$$

Osservazione 1.2.6. Siano $(a), (b)$ due insiemi e consideriamo

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j x^j, \qquad g(x) = \sum_{j=-n}^{n} b_j x^j.$$

Allora valgono le seguenti proprietà:

a) $\mathscr{C}(f + g) = \mathscr{C}(f) + \mathscr{C}(g)$;

b) $\mathscr{C}(fg) = \sum_{i+j=0} a_i b_j = \sum_i a_i b_{-i}$, infatti:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (\sum_i a_i x^i)(\sum_j b_j x^j) \\ &= \sum_i \sum_j a_i b_j x^{i+j} \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j x^{i+j} \end{aligned}$$

e il coefficiente centrale si ottiene ponendo $i + j = 0$;

c) $\mathscr{C}(fg) \leq (\max_j b_j) \sum_i a_i$.

Dunque ponendo

$$f^+(x) := \sum_i a_i^+ x^i, \qquad {}^+g(x) := \sum_j {}^+b_j x^j,$$

per la proprietà **b)** dell'Osservazione 1.2.6 e applicando il Teorema 1.2.1 si ottiene che:

$$\mathscr{C}(fg) = \sum_i a_i b_{-i} \leq \sum_i a_i^{++} b_i = \mathscr{C}(f^{++}g).$$

Allora il Teorema 1.2.1 si può riformulare nel seguente modo

Teorema 1.2.7 (Riformulazione Teorema 1.2.1)**.** *Per ogni coppia di funzioni polinomiali $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come sopra si ha che*

$$\mathscr{C}(fg) \leq \mathscr{C}(f^{++}g).$$

1.3 Riarrangiamenti di tre o più inisiemi finiti

Consideriamo ora tre insiemi finiti $(a), (b), (c)$. Il nostro scopo sarà far vedere che vale un risultato simile a quello del Teorema 1.2.1.

Teorema 1.3.1. *Siano $(a), (b), (c)$ tre insiemi e supponiamo che (c) sia simmetrico. Allora*

$$\sum_{i+j+k=0} a_i b_j c_k \leq \sum_{i+j+k=0} a_i^{++} b_j c_k^* = \sum_{i+j+k=0} {}^+a_i b_j^+ c_k^*. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. L'idea è quella di utilizzare il metodo visto nella Seconda Dimostrazione del Teorema 1.2.1. La difficoltà della prova sta nella Prima Parte del metodo dove dobbiamo dimostrare che l'enunciato vale per

$(\alpha), (\beta), (\gamma)$ insiemi di 0 e 1; fatto ciò non è difficile concludere passando per la SECONDA e la TERZA PARTE.
Infatti possiamo decomporre $(a), (b), (c)$ in somme di insiemi $(\alpha^r), (\beta^s), (\gamma^t)$ in modo tale che

$$a_i = \sum_r \lambda_r \alpha_i^r, \quad b_j = \sum_s \rho_s \beta_j^s, \quad c_k = \sum_t \eta_t \gamma_k^t$$

e

$$a_i^+ = \sum_r \lambda_r \alpha_i^{r+}, \quad {}^+b_j = \sum_s {\rho_s}^+ \beta_j^s, \quad c_k^* = \sum_t \eta_t \gamma_k^{t*}$$

sottintendendo che gli insiemi (γ^t) siano simmetrici (cioè con un numero dispari di 1 e un numero pari di 0).
Se riusciamo a dimostrare che il teorema vale per gli insiemi $(\alpha^r), (\beta^s), (\gamma^t)$ allora

$$\begin{aligned}
\sum_{i+j+k=0} a_i b_j c_k &= \sum_{i+j+k=0} (\sum_r \lambda_r \alpha_i^r)(\sum_s \rho_s \beta_j^s)(\sum_t \eta_t \gamma_k^t) \\
&= \sum_{r,s,t} \lambda_r \rho_s \eta_t \sum_{i+j+k=0} \alpha_i^r \beta_j^s \gamma_k^t \\
&\leq \sum_{r,s,t} \lambda_r \rho_s \eta_t \sum_{i+j+k=0} \alpha_i^{r++} \beta_j^s \gamma_k^{t*} \\
&= \sum_{i+j+k=0} (\sum_r \lambda_r \alpha_i^{r+})(\sum_s {\rho_s}^+ \beta_j^s)(\sum_t \eta_t \gamma_k^{t*}) \\
&= \sum_{i+j+k=0} a_i^{++} b_j c_k^*
\end{aligned}$$

e concludiamo.
Siano (α), (β), (γ) insiemi di 0 e 1. In accordo con le notazioni della Definizione 1.2.4 e dell'Osservazione 1.2.6 consideriamo

$$f(x) = \sum_r \alpha_r x^r, \qquad g(x) = \sum_s \beta_s x^s, \qquad h(x) = \sum_t \gamma_t x^t, \tag{1.4}$$

e dimostriamo l'enunciato nella forma equivalente del Teorema 1.2.7.
Dal momento che possiamo aggiungere un numero qualsiasi di 0 in $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ e le sommatorie in (1.4) non cambiano, supponiamo che l'intervallo di sommatoria sia lo stesso per f, g, h, da $-n$ a n.

In particolare $\exists R, R', S, S', T, T' \in \mathbb{N}$ tali che

$$f^+(x) = \sum_r \alpha_r^+ x^r = x^{-R} + \cdots + 1 + \cdots + x^{R'} \tag{1.5}$$

$$^+g(x) = \sum_s {}^+\beta_s x^s = x^{-S'} + \cdots + 1 + \cdots + x^{S} \tag{1.6}$$

$$h^*(x) = \sum_t \gamma_t^* x^t = x^{-T} + \cdots + 1 + \cdots + x^{T'} \tag{1.7}$$

con

$$R \leq R' \leq R + 1 \tag{1.8}$$

$$S \leq S' \leq S + 1 \tag{1.9}$$

$$T = T' \tag{1.10}$$

per le proprietà degli insiemi $(\alpha^+), ({}^+\beta), (\gamma^*)$.
Vediamo alcuni casi particolari:

- Caso 1: sia $R' = 0$. In questo caso per (1.8) si ha che $R = 0$. Allora $f^+ \equiv 1$ e si conclude applicando il Teorema 1.2.7;

- Caso 2: sia $S' = 0$. In questo caso per (1.9) si ha che $S = 0$. Allora $^+g \equiv 1$ e si conclude applicando il Teorema 1.2.7;

- Caso 3: supponiamo $R + S' \leq T$ e $R' + S \leq T$.
  Allora per la proprietà **c)** dell'Osservazione 1.2.6 vale che

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(fgh) &= \sum_{r+s+t=0} \alpha_r \beta_s \gamma_t \overset{\mathbf{c)}}{\leq} \sum_{r+s+t=0} \alpha_r \beta_s \\ &= \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s = \sum_r \alpha_r \sum_s \beta_s \\ &= (R + 1 + R')(S' + 1 + S)\end{aligned}$$

  D'altra parte, tenendo conto di (1.5),(1.6),(1.7) e delle ipotesi, vale che

$$\gamma_t = 1 \quad \forall t \quad \text{tale che} \quad t = -r - s \quad \text{per} \quad r \in [-R, R'], s \in [-S', S]$$

  e il coefficiente centrale $\mathscr{C}(f^{++}gh^*)$ si scrive come somma di tutti i coefficienti di $f^{++}g$. Dunque

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(f^{++}gh^*) &= \sum_{r+s+t=0} \alpha_r \beta_s \gamma_t = \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s \\ &= (R + 1 + R')(S' + 1 + S)\end{aligned}$$

  per cui $\mathscr{C}(fgh) \leq \mathscr{C}(f^{++}gh^*)$.

Ora consideriamo il caso generale.
Supponiamo di non rientrare in nessuno dei casi precedenti, e dunque prendiamo come ipotesi le seguenti:

$$R' > 0, \qquad S' > 0, \qquad \max\{R + S', R' + S\} = n > T. \tag{1.11}$$

Procediamo con una dimostrazione per induzione sul max.
Il passo base è banale.
Passo induttivo: supponiamo che

$$\max\{R + S', R' + S\} < n \tag{1.12}$$

e mostriamo che vale la tesi per $\max\{R + S', R' + S\} = n$.
Definiamo

$$\Phi := f - x^\rho, \qquad \Psi := g - x^\sigma,$$
$$\bar{\Phi} := f^+ - x^{R'}, \qquad \bar{\Psi} := {}^+g - x^{-S'},$$

dove x^ρ è la potenza più grande di f e x^σ è la potenza più piccola di g.
Dal momento che $R' > 0$ e $S' > 0$, queste funzioni non sono identicamente nulle. Dunque si ha che

$$fgh = (\Phi + x^\rho)(x^\sigma + \Psi)h = \Phi\Psi h + \chi h$$

dove

$$\chi := x^\sigma\Phi + x^{\rho+\sigma} + x^\rho\Psi.$$

Siccome

$$x^\sigma\Phi = x^\sigma(f - x^\rho) = x^\sigma f - x^{\rho+\sigma},$$
$$x^\rho\Psi = x^\rho(g - x^\sigma) = x^\rho g - x^{\rho+\sigma},$$

per costruzione tutte le potenze di $x^\sigma\Phi$ sono strettamente minori di $x^{\rho+\sigma}$, e tutte le potenze di $x^\rho\Psi$ sono strettamente maggiori di $x^{\rho+\sigma}$. Allora χ è un polinomio con coefficienti tutti 1. Inoltre la somma dei coefficienti di h vale $2T + 1$, per cui sfruttando le proprietà **a)** e **c)** dell'Osservazione 1.2.6 possiamo scrivere

$$\mathscr{C}(\chi h) \leq 2T + 1, \tag{1.13}$$
$$\mathscr{C}(fgh) \leq \mathscr{C}(\Phi\Psi h) + 2T + 1. \tag{1.14}$$

D'altra parte

$$f^{++}gh^* = (\bar{\Phi} + x^{R'})(x^{-S'} + \bar{\Psi})h^* = \bar{\Phi}\bar{\Psi}h^* + \bar{\chi}h^*$$

dove

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= x^{-S'}\bar{\Phi} + x^{R'-S'} + x^{R'}\bar{\Psi}\\ &= x^{-R-S'} + \cdots + x^{R'-S'-1} + x^{R'-S'} + x^{R'-S'+1} + \ldots x^{R'+S}.\end{aligned}$$

Come prima valutiamo $\mathscr{C}(\bar{\chi}h^*)$.
I coefficienti di $\bar{\chi}$ sono tutti 1 per ogni indice da $-R-S'$ a $R'+S$.
Per l'ipotesi (1.11), o $R+S'>T$ o $R'+S>T$. Se $R+S'>T$, allora

$$R'+S \geq R+S'-1 \geq T$$

e dunque h^* definita come in (1.7) può essere vista come una sotto-sequenza di potenze di $\bar{\chi}$. Stessa cosa vale se $R'+S>T$. Allora:

$$\bar{\chi} = x^{-R-S'} + \cdots + x^{-T-1} + h^* + x^{T+1} + \cdots + x^{R'+S}$$

e dunque tenendo conto della proprietà **a)** dell'Osservazione 1.2.6 vale che

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\bar{\chi}h^*) &= \mathscr{C}\left(\Big(\sum_{i=-T-1}^{-R-S'} x^i + \sum_{i=-T}^{T} x^i + \sum_{i=T+1}^{R'+S} x^i\Big)\Big(\sum_{j=-T}^{T} x^j\Big)\right)\\ &= \mathscr{C}\left(\Big(\sum_{j=-T}^{T} x^j \sum_{i=-T-1}^{-R-S'} x^i\Big) + \sum_{i,j} x^{i+j} + \Big(\sum_{j=-T}^{T} x^j \sum_{i=T+1}^{R'+S} x^i\Big)\right)\\ &= \underbrace{\mathscr{C}\Big(\sum_{j=-T}^{T} x^j \sum_{i=-T-1}^{-R-S'} x^i\Big)}_{=0} + \mathscr{C}\Big(\sum_{i,j} x^{i+j}\Big) + \underbrace{\mathscr{C}\Big(\sum_{j=-T}^{T} x^j \sum_{i=T+1}^{R'+S} x^i\Big)}_{=0}\\ &= \Big(\sum_{i+j=0} 1\Big) = 2T+1.\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathscr{C}(\bar{\chi}h^*) = 2T+1 \tag{1.15}$$

$$\mathscr{C}(f^{++}gh^*) = \mathscr{C}(\bar{\Phi}\bar{\Psi}h^*) + 2T + 1. \tag{1.16}$$

Ora definiamo due nuove funzioni:

$$\begin{aligned}\Phi^+(x) &:= x^{-(R'-1)} + \cdots + x^R = \bar{\Phi}(x^{-1}),\\ {}^+\Psi(x) &:= x^{-S} + \cdots + x^{S'-1} = \bar{\Psi}(x^{-1})\end{aligned}$$

per le quali si ha che

$$\max\{R'-1+S, R+S'-1\} = \max\{R'+S, R+S'\} - 1 = n-1.$$

Dunque per ipotesi induttiva (1.12) si ha che

$$\mathscr{C}(\Phi\Psi h) \leq \mathscr{C}(\Phi^{++}\Psi h) \tag{1.17}$$

ma

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\Phi^{++}\Psi h) &= \mathscr{C}\{\bar{\Phi}(x^{-1})\bar{\Psi}(x^{-1})h^*(x)\} \\ &= \mathscr{C}\{\bar{\Phi}(x^{-1})\bar{\Psi}(x^{-1})h^*(x^{-1})\} \\ &= \mathscr{C}\{\bar{\Phi}(x)\bar{\Psi}(x)h^*(x)\} = \mathscr{C}(\bar{\Phi}\bar{\Psi}h^*)\end{aligned}$$

Allora considerando anche (1.14),(1.16),(1.17) vale che

$$\mathscr{C}(fgh) \leq \mathscr{C}(f^{++}gh^*)$$

e concludiamo la dimostrazione.

$\square$

La domanda che ora sorge spontanea è se questo risultato si possa estendere o meno a un qualunque numero k di insiemi finiti di elementi non negativi. La risposta è affermativa anche se si richiedono particolari condizioni su tali insiemi: infatti mentre due di essi possono essere presi arbitrariamente, gli altri $k-2$ insiemi devono essere necessariamente simmetrici.
Fortunatamente la dimostrazione di questo risultato è meno complessa e si ottiene direttamente applicando il Teorema 1.3.1.
Innanzitutto enunciamo il seguente lemma che ci faciliterà la dimostrazione:

Lemma 1.3.2. *Siano $(c^*), (d^*), (e^*), \dots$ un numero finito di insiemi simmetricamente decrescenti. Allora l'insieme (Q) definito*

$$Q_n = \sum_{t+u+\cdots=n} c_t^* d_u^* \dots$$

è simmetricamente decrescente.

Dimostrazione. Basta dimostrare l'enunciato per due insiemi, perché il caso generale si dimostra iterando l'argomento. Dunque siano $(c^*), (d^*)$ due insiemi simmetricamente decrescenti e poniamo

$$Q_n = \sum_{t+u=n} c_t^* d_u^*.$$

Definendo $T := \max\{t\}$ e $U := \max\{u\}$ notiamo che l'indicizzazione di (Q) va da $-T-U$ a $T+U$, e possiamo supporre che

$$Q_n = 0 \quad \forall n \notin [-T-U, T+U] \cap \mathbb{N}.$$

Per simmetria non è difficile dimostrare che $Q_n = Q_{-n}$.
Per ogni insieme (x) si ha che

$$\sum_n x_n Q_n = \sum_n x_n \sum_{t+u=n} c_t^* d_u^* = \sum_n \sum_{t+u=n} x_n c_t^* d_u^*$$

e applicando il Teorema 1.3.1,

$$\sum_n \sum_{t+u=n} x_n c_t^* d_u^* \leq \sum_n \sum_{t+u=n} x_n^+ c_t^* d_u^* = \sum_n x_n^+ Q_n.$$

Allora

$$\sum_n x_n Q_n \leq \sum_n x_n^+ Q_n$$

per ogni insieme (x), e quindi applicando il Corollario 1.2.3 si ha che (x^+) e (Q) sono similmente ordinati.
Inoltre $(Q) = \{Q_n\}$ è una funzione pari in n, e quindi (Q) è simmetricamente decrescente.

$\square$

Dunque enunciamo il seguente Teorema

Teorema 1.3.3. *Siano $(a), (b), (c), (d), \ldots$ un numero finito di insiemi, e supponiamo che $(c), (d), \ldots$ siano insiemi simmetrici. Allora*

$$\sum_{r+s+t+u+\cdots=0} a_r b_s c_t d_u \ldots \leq \sum_{r+s+t+u+\cdots=0} a_r^{++} b_s c_t^* d_u^* \ldots.$$

Dimostrazione. La prova si svolge per induzione sul numero di insiemi.
Sia k il numero di questi insiemi.
Il Passo base è banale e nei caso $k = 2$ o $k = 3$ concludiamo sfruttando rispettivamente il Teorema 1.2.1 o il Teorema 1.3.1.
Dunque sia $k \geq 4$. Supponiamo vero l'enunciato per $k-1$ insiemi e mostriamo che vale per k insiemi. Poniamo

$$Q_n = \sum_{t+u+\cdots=n} c_t^* d_u^* \ldots$$

che per il Lemma 1.3.2 sappiamo essere un insieme simmetricamente decrescente. Inoltre definiamo l'insieme (P) tale che

$$P_m = \sum_{r+s=m} a_r b_s.$$

Allora applicando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}\sum_{r+s+t+u+\cdots=0} a_r b_s c_t d_u \ldots &= \sum_{m+t+u+\cdots=0} P_m c_t d_u \ldots \\ &\leq \sum_{m+t+u+\cdots=0} P_m^+ c_t^* d_u^* \ldots\end{aligned}$$

e dunque

$$\sum_{r+s+t+u+\cdots=0} a_r b_s c_t d_u \ldots \leq \sum_m P_m^+ Q_m = \sum_m P_m Q_{\Phi(m)}$$

dove $\Phi(m)$ è una permutazione tale che $P_m = P^+_{\phi(m)}$.
Quindi per il Teorema 1.3.1 si ha che

$$\begin{aligned}\sum_{r+s+t+u+\cdots=0} a_r b_s c_t d_u \ldots &\leq \sum_{r+s+m=0} a_r b_s Q_{\phi(m)} \\ &\leq \sum_{r+s+m=0} a_r^{++} b_s Q_m^* \\ &= \sum_{r+s+m=0} a_r^{++} b_s Q_m \\ &= \sum_{r+s+t+u+\cdots=0} a_r^{++} b_s c_t^* d_u^* \ldots .\end{aligned}$$

□

L'ipotesi sulla simmetricità degli insiemi $(c), (d), \ldots$ è necessaria, perché altrimenti non sarebbe possibile specificare il riarrangiamento massimale in termini di (a^+) e $({}^+b)$. Tuttavia trascurando questa ipotesi è comunque possibile enunciare un risultato che, seppur meno preciso, si ritrova spesso nelle applicazioni.

Teorema 1.3.4. *Siano $(a), (b), (c), \ldots$ k insiemi finiti. Allora $\exists C(k) \in \mathbb{R}$, $C(k) > 0$ costante che dipende da k, tale che*

$$\sum_{r+s+t+\cdots=0} a_r b_s c_t \ldots \leq C(k) \sum_{r+s+t+\cdots=0} a_r^+ b_s^+ c_t^+ \ldots .$$

Capitolo 2

Riarrangiamenti di funzioni reali

In questo capitolo generalizziamo la teoria dei riarrangiamenti estendendola alle funzioni su $\mathbb{R}^n$. In parallelismo con quanto visto nel capitolo precedente, lavoreremo con funzioni non negative misurabili a valori reali.
Il concetto di *riarrangiamento di una funzione* si può intendere come una manipolazione della forma della funzione stessa, con la proprietà che questa mantenga certe caratteristiche quantitative. In seguito tratteremo due tipologie di riarrangiamento: il *riarrangiamento simmetricamente decrescente* e la *polarizzazione*.

2.1 Notazioni e Concetti preliminari

Introduciamo alcuni concetti fondamentali che ci serviranno nel corso della trattazione.
Richiamiamo alcune definizioni di teoria della misura.

Definizione 2.1.1. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *Lebesgue-misurabile* se è possibile assegnare a questo una misura di Lebesgue.
In particolare tale misura si indica con $\mathscr{L}^n(A)$.

Definizione 2.1.2. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *Lebesgue-misurabile* se $\forall A \subset \mathbb{R}$ misurabile, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è Lebesgue-misurabile.

Definizione 2.1.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo *Funzione Caratteristica* la funzione definita come

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostra che questa funzione è Lebesgue-misurabile se A lo è.

Osservazione 2.1.4.

$$\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$$

In seguito quando si parla di misurabilità ci si riferisce alla misura di Lebesgue.

Nella sezione 2.3 inoltre si utilizzano alcuni teoremi che conviene richiamare.

Teorema 2.1.5 (di Ascoli-Arzelà). *Sia (E, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathscr{F} \subseteq C(E, \mathbb{R})$. Allora $\mathscr{F}$ è compatto per successioni in $(C(E, \mathbb{R}), d_\infty)$ se e solo se*

1. *$\mathscr{F}$ è chiuso;*
2. *$\mathscr{F}$ è puntualmente limitato;*
3. *$\mathscr{F}$ è equicontinuo.*

Teorema 2.1.6 (della Convergenza Monotona). *Siano $\{f_k\}$ una successione di funzioni misurabili non negative, $f_k : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, e supponiamo che la successione sia crescente $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Allora posto $f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_k(x)$, si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx.$$

2.2 Riarrangiamento simmetricamente decrescente

La prima tipologia importante di riarrangiamento che analizziamo è il *Riarrangiamento simmetricamente decrescente.* Tale riarrangiamento, agendo su una funzione, genera una funzione simmetrica definita su una palla centrata nell'origine, ma con la proprietà che gli insiemi di sopra-livello mantengano la stessa misura.

Definizione 2.2.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile di misura finita. Chiamiamo *Riarrangiamento decrescente di A* la palla aperta centrata nell'origine avente la stessa misura di A. La indicheremo con

$$A^* := \{x \in \mathbb{R}^n |\, w_n |x|^n < \mathscr{L}^n(A)\}$$

dove $w_n = \mathscr{L}^n(B(0, 1))$.

Consideriamo una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

non negativa e tale che $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$.
Per una funzione di questo tipo si dimostra che gli *insiemi di sopralivello*, definiti $\forall t > 0$ come

$$\{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) > t\}$$

hanno tutti misura finita.

Definizione 2.2.2. Sia f come sopra. Chiamiamo *Riarrangiamento simmetricamente decrescente di* f la funzione f^* definita come

$$f^*(x) := \int_0^\infty \chi_{\{f(x)>t\}^*} dt.$$

Osservazione 2.2.3. La Definizione 2.2.2 è ben posta dal momento che la misura delle palle $\{x \in \mathbb{R}^n |\, f(x) > t\}^*$ è finita $\forall t > 0$ e la funzione caratteristica χ è misurabile.

Si dimostra che f^* è inferiormente semicontinua e per definizione f e f^* sono equimisurabili, cioè $\forall t > 0$ si ha che

$$\mathscr{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n | f^*(x) > t\}) = \mathscr{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > t\}).$$

Osservazione 2.2.4. Ogni funzione f non negativa misurabile si può scrivere in termini dei suoi insiemi di sopra-livello, sfruttando quella che si chiama *Rappresentazione della torta a strati*, cioè

$$f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f(x)>t\}} dt.$$

Da questa scrittura si capisce che f^* è una variante speciale di questa rappresentazione.

Quest'ultima osservazione ci permette di dedurre proprietà di f e f^* analizzando gli insiemi di sopra-livello di f. Vediamone alcune.

Lemma 2.2.5. *Per ogni funzione non negativa $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, si ha che*

$$||f||_p = ||f^*||_p.$$

Dimostrazione. Consideriamo la rappresentazione di f tramite i suoi insiemi di sopra-livello. Applicando il Teorema di Fubini si ottiene che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\{f^p(x)>t\}} dt dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f^p(x)>t\}} dx dt \\ &= \int_0^\infty \mathscr{L}^n(\{f^p > t\}) dt \\ &\overset{s^p=t}{=} \int_0^\infty \mathscr{L}^n(\{f > s\}) p s^{p-1} ds\end{aligned}$$

e siccome per definizione $\mathscr{L}^n(\{f(x) > s\}) = \mathscr{L}^n(\{f(x) > s\}^*)$, procedendo a ritroso rispetto ai passaggi precedenti ho la prova dell'enunciato.

□

In particolare, prese due funzioni f,g come sopra, si ha che il riarrangiamento simmetricamente decrescente minora l'errore in norma $\mathbb{L}_p$ tra le due funzioni.

Lemma 2.2.6. *Siano $f, g \in \mathbb{L}_p$, con $1 \leq p \leq \infty$, funzioni non negative. Allora*

$$||f - g||_p \geq ||f^* - g^*||_p.$$

Lemma 2.2.7. *Il riarrangiamento simmetricamente decrescente preserva l'ordine, cioè*

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \implies f^*(x) \leq g^*(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata considerando che

$$\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > t\}^* \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) > t\}^*$$

e che dunque

$$\int_0^\infty \chi_{\{f(x)>t\}^*} dt \leq \int_0^\infty \chi_{\{g(x)>t\}^*} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Lemma 2.2.8 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood per riarrangiamenti simmetricamente decrescenti)**.** *Siano f, g funzioni non negative misurabili che si annullano all'infinito. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx.$$

Dimostrazione. Supponiamo temporaneamente che $f = \chi_A$ e $g = \chi_B$ siano le funzioni caratteristiche degli insiemi A e B, misurabili e di misura finita. Allora A^* e B^* sono palle centrate nell'origine e $A^* \cap B^*$ è la palla più piccola tra le due. Dunque

$$\mathscr{L}^n(A^* \cap B^*) = \min\{\mathscr{L}^n(A), \mathscr{L}^n(B)\} \geq \mathscr{L}^n(A \cap B)$$

e in questo caso otteniamo la disuguaglianza.
Vediamo il caso generale. Considerando l'Osservazione 2.2.4 e applicando il Teorema di Fubini si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{\{f(x)>s\}}\chi_{\{g(x)>t\}}dsdtdx \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathscr{L}^n(\{f>s\}\cap\{g>t\})dsdt\end{aligned}$$

e per ciò visto nella prima parte si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx &\leq \int_0^\infty\int_0^\infty \mathscr{L}^n(\{f>s\}^*\cap\{g>t\}^*)dsdt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{\{f(x)>s\}^*}\chi_{\{g(x)>t\}^*}dsdtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx.\end{aligned}$$

□

Nel capitolo successivo verrà anche enunciato (e dimostrato) il Teorema di Riesz "semplificato" per questo tipo di riarrangiamento.

2.3 La Polarizzazione

Ora analizzeremo una tipologia più semplice di riarrangiamento: la *Polarizzazione*. In particolare mostreremo che è possibile approssimare un riarrangiamento simmetricamente decrescente tramite una serie di polarizzazioni.
Sia H_0 un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ che non contiene l'origine. Questo divide $\mathbb{R}^n$ in due parti, e definiamo

- H^+ la parte di spazio che contiene l'origine;
- H^- la parte di spazio complementare a H^+, escluso H_0.

Sia σ la riflessione che porta uno spazio nell'altro.

Definizione 2.3.1. Sia f una funzione. Chiameremo *riarrangiamento a due punti* o *polarizzazione di* f rispetto a H_0 la funzione f^σ così definita:

$$f^\sigma(x) := \begin{cases} \max\{f(x), f(\sigma x)\} & x \in H^+, \\ \min\{f(x), f(\sigma x)\} & x \in H^-, \\ f(x) & x \in H_0. \end{cases}$$

Definizione 2.3.2. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Chiamiamo *Riarrangiamento a due punti* o *Polarizzazione di* A rispetto a H_0 l'insieme A^σ tale che

$$\begin{cases} A^\sigma \cap H^+ = (A \cup \sigma A) \cap H^+, \\ A^\sigma \cap H^- = (A \cap \sigma A) \cap H^+, \\ A^\sigma \cap H_0 = A \cap H_0. \end{cases}$$

Lemma 2.3.3. *Supponiamo che* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sia una funzione uniformemente continua. Allora per ogni riflessione* σ *la polarizzazione* f^σ *di* f *è uniformemente continua. In particolare hanno lo stesso modulo di continuità, cioè quando* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ *per cui*

$$(|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

si ha anche che

$$|f^\sigma(x) - f^\sigma(y)| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato e siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x - y| < \delta_\varepsilon$.
Se $x, y \in H_0$ la tesi è immediata. Se $x, y \in H^+$, allora:

$$\begin{aligned} |f^\sigma(x) - f^\sigma(y)| &= |\max\{f(x), f(\sigma x)\} - \max\{f(y), f(\sigma y)\}| \\ &\leq \max\{|f(x) - f(y)|, |f(\sigma x) - f(\sigma y)|\} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

perchè σ è una riflessione e dunque $|\sigma x - \sigma y| = |x - y| < \varepsilon$. La stessa cosa si può dimostrare se $x, y \in H^-$ scambiando il max con il min.
Se x, y non stanno entrambi nello stesso spazio H^+, H^- o H_0, allora:

$$\begin{aligned} |f^\sigma(x) - f^\sigma(y)| &\leq \max\{|f(x) - f(y)|, |f(\sigma x) - f(y)|, |f(x) - f(\sigma y)|, |f(\sigma x) - f(\sigma y)|\} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

dal momento che essendo σ una riflessione

$$|\sigma x - y| = |\sigma(\sigma x - y)| = |\sigma^2 x - \sigma y| = |x - \sigma y| \leq |x - y| < \varepsilon.$$

□

Teorema 2.3.4 (di Riesz "semplificato" per polarizzazioni)**.** *Sia* $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione non crescente su* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *e tale che* $J(t) \to 0$ *per* $t \to +\infty$*. Allora per ogni coppia di funzioni non negative* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)J(|x-y|)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^\sigma(x)g^\sigma(y)J(|x-y|)dxdy.$$

Inoltre se J *è strettamente decrescente, vale l'uguaglianza se e solo se* $f = f^\sigma$ *e* $g = g^\sigma$*, oppure* $f = f^\sigma \circ \sigma$ *e* $g = g^\sigma \circ \sigma$*, quasi ovunque.*

Dimostrazione. Abbiamo che $\mathbb{R}^n = H^+ \cup H_0 \cup H^-$ e sfruttando il fatto che H_0 è un iperpiano (e quindi ha misura n-dimensionale nulla) e che $H^- = \sigma H^+$, allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (*) &= \int_{H^+ \cup H_0 \cup H^-} \int_{H^+ \cup H_0 \cup H^-} (*) \\ &= \int_{H^+ \cup H^-} \int_{H^+ \cup H^-} (*) \\ &= \int_{H^+ \cup \sigma H^+} \int_{H^+ \cup \sigma H^+} (*).\end{aligned}$$

Dunque con un opportuno cambio di coordinate si ottiene che

$$\begin{aligned}I(f,g) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)J(|x-y|)dxdy \\ &= \int_{H^+} \int_{H^+} \{[f(x)g(y) + f(\sigma x)g(\sigma y)]J(|x-y|) \\ &\qquad + [f(x)g(\sigma y) + f(\sigma x)g(y)]J(|x-\sigma y|)\}dxdy.\end{aligned}$$

Siano $x, y \in H^+$ fissati. Ragioniamo per casi:

- se $f(x) \geq f(\sigma x)$ e $g(y) \geq g(\sigma y)$, la polarizzazione non ha effetto sulle funzioni nei punti $x, y, \sigma x, \sigma y$. Infatti:

$$\max\{f(x), f(\sigma x)\} = f(x), \qquad \max\{g(y), g(\sigma y)\} = g(y),$$

  e in questo caso ho l'equivalenza nell'enunciato;

- se $f(x) < f(\sigma x)$ e $g(y) < g(\sigma y)$, la polarizzazione scambia i valori di x e y rispettivamente con quelli di σx e σy e anche in questo caso si ha l'uguaglianza;

- se $f(x) \geq f(\sigma x)$ ma $g(y) < g(\sigma y)$, si ha che la funzione integranda di $I(f^\sigma, g^\sigma) - I(f,g)$ è data da

$$\begin{aligned}
&[f^\sigma(x)g^\sigma(y) + f^\sigma(\sigma x)g^\sigma(\sigma y) - f(x)g(y) - f(\sigma x)g(\sigma y)]J(|x-y|)\\
&\quad + [f^\sigma(x)g^\sigma(\sigma y) + f^\sigma(\sigma x)g^\sigma(y) - f(x)g(\sigma y) - f(\sigma x)g(y)]J(|x-\sigma y|)\\
&= [f(x)g(\sigma y) + f(\sigma x)g(y) - f(x)g(y) - f(\sigma x)g(\sigma y)]J(|x-y|)\\
&\quad + [f(x)g(y) + f(\sigma x)g(\sigma y) - f(x)g(\sigma y) - f(\sigma x)g(y)]J(|x-\sigma y|)\\
&= (f(x) - f(\sigma x))(g(\sigma y) - g(y))(J(|x-y|) - J(|x-\sigma y|)).
\end{aligned}$$

  In particolare, per ipotesi su J sia ha che

$$(f(x) - f(\sigma x))(g(\sigma y) - g(y))(J(|x-y|) - J(|x-\sigma y|)) \geq 0$$

  e dunque $I(f^\sigma, g^\sigma) - I(f,g) \geq 0$, da cui segue la tesi.

Non è difficile dimostrare l'uguaglianza nei casi $f = f^\sigma$ e $g = g^\sigma$, oppure $f = f^\sigma \circ \sigma$ e $g = g^\sigma \circ \sigma$, quasi ovunque.

$\square$

Teorema 2.3.5 (di Hardy-Littlewood per polarizzazioni)**.** *Siano f, g due funzioni misurabili non negative su $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^\sigma(x)g^\sigma(x)dx$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $(f(x) - f(\sigma x))(g(x) - g(\sigma x)) \geq 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Procedendo in modo simile alla dimostrazione del Teorema 2.3.4, posso scrivere

$$\begin{aligned}
I(f^\sigma, g^\sigma) - I(f,g) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f^\sigma(x)g^\sigma(x) - f(x)g(x))dx\\
&= \int_{H^+} (f^\sigma(x)g^\sigma(x) + f^\sigma(\sigma x)g^\sigma(\sigma x)\\
&\qquad - f(x)g(x) - f(\sigma x)g(\sigma x))dx.
\end{aligned}$$

Fissiamo $x \in H^+$. Se si ha che $(f(x) - f(\sigma x))(g(x) - g(\sigma x)) \geq 0$, allora

$$\begin{cases} f(x) \geq f(\sigma x) \\ g(x) \geq g(\sigma x) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \leq f(\sigma x) \\ g(x) \leq g(\sigma x) \end{cases}$$

e dunque la polarizzazione o non agisce o agisce su entrambe le funzioni. In entrambi i casi è banale mostrare che si ha l'uguaglianza. Il viceversa è il

ragionamento a ritroso.
Supponiamo che $f(x) \geq f(\sigma x)$ e $g(x) < g(\sigma x)$. Allora

$$\begin{cases} f^\sigma(x) = f(x) \\ f^\sigma(\sigma x) = f(\sigma x) \\ g^\sigma(x) = g(\sigma x) \\ g^\sigma(\sigma x) = g(x) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} I(f^\sigma, g^\sigma) - I(f,g) &= \int_{H^+} (f(x)g(\sigma x) + f(\sigma x)g(x) \\ &\qquad - f(x)g(x) - f(\sigma x)g(\sigma x))dx \\ &= \int_{H^+} \underbrace{(f(x) - f(\sigma x))}_{\geq 0} \underbrace{(g(\sigma x) - g(x))}_{>0} dx \geq 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.3.6. *Sia f una funzione non negativa su $\mathbb{R}^n$ che si annulla all'infinito. Allora*

$$f = f^* \iff f = f^\sigma \quad \forall \sigma \text{ riflessione,} \tag{2.1}$$

e inoltre

$$\exists \tau \text{ traslazione tale che } f = f^* \circ \tau \iff f = f^\sigma \text{ o } f = f^\sigma \circ \sigma \quad \forall \sigma \text{ riflessione.} \tag{2.2}$$

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ in (2.1) e (2.2) è immediata ed è conseguenza della simmetria del dominio di f^* e dal fatto che f^* è pari.
Vediamo il viceversa nel caso (2.1).
Supponiamo per assurdo che f non sia simmetricamente decrescente, e siano fissati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x_1| < |x_2|$ e $f(x_1) < f(x_2)$. Sia σ la riflessione che porta x_1 in x_2, e sia H_0 l'iperpiano invariante. Dunque $f^\sigma(x_1) = f(x_2)$ e $f^\sigma(x_2) = f(x_1)$, e quindi $f^\sigma \neq f$ contraddicendo le ipotesi.
Vediamo il viceversa nel caso (2.2).
Mostriamo la prova assumendo che f sia limitata e integrabile (ed è lecito perché altrimenti possiamo considerare delle funzioni approssimanti del tipo $f_\varepsilon = \min\{\varepsilon^{-1}, |f - \varepsilon|_+\}$). Con un'adeguata traslazione τ posso portare il centro di massa di f sull'origine. Allora, posto

$$g(\tau(x)) := f(x) \quad \forall x \in suppf$$

si ha che g ha il suo centro di massa in H^+, e dunque $g = g^\sigma \quad \forall \sigma$ riflessione.
Per (2.1) dunque $g = g^*$, e quindi $f = f^* \circ \tau$.

□

2.3.1 Approssimazione tramite polarizzazioni

Sfruttiamo i risultati appena dimostrati per far vedere che si può approssimare il riarrangiamento simmetricamente decrescente di una funzione tramite una serie di polarizzazioni consecutive della medesima.

Definizione 2.3.7. Fissiamo una funzione f non negativa e che tende a 0 all'infinito. Definiamo

$$Pol_f = \{f^{\sigma_1,\dots,\sigma_k} | \forall k \geq 0, \sigma_1, \dots, \sigma_k \text{ riflessioni}\}$$

essere l'insieme delle funzioni ottenute da f applicando un numero finito di polarizzazioni.

Teorema 2.3.8 (di Approssimazione di f^* tramite polarizzazioni)**.** *Sia f una funzione continua non negativa con supporto compatto in $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una successione $\{g_n\}_{n\geq 1}$ in Pol_f tale che*

$$g_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^* \textit{ uniformemente.}$$

Dimostrazione. Prendiamo una funzione

$$H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

strettamente decrescente, limitata e tale che $H(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. Definiamo il funzionale

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)H(|x|)dx$$

che è ben definito per il Teorema di Weierstrass. Per il Lemma 2.3.3 e il Teorema di Arzelà-Ascoli l'insieme Pol_f è relativamente compatto in $C_c(\mathbb{R}^n)$.
Il funzionale $I(f)$ assume il suo massimo per una certa funzione g nella chiusura di Pol_f. Mostreremo che $g = f^*$. Sia $\{g_n\}_{n\geq 1}$ una successione in Pol_f che converge uniformemente a g. Si ha che $\forall\sigma$ riflessione, le polarizzazioni g^σ di g stanno nella chiusura di Pol_f: infatti $g_n^\sigma \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g^\sigma$ uniformemente, e dunque $I(g) \geq I(g^\sigma)$ per massimalità di g. D'altra parte, $I(g) \leq I(g^\sigma)$ dal Lemma 2.3.5. Allora $I(g) = I(g^\sigma)$. Sempre per il Lemma 2.3.5 otteniamo che

$$(g(x) - g(\sigma x))(H(|x|) - H(|\sigma x|)) \geq 0$$

e questo implica che $g(x) = g^\sigma(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Siccome σ è arbitrario, per il Lemma 2.3.6 si ha che $g = g^*$. Inoltre essendo g equimisurabile con f (essendo il limite uniforme di funzioni equimisurabili con f), si ha proprio che $g = f^*$, e concludiamo.

□

Teorema 2.3.9 (di Riesz "semplificato" per riarrangiamenti simmetricamente decrescenti)**.** *Sia* $J : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *una funzione non crescente e tale che* $J(t) \to 0$ *per* $t \to \infty$. *Allora per ogni coppia* f, g *di funzioni misurabili non negative su* $\mathbb{R}^n$ *che si annullano all'infinito si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)J(|x-y|)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(y)J(|x-y|)dxdy.$$

Inoltre se J *è strettamente decrescente, vale l'uguaglianza (con il valore dell'integrale finito e diverso da 0) se e solo se* $\exists\tau$ *traslazione tale che* $f = f^* \circ \tau$ *e* $g = g^* \circ \tau$ *quasi ovunque.*

Dimostrazione. Denotiamo il Funzionale "semplice" di Riesz con

$$I(f,g) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)J(|x-y|)dxdy.$$

Supponiamo per il momento che f e g siano funzioni continue a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$ e che J sia limitata. Per il Teorema 2.3.8 esiste $\{f_n\}_{n\geq 1}$ in Pol_f e esiste $\{g_n\}_{n\geq 1}$ in Pol_g tali che

$$f_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^* \text{ uniformemente,}$$

$$g_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g^* \text{ uniformemente.}$$

Dunque per il Lemma 2.3.4 e per continuità del funzionale I si ha che

$$I(f,g) \leq I(f_n, g_n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I(f^*, g^*)$$

e si prova il risultato per funzioni continue a supporto compatto. Siccome queste funzioni sono dense in L^p con $1 \leq p < \infty$ e I è continuo su questo spazio, l'enunciato continua a valere. Nel caso più generale invece basta approssimare f e g con funzioni limitate del tipo viste in 2.3.8, e la disuguaglianza segue mandando $\varepsilon \to 0$ e per il Teorema della convergenza Monotona. Vediamo l'uguaglianza. Sia J strettamente decrescente, e supponiamo che $I(f,g) = I(f^*, g^*)$, valore finito e non nullo. Dunque $\forall\sigma$ polarizzazione si ha che $I(f,g) = I(f^\sigma, g^\sigma)$. Per l'enunciato di uguaglianza del Lemma 2.3.4, o $f^\sigma = f$ o $f^\sigma = f \circ \sigma$, e similmente per g. Siccome questo vale $\forall\sigma$, dal Lemma 2.3.6 si ha che $f = f^* \circ \tau$ per qualche τ traslazione, e similmente per g. Queste due traslazioni devono per forza coincidere.

□

Partendo da questo risultato è possibile dimostrare il Teorema di Riesz nel caso generale. Il teorema fu prima provato da Riesz in una dimensione, e successivamente esteso da Sobolev su $\mathbb{R}^n$. Diamone l'enunciato.

Teorema 2.3.10 (di Riesz). *Siano f, g, h funzioni non negative su $\mathbb{R}^n$ che si annullano all'infinito. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)h(x-y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(y)h^*(x-y)dxdy$$

Osservazione 2.3.11. Si può dimostrare che questo risultato non vale nel caso di riarrangiamenti tramite polarizzazioni.

Bibliografia

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E, Pòlya G., *Inequalities*, p. 260-299, Cambridge University press, Cambridge, 1934.

[2] Chong K. M., Rice M., *Equimeasurable rearrangements of functions*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Vol. 28, Queen's University, Kingston, 1971.

[3] Brock F., Solynin A. Yu., *An approach to symmetrization via polarization*, Transactions of the American Mathematical Society (2. series), Vol. 138, p. 1759-1796, 2000.

[4] Burchard A., Hajaiej H., *Rearrangement inequalities for functionals with monotone integrands*, Journal of Functional Analysis, Vol. 223 , p. 561-582, 2006.