

SCUOLA DI SCIENZE

**Dipartimento di Fisica e Astronomia**

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

**Emissione in banda X di ammassi di galassie  
con potenziale gravitazionale assisimmetrico e  
mezzo intracluster rotante**

Tesi di Laurea Magistrale

Candidato:

**Andrea Lorini**

Relatore:

**Chiar.mo Prof.**

**Carlo Nipoti**

Co-relatore:

**Dott. Stefano Etori**

---

Sessione III

Anno Accademico 2018/2019



*A nonna Anita ed ai membri  
prossimi della mia famiglia.*



# Indice

<b>Elenco delle figure</b>	<b>7</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduzione agli ammassi di galassie</b>	<b>3</b>
1.1 Scopo della tesi . . . . .	3
1.2 Proprietà generali degli ammassi di galassie . . . . .	3
1.3 Importanza cosmologica degli ammassi . . . . .	5
1.4 Teorema del viriale . . . . .	8
1.5 Parametri fisici e relazioni di scala . . . . .	9
1.6 Funzione di <i>Cooling</i> . . . . .	13
1.7 Metodi di stima di massa degli ammassi . . . . .	15
1.7.1 Massa viriale . . . . .	15
1.7.2 Massa idrostatica . . . . .	15
1.7.3 Lensing gravitazionale . . . . .	17
1.7.4 Effetto Sunyaev-Zel'dovich . . . . .	18
1.7.5 Bias delle misure . . . . .	19
1.8 Ammassi <i>cool-core</i> . . . . .	20
<b>2 Modelli stazionari di ICM in rotazione in potenziali gravitazionali schiacciati assisimmetrici</b>	<b>23</b>
2.1 Distribuzioni omeoidali . . . . .	23
2.2 $\gamma$ -models e profilo NFW . . . . .	26
2.3 Valori massimi dei parametri $\eta$ e $\epsilon$ . . . . .	29
2.4 Equazione idrodinamica di Eulero . . . . .	33
2.5 Equilibrio idrostatico . . . . .	34
2.6 Modelli stazionari di ICM in rotazione . . . . .	34
2.7 Gas perfetti e stratificazione politropica . . . . .	36
2.8 Leggi di velocità . . . . .	38
<b>3 Proprietà intrinseche dei modelli di ICM</b>	<b>41</b>
3.1 Distribuzione di massa . . . . .	41
3.2 Caso sferico rotante . . . . .	42
3.3 Caso schiacciato non rotante . . . . .	47
3.4 Caso schiacciato rotante . . . . .	48
3.5 Le osservazioni <i>X-COP</i> . . . . .	50
3.6 Profili termodinamici . . . . .	56
3.7 Entropia . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Proprietà osservabili dei modelli di ICM</b>	<b>61</b>
4.1	Brillanza superficiale . . . . .	61
4.2	Ellitticità delle isofote . . . . .	62
4.3	Test del metodo di misura dell'ellitticità . . . . .	64
4.4	Profili di ellitticità dei modelli di ICM . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>69</b>
5.1	Sintesi e discussione dei risultati . . . . .	69
5.2	Eventuali perfezionamenti futuri . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Coordinate cilindriche</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Proiezione di un sistema trasparente</b>	<b>75</b>
<b>C</b>	<b>Bremsstrahlung</b>	<b>77</b>
<b>D</b>	<b>Fit ellittico delle isofote</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>

# Elenco delle figure

1.1	Relazione $M-T$ degli ammassi di galassie ripresa da <i>Lieu et al. (2016)</i> , comprendente oggetti dei campioni <i>XXL</i> , <i>COSMOS</i> e <i>CCCP</i> . . . . .	12
1.2	Funzione di cooling quale riportata in <i>Sutherland and Dopita (1993)</i> con metallicità da 0 a quella solare. . . . .	14
2.1	Profilo di densità normalizzata avente forma analitica di un $\gamma$ -model con $\gamma = 2$ e di un modello NFW, in funzione del raggio normalizzato $\tilde{r}$ . . . . .	30
2.2	Distribuzione di densità normalizzata $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ di un $\gamma$ -model con $\gamma = 2$ (semipiano $z > 0$ ) in modelli schiacciati (oblati/prolati) con variazione dei parametri $\eta$ e $\epsilon$ . . . . .	31
2.3	Distribuzione di densità $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})$ di tipo NFW (semipiano $z > 0$ ) in modelli schiacciati (oblati/prolati) con variazione dei parametri $\eta$ e $\epsilon$ . . . . .	32
2.4	Profili di velocità assunti in funzione del raggio cilindrico, con le coppie $R_o = 170$ kpc e $u_o = 336$ km/s, $R_o = 120$ kpc e $u_o = 705$ km/s. . . . .	39
3.1	Profilo di densità radiale di tipo NFW in unità logaritmiche, ad assunti valori di riferimento $\rho_c = 4.31 \cdot 10^{-26}$ g/cm <sup>3</sup> e $r_s = 551$ kpc. . . . .	42
3.2	Profilo di massa radiale corrispondente ad una densità di tipo NFW in unità logaritmiche, ad assunti valori di riferimento $\rho_c = 4.31 \cdot 10^{-26}$ g/cm <sup>3</sup> e $r_s = 551$ kpc. . . . .	43
3.3	Distribuzione di densità, pressione e temperatura in modelli non isotermi di ICM rotante in un potenziale di alone sferico secondo i profili di velocità 1 (legge 2.52) e 2 (legge 2.53) . . . . .	45
3.4	Distribuzione di densità e pressione in modelli isotermi di ICM rotante in un potenziale di alone sferico secondo i profili di velocità (2.52) e (2.53). . . . .	46
3.5	Distribuzione di densità in modelli isotermi e non isotermi di ICM statico in un potenziale di alone schiacciato . . . . .	48
3.6	Profili radiali e verticali di pressione e temperatura nei modelli di ICM statico in un potenziale di alone schiacciato. . . . .	49
3.7	Distribuzione di densità in modelli non isotermi di ICM rotante in un potenziale di alone schiacciato . . . . .	51
3.8	Distribuzione di densità in modelli di ICM isoterma rotante in un potenziale di alone schiacciato. . . . .	52
3.9	Profili radiali e verticali di pressione e temperatura in modelli di ICM rotante in un potenziale di alone schiacciato . . . . .	53
3.10	Profilo radiale e verticale di densità e pressione in modelli di ICM non isoterma e rotante in un potenziale oblati, in confronto con i rispettivi fit globali in <i>Ghirardini et al. (2019)</i> . . . . .	59

3.11	Profilo radiale e verticale di temperatura ed entropia in modelli di ICM non isoterma e rotante in un potenziale oblatto, in confronto con i rispettivi fit globali in <i>Ghi+19</i> . . . . .	60
4.1	Mappa di brillantezza e profilo radiale di ellitticit� delle isofote del modello di test del metodo di <i>Lau et al. 2012</i> . . . . .	65
4.2	Mappe di brillantezza superficiale e relativi profili di ellitticit� delle isofote dei modelli <i>ONI1</i> , <i>ONI2A</i> e <i>ONI2B</i> . . . . .	67
4.3	Profili di ellitticit� radiale risultanti dei modelli oblati non isotermi posti a confronto con i dati osservativi di <i>Chandra</i> e <i>ROSAT</i> da <i>Lau et al. (2012)</i> . . . . .	68
4.4	Profili di ellitticit� radiale dei modelli non isotermi di ICM statico oppure rotante con legge di velocit� "2" (2.53) in un potenziale di alone sferico, oblatto o prolato, confrontati con i dati osservativi di <i>Lau+12</i> . . . . .	68
D.1	Fit ellittico delle isofote nei modelli <i>ONI2B</i> e <i>NIVP2</i> ( <i>Bianconi, Etori &amp; Nipoti 2013</i> ) con griglia logaritmica o lineare normalizzata. . . . .	82
D.2	Confronto tra il profilo radiale di ellitticit� delle isofote nei modelli <i>ONI1</i> , <i>ONI2A</i> , <i>ONI2B</i> e <i>NIVP2</i> ( <i>BEN13</i> ) ottenuto con il metodo di fit ellittico (griglia logaritmica o lineare normalizzata) e l'analogo ottenuto tramite il metodo di <i>Lau et al. (2012)</i> . . . . .	83
D.3	Mappe di brillantezza e profilo radiale di ellitticit� del modello di test del metodo di <i>Lau+12</i> con sovrapposte le ellissi di fit delle isofote risultanti dalla procedura ellittica e dalla stessa procedura per momenti d'inerzia. . . . .	84

# Elenco delle tabelle

3.1	Nomenclatura e relativi parametri caratterizzanti i vari modelli fisici di ICM analizzati. . . . .	54
3.2	Parametri di <i>best-fit</i> per le funzioni globali di densità, pressione, temperatura ed entropia del campione completo <i>X-COP</i> secondo <i>Ghirardini et al. (2019)</i> . . . . .	57
4.1	Dati risultanti dal test numerico del profilo di ellitticità (metodo di <i>Lau+12</i> ) su una distribuzione di brillantezza di prova. . . . .	66



## Abstract

In questa tesi vengono esposti vari modelli con cui si rappresenta verosimilmente la distribuzione del *mezzo intracluster* (*ICM*) in rotazione all'interno di un potenziale gravitazionale assisimmetrico quale si ritiene possa trovarsi in un tipico ammasso di galassie massiccio, e se ne discutono le principali osservabili in banda *X* attese, ponendole in relazione a quelle di ammassi osservati. Nella parte introduttiva si descrive cosa siano e cosa principalmente caratterizzi gli ammassi di galassie, fornendo gli elementi fondamentali che li rendono importanti dal punto di vista cosmologico, mentre nel secondo capitolo sono poste le basi analitiche con le quali si parametrizzano la presenza ed il moto del mezzo intergalattico: in particolare si assumeranno semplici distribuzioni di potenziale a simmetria assiale rispetto all'asse di rotazione dello stesso gas, per esempio aventi forma sferica o più realisticamente ad ellissoide, oblato o prolato, variandone opportunamente lo schiacciamento, e vengono poi presentati i rispettivi grafici risultanti del profilo di densità e delle altre variabili termodinamiche, ottenuti per mezzo di appositi programmi in linguaggio *Python*. Successivamente si pone l'attenzione sulle quantità rilevabili, che permettono effettivamente un diretto confronto tra teoria ed osservazioni: nello specifico mostriamo le mappe di brillantezza superficiale attese, delle quali si esaminerà l'andamento dell'ellitticità delle curve associate a livelli costanti (isofote) facendo uso del metodo di *Lau et al. (2012)* basato sui momenti d'inerzia (che in appendice confrontiamo con un diretto metodo di fit ellittico). Seguono considerazioni e commenti su quanto ottenuto tramite queste ultime procedure, allegando confronti con i principali studi che si stanno portando avanti in questo periodo: concludiamo che i nostri risultati sono in accordo con recenti ed attuali contenuti di letteratura; inoltre essi si prospettano cruciali perché possono essere utilizzati per fare predizioni sulla capacità dei rilevatori *X* a bordo della prossima generazione di satelliti osservativi, in particolare *XRISM* e *ATHENA*, di misurare la rotazione del mezzo intracluster. Strumenti di questo tipo ci consentiranno di ampliare enormemente le nostre conoscenze del mezzo intracluster, grazie ad una eccellente risoluzione spettrale ( $\Delta E \approx 4 \text{ eV}$ ) finora mai raggiunta ad energie così elevate.



# Capitolo 1

## Introduzione agli ammassi di galassie

### 1.1 Scopo della tesi

Nel presente lavoro, dopo aver spiegato gli elementi teorici di base, saranno tracciate alcune modellizzazioni assisimmetriche della distribuzione del gas intergalattico (*ICM*) in tipici ammassi di galassie con il maggiore valore di massa noto ( $10^{15} M_{\odot}$ ), facendo ipotesi sulla forma del potenziale e sulle leggi di rotazione della componente gassosa. Procederemo quindi nell'analisi degli attesi profili di tutte le salienti grandezze termodinamiche, ponendo successivamente l'attenzione sulle quantità osservabili, in particolare la brillantezza superficiale in banda  $X$  e la forma delle isofote, cioè le curve lungo cui la brillantezza è costante. Esaminare il modo in cui cambiano i profili al variare delle ipotesi alla base dei modelli permette di capire quali possano essere quelle che possono effettivamente giustificare il comportamento negli oggetti reali che osserviamo, e sarà possibile osservare, con la prossima generazione di satelliti ad alta risoluzione. Ad esempio, un potenziale schiacciato piuttosto che sferico introdurrà un analogo schiacciamento nella distribuzione dell'*ICM*, che si riflette nella stratificazione delle mappe di brillantezza ovvero nella forma delle isofote; tuttavia lo stesso effetto è prodotto nel caso in cui il gas sia in rotazione all'interno del potenziale gravitazionale, quindi è interessante porre a confronto ciò che risulta da differenti supposizioni di questo tipo. Per quel che riguarda in particolare la rotazione, essa tra l'altro costituisce un importante contributo, diverso dall'energia termica delle particelle, in grado di mantenere l'*ICM* in equilibrio, ovvero impedirne il collasso all'interno del potenziale gravitazionale dell'alone: studiare i profili di velocità si rivela dunque anche un ottimo strumento per studiare la distribuzione di massa degli ammassi, mettendo in discussione comuni assunzioni come quella di equilibrio idrostatico.

### 1.2 Proprietà generali degli ammassi di galassie

Per *ammassi di galassie* si intendono oggetti celesti costituiti visivamente da un agglomerato di galassie, in numero di parecchie decine, centinaia fino a migliaia, tenute insieme dall'enorme campo gravitazionale in cui si trovano. Queste strutture si possono estende-

re tipicamente per un raggio di 1 o 2 Mpc<sup>1</sup>, ed avere masse caratteristiche fino a circa  $10^{15} M_{\odot}$ , dove  $M_{\odot} \approx 1.989 \cdot 10^{33}$  g è la massa del Sole; sono più grandi dei cosiddetti *gruppi*, di uno dei quali anche la nostra galassia, la Via Lattea, fa parte ("*Gruppo Locale*"), poiché in genere questi contengono poche decine di galassie fortemente interagenti e sono molto compatti, usualmente con una dimensione radiale fino a 1 Mpc e massa massima di  $10^{14} M_{\odot}$ . Dal punto di vista morfologico, gli ammassi sono in genere ricchi di galassie ellittiche ("*ETGs*", Early-Type Galaxies), e si possono classificare come "*cD*", in cui spicca una galassia di questo tipo dominante per massa e luminosità al centro, "*Spiral-rich*", di tipo *cD* contenenti buone quantità di galassie a spirale e densità più uniformi anche nelle zone interne, e "*Spiral-poor*", con poche spirali e una densità che cresce rapidamente al decrescere della distanza dal centro.

La componente galattica visibile in realtà non è quella dominante in termini di massa. Infatti osservativamente gli ammassi mostrano un'intensa luminosità ai raggi X,  $L_X \approx 10^{43 \div 49}$  erg/s come tipico ordine<sup>2</sup>: è possibile evincerne che sono immersi in un gas intergalattico ("*ICM*", Intra-Cluster Medium) con densità dell'ordine di  $10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup> e temperature dell'ordine di  $10^7$  o  $10^8$  K, in forma quindi di plasma ionizzato con principale emissione *free-free* i.e. "*Bremsstrahlung*" (si veda l'appendice C per i dettagli); questo mezzo gassoso costituisce circa il 10% in massa. Soprattutto però, analizzando la velocità delle galassie per effetto Doppler su righe spettrali note e considerando la grande energia cinetica corrispondente alle alte temperature, si ritiene che gli ammassi siano costituiti da materia oscura ("*DM*", Dark Matter), in una misura dominante stimata dell'80-90%. Per quanto riguarda la metallicità dell'ICM, ovvero l'abbondanza in massa degli elementi più pesanti dell'elio anch'essa ricavata da analisi spettrale di righe, un valore tipico è  $Z \approx \frac{1}{3} Z_{\odot}$  ( $Z_{\odot} \approx 0.02$ ): in realtà tuttavia ci possiamo aspettare un gradiente negativo del contenuto metallico verso le regioni esterne perché, parimenti a ciò che vediamo nelle galassie, la maggiore densità interna corrisponde ad un maggiore arricchimento del mezzo di elementi pesanti, come conseguenza della naturale evoluzione stellare, collisioni, *feedback* e simili processi; *De Grandi e Molendi (2001)* effettivamente sostengono che una descrizione più appropriata di  $Z$  sarebbe una legge di potenza decrescente con la distanza dal centro. Gli studi riguardanti dettagliate caratteristiche dell'emissione spettrale, possibili scomponendo la luce delle sorgenti nelle singole lunghezze d'onda o equivalentemente frequenze di cui è costituita, fanno parte della branca nota come *spettroscopia*: oltre alla metallicità, essa è indispensabile per la determinazione della distanza e di moti locali per effetto Doppler che sposta il *centroide* di righe note (definizione di redshift nel paragrafo seguente), ma anche per dedurre contributi termici e di altra natura (come i turbolenti) grazie all'allargamento delle righe stesse. Casi rappresentativi in questo senso sono le emissioni a 6.7 keV e 6.9 keV di Fe XXV (ferro ionizzato ventiquattro volte) e Fe XXVI (ferro ionizzato venticinque volte), entrambe tipiche di plasmi astrofisici molto caldi quale è l'ICM.

In generale gli ammassi sono le strutture cosmiche virializzate (cioè sistemi che possia-

---

<sup>1</sup>1 Mpc :=  $10^6$  pc dove il *parsec* (pc) è una fondamentale distanza astronomica, definita come quella alla quale il semiasse maggiore dell'orbita terrestre è visto sottendere un angolo di  $1''$  e vale circa  $3.086 \cdot 10^{18}$  cm ( $3.262$  anni-luce). Nel corso di questa tesi utilizzeremo come sistema di unità di misura il *cgs*, che rispetto al *Sistema Internazionale* (*S.I.* o *MKS*) esprime le lunghezze in cm ( $10^{-2}$  m) e le masse in g ( $10^{-3}$  kg): le forze hanno quindi dimensione  $\text{g cm s}^{-2}$ , detta *dynes*, posta essere l'entità percepita da due cariche elettriche fondamentali distanti 1 cm (attraverso la legge di Coulomb con costante  $k := 1$  si ottiene la carica 1 e.s.u. [ $\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{s}^{-1}$ ]  $\approx 3.336 \cdot 10^{-10}$  C); infine le energie sono date in erg :=  $10^{-7}$  J (*Joule*).

<sup>2</sup>Questa radiazione copre lunghezze d'onda  $\lambda$  tipiche da  $10^{-10}$  a  $10^{-6}$  cm (per confronto, la luce visibile va approssimativamente da  $4 \cdot 10^{-5}$  a  $8 \cdot 10^{-5}$  cm), quindi per  $c = \lambda \nu$ , essendo la velocità della luce nel vuoto  $c$  pari a  $2.99792458 \cdot 10^{10}$  cm/s, ha associate frequenze  $\nu$  circa da  $10^{20}$  a  $10^{16}$  Hz.

mo considerare autogravitanti e in equilibrio, paragrafo 1.4) più grandi che esistano, e rivestono una notevole importanza nella comprensione degli elementi fondamentali di cosmologia, come appare chiaro dalla sezione successiva.

### 1.3 Importanza cosmologica degli ammassi

Nonostante gli ammassi fossero già noti nell'800 con l'ausilio di telescopi sempre più potenti, le prime osservazioni di carattere scientifico si datano solamente agli anni '30 del secolo scorso, quando l'astronomo Fritz Zwicky (1898-1974) portò ad un notevole incremento delle conoscenze su di essi grazie ai suoi studi sulla velocità delle galassie contenute nell'ammasso della Chioma (*Coma cluster*), e quindi ad una stima delle loro orbite. I risultati ottenuti gli consentirono tra l'altro di proporre per la prima volta l'esistenza di una forma di materia a noi invisibile, di cui possiamo percepire soltanto gli effetti gravitazionali: essa non a caso è nota come *materia oscura*, ed è molto più abbondante rispetto a quella effettivamente osservabile ("Problema della massa mancante", come apparirà chiaro nella parte conclusiva del prossimo paragrafo).

Il primo catalogo ufficiale di ammassi di galassie risale agli anni '50, quando lo statunitense George Ogden Abell lo redasse facendo uso di osservazioni presso il *Palomar Observatory* in California, e comprende approssimativamente quattromila oggetti in tutto. Già da allora, poiché la ricerca di questi sistemi ci spinge a distanze sempre più remote, era evidente la rilevanza che possono avere nello studio dell'origine e dell'evoluzione dell'Universo nella sua interezza, cioè in cosmologia: guardare lontano nel cielo significa infatti indagare sempre più nel passato, al limite verso le fasi primordiali dell'Universo, il che ci offre la possibilità di ricostruire l'intera traccia evolutiva<sup>3</sup>.

Attualmente, ciò è possibile attraverso apposite simulazioni numeriche cosmologiche, le quali ad ogni *redshift*  $z$  associano una struttura dell'Universo stesso a grande scala, in linea con le conoscenze teoriche e le osservazioni. Il *redshift* è una delle grandezze fondamentali in astrofisica e in cosmologia, definito  $z := (\lambda_{\text{os}} - \lambda_{\text{em}}) / \lambda_{\text{em}}$ , dove  $\lambda_{\text{em}}$  identifica la lunghezza d'onda di una transizione energetica a riposo (secondo il riferimento di laboratorio), che osserviamo spostata a  $\lambda_{\text{os}}$  come conseguenza del moto relativo tra noi osservatori e l'oggetto che la compie: per  $z \ll 1$  la velocità lungo la linea di vista è  $v_r \approx cz$ ; a causa della finitezza della velocità della luce, e poiché corpi più lontani presentano spostamento maggiore (legge di Hubble, si veda il testo seguente), il redshift è sinonimo di distanza ma anche di tempo<sup>4</sup>. Sappiamo che l'Universo, poco dopo la sua nascita all'istante  $t = 0$  da una singolarità di temperatura e densità elevatissime (il *Big Bang*), presentava una distribuzione di materia molto più uniforme ed accoppiata con la radiazione per via di continui processi di assorbimento e riemissione, inoltre aveva una geometria piatta. Solo successivamente, espandendosi, è diventato trasparente a seguito della ricombinazione degli elettroni con i protoni, e ha dato luogo a sistemi sempre più grandi, a partire da piccole disomogeneità che hanno causato instabilità gravitazionali, quindi perturbazioni e collassi (modello "gerarchico" o *bottom-up* di formazione): questi vengono studiati in prima approssimazione seguendo i ragionamenti della teoria di Jeans, tramite la varia-

<sup>3</sup>La velocità  $c$  con cui si propagano i segnali luminosi nel vuoto ha un valore finito, ed è il massimo fisicamente raggiungibile; pertanto, trascurando l'espansione dell'Universo, se  $\mathcal{D}$  è la distanza dell'oggetto emittente i fotoni hanno impiegato un tempo  $t = \mathcal{D}/c$  prima di giungere fino a noi.

<sup>4</sup>Per l'esattezza  $t(z) = \int_z^{+\infty} \frac{1}{H_0 E(z')} \frac{1}{1+z'} dz'$ , dipendente dal modello cosmologico assunto (si veda la successiva formula (1.4), dalla quale si ricavi  $\dot{a}/a_0$  ricordando  $1+z \approx a_0/a$ ).

bile detta *contrasto di densità*  $\delta(t, \bar{x}) := (\rho(t, \bar{x}) - \langle \rho(t) \rangle) / \langle \rho(t) \rangle$ , dove  $\langle \rho \rangle$  sta per la densità media dell'Universo ad un certo tempo; il caso  $\delta \ll 1$  è noto come "regime lineare", mentre  $\delta \gtrsim 1$  rappresenta il "regime non lineare" (come osservativamente è il caso degli ammassi). La materia oscura risulta la prima a collassare formando i relativi *aloni*, mentre solamente in un secondo momento quella barionica fa lo stesso, seguendo le buche di potenziale create dalla precedente: ciò riesce a spiegare il riscaldamento del gas, il quale raggiunge ingenti temperature soprattutto per mezzo di *shock*<sup>5</sup> e compressioni adiabatiche. Comunque, è ovvio che il risultato finale delle simulazioni deve coerentemente riprodurre la distribuzione della materia nell'Universo quale si presenta oggi a  $z = 0$ : macroscopicamente è costituita da "filamenti" di materia oscura, gas diffuso e galassie di campo che connettono porzioni di alta densità, dette *nodi*, raggruppanti galassie, ammassi e superammassi, alternati a grandi regioni pressoché vuote, il tutto disegnando una sorta di grande "ragnatela cosmica".

Si assume la validità del cosiddetto *principio cosmologico*, che afferma l'omogeneità e l'isotropia del nostro Universo su dimensioni molto ampie, dell'ordine di almeno 100 Mpc: ciò significa che a queste scale non esistono posizioni né direzioni privilegiate. La versione "perfetta" di questo principio, che aggiunge lo stesso concetto alla variabile tempo, corrisponderebbe ad uno *stato stazionario*, teoria entrata in crisi dalla scoperta del generale allontanamento delle galassie da parte degli astronomi Edwin Hubble e Georges Lemaître indipendentemente, sul finire degli anni '20: la visione statica fu definitivamente abbandonata dal 1964 quando A. Penzias e R. W. Wilson rilevarono per primi la *radiazione cosmica di fondo*, spesso indicata con la sigla *CMB*<sup>6</sup>. Il moto di allontanamento che caratterizza le galassie è rappresentato dalla famosa legge di diretta proporzionalità tra velocità ( $v_r$ ) e distanza ( $\mathcal{D}$ ),  $v_r = H_0 \mathcal{D}$ , dove la costante è il *parametro di Hubble*, numericamente  $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . Questa particolare unità di misura dipende da questioni pratiche: è dovuta al fatto che abitualmente gli astronomi esprimono la velocità di recessione in km/s e la distanza a grande scala in Mpc; è facile notare che questo parametro ha dimensione effettiva [ $\text{s}^{-1}$ ], per giungere alla quale in concreto basta tenere a mente la conversione da Mpc a km:

$$H[1/\text{s}] \approx \frac{10^{-19}}{3.086} H[\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]. \quad (1.1)$$

L'inverso di questa quantità risulta una misura temporale, che rappresenta il tempo tipico di espansione dell'Universo, cioè in prima approssimazione la sua età: poiché un anno contiene pressappoco  $3.156 \cdot 10^7$  s, oggi  $t_0 := 1/H_0$  si attesta a circa  $13.7 \cdot 10^9$  yr, ovvero quasi 14 miliardi di anni. Questa quantità è nota come *tempo di Hubble*.

Più in generale, il parametro  $H$  è definito come  $\dot{a}/a$ , con  $\dot{a} := \frac{da}{dt}$ , dove  $a(t)$  è il fattore di scala o di espansione che si può considerare la dimensione tipica dell'Universo ad un determinato istante, la cui evoluzione nel tempo è dettata dalla coppia di formule

$$\dot{a}^2 + \mathcal{K}c^2 = -\frac{8}{3}\pi G\rho a^2, \quad (1.2)$$

---

<sup>5</sup>Discontinuità irreversibile dei parametri termodinamici che si propaga a velocità supersonica in un dato mezzo: tipicamente esso ne subisce un aumento della densità e un riscaldamento.

<sup>6</sup>*Cosmic Microwave Background*: sorgente di fotoni omogenea ed isotropa avente spettro planckiano di *corpo nero*, il più perfetto in natura, con picco nelle microonde ( $0.01 \text{ cm} \lesssim \lambda \lesssim 1 \text{ cm}$ ) a cui oggi corrisponde  $T_{\text{CMB}} \approx 2.726 \text{ K}$ ; questa radiazione risale più o meno a 380000 anni dopo il Big Bang ed è considerata una sua "eco" (densità di energia radiativa dell'Universo destinata a diminuire a causa dell'espansione).

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left( \rho + 3\frac{P}{c^2} \right) a, \quad (1.3)$$

con  $\ddot{a} := d^2a/dt^2$ ,  $P$  pressione e  $G \approx 6.673 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  costante gravitazionale, note come *equazioni di Friedmann-Le Maître*<sup>7</sup>. Localmente il fattore di scala è legato al redshift tramite  $1+z \approx a_0/a$ , mentre il parametro di Hubble ne dipende come

$$H(z) = H_0 (1+z) \left[ 1 - \sum_i \Omega_{0,i} + \sum_i \Omega_{0,i} (1+z)^{1+3w_i} \right]^{1/2}, \quad (1.4)$$

dove la costante  $H_0$ , come in cosmologia tutte quelle aventi il pedice "0", è da intendersi  $H(0)$ , cioè il suo valore attuale; questa relazione è spesso scritta sinteticamente come

$$H(z) =: H_0 E(z). \quad (1.5)$$

Le sommatorie che compaiono nella (1.4) sono estese a tutte le componenti universali, cioè materiale (barionica ed oscura), "cosmologica" e radiativa: ad ognuna è associato un parametro di stato  $w$  che compare nella rispettiva equazione della pressione<sup>8</sup>, ma anche un parametro di densità  $\Omega_i := \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit}}}$  definito rispetto alla *densità critica*

$$\rho_{\text{crit}}(z) := \frac{3H(z)^2}{8\pi G}. \quad (1.6)$$

Questo valore è così denotato perché, confrontandolo con la densità totale dell'Universo, permette di discriminare il tipo di geometria da adottare per la determinazione della distanza tra due punti, o meglio due eventi nello spazio-tempo, il che è collegato al destino ultimo dell'Universo stesso: in particolare  $\Omega_T = \sum_i \Omega_i$  e, introdotto il *parametro di decelerazione*  $q := -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ , una geometria piatta equivale a  $\Omega_T = 1$  (curvatura  $\mathcal{K} = 0$ ), che prevede un'espansione infinita a  $q$  costante positiva, quella sferica o chiusa a  $\Omega_T > 1$  ( $\mathcal{K} = 1$ ), per la quale la gravità arresterà l'espansione determinando un ricollasso (*Big Crunch*, al quale può seguire un altro Big Bang e così via), infine quella iperbolica o aperta,  $\Omega_T < 1$  ( $\mathcal{K} = -1$ ), darebbe luogo ad un'espansione infinita libera (decelerazione nulla).

Il modello cosmologico attualmente più accreditato, di "concordanza" poiché si propone come quadro comune a tutte le deduzioni osservative finora disponibili, è denominato  *$\Lambda$ CDM*: consiste in una prevalenza della componente cosmologica  $\Omega_{0,\Lambda} \approx 0.68$ , chiamata *energia oscura* ("DE", Dark Energy), assimilabile all'energia del vuoto, una sorta di "anti-gravità" ritenuta responsabile dell'espansione accelerata di recente appurata; a

<sup>7</sup>Esse discendono dal principio cosmologico e dalla conseguente metrica spazio-temporale di Robertson-Walker, che in coordinate sferiche si scrive

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - \mathcal{K}r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right],$$

dove  $\mathcal{K}$  è la *curvatura*; questa metrica è utilizzata per risolvere l'equazione di campo di Einstein in Relatività Generale  $\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathcal{T}_{\mu\nu}$  ( $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  *tensore di Ricci*,  $\mathcal{R}$  la sua traccia ovvero "scalare di curvatura",  $g_{\mu\nu}$  *tensore metrico*,  $\Lambda$  "costante cosmologica" e  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  *tensore energia-impulso*).

<sup>8</sup>In generale  $P = w\rho c^2$ : per la radiazione  $w_{\text{Rad}} = 1/3$ , per la materia  $w_{\text{M}} \approx 0$  (contributo assunto molto piccolo), infine per la componente cosmologica  $w_{\Lambda} = -1$  (dalla relativa modifica del tensore energia-impulso).

questa forma energetica si affianca materia essenzialmente *oscura* e fredda ("CDM", Cold Dark Matter),  $\Omega_{0,\text{DM}} \approx 0.27$ . La specificazione "fredda" indica che era già non relativistica all'istante del disaccoppiamento tra materia e radiazione. Quanto alle altre componenti, per la materia *barionica*, quella comune osservabile "atomica" di cui noi stessi e ciò che ci circonda siamo formati, vale  $\Omega_{0,\text{B}} \approx 0.045$  (solamente circa il 5% del totale), mentre la restante relativistica, genericamente nota come "radiativa", è a maggior ragione trascurabile,  $\Omega_{0,\text{Rad}} \approx 9 \cdot 10^{-5}$ . I dati propendono globalmente per una geometria piatta dell'Universo perché, sommando i contributi, *Planck Collaboration et al. (2016)* hanno ottenuto  $\Omega_{\text{T}} = (1.00 \pm 0.02)$ . Alla luce di tutto ciò, la (1.4) si può riscrivere come

$$H(z) \approx H_0 [\Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,\text{M}} (1+z)^3]^{1/2}. \quad (1.7)$$

La densità critica odierna è stimata  $\rho_{\text{crit},0} \approx 1.9 \cdot 10^{-29} h_0^2 \text{ g/cm}^3$ , dove il parametro adimensionale  $h := H/(100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ , oggi  $h_0 \approx 0.7$ , sostanzialmente serve per esprimere il parametro di Hubble rendendone esplicita l'incertezza sulla sua misura<sup>9</sup>.

## 1.4 Teorema del viriale

Un sistema si dice *virializzato* qualora si trovi in uno stato di equilibrio. Si faccia attenzione a non confondere l'aggettivo con *rilassato*: quest'ultimo è concettualmente molto diverso, perché sta ad indicare che la funzione di distribuzione delle velocità è *maxwelliana* (equazione C.15). Nel caso in questione è possibile applicare il *teorema del viriale*, che nella sua forma più generale è alquanto complesso: consiste in un'analisi della funzione di distribuzione  $f(\bar{x}, \bar{v}, t)$  caratterizzante le posizioni e le velocità dei costituenti del sistema al variare del tempo, dalla quale deriva un insieme infinito di identità *tensoriali*. Per un sistema autogravitante in equilibrio e spazialmente limitato, grazie a Clausius e a metodi analitici di Jeans applicati a relazioni di Maxwell, questo teorema si riduce alla famosa formula

$$2 E_{\text{K}} = -E_{\text{U}}, \quad (1.8)$$

dove  $E_{\text{K}}$  è l'energia cinetica e  $E_{\text{U}}$  quella potenziale. L'identità, da intendersi come una media nel tempo, rappresenta in realtà la traccia del più semplice contributo di secondo ordine diverso da zero nel gruppo tensoriale accennato sopra, e discende dall'aver posto nulla, per assunto equilibrio, la derivata temporale seconda del momento polare di inerzia<sup>10</sup>  $\ddot{I} = 2(2E_{\text{K}} + E_{\text{U}})$ .

Anche nel caso degli ammassi, considerando le relative galassie come "particelle" di cui vediamo la componente di velocità lungo la linea di vista grazie allo spostamento Doppler delle righe spettrali, possiamo ricorrere al teorema del viriale: questo perché usualmente il loro tempo scala dinamico  $t_{\text{cross}} \approx D/\sigma_v$ , ovvero il tempo che una tipica galassia interna impiega ad attraversare l'ammasso, si rivela più piccolo dell'età dell'Universo almeno di un fattore  $10 h^{-1}$  se la dimensione lineare è  $D \approx 1.5 h^{-1} \text{ Mpc}$  e la dispersione di velocità

<sup>9</sup> $H$  è sempre stata una quantità tanto fondamentale quanto dibattuta: in riferimento alle prime stime numeriche, convenzionalmente viene espressa come  $100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ; è facile vedere che  $h$  varia col redshift proprio come  $H$ , cioè secondo (1.4) ovvero (1.7).

<sup>10</sup>Per un insieme di particelle massive in moto a distanza  $r$  rispetto ad un asse è  $I := \sum_i m_i r_i^2$ , mentre per distribuzioni continue  $I := \int_V \rho r^2 dV$  ( $V$  volume).

radiale, che ricordiamo essere  $\sigma_v := \sqrt{(v_i - \langle v \rangle)^2 / (N - 1)}$  ( $\langle v \rangle$  velocità media e  $N$  numero di galassie), è presa dell'ordine di 1000 km/s; ciò conferma che questi sono sistemi gravitazionalmente legati. Nel tempo, mediamente è pertanto valida la (1.8), in particolare sarà  $E_K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$ , e  $E_U = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} = -\frac{G}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$  dove  $r_{ij}$  è la distanza tra l' $i$ -esima e la  $j$ -esima galassia ed il fattore 1/2 proviene dalla ridondanza nel calcolo del potenziale di una stessa coppia di galassie. La massa totale galattica è  $M := \sum_i m_i$ , inoltre se definiamo la dispersione di velocità pesata per la massa  $\langle v^2 \rangle := \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i^2$  e il "raggio gravitazionale"  $r_g := 2M^2 \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j / r_{ij} \right)^{-1}$ , possiamo riscrivere le energie come  $E_K = \frac{M}{2} \langle v^2 \rangle$  e  $E_U = -\frac{GM^2}{r_g}$ , quindi dalla formula viriale segue

$$M = \frac{r_g \langle v^2 \rangle}{G}. \quad (1.9)$$

Ora, nell'ipotesi di avere una distribuzione di velocità isotropa si ha

$$\sigma_v^2 = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}, \quad (1.10)$$

che, combinata con la precedente, ci porta alla stima diretta della massa "viriale"

$$M_{\text{vir}} = \frac{3 r_{\text{vir}} \sigma_v^2}{G}. \quad (1.11)$$

Per ammassi ricchi questa formula restituisce una massa caratteristica di  $10^{15} M_\odot$  circa. Se adesso effettuiamo il rapporto  $M/N$ , troviamo per le galassie una massa tipica  $m \approx 10^{13} M_\odot$ , valore decisamente alto in quanto maggiore di almeno un ordine di grandezza rispetto alla massa stellare delle più massicce galassie note. Non solo: anche dal confronto tra  $M$  e la massa totale dedotta dalla luminosità della materia barionica visibile, tipicamente dell'ordine di  $10^{12}$  o  $10^{13} L_\odot$ , con  $L_\odot \approx 3.828 \cdot 10^{33}$  erg/s, emerge un rapporto massa-luminosità dell'ordine di  $300 h$  in unità solari. Questa è nota come la "questione della massa mancante" (*missing mass problem*): per spiegare le ingenti discrepanze, sembra dunque necessario invocare l'esistenza di un'enorme componente di massa non direttamente percepibile, cioè la materia oscura.

## 1.5 Parametri fisici e relazioni di scala

Per quanto visto, ogni ammasso di galassie può essere considerato avere un'estensione spaziale dal centro pari al raggio viriale  $r_{\text{vir}}$ , distanza massima alla quale la materia contenuta si trova in equilibrio; da analisi teoriche sulla formazione di questi oggetti, questo raggio è identificabile con  $r_{200}$ , cioè il valore radiale entro il quale la densità media assume un valore duecento volte superiore a quella critica dell'Universo, quest'ultima intesa al redshift associato. Allo stesso modo si può prendere  $M_{200}$ , la massa viriale contenuta entro  $r_{200}$ , come tipico valore della massa di un ammasso; conseguentemente, in approssimazione sferica, possiamo scrivere

$$\frac{3M_{200}}{4\pi r_{200}^3} := 200 \rho_{\text{crit}}. \quad (1.12)$$

Spesso come riferimento sono anche utilizzate le quantità  $r_{500}$  e  $M_{500}$ , definite in maniera identica alle precedenti ma secondo un fattore 500. Inoltre, sempre nell'ipotesi sferica, simulazioni cosmologiche a  $N$ -corpi unitamente a molti studi riguardo agli aloni di materia oscura (*Navarro et al. 1996* e successivi come *Makino et al. 1998*, *Jing and Suto 2000* ecc.) suggeriscono che la distribuzione della materia all'interno degli aloni stessi è riprodotta molto bene dal profilo

$$\rho_{\text{nfw}}(r) = \frac{\rho_c}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (1.13)$$

noto come *NFW*, acronimo degli scienziati Julio Navarro, Carlos Frenk e Simon White:  $\rho_c$  è un valore di riferimento di densità di materia oscura e  $r_s$  è un raggio caratteristico in cui l'andamento funzionale cambia pendenza. Si vede subito che  $\rho_c := 4 \rho_{\text{nfw}}(r_s)$ . Questo profilo è considerato universale, proprio perché numericamente in grado di descrivere in modo accettabile la stratificazione materiale negli aloni oscuri, anche per un grande intervallo di loro masse. Il raggio viriale e quello di scala definiscono un altro parametro che concorre a descrivere completamente un ammasso, cioè la *concentrazione*:

$$c_{200} := \frac{r_{200}}{r_s}, \quad (1.14)$$

che in effetti è una misura di quanto ammonta l'estensione in confronto al raggio di scala. Deduzioni numeriche ed osservative sembrano indicare che esiste una sorta di anticorrelazione tra le masse degli aloni e la loro concentrazione, cioè gli aloni più massicci hanno solitamente un valore di concentrazione minore rispetto a quelli più piccoli (si veda la successiva (1.23) da *Ettori et al., 2010*).

Gli ammassi di galassie soddisfano alcune cosiddette *relazioni di scala*, in cui la banda  $X$  come si può intuire gioca un ruolo primario. In generale, queste relazioni sono specifiche espressioni, derivanti da argomentazioni teoriche oppure puramente empiriche, che legano tra loro grandezze fisiche fondamentali come la massa, la temperatura, la luminosità, la dispersione di velocità ecc. degli oggetti a cui si riferiscono. Formule di questo tipo si rivelano estremamente importanti perché permettono una stima di quantità incognite a partire da altre note, che spesso possono portare ad una diretta determinazione della distanza di corpi celesti. A titolo d'esempio, si pensi alla *legge periodo-luminosità* delle "cefeidi" scoperta da Henrietta S. Leavitt agli inizi del XX secolo presso l'osservatorio di Harvard (*Leavitt & Pickering 1912*), oppure alla più recente *legge di Faber-Jackson* (*Faber & Jackson 1976*) relativa alle galassie ellittiche, il cui corrispettivo per quelle a spirale è la *Tully-Fisher* (*Tully & Fisher 1977*): esse permettono di risalire a quanto lontani siano quei corpi da semplici osservabili legate alla loro luminosità intrinseca<sup>11</sup>. Ma la rilevanza di queste correlazioni sta pure nel fatto che forniscono ottime rappresentazioni di caratteristiche specifiche quale banco di prova per ogni modello fisico che voglia descrivere e spiegare la natura degli stessi oggetti. Una delle principali per gli ammassi è la relazione tra la massa e la temperatura, che è possibile dedurre mediante il seguente ragionamento:

<sup>11</sup>Le *cefeidi* sono stelle variabili pulsanti considerate "candele standard" in quanto, ignorando effetti quali il colore ( $B-V$ ), seguono  $\mathcal{M}_V \approx -2.80 \log(\tau[\text{d}]) - 1.43$  dove  $\mathcal{M}_V$  è la magnitudine assoluta nella banda visibile e  $\tau[\text{d}]$  è il periodo di variabilità espresso in giorni ("log" logaritmo decimale); la distanza si ricava dal modulo  $m_V - \mathcal{M}_V \approx 5 - 5 \log(\mathcal{D}[\text{pc}])$  con  $m_V$  magnitudine apparente, che ricordiamo essere  $m_V := -2.5 \log(f/f_0)$  ( $f \approx \frac{L}{4\pi \mathcal{D}^2}$  flusso luminoso in arrivo per unità di superficie, normalizzato per un  $f_0$ ), mentre la magnitudine assoluta è definita come quella apparente che avrebbe un corpo posto a 10 pc da noi. La relazione di S. M. Faber e R. E. Jackson dice che  $L \propto \sigma_v^4$ , quella di R. B. Tully e J. R. Fisher  $L \propto v_{\text{max}}^4$  ( $v_{\text{max}}$  massima velocità nella curva di rotazione delle spirali).

dal *teorema dell'equipartizione dell'energia* è noto che  $T$  dà una misura dell'energia termica per particella, in particolare per un gas monoatomico si hanno classicamente tre gradi di libertà, quindi

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{\langle m \rangle}{2} \langle v^2 \rangle, \quad (1.15)$$

con costante di Boltzmann  $k_B \approx 1.381 \cdot 10^{-16}$  erg/K,  $\langle m \rangle$  massa particellare media e  $\langle v^2 \rangle$  dispersione di velocità, essendo la velocità media pari a 0 per la casualità dei moti interni, ciò se l'ammasso è stazionario e non rotante. Nell'ipotesi di isotropia, per la (1.10) è  $T \propto \sigma_v^2$ : ne segue che dal teorema del viriale, guardando la formula (1.11), la temperatura si può vedere proporzionale all'energia di legame dell'ammasso virializzato, i.e.

$$T \propto M_{\text{vir}}/r_{\text{vir}}. \quad (1.16)$$

Se vale (1.12), abbiamo  $T \propto r_{\text{vir}}^2$  per la quale, invertendola ed inserendola in (1.16), ci aspettiamo una correlazione del tipo  $M_{\text{vir}} = AT^\alpha$  con  $\alpha = 3/2$ , anche se il valore esatto dei due parametri  $A$  e  $\alpha$  può dipendere dal campione scelto. In figura 1.1 ne riportiamo una recente rappresentazione grafica di *Lieu et al. (2016)*, uno dei primi articoli sulla più grande *survey* (campione "XXL") del satellite *XMM-Newton* mai compiuta. *Arnaud et al. (2005)*, in particolare, hanno trovato

$$h(z) M_{200} \approx A_{200} \left( \frac{k_B T}{[5 \text{ keV}]} \right)^\alpha, \quad (1.17)$$

dove  $A_{200} \approx 5.74 \cdot 10^{14} M_\odot$  e  $\alpha \approx 1.49$ . L'energia termica è qui espressa in keV, e corrisponde alla "temperatura"  $T_{\text{keV}}$  seguendo l'uso tipico dell'astrofisica ad alte energie: ciò consiste nell'aver convertito l'ammontare  $k_B T$  dall'ordinaria unità erg in unità di  $10^3$  eV; ricordiamo che l'*elettronvolt* è definito come il quantitativo energetico acquisito da una particella di carica elettrica elementare e sottoposta ad una differenza di potenziale elettrostatico di 1 V. Sapendo che  $1 \text{ eV} := e \cdot 1 \text{ V} \approx 1.602 \cdot 10^{-12}$  erg, quindi  $1 \text{ keV} \approx 1.602 \cdot 10^{-9}$  erg, numericamente per la trasformazione basta scrivere

$$T_{\text{keV}} \approx \frac{k_B T}{1.602 \cdot 10^{-9}} \approx 8.62 \cdot 10^{-8} T, \quad (1.18)$$

il cui passaggio inverso risulterà  $T \approx 1.16 \cdot 10^7 T_{\text{keV}}$ .

Riprendendo (1.11), se la combiniamo con  $T \propto \sigma_v^2$  e  $T \propto r_{\text{vir}}^2$ , genericamente possiamo pure ottenere

$$M_{\text{vir}} \propto \sigma_v^3, \quad (1.19)$$

che nel complesso si rivela verificata, tuttavia non è così stretta come la massa-temperatura, e addirittura vi sono deviazioni significative: evidentemente, questi sono casi in cui gli ammassi non sono rilassati, cioè la distribuzione di velocità delle loro galassie non è di tipo maxwelliano.

Un'altra relazione notevole è la massa-luminosità: se consideriamo l'emissività totale in banda  $X$ , i.e. la luminosità  $X$  per unità di volume, sapendo che trae origine essenzialmente dal processo di *bremssstrahlung*, il comportamento atteso sarà (vedi C.18, appendice C)

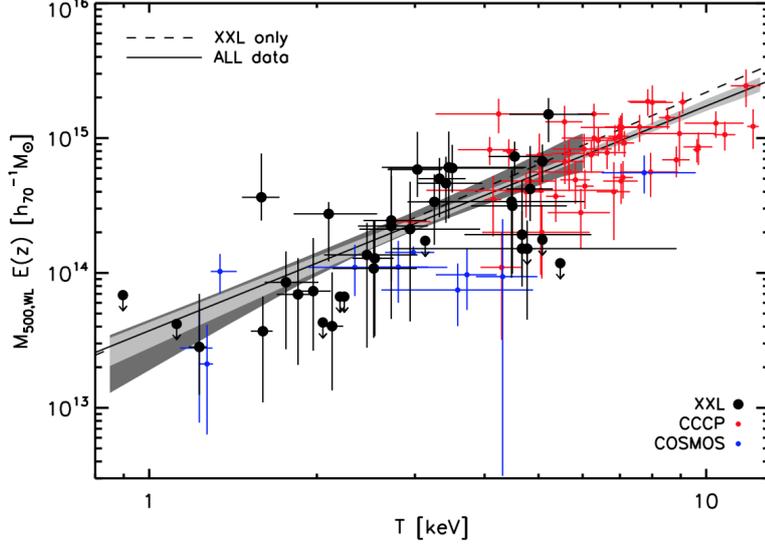


Figura 1.1: Relazione  $M$ - $T$  degli ammassi di galassie, dove la massa deriva da lensing debole e la temperatura da osservazioni  $X$ , ripresa da *Lieu et al. (2016)* e comprendente 38 oggetti del campione *XXL*, 10 del campione *COSMOS* (*Kettula et al. 2013*) e 48 del campione *CCCP* (*Mahdavi et al. 2013, Hoekstra et al. 2015*), ognuno con le bande di errore: sono anche tracciate le relazioni di *best-fit* (retta continua o tratteggiata) e le regioni statisticamente credibili (zone in grigio chiaro o scuro) relative al totale oppure agli oggetti *XXL*; le frecce verso il basso indicano limiti superiori.

$$L_X \propto \rho_{\text{gas}}^2 T^{1/2} r_{\text{vir}}^3, \quad (1.20)$$

ovvero  $L_X \propto \rho_{\text{gas}}^2 T^{1/2} M_{\text{vir}}$  per la (1.12), con la densità dell'ICM  $\rho_{\text{gas}} \propto M_{\text{gas}} r_{\text{vir}}^{-3}$ . Se ora introduciamo la *frazione di gas* rispetto alla massa totale

$$f_{\text{gas}} := \frac{M_{\text{gas}}}{M_{\text{vir}}}, \quad (1.21)$$

possiamo scrivere  $\rho_{\text{gas}} \propto f_{\text{gas}} M_{\text{vir}} r_{\text{vir}}^{-3}$ , cosicché  $L_X \propto f_{\text{gas}}^2 M_{\text{vir}}^3 r_{\text{vir}}^{-6} T^{1/2}$ , ma  $r_{\text{vir}} \propto M_{\text{vir}}^{1/3}$  e  $T \propto M_{\text{vir}}^{2/3}$  quindi infine

$$L_X \propto f_{\text{gas}}^2 M_{\text{vir}}^{4/3}. \quad (1.22)$$

Sono necessarie opportune modifiche se le osservazioni vengono compiute in intervalli più ristretti dello spettro dei raggi  $X$ . Si noti che a data  $f_{\text{gas}}$ , ricordando la (1.18) e la proporzionalità ideale tra  $M_{\text{vir}}$  e  $T$  enunciata prima, troviamo  $L_X \propto T_{\text{keV}}^2$ , risultato atteso dalla formazione di tipo esclusivamente gravitazionale degli ammassi (*Kaiser 1986*). La legge di scala reale invece sembra essere  $L_X \propto T_{\text{keV}}^{2.8}$  (*Edge & Stewart 1991* e studi posteriori), il che si spiega con l'intervento di fenomeni non gravitazionali quali raffreddamento e riscaldamento del gas radiativi collegati alla costituzione delle galassie (e.g. *Evrard & Henry 1991*). In ogni caso, la relazione (1.22) nella pratica si dimostra abbastanza valida, ma anch'essa presenta uno scarto maggiore se confrontata con quella tra la massa e la temperatura: se ne conclude che, generalmente, la temperatura dell'ICM è un indicatore

di massa più affidabile rispetto sia alla dispersione delle velocità galattiche lungo la linea di vista ( $\sigma_v$ ) sia alla luminosità in banda  $X$  ( $L_X$ ).

Nell'insieme delle relazioni di scala di tipo empirico, citiamo quella che lega il parametro di concentrazione e la massa viriale nella versione di *Ettori et al. (2010)*, che riprende l'originale formulazione proposta da *Dolag et al. (2004)*:

$$\log [c_{200}(1+z)] \approx A + B \log \left( \frac{M_{200}}{[10^{15} M_\odot]} \right), \quad (1.23)$$

nella quale i logaritmi sono in base 10, inoltre  $A \approx 0.6$  e  $B \approx -0.4$ . Un'ulteriore utile espressione di origine osservativa è offerta da *Eckert et al. (2012)* e riguarda la frazione gassosa, con massa viriale intesa  $M_{200}$ , in funzione della temperatura dell'ICM:

$$f_{\text{gas}}(< r_{200}) = (0.15 \pm 0.01) \left( \frac{k_B T}{[10 \text{ keV}]} \right)^{0.478}. \quad (1.24)$$

## 1.6 Funzione di *Cooling*

Un gas caldo va incontro a perdite energetiche il cui tasso nell'unità di tempo e di volume, ovvero l'emissività, è

$$\dot{\mathcal{E}} := \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -n_i n_e \Lambda(T, Z), \quad (1.25)$$

dove  $\Lambda$  è la *funzione di cooling* dipendente in generale dalla temperatura e dalla metallicità, mentre  $n_i$  e  $n_e$  sono le densità numeriche degli ioni positivi e degli elettroni rispettivamente. In letteratura esistono molteplici versioni di questa formula: una alternativa può essere

$$\dot{\mathcal{E}} = -n_e^2 \Lambda(T, Z), \quad (1.26)$$

facente uso della sola densità numerica elettronica, però occorre far presente che in generale la  $\Lambda$  che qui compare sarà definita in maniera diversa da quella in (1.25).

La funzione di cooling descrive come il gas si raffredda rilasciando energia tramite radiazione, il meccanismo più efficiente con cui i mezzi astrofisici trasferiscono calore verso l'ambiente esterno: le particelle possono in generale emettere fotoni per vari processi, che poi abbandonano la regione in cui lo stesso gas si trova, asportando di fatto quantità consistenti di energia cinetica; ciò è a maggior ragione vero se viene assunto un *regime otticamente sottile*<sup>12</sup>. Spesso vi sono condizioni per le quali idealmente è possibile ipotizzare l'*equilibrio di ionizzazione collisionale* ("CIE"), in cui gli atomi sono sempre considerati nel loro stato fondamentale finché tramite urti possono essere eccitati o ionizzati, fenomeni a cui fanno seguito altrettante diseccitazioni e ricombinazioni<sup>13</sup>: se poi i

<sup>12</sup>Il mezzo è trasparente nei confronti di qualsiasi fascio luminoso, che non viene assorbito né attenuato lungo il suo percorso.

<sup>13</sup>L'eccitazione è la transizione di un elettrone atomico ad un livello energetico maggiore, grazie all'assorbimento di un fotone di energia pari alla differenza tra i due livelli coinvolti, mentre la ionizzazione è l'espulsione dell'elettrone dall'atomo che passa così da uno stato legato ad uno libero, perché il fotone assorbito ha energia almeno pari a quella di legame (l'eccesso va sotto forma di energia cinetica dell'elettrone in uscita); i rispettivi fenomeni opposti sono la diseccitazione e la ricombinazione, che invece implicano l'emissione di analoghi fotoni.

contributi di fotoionizzazione, ovvero ionizzazione per mezzo di fotoni, sono trascurabili, cioè il tempo medio di collisione è molto minore di quello associato alla fotoionizzazione, abbiamo  $\Lambda = \Lambda(T)$ . In tipici ammassi l'ICM ha temperature  $10^{7-8}$  K, quindi tutti gli atomi, specie più pesanti comprese, si presentano ionizzati, e come già visto le perdite di energia sono date dalla radiazione di bremsstrahlung. A temperature minori la questione sarebbe un po' più difficile, perché dominano righe proibite e di risonanza dei metalli se  $Z > 0$ , mentre  $T \approx 10^4$  K corrisponde alla ricombinazione dell'idrogeno; al di sotto di questo valore la trattazione avrebbe risvolti decisamente complessi, essendo necessaria l'analisi della frazione di ionizzazione e infine, a temperature molto più basse, delle proprietà molecolari. La funzione di cooling più utilizzata è quella di *Sutherland & Dopita (1993)*, che all'incirca si estende nell'intervallo  $10^4$ - $10^{8.5}$  K al variare della metallicità: ne riportiamo l'andamento in figura 1.2.

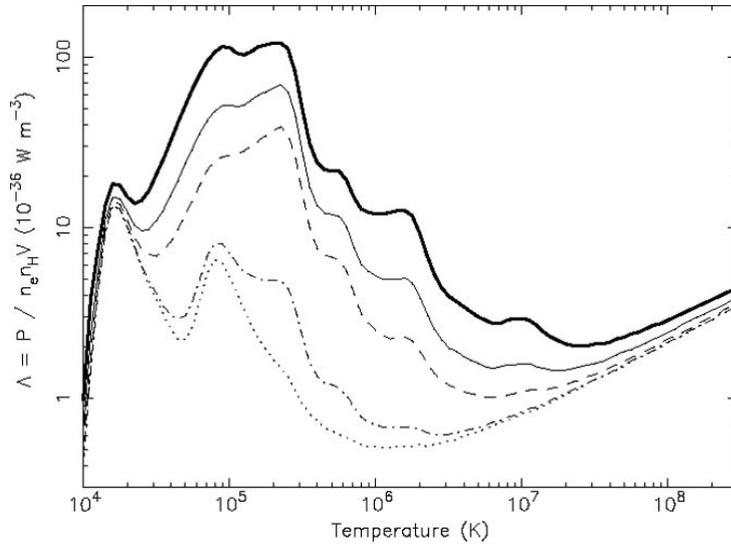


Figura 1.2: Funzione di cooling in unità logaritmiche del S.I. ripresa da *Sutherland and Dopita (1993)* per cinque differenti valori di metallicità, da  $Z = 0$  (linea a puntini in basso) alla solare  $Z = Z_{\odot}$  (linea spessa continua in alto).

Analiticamente, la funzione di cooling può essere rappresentata con la forma polinomiale

$$\Lambda(T) = (C_1 T_{\text{keV}}^{\alpha} + C_2 T_{\text{keV}}^{\beta} + C_3) \cdot 10^{-22} [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^3], \quad (1.27)$$

in cui la temperatura è di nuovo espressa in keV (si faccia riferimento alla 1.18) e gli altri vari parametri sono fissati per *fit* a seconda della stessa  $T_{\text{keV}}$  e della metallicità. La versione di cui ci serviamo è quella di *Tozzi & Norman (2001)* coincidente, nei casi che ci interessano, con la successiva di *Sharma et al. (2010)*: essendo per l'ICM di norma  $T \gtrsim 10^7$  K, cioè  $T_{\text{keV}} \gtrsim 0.862$  keV, e  $Z \approx 0.3 Z_{\odot}$ , vale  $C_1 \approx 8.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $C_2 \approx 5.8 \cdot 10^{-2}$  e  $C_3 \approx 6.3 \cdot 10^{-2}$ , inoltre  $\alpha \approx -1.7$  e  $\beta \approx 0.5$ .

## 1.7 Metodi di stima di massa degli ammassi

Una delle quantità fisiche fondamentali nell'analisi degli ammassi di galassie è indubbiamente la loro massa totale: abbiamo già visto che questa non solo è protagonista in molte relazioni di scala, per mezzo delle quali è collegata ad altre importanti grandezze come la temperatura, la dispersione delle velocità e la luminosità  $X$  (paragrafo 1.5), che rappresentano il moto di particelle, galassie e l'emissione energetica, ma è anche determinante nella questione di eventuale massa mancante in aggiunta a quella visibile, che porta a postulare forme di materia "esotiche" come quella oscura (par. 1.4), le quali a loro volta hanno un legame diretto con i parametri cosmologici e quindi l'evoluzione dell'Universo (par. 1.3). Nella sezione corrente descriviamo i principali modi attraverso cui viene stimata questa cruciale quantità, in maniera indipendente dalle relazioni di scala.

### 1.7.1 Massa viriale

Una prima via per ricavare la massa è già emersa durante la trattazione del teorema del viriale: con la formula (1.11) è possibile stimarla direttamente a partire dalla dispersione di velocità delle galassie e il raggio viriale, se possiamo assumere virializzato l'ammasso. Bisogna precisare che il risultato può essere falsato dalle assunzioni implicite più o meno forti che il metodo comporta: oltre al considerare l'oggetto isolato e all'assunzione di equilibrio, non è detto che valga eq. (1.10), poiché la distribuzione di velocità può essere anisotropa (*Sadat 1997, Saro et al. 2013*).

### 1.7.2 Massa idrostatica

Nell'ipotesi che l'ammasso sia virializzato, si supponga che il gas ionizzato sia in *equilibrio idrostatico*, per il quale vi è bilanciamento tra la pressione che tende a disgregarlo e la gravità che tende a comprimerlo; assumendo simmetria sferica, ciò vuol dire che

$$\frac{dP_g(r)}{dr} = -\rho_g(r) \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (1.28)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale,  $P_g(r)$  è il profilo radiale di pressione del gas,  $\rho_g(r)$  quello della sua densità e  $M(r)$  è la massa totale entro il raggio  $r$ . Il termine  $GM(r)/r^2$  equivale al gradiente del potenziale totale (forza per unità di massa). Se poi il gas è *perfetto*<sup>14</sup>, da quest'equazione si deduce facilmente

$$M(r) = -\frac{k_B T_g(r) r^2}{G \mu m_p} \left( \frac{d \ln \rho_g(r)}{dr} + \frac{d \ln T_g(r)}{dr} \right). \quad (1.29)$$

Questa importante formula ci dice che l'andamento radiale della massa si può ottenere da quelli della temperatura e della densità: i loro gradienti sono determinabili osservativamente dalle corrispondenti quantità proiettate, sapendo che la brillantezza superficiale sarà data da un integrale, lungo la linea di vista, dell'emissività (si consulti la formula

---

<sup>14</sup> $P(r) = \frac{k_B \rho(r) T(r)}{\mu m_p}$  con  $\mu$  massa particellare media in unità di quella protonica  $m_p$ ; i concetti di equilibrio idrostatico e di gas ideale saranno descritti in dettaglio nel cap. 2.

B.5 con  $\mathcal{E}$  al posto di  $\rho$ ); quest'ultima in teoria può quindi essere trovata all'inverso per de-proiezione. Ciò che usualmente si fa per il gradiente della densità e della temperatura è analizzare la mappa della distribuzione  $X$ , suddivisa in opportuni anelli per ciascuno dei quali si estrae lo spettro dell'emissione e, dopo averne misurato l'andamento in funzione del raggio, viene effettuata una stima grazie ad un procedimento di *fit* con una funzione analitica. In generale è più difficile misurare  $\nabla T$  rispetto a  $\nabla \rho$ , infatti sovente il primo viene assunto nullo, cosa che corrisponde ad una distribuzione isoterma: talora, in condizioni di gas perfetto, se ricaviamo  $dM(r)/dr$  da (1.28) tenendo a mente la simmetria sferica ( $M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$ ), riprendendo anche (1.15) e (1.10) è possibile giungere alla soluzione

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}, \quad (1.30)$$

detta *sfera singolare isoterma* ("SIS"). Si nota un comportamento divergente al tendere a 0 di  $r$  ma, nell'ipotesi di nucleo piatto  $(d\rho/dr)|_{r=0} = 0$ , attraverso procedure numeriche il valore iniziale risulta  $\rho_0 := \rho(0) = \frac{9\sigma_v^2}{4\pi G r_c^2}$  dove  $r_c$  è il raggio interno caratteristico. Questa funzione ha comunque il difetto di una massa totale infinita al crescere del raggio, che trae origine dal contenimento di particelle con velocità arbitrariamente grandi appartenenti alla coda della maxwelliana. Per superare questo problema sono stati sviluppati modelli dinamici autogravitanti con un limite superiore nella distribuzione delle velocità, i cosiddetti *modelli di King*, che ammettono la seguente approssimazione della densità interna:

$$\rho(r) = \rho_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (1.31)$$

Bisogna comunque osservare che il modello SIS non può costituire una corretta rappresentazione della distribuzione dell'ICM, in quanto poggia sull'ipotesi che il gas sia autogravitante: questo in realtà è falso, perché si colloca nel potenziale dell'alone di materia oscura dell'ammasso.

Se tuttavia confrontiamo la densità radiale totale espressa mediante la legge dei gas perfetti e (1.28) assumendo isotropia, con la densità radiale del gas da (1.29) in ambiente isoterma<sup>15</sup>, si evince  $\rho_g(r) \propto \rho(r)^\beta$ , dove

$$\beta := \frac{\mu m_p \sigma_v^2}{k_B T_g}, \quad (1.32)$$

dunque per (1.31)

$$\rho_g(r) = \rho_{g,0} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-3\beta/2}, \quad (1.33)$$

che come profilo di brillantezza corrisponde ammette

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{R}{r_c} \right)^2 \right]^{-3\beta+1/2}, \quad (1.34)$$

---

<sup>15</sup>Nel primo caso  $\frac{dP}{dr} = \frac{k_B T}{\mu m_p} \frac{d\rho}{dr} = \sigma_v^2 \frac{d\rho}{dr}$  che, inserita in (1.28), dà  $\frac{d \ln \rho}{dr} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \frac{GM}{r^2}$ , mentre nel secondo  $\frac{d \ln \rho_g}{dr} = -\frac{\mu m_p}{k_B T_g} \frac{GM}{r^2}$ .

con  $R$  distanza proiettata dal centro e  $\Sigma_0$  valore di brillanza centrale. Rappresentazioni di questo tipo per fittare i dati osservativi si chiamano *modelli  $\beta$* , ed empiricamente l'emissione nei raggi  $X$  degli ammassi è ben descritta da questi profili: in particolare, valori tipici per  $r_c$  sono compresi tra  $0.1$  e  $0.3 h^{-1}$  Mpc, mentre il parametro  $\beta$  da fit è circa  $0.65$ , invece sue stime spettroscopiche per mezzo della dispersione di velocità e della temperatura del gas lo danno dell'ordine di  $1$ ; questa discrepanza è molto dibattuta, tuttavia può essere dovuta all'intervallo angolare di misura della brillanza, ad una distribuzione anisotropa delle velocità oppure ad errori sulla determinazione della temperatura, la quale non risulta propriamente fissa e può presentare strutturazioni interne.

Forti assunzioni fatte sono, oltre alla simmetria sferica e all'equilibrio viriale, l'equilibrio idrostatico: in realtà, in talune situazioni le misure della massa deviano in maniera consistente dal valore effettivo soprattutto perché moti del gas di tipo non termico, principalmente rotazione e turbolenza, possono concorrere notevolmente nel fornire, oltre alla pressione termica, supporto all'ICM, impedendone il collasso; specialmente ciò è verificato presso il centro dell'ammasso (e.g. *Nagai, Vikhlinin & Kratsov 2007, Valdarnini 2011, Suto et al. 2013*). Ricordiamo che la *turbolenza* identifica una forma di energia cinetica caotica, relativa ad intere porzioni di fluido che si muovono una rispetto all'altra con velocità maggiori di quelle tipiche dei moti termici delle particelle: la sua evidenza più importante è un "anomalo" allargamento delle righe spettrali in emissione, inoltre i processi che la instaurano devono essere persistenti, poiché è noto che la dissipazione associata avviene su scale temporali relativamente piccole. Attualmente, simulazioni idrodinamiche hanno raggiunto livelli tali da riprodurre abbastanza accuratamente gli attesi contributi rotazionali e turbolenti (*Rasia et al. 2006, Fang et al. 2009, Biffi et al. 2013* ecc.).

### 1.7.3 Lensing gravitazionale

Previsto dalla *teoria della Relatività Generale* di Einstein, il *lensing gravitazionale* consiste nel fatto che anche i fotoni durante il loro tragitto vengono deviati qualora transitino in prossimità di un corpo massiccio. Essendo gli ammassi gli oggetti autogravitanti più grandi che esistano, ci possiamo aspettare che provochino questi fenomeni in una forma particolarmente vistosa. Osservazioni a partire dagli anni '80 danno piena conferma di questa affermazione: molto spesso compaiono evidenti "archi luminosi" appartenenti a strutture più lontane che si trovano dietro gli ammassi circa lungo la medesima linea di vista, la cui radiazione viene tanto deviata da apparire ad una certa distanza angolare dal centro e distorta in una forma allungata, oltreché amplificata. Esistono addirittura casi di anelli o immagini multiple dello stesso oggetto retrostante, provati da procedure di fotometria, spettroscopia o morfologia. Inizialmente si pensava che gli archi fossero originati per esempio da fronti di shock o processi esplosivi (come *Begelman & Blandford 1987, Milgrom 1987, Katz & Jackson 1988*): qualcuno poi si accorse che erano possibili processi di lensing (*Paczynski 1987, Kovner 1988*), ma in generale la comunità scientifica non sosteneva questa idea perché la massa non era ritenuta sufficientemente grande. Studi spettroscopici di *Soucail et al. (1988)* sull'oggetto *Abell 370*, posto a  $z \approx 0.374$ , rivelarono in seguito che la struttura arcuata che ospita si trova ad un redshift pari circa al doppio, risultato a breve confermato da *Miller & Goodrich (1988)* e *Lynds & Petrosian (1988)*: questo aprì definitivamente la strada all'interpretazione degli ammassi di galassie come "lenti gravitazionali", di cui già si intuiva la straordinaria portata in ambito cosmologico (*Grossman & Narayan 1988, Fort 1989, Tyson et al. 1990*). Tipologie da distinguere sono il *lensing debole* e il *lensing forte*, a seconda del valore della massa del corpo agente da

lente e quindi dell'entità della deviazione: il primo caso è tipico delle regioni periferiche di un ammasso, il secondo di quelle interne. La formula che effettivamente consente la stima della massa, nella versione forte, è

$$M(\theta_t) = \pi D_1^2 r_t^2 \Sigma_{\text{crit}} \approx 4.4 \cdot 10^{14} M_\odot \left( \frac{r_t}{[30 \text{ arcsec}]} \right)^2 \left( \frac{D_1 D_s}{D_{\text{ls}}[\text{Gpc}]} \right), \quad (1.35)$$

dove  $D_s$ ,  $D_1$  e  $D_{\text{ls}}$  sono rispettivamente le distanze di diametro angolare tra l'osservatore e la sorgente, tra l'osservatore e la lente e tra la lente e la sorgente. Questa relazione rappresenta la massa di ammasso contenuta entro il valore angolare  $\theta_t$  o corrispondentemente la *curva critica* tangente al raggio  $r_t$ , ovvero la massa proiettata entro il raggio fisico  $D_1 r_t$ . Le *curve critiche* sono definite come le linee lungo cui una sorgente ha idealmente un'amplificazione infinita, mentre  $\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_1 D_{\text{ls}}}$  (Hoekstra et al. 2013). Nel lensing di tipo debole si ha a che fare con il *profilo di convergenza*  $k(\theta; M_\Delta, c_\Delta)$  ed il *profilo di shear*  $\gamma(\theta; M_\Delta, c_\Delta)$  attraverso i quali si definisce, nell'assunzione di lente sferica, la *distorsione tangenziale*

$$g_+(\theta) := \frac{\gamma(\theta)}{1 - k(\theta)}. \quad (1.36)$$

La distribuzione della massa risulta sferica, con il relativo valore interno deducibile dal confronto tra i parametri  $\gamma$  e  $k$  (e.g. Umetsu et al. 2011, Okabe & Smith 2016).

### 1.7.4 Effetto Sunyaev-Zel'dovich

Un ultimo metodo che deve essere citato per la determinazione della massa di un ammasso è l'*effetto Sunyaev-Zel'dovich (S-Z)*, un processo di *scattering* previsto alla fine degli anni '60 che nella versione classica coinvolge fotoni della radiazione CMB ed elettroni di un plasma astrofisico di elevata temperatura (Zel'dovich & Sunyaev 1969). Questo avviene attraverso il fenomeno detto *Inverse Compton*, in riferimento a quello *diretto* che vede un fotone cedere energia ad un elettrone statico o quasi; nell'interazione in questione infatti i fotoni risultano acquisire energia a scapito degli elettroni, che invece vengono rallentati. Poiché in media vengono ridotti i fotoni di minore energia ed aumentati quelli più energetici, questo processo implica una distorsione dello spettro della brillantezza di CMB, che risulterà tanto più evidente quanto maggiore è la temperatura e la densità dell'ICM: è possibile osservare in maniera tangibile questo evento grazie al fatto che la radiazione cosmica di fondo è isotropa, quindi per ogni fotone che viene diffuso in una direzione casuale ne esiste statisticamente uno che dopo la diffusione ci raggiunge lungo la linea di vista.

Una minima parte degli elettroni del gas intergalattico può essere in condizioni relativistiche: in tal caso da considerazioni teoriche è noto che se l'energia di ogni fotone  $h\nu'$  è molto minore dell'energia a riposo dell'elettrone  $m_e c^2$ , ciò nel sistema in cui quest'ultimo è in quiete, l'aumento energetico dei fotoni è tipicamente pari a  $\gamma^2$ , dove il fattore relativistico di Lorentz è definito  $\gamma := 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ , con  $\beta := v_e/c$ ; la relazione  $h\nu' \approx m_e c^2$  è di minore interesse astrofisico<sup>16</sup>. Esiste poi un correlato processo cinetico, indicato con *kS-Z*, dovuto

<sup>16</sup>Occorrenze tipiche di Compton inverso coinvolgono fotoni stellari e di CMB, per cui  $h\nu' \ll m_e c^2$  e la sezione d'urto del fenomeno è quella classica di Thomson  $\sigma_T := \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \approx 6.652 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ ; in caso contrario andrebbe utilizzata la versione relativistica di *Klein-Nishina*, dipendente dall'inverso dell'energia del fotone incidente.

alla velocità peculiare dell'ammasso rispetto al sistema di riferimento solidale con la CMB (*Sunyaev & Zel'dovich 1980*): in teoria è possibile ricavarne sia la componente radiale dalla modifica dell'intensità del segnale di fondo cosmico, sia la componente tangenziale dal grado di polarizzazione lineare di quest'ultimo; studi recenti hanno mostrato come la rotazione dell'ICM in particolare introduca questo tipo di caratteristiche osservative nella CMB e quale sia la loro utilità (*Cooray & Chen 2002, Chluba & Mannheim 2002*). L'effetto S-Z termico è particolarmente potente nel permettere l'individuazione di ammassi anche a  $z$  piuttosto elevato, infatti l'entità della distorsione risulta essere, almeno nel dominio *Rayleigh-Jeans*<sup>17</sup>,

$$\frac{\Delta I(\nu)}{I(\nu)} \approx -2y_c, \quad (1.37)$$

nella quale

$$y_c := \frac{k_B \sigma_T}{m_e c^2} \int_L T_X n_e dl \quad (1.38)$$

è il *parametro di comptonizzazione* (l'integrazione è fatta sulla linea di vista), quindi la modifica spettrale è indipendente dal redshift. Per quanto appena visto poi, risolvere spazialmente mediante procedure interferometriche la distorsione della brillantezza del fondo cosmico spesso consente di ottenere informazioni sulla distribuzione della densità e della temperatura dell'ICM. Quanto al legame con la massa di ammasso, una delle relazioni più importanti cui riferirsi, calibrata con stime indipendenti della massa viriale, è

$$\frac{M_{500,X}}{[10^{14} M_\odot]} \frac{1}{h^{-1}} = A_X h^{3/2} \left( \frac{Y_X}{[3 \cdot 10^{14} M_\odot \text{ keV}]} \right)^{B_X} E(z)^{C_X}, \quad (1.39)$$

dove i pedici  $X$  stanno ad indicare che le quantità sono fissate dalle osservazioni in banda  $X$ , in particolare abbiamo il *parametro di comptonizzazione integrato* (*Saliwanchik et al., Grainge et al., 2015*)

$$Y_X := \int_\Omega y_c d\omega = \frac{\sigma_T}{m_e c^2} D_A^{-2} \int_V P_e dV, \quad (1.40)$$

dove  $D_A$  è la distanza di diametro angolare (basata sull'angolo sotto cui un oggetto è osservato),  $d\omega$  è l'angolo solido infinitesimo,  $P_e$  la pressione elettronica e  $dV$  l'elemento infinitesimo di volume, scrivibile come  $dA dl$  ( $dA$  area infinitesima e  $dl$  tratto infinitesimo lungo la linea di vista). Attraverso i migliori fit abbiamo la normalizzazione  $A_X \approx 5.77$ ,  $B_X \approx 0.57$  (*Vikhlinin et al. 2009*), inoltre  $C_X$ , correlato all'evoluzione del redshift, vale circa  $-0.4$ , e rammentiamo che  $E(z) := H(z)/H_0$  (formule 1.4 e 1.7).

### 1.7.5 Bias delle misure

In generale, tutte le modalità di stima della massa elencate sopra concordano sul fatto che deve esistere una forma di materia aggiuntiva rispetto a quella visibile per radiazione: la moltitudine delle verifiche di massa mancante conferma la presenza di materia oscura nel

<sup>17</sup>La parte di bassa energia dello spettro, che nel caso del CMB corrisponde circa a lunghezze d'onda più grandi del millimetro.

quadro del modello  $\Lambda$ CDM comunemente accettato oggi. Tuttavia si segnala che spesso misure di massa effettuate tramite metodi differenti restituiscono valori abbastanza contrastanti, specialmente tra quelli ricavati da lensing debole, o effetto S-Z, e quelli dedotti da osservazioni  $X$  assumendo equilibrio idrostatico: queste discrepanze sono note come *bias di massa idrostatica*, e si pensa che falsino la massa effettiva dal 25 fino al 35% (Piffaretti & Valdarnini 2008). Ordinariamente, esse sono rappresentate da  $b$ , *parametro di bias* definito dal rapporto tra la vera massa dell'ammasso e quella stimata. Analizzando l'effetto Sunyaev-Zel'dovich termico e lensing debole su CMB, Hurier & Angulo (2018) hanno trovato un valore medio  $b = 0.26 \pm 0.07$  in sostanziale accordo con i vincoli cosmologici attuali, ma non molto con le simulazioni idrodinamiche, le quali tipicamente prevedono  $b < 0.2$ : questo viene attribuito ad errori sistematici ignorati nelle osservazioni, oppure ad importanti fenomeni fisici spesso non inclusi per semplicità (componenti non termiche come feedback da AGN e  $SN_e$ <sup>18</sup>, turbolenza, ma anche potenziale triassiale, presenza di sottostrutture, disomogeneità della temperatura, e così via).

## 1.8 Ammassi *cool-core*

Con il termine "core" di un ammasso di galassie si indica la sua regione più interna, fino a qualche decimo del raggio viriale ( $0.2 \div 0.3 r_{500}$ ). La denominazione *cool-core*, come dice la parola stessa, fa riferimento ad una classe di ammassi con un insolito comportamento della temperatura in quelle zone, in quanto essa subisce una significativa decrescita proseguendo verso il centro. L'evidenza osservativa di questa caratteristica è un forte picco di brillantezza centrale, come appare chiaro consultando loro tipiche mappe di emissione. Ciò viene attribuito ad una densità molto alta nel nucleo dell'ammasso, la quale rende il *tempo di raffreddamento*, i.e. il tempo virtualmente impiegato dal gas ad esaurire le sue riserve energetiche, relativamente basso. In generale quest'ultimo sarà dato dal rapporto, in unità volumiche, tra il contenuto energetico totale ed il tasso a cui viene emesso, cioè

$$t_{\text{cool}} := \mathcal{E}/|\dot{\mathcal{E}}| \approx \frac{3}{2} \frac{nk_B T}{n_i n_e \Lambda(T, Z)}, \quad (1.41)$$

dove  $n = n_i + n_e$  è la somma tra le densità numeriche degli ioni positivi e degli elettroni e  $|\dot{\mathcal{E}}| = n_i n_e \Lambda(T, Z)$  è l'emissività, trascurando altri meccanismi di trasferimento di energia: se negli ammassi galattici di solito questa misura temporale è almeno un ordine di grandezza più grande del tempo di Hubble, all'interno dei *cool-core* ne risulta notevolmente minore (e.g. Lea et al. 1973, Fabian & Nulsen 1977).

In un primo momento, deduzioni osservative sulla densità e la temperatura, quando avevano deviazioni dai valori dei classici ammassi, venivano spiegate coi cosiddetti *cooling flow*, cioè flussi di caldo materiale intergalattico che dagli strati esterni "cadono" verso il centro rimpiazzando il vuoto creato dalla compressione del gas sottostante dovuta al suo

---

<sup>18</sup>Gli "Active Galactic Nuclei" sono oggetti posti al centro di galassie che presentano un'ingente emissione centrale di natura non termica, la quale può coprire tutto lo spettro elettromagnetico e superare di molto la luminosità galattica totale: si ritiene che la loro radiazione sia dovuta all'accrescimento di materia su un buco nero supermassiccio al centro ("SMBH"), avente massa tipica fino all'ordine di  $10^9 M_\odot$ ; l'accelerazione di particelle a velocità relativistiche instaura pure caratteristici *getti* molto estesi visibili nel radio. Le *supernovae* sono esplosioni con cui le stelle più massicce (oltre circa  $8 M_\odot$ ) concludono le fasi di regolari reazioni termo-nucleari esotermiche al loro interno, dando luogo ad un'onda d'urto che inietta nell'*ISM* (*mezzo interstellare*) un'energia cinetica dell'ordine di  $10^{51}$  erg.

repentino raffreddamento; in seguito questo modello mostrò difetti a causa di discrepanze riguardanti l'attesa presenza di gas molecolare depositato ed il tasso di formazione stellare (e.g. *McNamara & O'Connell 1989*, *Edge 2001*, *Makishima et al. 2001*), ma soprattutto perché l'ICM centrale non sembrava raffreddarsi al tasso previsto (*Peterson et al. 2001*, *Kaastra et al. 2001*, *Xu et al. 2002*, *Sakelliou et al. 2002*, *Sanders et al. 2008* ecc.). A quest'ultima considerazione va aggiunto il fatto che i *cooling flow* tradizionali non includono processi di riscaldamento significativo del gas, per cui sono stati invocati meccanismi ad hoc quali conduzione (trasferimento di energia tra due mezzi a temperature diverse posti a contatto), la presenza di nuclei galattici attivi, onde sonore o supersoniche (shock), turbolenza.

Sono state proprio queste anomalie tra teoria ed osservazioni a far sì che venisse proposta la tipologia di ammassi *cool-core* (*Molendi & Pizzolato 2001*): tuttavia, essa non ha avuto una definizione univoca, poiché alcuni autori si sono concentrati sul calo termico al centro, altri su  $t_{\text{cool}}$ , o sull'entropia, oppure ancora sul tasso di deposizione di massa verso l'interno (come *Burns et al. 2008*, *Bauer et al. 2005*, *Ghirardini et al. 2019* e *Chen et al. 2007* rispettivamente); inoltre, non è sempre stato del tutto chiaro cosa effettivamente distingua un ammasso *cool-core* da un "non-*cool-core*" (come vengono solitamente chiamati quelli che non presentano un nucleo freddo). Su queste questioni *Hudson et al. (2010)*, analizzando il campione completo *HIFLUGCS* ("Highest X-ray Flux Galaxy Cluster Sample") con dati in banda *X* ad alta qualità del satellite *Chandra* relativi a 64 ammassi galattici, hanno suggerito che il miglior parametro che permette di classificare un ammasso come *cool-core* sia il tempo di raffreddamento del gas, in particolare a basso redshift, altrimenti la grandezza *cuspiness*, definita

$$\alpha := \frac{d \log n_e}{d \log r} , \quad (1.42)$$

che si calcola a  $r = 0.04 r_{500}$ , dove  $n_e$  è la densità numerica elettronica e  $r$  è la distanza dal centro dell'ammasso. Questo parametro introduce un'ulteriore separazione nell'insieme dei *cool-core*: quelli *forti* hanno  $\alpha > 0.75$ , mentre per quelli *deboli* vale generalmente  $0.5 \leq \alpha \leq 0.75$ .



# Capitolo 2

## Modelli stazionari di ICM in rotazione in potenziali gravitazionali schiacciati assisimmetrici

In questo capitolo forniamo elementi analitici utili per la rappresentazione dei nostri modelli di ammassi di galassie: in particolare, nel paragrafo 2.1 si parla del modo di esprimere stratificazioni di forma ellissoidale per la distribuzione della densità totale e del potenziale che essa genera, quantità che possiamo considerare dominate dalla materia oscura; dopo aver espanso le espressioni per piccoli parametri di schiacciamento ed aver calcolato i loro massimi valori possibili, ponendoli a confronto con qualche altro documento di letteratura (paragrafi 2.2 e 2.3), nella seconda parte tratteremo l'ICM come un fluido, descrivendo le distribuzioni di gas rotante in equilibrio nei potenziali trattati nella precedente. Più precisamente, sarà mostrato il moto mediante l'equazione di Eulero (nell'ipotesi assisimmetrica) e le principali leggi termodinamiche usualmente associate alla componente barionica, di cui troveremo il legame tra densità e potenziale efficace (par. da 2.4 a 2.7); nel paragrafo 2.8 infine esplicitiamo due semplici formule di rotazione secondo cui possiamo assumere che l'ICM ruoti all'interno del potenziale di alone, in accordo con i profili di ellitticità che osserviamo.

### 2.1 Distribuzioni omeoidali

Nel corso di questa tesi tratteremo modelli assisimmetrici per la distribuzione dell'ICM negli ammassi: ciò vuol dire che, così come il potenziale in cui si trova, questo gas è assunto simmetrico rispetto a un asse verticale  $z$ , con una forma sferica o più realisticamente schiacciata, ed avrà un profilo di velocità che, se non nullo, in ogni posizione dipende solamente dalla distanza dall'asse  $z$  stesso. In particolare consideriamo qui distribuzioni di massa descritte da campi di densità stratificati su superfici ellissoidali: per la relativa trattazione seguiremo le basi illustrate in *Ciotti & Bertin (2005)* ("A simple method to construct exact density-potential pairs from a homeoidal expansion"), da qui in avanti "CB05". Questi modelli sono già stati applicati ad ammassi di galassie nella tesi di laurea magistrale di Alberto Acuto ("Gas rotation in massive galaxy clusters with axisymmetric potential: models and perspectives for X-ray observation"; Bologna, 2017),

che chiameremo "A17". Date le ipotesi di simmetria cilindrica, il sistema di riferimento principale sarà quello cilindrico; si rimanda all'appendice A per i dettagli a riguardo.

La più generica forma ad ellissoide è di tipo triassiale, avente equazione cartesiana

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (2.1)$$

dove  $m$  è un opportuno parametro detto *raggio ellissoidale* e le costanti a denominatore, tali che  $a \geq b \geq c > 0$ , sono i semiassi lungo le direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispettivamente, inteso che qualsiasi posizione spaziale è identificata ordinariamente da  $\bar{x} = (x, y, z)$ . L'espressione può essere riscritta come

$$m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon)^2} + \frac{z^2}{a^2(1-\eta)^2}, \quad (2.2)$$

dove si sono introdotti i parametri  $\epsilon := 1 - b/a$  e  $\eta := 1 - c/a$  di *schacciamento* (in particolare del secondo e terzo semiasse rispetto al primo): si noti che entrambi sono compresi tra 0 e 1, e che il caso sferico  $a = b = c$  corrisponde a  $\epsilon = 0 = \eta$ ; se  $\epsilon = 0$ , cioè  $a = b$ , e  $0 < \eta < 1$  si parla di ellissoide *oblato*, mentre se  $0 < \epsilon = \eta < 1$ , cioè  $b = c$ , di ellissoide *prolato*. In particolare, la corrispondente equazione in coordinate cilindriche degli oblati sarà (formule di trasformazione A.1)

$$m_{\text{obl}}^2(R, z) = \frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (2.3)$$

mentre per i prolati, poiché  $b^2 =: a^2(1-\epsilon)^2 = a^2(1-\eta)^2$ , se si effettua una ridefinizione della variabile radiale sul piano  $y-z$ ,  $R' := \sqrt{y^2 + z^2}$ , e della variabile  $x$  come altezza,  $z' := x$ , la versione cilindrica risulta

$$m_{\text{pro}}^2(R, z) = \frac{z'^2}{a^2} + \frac{R'^2}{b^2}. \quad (2.4)$$

Un profilo di densità omeoidale dà origine, come dimostrato in *Kellogg (1953)* e *Chandrasekhar (1969)*, ad un potenziale gravitazionale interno che è esprimibile con la formula

$$\Phi(\bar{x}) = -\pi a b c \rho_0 G \int_0^\infty \frac{\widetilde{\Delta\Psi}(\bar{x}; \epsilon, \eta)}{\Delta(\tau)} d\tau, \quad (2.5)$$

nella quale compare un parametro  $\tau$ , considerato un raggio ellissoidale tale che  $\Delta(\tau) := \sqrt{(a^2 + \tau)(b^2 + \tau)(c^2 + \tau)}$ , inoltre

$$\widetilde{\Delta\Psi}(\bar{x}; \epsilon, \eta) := 2 \int_{m(\bar{x}, \tau)}^\infty \tilde{\rho}(m) m dm, \quad (2.6)$$

corrispondente all'integrazione della densità normalizzata  $\tilde{\rho}(m) := \rho(\bar{x})/\rho_0$ , con  $\rho_0$  un valore di scala, lungo il parametro dell'ellissoide analitico il cui quadrato è

$$m(\bar{x}, \tau)^2 := \frac{x^2}{a^2 + \tau} + \frac{y^2}{b^2 + \tau} + \frac{z^2}{c^2 + \tau}. \quad (2.7)$$

Si riscali ora il potenziale al valore  $4\pi G\rho_0 a^2$ , e si utilizzino le variabili spaziali normalizzate al primo semiasse, i.e.  $\tilde{x} := x/a$ ,  $\tilde{y} := y/a$  e  $\tilde{z} := z/a$ , in modo tale che tutte le grandezze con cui si ha a che fare diventino adimensionali; l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.8)$$

esprimente il fondamentale legame diretto tra distribuzione di densità e potenziale associato, si riduce in queste condizioni a

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\Phi} = \tilde{\rho}, \quad (2.9)$$

ed il potenziale normalizzato risulta essere riscrivibile in

$$\tilde{\Phi} = -(1 - \epsilon)(1 - \eta) \frac{a}{4} \int_0^\infty \frac{\widetilde{\Delta\Psi}(\tilde{x}; \epsilon, \eta)}{\Delta(\tau)} d\tau.$$

A questo punto si possono espandere le equazioni per  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{\Phi}$  in serie di Taylor nell'ipotesi di avere piccoli valori di schiacciamento ( $\epsilon \ll 1$  e  $\eta \ll 1$ ), allora tenendo i termini fino al primo ordine significativo dei due otteniamo<sup>1</sup>

$$\tilde{\rho}(m) = \tilde{\rho}(\tilde{r}) + \frac{\epsilon\tilde{y}^2 + \eta\tilde{z}^2}{\tilde{r}} \tilde{\rho}'(\tilde{r})|_{\epsilon=0=\eta} + O(\epsilon^2 + \eta^2), \quad (2.10)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0(\tilde{r}) + (\epsilon + \eta)[\tilde{\Phi}_1(\tilde{r}) - \tilde{\Phi}_0(\tilde{r})] + (\epsilon\tilde{y}^2 + \eta\tilde{z}^2)\tilde{\Phi}_2(\tilde{r}) + O(\epsilon^2 + \eta^2). \quad (2.11)$$

In queste espressioni si è definito un raggio sferico normalizzato ad  $a$ , cioè  $\tilde{r} := r/a := \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =: \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}$ , mentre nella prima compare  $\tilde{\rho}' := \frac{d\tilde{\rho}(m)}{dm}$ , funzione che per determinate combinazioni di  $\epsilon$  e  $\eta$  può assumere valori negativi e rendere tale anche la densità: poiché questa eventualità è manifestamente priva di senso fisico, noi escluderemo i modelli per cui  $\tilde{\rho} < 0$  in qualche punto. Per quel che riguarda i termini di potenziale presenti in (2.11), essi si esplicitano nel seguente modo:

$$\tilde{\Phi}_i(\tilde{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\rho}(m) m^2 dm - \int_{\tilde{r}}^\infty \tilde{\rho}(m) m dm, & (i = 0); \\ -\frac{1}{3\tilde{r}^3} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\rho}(m) m^4 dm - \frac{1}{3} \int_{\tilde{r}}^\infty \tilde{\rho}(m) m dm, & (i = 1); \\ \frac{1}{\tilde{r}^5} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\rho}(m) m^4 dm, & (i = 2). \end{cases} \quad (2.12)$$

Gli sviluppi (2.10) e (2.11) mostrano chiaramente un primo addendo "sferico" che, con la sola dipendenza da  $\tilde{r}$ , rappresenta una coppia densità-potenziale nell'ipotesi appunto di perfetta sfericità, mentre nei successivi appaiono i parametri di schiacciamento, infatti sono quelli che si riferiscono alla deviazione dei due profili dalla simmetria sferica; presi singolarmente, questi contributi "sferico" e "schiacciato" devono ovviamente soddisfare

<sup>1</sup>Si sceglie quindi di eseguire sviluppi secondo minuscole deviazioni da una forma perfettamente sferica, tuttavia eq. (2.10) e (2.11) prive dei termini  $O(\epsilon^2 + \eta^2)$  si rivelano coppia potenziale-densità anche per  $\eta$  e  $\epsilon$  non piccoli.

l'equazione di Poisson (2.8) o meglio, nel caso in questione, la sua versione normalizzata (2.9), per via della linearità dell'operatore laplaciano ( $\nabla^2$ ).

La riscrittura cilindrica di entrambe le ultime espansioni prevederà una dipendenza delle grandezze solo da  $R$  e  $z$ , infatti il generico raggio sferico si scrive  $\sqrt{R^2 + z^2}$ ; nello specifico, avendo posto  $\tilde{R} := R/a$ , per i casi di ellissoide oblato esse diventeranno

$$\tilde{\rho}_{\text{obl}}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) + \frac{\eta \tilde{z}^2}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \tilde{\rho}'(\tilde{R}, \tilde{z})|_{\epsilon=0=\eta} + O(\eta^2), \quad (2.13)$$

$$\tilde{\Phi}_{\text{obl}}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \tilde{\Phi}_0(\tilde{R}, \tilde{z}) + \eta [\tilde{\Phi}_1(\tilde{R}, \tilde{z}) - \tilde{\Phi}_0(\tilde{R}, \tilde{z})] + \eta \tilde{z}^2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{R}, \tilde{z}) + O(\eta^2), \quad (2.14)$$

invece per i prolatti, facendo uso delle variabili già introdotte per la (2.4), otteniamo

$$\tilde{\rho}_{\text{pro}}(\tilde{R}', \tilde{z}') = \tilde{\rho}(\tilde{R}', \tilde{z}') + \frac{\epsilon \tilde{R}'^2}{\sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2}} \tilde{\rho}'(\tilde{R}', \tilde{z}')|_{\epsilon=0=\eta} + O(\epsilon^2), \quad (2.15)$$

$$\tilde{\Phi}_{\text{pro}}(\tilde{R}', \tilde{z}') = \tilde{\Phi}_0(\tilde{R}', \tilde{z}') + 2\epsilon [\tilde{\Phi}_1(\tilde{R}', \tilde{z}') - \tilde{\Phi}_0(\tilde{R}', \tilde{z}')] + \epsilon \tilde{R}'^2 \tilde{\Phi}_2(\tilde{R}', \tilde{z}') + O(\epsilon^2). \quad (2.16)$$

## 2.2 $\gamma$ -models e profilo NFW

Come casi di studio rappresentativi, applichiamo la trattazione della sezione precedente a due particolari profili di densità, un " $\gamma$ -model" e un "NFW". In generale, si definiscono  $\gamma$ -models quei modelli che hanno la seguente forma analitica (*Dehnen 1993, Tremaine et al. 1994*):

$$\tilde{\rho}_\gamma(s) = \frac{1}{s^\gamma (1+s)^{4-\gamma}}.$$

Si vede che l'andamento dipende formalmente da  $s$ , che nella realtà può rappresentare una variabile spaziale lungo cui si distribuisce la materia, come un prefissato asse se la stratificazione è orizzontale, oppure un raggio normalizzato se la stratificazione è di tipo sferico, mentre  $\gamma$  è un parametro costante scelto opportunamente; noi imponiamo nello specifico  $\gamma = 2$ , per cui il primo profilo che trattiamo è

$$\tilde{\rho}_j(s) = \frac{1}{s^2 (1+s)^2}. \quad (2.17)$$

La sua fama è legata al fatto che, come esposto in *Jaffe (1983)*, ne deriva una densità proiettata ben riprodotta dalla *legge di De Vaucouleurs* detta anche  $R^{1/4}$  (1948)<sup>2</sup>. Il suo

<sup>2</sup>È una legge empirica: asserisce che la brillantezza superficiale  $I$  [mag/arcsec<sup>2</sup>] osservata nelle galassie ellittiche segue, in funzione della distanza  $R$  dal centro,

$$I(R) = I_0 e^{-b \left[ \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/4} \right]},$$

corrispondente al generale *profilo di Sérsic* con indice  $n = 4$  ( $I_0$  brillantezza centrale,  $R_e$  raggio *effettivo* contenente la metà della luminosità totale,  $b \approx 7.67$  costante di fit).

sviluppo attraverso la formula (2.10), sapendo che  $\tilde{\rho}'$  è la derivata di  $\tilde{\rho}$  rispetto alla sua variabile  $s$ , è

$$\tilde{\rho}_{j,\text{exp}} = \frac{1}{\tilde{r}^2 (1 + \tilde{r})^2} - \frac{\epsilon \tilde{y}^2 + \eta \tilde{z}^2}{\tilde{r}} \frac{2(2\tilde{r} + 1)}{\tilde{r}^3 (1 + \tilde{r})^3}. \quad (2.18)$$

Per quanto riguarda il potenziale, i termini (2.12) si calcolano esplicitamente sostituendovi la densità (2.17), il che porta alla risoluzione di integrali specifici: in particolare, a meno di costanti arbitrarie, la funzione primitiva di  $1/(1+s)^2$  è  $-1/(1+s)$ , mentre scrivendo  $\frac{1}{s(1+s)^2}$  come somma di addendi di minimo comune multiplo pari al denominatore ricavando poi i rispettivi numeratori prefissati, ne risulta  $1/s - 1/(1+s) - 1/(1+s)^2$ , pertanto ha primitiva  $\ln(s) - \ln(1+s) + 1/(1+s) = \ln\left(\frac{s}{1+s}\right) + \frac{1}{1+s}$ ; inoltre poiché  $\frac{s^2}{(1+s)^2} = \frac{s^2+2s+1-2s-1}{(1+s)^2} = \frac{(1+s)^2-2s-1}{(1+s)^2} = 1 - \frac{2s+1}{(1+s)^2} = 1 - \frac{2s+2-1}{(1+s)^2} = 1 - 2\frac{1}{1+s} + \frac{1}{(1+s)^2}$ , la primitiva del restante contributo è  $s - 2\ln(1+s) - 1/(1+s)$ . Mettendo insieme tutto ciò, e procedendo secondo gli estremi di integrazione, otteniamo

$$\tilde{\Phi}_{j,0}(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{r}} \left( \frac{1}{1+\tilde{r}} - 1 \right) + \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) + \frac{1}{1+\tilde{r}} = \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{j,1}(\tilde{r}) &= -\frac{1}{3\tilde{r}^3} \left[ \tilde{r} - 2\ln(1+\tilde{r}) - \frac{1}{1+\tilde{r}} + 1 \right] - \frac{1}{3} \left[ -\ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) - \frac{1}{1+\tilde{r}} \right] = \\ &= \frac{2\ln(1+\tilde{r})}{3\tilde{r}^3} + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) + \frac{1}{3\tilde{r}^2} \frac{\tilde{r}^2 - \tilde{r} - 2}{1+\tilde{r}} = \\ &= \frac{2\ln(1+\tilde{r})}{3\tilde{r}^3} + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) + \frac{\tilde{r} - 2}{3\tilde{r}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{j,2}(\tilde{r}) &= \frac{1}{\tilde{r}^5} \left[ \tilde{r} - 2\ln(1+\tilde{r}) - \frac{1}{1+\tilde{r}} + 1 \right] = -\frac{2\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^5} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\tilde{r}^2 + 2\tilde{r}}{\tilde{r}(1+\tilde{r})} = \\ &= -\frac{2\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^5} + \frac{2+\tilde{r}}{\tilde{r}^4(1+\tilde{r})}. \end{aligned}$$

Essi coincidono con gli omonimi esposti nell'appendice A di *CB05*; l'espansione totale (2.11) allora risulterà

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j(\tilde{r}) &= \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) + (\epsilon + \eta) \left[ \frac{2\ln(1+\tilde{r})}{3\tilde{r}^3} + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) + \frac{\tilde{r} - 2}{3\tilde{r}^2} - \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1+\tilde{r}}\right) \right] + \\ &+ (\epsilon \tilde{y}^2 + \eta \tilde{z}^2) \left[ \frac{2+\tilde{r}}{\tilde{r}^4(1+\tilde{r})} - \frac{2\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^5} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

È molto facile separare i termini che riguardano il basilare caso sferico: riprendendo il discorso compiuto verso la fine del paragrafo 2.1, si ha che  $\tilde{\Phi}_{j,0}$  è il potenziale associato alla semplice densità a simmetria sferica  $\tilde{\rho}_j$ , e le due quantità sono necessariamente legate

dall'equazione di Poisson normalizzata, pertanto per una distribuzione  $\gamma$ -model con  $\gamma = 2$  possiamo scrivere<sup>3</sup>

$$\tilde{\Phi}_j(\tilde{r}) = \ln\left(\frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}}\right). \quad (2.20)$$

Il secondo caso che prendiamo in esame è il profilo di densità NFW, che come abbiamo visto nel paragrafo 1.5 costituisce uno dei più rilevanti in astrofisica poiché sembra riprodurre molto bene la distribuzione di materia negli aloni di materia oscura; la sua formula, dall'espressione esplicita (1.13), è

$$\tilde{\rho}_{\text{nfw}}(s) = \frac{1}{s(1+s)^2}. \quad (2.21)$$

Benché molto simile, la differenza rispetto alla precedente è che a denominatore la variabile  $s$  che moltiplica il fattore in parentesi ha esponente 1; fisicamente, sappiamo che questa grandezza definisce il rapporto tra il raggio sferico ed un raggio di scala. Se adesso effettuiamo lo sviluppo (2.10) tramite (2.21), stavolta si ottiene

$$\tilde{\rho}_{\text{nfw,exp}} = \frac{1}{\tilde{r}(1+\tilde{r})^2} - \frac{\epsilon\tilde{y}^2 + \eta\tilde{z}^2}{\tilde{r}} \frac{1+3\tilde{r}}{\tilde{r}^2(1+\tilde{r})^3}. \quad (2.22)$$

Il calcolo esplicito dei termini di potenziale, sostituendo la densità (2.21) in (2.12), richiede le seguenti considerazioni: sempre a meno di costanti, oltre alla funzione  $-1/(1+s)$  primitiva di  $1/(1+s)^2$  come già visto, quella di  $s/(1+s)^2$  è, aggiungendo e togliendo 1 a numeratore,  $\ln(1+s) + 1/(1+s)$ , infine  $\frac{s^3}{(1+s)^2}$ , risolvendo per parti e manipolando il relativo integrale secondario  $\frac{3s^2}{1+s}$  prima portando fuori la costante 3, poi facendo uso della scomposizione  $s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$  (dopo aver aggiunto e tolto 1 a numeratore), si dimostra avere primitiva  $-\frac{s^3}{1+s} + \frac{3}{2}s^2 - 3s + 3 \ln(1+s)$ ; eseguendo gli opportuni passaggi, si perviene a

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\text{nfw},0}(\tilde{r}) &= -\frac{\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}}, \\ \tilde{\Phi}_{\text{nfw},1}(\tilde{r}) &= -\frac{1}{\tilde{r}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^2} \right], \\ \tilde{\Phi}_{\text{nfw},2}(\tilde{r}) &= -\frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{1}{1+\tilde{r}} - \frac{3}{2\tilde{r}} + \frac{3}{\tilde{r}^2} - \frac{3 \ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^3} \right], \end{aligned}$$

i quali contributi, inseriti in (2.11), ci danno l'espressione totale

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\text{nfw,exp}}(\tilde{r}) &= -\frac{\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}} - (\epsilon+\eta) \frac{1}{\tilde{r}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^2} - \ln(1+\tilde{r}) \right] - (\epsilon\tilde{y}^2 + \eta\tilde{z}^2) \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[ \frac{1}{1+\tilde{r}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2\tilde{r}} + \frac{3}{\tilde{r}^2} - \frac{3 \ln(1+\tilde{r})}{\tilde{r}^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

<sup>3</sup>In effetti, considerando la stessa equazione (2.9) per convenienza in coordinate sferiche, sapendo che l'unico contributo non nullo del laplaciano è quello radiale, e che questo si esprime  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)$ , è immediato verificarne la correttezza.

Distinguendo anche qui i termini costituenti il semplice caso sferico, per Poisson si avrà  $\tilde{\nabla}^2 \tilde{\Phi}_{\text{nfw},0} = \tilde{\rho}_{\text{nfw}}$ , ovvero una distribuzione sferica di tipo NFW normalizzata genera proprio il potenziale normalizzato

$$\tilde{\Phi}_{\text{nfw}}(\tilde{r}) = -\frac{\ln(1 + \tilde{r})}{\tilde{r}}. \quad (2.24)$$

### 2.3 Valori massimi dei parametri $\eta$ e $\epsilon$

Il prossimo passo consiste nel porre dei vincoli sullo schiacciamento applicabile, in quanto abbiamo già accennato in precedenza che determinate combinazioni di  $\epsilon$  e  $\eta$  restituiscono risultati non fisici a causa di valori negativi della densità. Allo scopo, è utile innanzitutto fornire una riscrittura in coordinate cilindriche delle espansioni (2.18) e (2.22) che, adottando le formule (A.1), per cui  $\tilde{r} := \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} = \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}$ , si presenteranno rispettivamente

$$\tilde{\rho}_{\text{j,exp}}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{1}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2) (1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})^2} - \frac{\epsilon \tilde{R}^2 \sin^2 \varphi + \eta \tilde{z}^2}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \frac{2 (2 \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} + 1)}{(\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} + \tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^3}, \quad (2.25)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{nfw,exp}}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} (1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})^2} - \frac{\epsilon \tilde{R}^2 \sin^2 \varphi + \eta \tilde{z}^2}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \frac{1 + 3 \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2) (1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})^3}. \quad (2.26)$$

Si noti che i primi addendi a secondo membro altro non sono che la versione cilindrica dei profili a simmetria sferica (2.17) e (2.21), che presentiamo in fig. 2.1. Possiamo valutare cosa accade in particolare nel caso di modelli oblati e prolatti: corrispondentemente a (2.13) e (2.15), avremo così il set di equazioni

$$\tilde{\rho}_{\text{j,obl}}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{1}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2) (1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})^2} - \frac{\eta \tilde{z}^2}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \frac{2 (2 \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} + 1)}{(\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} + \tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^3}, \quad (2.27)$$

$$\tilde{\rho}_{\text{nfw,obl}}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} (1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})^2} - \frac{\eta \tilde{z}^2}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \frac{1 + 3 \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2) (1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})^3}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\text{j,pro}}(\tilde{R}', \tilde{z}') &= \frac{1}{(\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2) (1 + \sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2})^2} - \frac{\epsilon \tilde{R}'^2}{\sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2}} \\ &\cdot \frac{2 (2 \sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2} + 1)}{(\sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2} + \tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2)^3}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

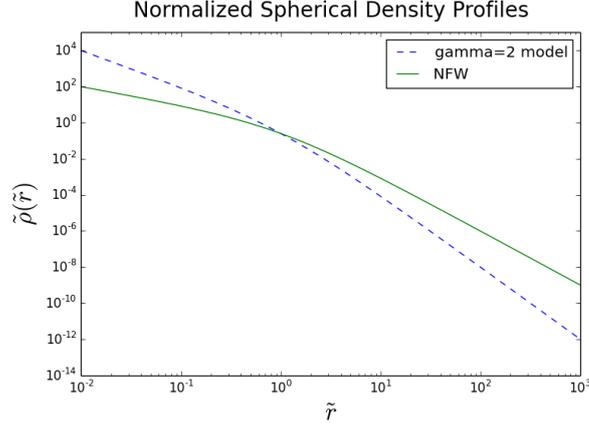


Figura 2.1: Profilo radiale di densità normalizzata avente forma analitica  $\gamma$ -model con  $\gamma = 2$  (linea tratteggiata) e NFW (linea continua) a simmetria sferica, in funzione del raggio normalizzato  $\tilde{r}$ . Si evince in particolare che il NFW vicino al centro assume valori minori, a  $\tilde{r} \approx 1$  i due sono comparabili, dopodiché il  $\gamma$ -model decade più in fretta.

$$\tilde{\rho}_{\text{nfw,pro}}(\tilde{R}', \tilde{z}') = \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2} (1 + \sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2})^2} - \frac{\epsilon \tilde{R}'^2}{\sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2}} \cdot \frac{1 + 3\sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2}}{(\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2) (1 + \sqrt{\tilde{R}'^2 + \tilde{z}'^2})^3}. \quad (2.30)$$

Da esse, gli intervalli accettabili dei due parametri  $\epsilon$  e  $\eta$  si ricavano per via numerica, grazie a specifici programmi scritti in linguaggio *Python* che consentono di calcolare i valori di densità in funzione delle variabili radiale e verticale, poi graficati con l'apposito modulo "matplotlib". Le figure 2.2 e 2.3 mostrano i diagrammi risultanti: si vede come all'aumentare dei parametri di schiacciamento viene progressivamente meno la simmetria sferica, infatti gli oblati subiscono una compressione in direzione  $z$  assumendo via via una caratteristica forma a "∞", contrariamente ai prolatti che sono pressati radialmente tendendo ad una forma ad "arachide"; è confermata inoltre la presenza di regioni a densità minore di 0 nelle distribuzioni schiacciate sopra una certa soglia. Per la precisione, si è dedotto che i massimi parametri applicabili nei nostri modelli, gli ultimi cioè che garantiscono densità non negative in ogni punto, sono i seguenti: per un  $\gamma$ -model con  $\gamma = 2$  oblatto ( $\epsilon = 0$ ) vale  $\eta_{\text{max}} = 0.27$ , mentre quando è prolato  $\eta_{\text{max}} = \epsilon_{\text{max}} = 0.27$ , invece per una distribuzione NFW abbiamo  $\eta_{\text{max}} = 0.37$  per il caso oblatto ( $\epsilon = 0$ ) e  $\eta_{\text{max}} = \epsilon_{\text{max}} = 0.37$  per quello prolato.

Pure in *CB05* e *A17* era stata discussa l'applicazione dei due profili di densità visti a modelli ellissoidali, in particolare quelli di tipo  $\gamma$  nel primo documento e NFW nel secondo. Per il  $\gamma$ -model ( $\gamma = 2$ ) il nostro schiacciamento massimo di 0.27 è in perfetto accordo con quello riportato nell'appendice A di *CB05*, secondo cui la condizione di positività della densità nei relativi casi oblati è  $0 \leq \eta \leq 1/3$ . Per quanto riguarda il modello NFW, nel terzo capitolo di *A17* è riportato un limite di  $\eta_{\text{max}} \approx 0.38$  e  $\eta_{\text{max}} = \epsilon_{\text{max}} \approx 0.38$  rispettivamente nei modelli oblati ( $\epsilon = 0$ ) e in quelli prolatti: a fronte del valore di 0.37 qui ricavato, possiamo affermare che i nostri risultati nel caso NFW sono in buon accordo, come emerge anche dalla compatibilità dei grafici disponibili; attribuiamo la piccola

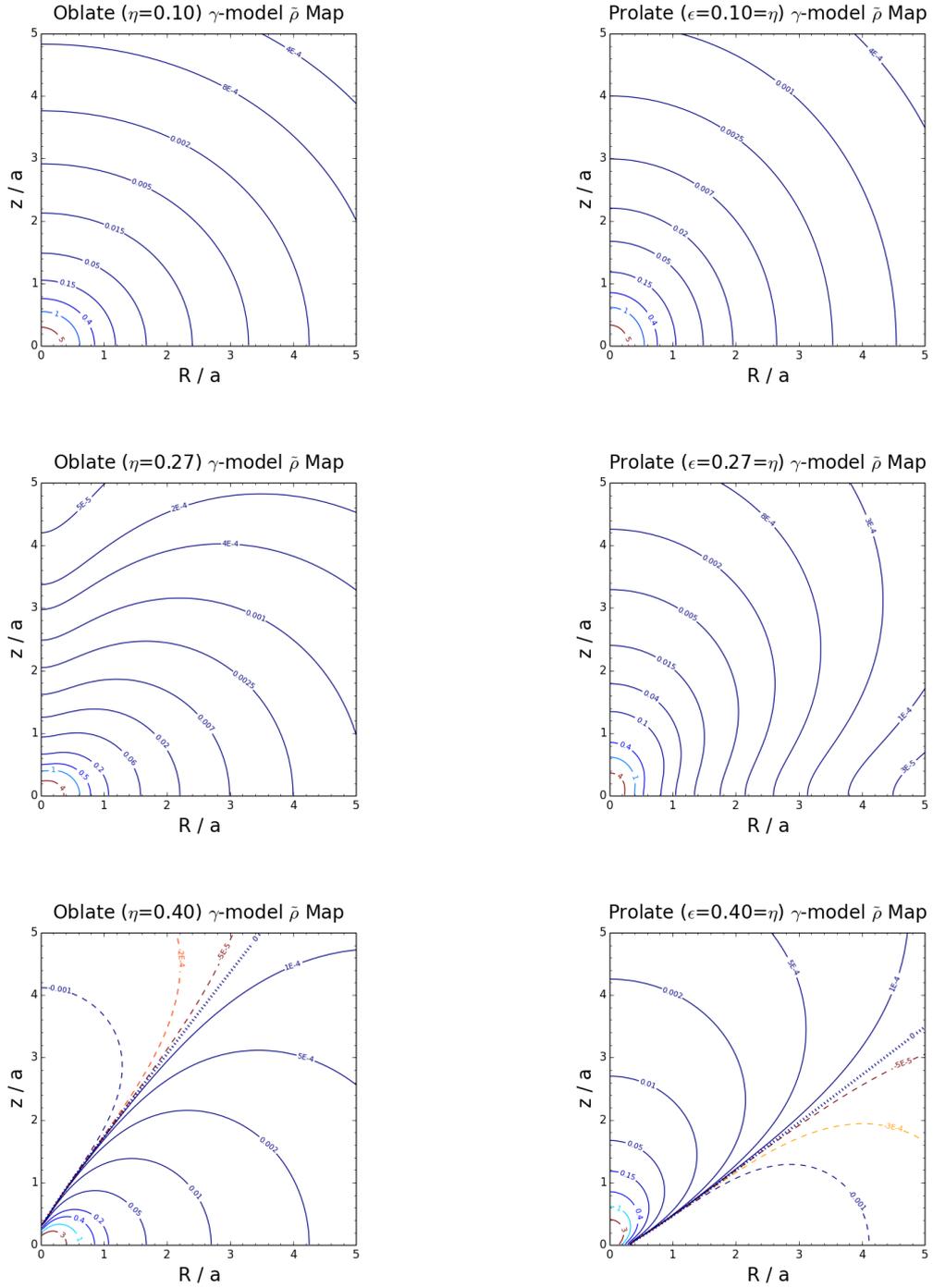


Figura 2.2: Distribuzione di densità normalizzata  $\tilde{\rho}$  di un  $\gamma$ -model con  $\gamma = 2$  secondo le coordinate normalizzate  $\tilde{R}$  e  $\tilde{z}$  (semipiano  $z > 0$ ) in modelli schiacciati con variazione dei parametri  $\eta$  e  $\epsilon$ : agli oblati di sinistra sono affiancate le controparti prolate. I grafici in alto includono un caso medio, quelli centrali sono relativi allo schiacciamento massimo ricavato numericamente ( $\eta = 0.27$ ,  $\epsilon = 0$  e  $\eta = \epsilon = 0.27$ ), in basso invece si è voluto mostrare cosa succederebbe qualora venisse aumentato: compaiono regioni proibite di isodensità negative, qui tratteggiate, mentre con la linea a puntini è evidenziato il limite di densità nulla.

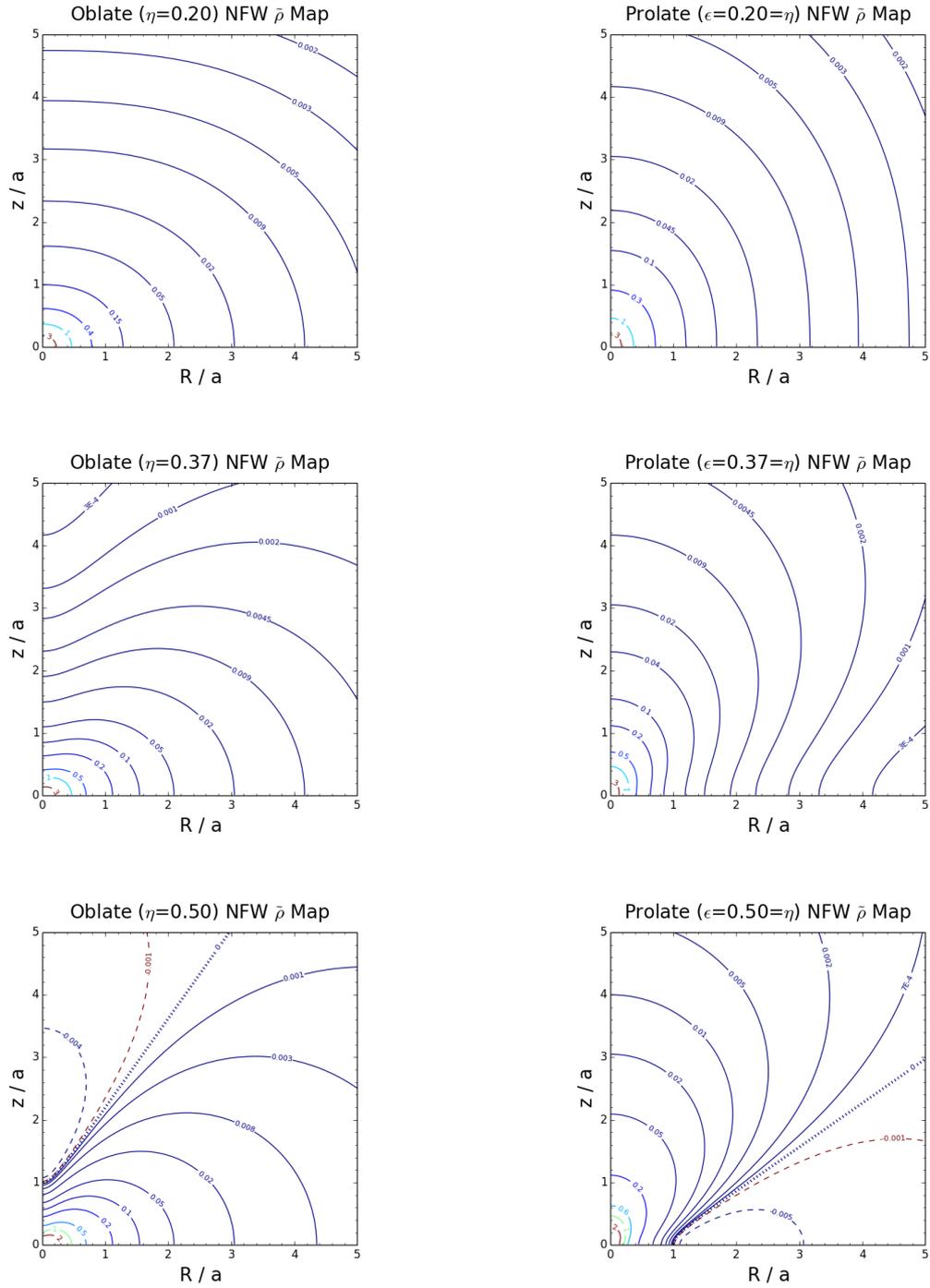


Figura 2.3: Distribuzione di densità  $\tilde{\rho}$  di tipo NFW secondo le coordinate  $\tilde{R}$  e  $\tilde{z}$  (semipiano  $z > 0$ ) in modelli schiacciati con variazione dei parametri  $\eta$  e  $\epsilon$ : agli oblati di sinistra sono affiancate le controparti prolate. Anche qui, nei grafici superiori sono riportati valori di schiacciamento medio, al centro i valori di schiacciamento massimo permesso ( $\eta = 0.37$ ,  $\epsilon = 0$  e  $\eta = \epsilon = 0.37$ ), mentre inferiormente abbiamo inserito a titolo d'esempio un caso più avanzato in cui appaiono isodensità negative, separate dalle accettabili positive mediante la linea a puntini di densità 0.

discrepanza a cause di precisione numerica.

## 2.4 Equazione idrodinamica di Eulero

I moti dei fluidi, materiali liquidi o gassosi, vengono studiati per mezzo di equazioni che descrivono il modo in cui variano le loro quantità fisiche macroscopiche  $Q = Q(\bar{x}(t), t)$  a seconda della posizione e al passare del tempo, e come le stesse sono legate tra loro: questo è possibile nell'ipotesi di fluido *collisionale*, nel quale le particelle costituenti interagiscono abbastanza frequentemente con libero cammino medio  $\lambda_{\text{mfp}} \ll L$ , dove  $L := \left| \frac{Q}{\nabla Q} \right|$  è la tipica scala su cui le grandezze cambiano in maniera apprezzabile<sup>4</sup>. Una delle fondamentali è l'*equazione di Eulero*, anche nota come *conservazione del momento*, che si legge

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \quad (2.31)$$

dove  $\bar{u}$  è la velocità dell'elemento di fluido, mentre  $\rho$ ,  $P$  e  $\Phi$  sono la densità, la pressione ed il potenziale gravitazionale; è importante sottolineare che questa formula vettoriale è valida per fluidi *inviscidi* in condizioni ideali<sup>5</sup>. Una versione equivalente è costituita da

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \quad (2.32)$$

che è di tipo "lagrangiano": essa è più compatta perché contiene la *derivata totale* o *lagrangiana* definita

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla, \quad (2.33)$$

la quale permette di analizzare la fluidodinamica seguendo l'elemento di fluido nel suo percorso, piuttosto che vedere come cambiano le grandezze rispetto a posizioni fissate nello spazio, costituente invece il tipico approccio "euleriano" della formula (2.31). L'operatore  $\bar{u} \cdot \nabla$  è chiamato *avvettivo*, e identifica proprio il mutamento delle quantità di un elemento di fluido come conseguenza del muoversi del fluido stesso. La rilevanza dell'equazione di Eulero consiste nel rappresentare la seconda legge della dinamica di Newton, riassunta nella celebre identità  $\bar{F} = m\bar{a}$ , o equivalentemente  $\bar{a} = \bar{F}/m$ , dove  $\bar{F}$  è la forza,  $\bar{a}$  l'accelerazione e  $m$  la massa, applicata al moto dei fluidi: da essa si può ricavare, in effetti, supponendo che l'elemento di fluido è sottoposto ad una forza di volume, la gravità, ed una di superficie, la pressione termica. La (2.32) sostanzialmente dice che la variazione totale di velocità, cioè l'accelerazione, è data da una forza in generale causata sia dal gradiente di pressione scalato per la densità, sperimentato da un volumetto di area laterale  $A$  e lunghezza  $h$  in una certa direzione, sia dal gradiente di potenziale, il quale

<sup>4</sup>Ciò permette di trattare un mezzo come "continuo" dal punto di vista analitico, e di introdurre il concetto di *elementi* di fluido, i.e. piccole regioni aventi dimensione caratteristica  $\ell$  tale che  $\lambda_{\text{mfp}} \ll \ell \ll L$ , quindi in grado di descrivere proprietà locali, ma anche di essere statisticamente rappresentative, contenendo comunque un gran numero di particelle.

<sup>5</sup>Significa che non sono considerate eventuali forze e scambi di energia tra porzioni interne che in realtà caratterizzano ogni fluido in movimento: ci si riferisce a questi *stress* e dissipazioni col nome *viscosità*; l'equazione che ne tiene conto è quella di *Navier-Stokes*, la quale per fluidi incompressibili ( $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ ) introduce un termine di laplaciano della velocità.

può essere di tipo gravitazionale, ma in generale anche relativo ad altra influenza esterna. Una semplice analisi dimensionale della formula conferma la coerenza di quanto affermato, infatti entrambi i termini a secondo membro risultano essere una forza per unità di massa.

## 2.5 Equilibrio idrostatico

Ponendo  $\bar{u} = 0$  nell'equazione di Eulero abbiamo

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi, \quad (2.34)$$

formula che caratterizza l'*equilibrio idrostatico*: è una peculiare condizione nella quale l'elemento di fluido si ritrova statico (cioè con velocità nulla) e in equilibrio, a causa della perfetta parità tra la componente di pressione e quella di gravità. È evidente che in casi a simmetria sferica la relazione si scrive esplicitamente

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{G M(r)}{r^2}, \quad (2.35)$$

dove  $M(r)$  è la massa totale racchiusa entro il valore di raggio  $r$ ; questa è esattamente la stessa che avevamo visto in uno dei metodi finalizzati a stimare la massa di un ammasso (formula 1.28, sottopar. 1.7.2). D'altronde, il concetto di equilibrio idrostatico è molto importante non solo in certe applicazioni pratiche, ma anche in campo astrofisico, infatti numerosi oggetti che osserviamo possono essere considerati sotto questo aspetto: un esempio su tutti sono le stelle, che nelle fasi di bruciamento degli elementi al loro interno sono rese stabili dal continuo bilanciamento della forza di pressione per disgregazione termica, che le espanderebbe, e della forza di gravità, che le farebbe collassare; come già accennato, anche l'ICM in ammassi di galassie può ritenersi soddisfare questo tipo di equilibrio, almeno guardandone la sola pressione termica del gas molto caldo all'interno della complessiva buca di potenziale gravitazionale, ma quest'assunzione è spesso resa incorretta da altri contributi quali proprio la rotazione e la turbolenza.

## 2.6 Modelli stazionari di ICM in rotazione

Come anticipato all'inizio di questo capitolo, noi studiamo l'ICM tramite modelli assisimetrici: assumiamo pertanto il gas stratificato in equilibrio in un potenziale gravitazionale, in eventuale rotazione con l'ipotesi semplificativa, trasferendoci opportunamente in coordinate cilindriche, che l'unica componente di velocità sia quella azimutale, ovvero non ci siano contributi radiali né verticali, e che essa dipenda solamente da  $R$ ; in aggiunta, si considera soddisfatta la stazionarietà, cioè le quantità che descrivono l'ICM non variano nel tempo. Uno dei maggiori testi che compie analisi poggiando su identiche supposizioni, e che ci tornerà molto utile pure per la parte osservativa, è "*Gas rotation in galaxy clusters: signatures and detectability in X-rays*" di *Bianconi, Ettori & Nipoti (2013)*, a cui ci riferiremo con "*BEN13*". Tornando al moto, da quanto detto possiamo dunque scrivere

$$u_\varphi(R) = \Omega(R) R \quad (2.36)$$

con  $\Omega(R)$  velocità angolare: questa costituisce la legge di una rotazione *differenziale*, in cui la velocità non è uniforme come sarebbe in un corpo rigido, bensì muta con il raggio  $R$ . Vogliamo adesso stendere l'equazione di Eulero cilindrica, e per farlo conviene prima scrivere la stessa in componenti: riprendendone quindi la forma euleriana, la sua componente  $i$ -esima in generale sarà

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (2.37)$$

dove si intende  $i, j = 1, 2, 3$ ; nel secondo addendo a primo membro abbiamo ommesso il simbolo di sommatoria  $\sum_j$  adottando la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti. Sapendo che la velocità nel sistema cilindrico avrà una scrittura del tipo  $\bar{u} = u_R \hat{e}_R + u_\varphi \hat{e}_\varphi + u_z \hat{e}_z$  con  $u_R$ ,  $u_\varphi$  e  $u_z$  i rispettivi contributi nelle tre direzioni, e ricordando la forma del gradiente (A.2), bisogna prestare attenzione nell'esprimere il termine avvettivo: in particolare, siccome è facile vedere che per i primi due versori vale  $\frac{\partial \hat{e}_R}{\partial \varphi} = \hat{e}_\varphi$  e  $\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{e}_R$ , risulterà

$$\begin{aligned} \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} &= \bar{u} \cdot \nabla (u_R \hat{e}_R + u_\varphi \hat{e}_\varphi + u_z \hat{e}_z) = u_R \frac{\partial}{\partial R} (u_R \hat{e}_R + u_\varphi \hat{e}_\varphi + u_z \hat{e}_z) + \frac{u_\varphi}{R} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_R \hat{e}_R + u_\varphi \hat{e}_\varphi + u_z \hat{e}_z) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (u_R \hat{e}_R + u_\varphi \hat{e}_\varphi + u_z \hat{e}_z) = \\ &= \left( \bar{u} \cdot \nabla u_R - \frac{u_\varphi^2}{R} \right) \hat{e}_R + \left( \bar{u} \cdot \nabla u_\varphi + \frac{u_\varphi u_R}{R} \right) \hat{e}_\varphi + \bar{u} \cdot \nabla (u_z \hat{e}_z), \end{aligned}$$

e a questo punto, tenendo a mente le ipotesi delineate sopra ed applicando (2.36), otteniamo

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(R, z)}{\partial R} = -\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} + \Omega^2 R, \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(R, z)}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z}. \quad (2.39)$$

Le dipendenze da  $R$  e  $z$  sono ancora date dall'assissimmetria: la presenza esplicita di  $\varphi$  sarebbe in contraddizione con quest'assunzione. Consideriamo la stessa proprietà soddisfatta anche da  $\Phi$ , che qui è il potenziale totale, un potenziale gravitazionale esterno che rappresenta sia il contributo di materia oscura sia di materia barionica (gas e stelle). Nella nostra situazione, è possibile definire

$$\Phi_{\text{eff}}(R, z) := \Phi(R, z) - \int_R \Omega^2(R') R' dR', \quad (2.40)$$

che è il *potenziale effettivo* o *efficace*, quantità conveniente nella discussione dell'equilibrio di un mezzo in rotazione, e che più avanti ci servirà per trovare le formule della distribuzione di densità del gas; grazie a questa introduzione le equazioni di Eulero cilindriche (2.38) e (2.39), in presenza di un fluido *barotropico* (si veda il successivo paragrafo 2.7), si scrivono compattamente

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi_{\text{eff}}, \quad (2.41)$$

ovvero come un equilibrio idrostatico ove il potenziale è quello effettivo. Nelle prossime sezioni studiamo il conseguente comportamento dell'ICM posto in diverse casistiche, previa descrizione dei legami densità-pressione e del profilo di velocità.

## 2.7 Gas perfetti e stratificazione politropica

Un gas collisionale si dice *perfetto* o *ideale*<sup>6</sup> se le sue variabili si dimostrano legate dalla formula

$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu m_p}, \quad (2.42)$$

nota come *equazione o legge di stato dei gas perfetti* dove  $P$  è la pressione,  $\rho$  la densità,  $T$  la temperatura,  $k_B \approx 1.381 \cdot 10^{-16}$  erg/K la costante di Boltzmann, e  $\mu$  massa media delle particelle in unità della massa del protone  $m_p \approx 1.673 \cdot 10^{-24}$  g. Si ricorda che solamente la collisionalità di un sistema permette la scrittura di un'equazione di stato di questo tipo. La più diffusa espressione equivalente è  $P = n k_B T$  con  $n$  densità numerica, ovvero numero di particelle per unità di volume, correlata all'ordinaria densità di massa per

$$n = \frac{\rho}{\mu m_p}. \quad (2.43)$$

Specialmente nell'ambito di prove sperimentali, la legge (2.42) può anche avere forma  $P V = n_{\text{mol}} R T$  con  $V$  volume,  $R := k_B N_0$  dove  $N_0 \approx 6.022 \cdot 10^{23}$  è il cosiddetto *numero di Avogadro*, i.e. numero di particelle definente una quantità di sostanza pari a una *mole*, e  $n_{\text{mol}}$  numero di *moli*. È evidente che in ogni caso siamo di fronte ad un sistema in cui la pressione risulta funzione di due variabili termodinamiche,  $P = P(\rho, T)$ , oppure anche  $P = P(\rho, \mathcal{S})$  con  $\mathcal{S}$  *entropia*.

Tuttavia, quando consideriamo la distribuzione di un gas in equilibrio è possibile che  $P = P(\rho)$ : questa stratificazione è chiamata *barotropica*. Dal teorema di *Poincarè-Wavre* (*Tassoul 1978*) sappiamo che una rotazione cilindrica come (2.36) è condizione necessaria e sufficiente per avere una distribuzione barotropica, cosicché anche per noi le superfici isobare ed isodense, di costante pressione e densità rispettivamente, si rivelano coincidenti, ed entrambe coincidono con quelle di fisso  $\Phi_{\text{eff}}$ . Più esplicitamente, assumiamo che il gas abbia una distribuzione *politropica*, cioè si possa scrivere

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\tilde{\gamma}} \quad (2.44)$$

dove, presa una posizione di riferimento  $x_0$ , è  $P_0 := P(\bar{x}_0)$  e  $\rho_0 := \rho(\bar{x}_0)$ , mentre  $\tilde{\gamma}$  è l'*indice politropico*. Casi particolari sono la distribuzione *isoterma* ( $\tilde{\gamma} = 1$ ) e quella *adiabatica*  $\gamma = \tilde{\gamma}$ , con  $\gamma$  *indice adiabatico*. Se il mezzo è ideale e non isoterma, tenendo

---

<sup>6</sup>Le particelle, assunte puntiformi e indistinguibili, interagiscono solo per contatto tramite urti perfettamente elastici, cioè tali che l'energia meccanica totale si conserva: in particolare rimangono costanti l'energia cinetica e la quantità di moto, inoltre la distribuzione di velocità è maxwelliana. I costituenti dei fluidi astrofisici hanno in realtà gradi di libertà aggiuntivi come i roto-vibrazionali, e possono essere eccitati o ionizzati; tuttavia, spesso il tempo medio di collisione relativamente piccolo consente di trattare questi mezzi come ideali.

conto della (2.42) si vede subito che la funzione della temperatura è formalmente molto simile:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\tilde{\gamma}-1}. \quad (2.45)$$

Di recente è stato appurato che la distribuzione politropica costituisce una solida ipotesi (*Ghirardini et al. 2019b*). Casi più complessi richiedono di fornire una versione *composita* di questa rappresentazione, il che vuol dire specificarne una variante a seconda di opportune condizioni: ciò si verifica tipicamente negli ammassi di tipo cool-core per i quali, avendo un differente andamento della temperatura nelle zone interne ed in quelle esterne, se assunti stazionari si può scrivere rispettivamente la (2.44) con un  $\tilde{\gamma}_{\text{in}}$  quando  $\rho > \rho_0$  e un  $\tilde{\gamma}_{\text{out}}$  quando  $\rho < \rho_0$ , dove  $\rho_0$  è la densità che divide le due regioni e  $\tilde{\gamma}_{\text{out}} > \tilde{\gamma}_{\text{in}}$  (*Nipoti et al. 2015, BEN13, A17*).

Dopo queste nozioni, l'obiettivo è trovare l'espressione del profilo di densità in termini del potenziale effettivo prima introdotto: a tal fine, inseriamo la relazione politropica in (2.41), allora

$$\tilde{\gamma} \frac{k_B T_0}{\mu m_p} \frac{\rho^{\tilde{\gamma}-1}}{\rho_0^{\tilde{\gamma}-1}} \nabla \rho = -\rho \nabla \Phi_{\text{eff}}, \quad (2.46)$$

in cui abbiamo scritto  $P_0$  secondo la legge dei gas perfetti (2.42), con  $T_0 := T(\bar{x}_0)$ . Ora, per Poisson  $\Phi_{\text{eff}}$  dipenderà dalla densità  $\rho$ , quindi  $\nabla \Phi_{\text{eff}} = \frac{d\Phi_{\text{eff}}}{d\rho} \nabla \rho$ ; elidendo poi  $\nabla \rho$  in ambo i membri, portando la densità al primo ed integrando, si ottiene

$$\tilde{\gamma} \frac{k_B T_0}{\mu m_p} \int_1^{\rho(\bar{x})/\rho_0} \rho'^{\tilde{\gamma}-2} d\rho' = - \int_{\Phi_{\text{eff},0}}^{\Phi_{\text{eff}}(\bar{x})} d\Phi'_{\text{eff}}. \quad (2.47)$$

Nell'integrale sinistro si utilizza come variabile la densità normalizzata a  $\rho_0$ , avendo prima moltiplicato e diviso per questo valore, mentre nel destro l'estremo iniziale è  $\Phi_{\text{eff},0} := \Phi_{\text{eff}}(\bar{x}_0)$ . Nel caso in cui  $\tilde{\gamma} \neq 1$  discende facilmente

$$\tilde{\gamma} \frac{k_B T_0}{\mu m_p} \frac{1}{\tilde{\gamma}-1} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\tilde{\gamma}-1} - 1 \right] = [\Phi_{\text{eff},0} - \Phi_{\text{eff}}]$$

cioè, risolvendo per la densità,

$$\rho(\Phi_{\text{eff}}) = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\tilde{\gamma}-1}{\tilde{\gamma}} \frac{\mu m_p}{k_B T_0} (\Phi_{\text{eff},0} - \Phi_{\text{eff}}) \right]^{\frac{1}{\tilde{\gamma}-1}}. \quad (2.48)$$

Se invece  $\tilde{\gamma} = 1$  si ricade nell'ipotesi isoterma: a fissata  $T_0$ , partendo da (2.46) arriviamo in modo analogo alla (2.47) avente  $\frac{1}{\rho} d\rho$  come integrando a primo membro, e questo dà

$$\frac{k_B T_0}{\mu m_p} \left[ \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] = [\Phi_{\text{eff},0} - \Phi_{\text{eff}}],$$

ovvero

$$\rho(\Phi_{\text{eff}}) = \rho_0 e^{-\frac{\mu m_p}{k_B T_0} (\Phi_{\text{eff}} - \Phi_{\text{eff},0})}. \quad (2.49)$$

Le due distribuzioni di densità che abbiamo appena ottenuto si possono leggere in dipendenza da  $R$  e  $z$  infatti, in linea con le nostre premesse "cilindriche", il potenziale effettivo è stato definito in questi termini; per il caso generale (2.48) e quello isoterma (2.49) quindi valgono rispettivamente

$$\rho(R, z) = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\tilde{\gamma} - 1}{\tilde{\gamma}} \frac{\mu m_p}{k_B T_0} [\Phi_{\text{eff},0} - \Phi_{\text{eff}}(R, z)] \right]^{\frac{1}{\tilde{\gamma}-1}}, \quad (2.50)$$

$$\rho_{\text{iso}}(R, z) = \rho_0 e^{-\frac{\mu m_p}{k_B T_0} [\Phi_{\text{eff}}(R, z) - \Phi_{\text{eff},0}]}. \quad (2.51)$$

## 2.8 Leggi di velocità

L'ingrediente che manca per completare il nostro modello di ICM è specificare l'andamento della velocità. Nel paragrafo 2.6 abbiamo già spiegato che l'ICM è assunto rotante differenzialmente secondo il solo raggio cilindrico, ma attualmente teoria ed osservazioni non ne precisano l'esatta forma analitica: a tal proposito sono state avanzate alcune proposte, di recente anche attraverso misure di rotazione dell'ICM e della componente oscura in simulazioni cosmologiche (e.g. *Baldi et al. 2017*). Qui analizzeremo il gas in equilibrio all'interno del potenziale totale in differenti casi, coinvolgenti una sua forma sferica o schiacciata, con la componente barionica in rotazione oppure statica, sia isoterma che non isoterma. Per i modelli rotanti abbiamo scelto le seguenti leggi:

$$u_{\varphi,1}(S) = u_o \left[ \frac{\ln(1+S)}{S} - \frac{1}{1+S} \right]^{1/2} \quad (2.52)$$

e

$$u_{\varphi,2}(S) = u_o \frac{S}{(1+S)^2}, \quad (2.53)$$

con la variabile spaziale normalizzata  $S := R/R_o$ , essendo  $R_o$  un valore radiale caratteristico, e  $u_o := u(R_o)$ ; in entrambe le rotazioni è supposto un valore centrale nullo,  $u_{\varphi}(0) := 0$ . Da notare che, secondo la (2.36), dividendo per  $R$  si ottiene la velocità angolare con cui ruota il gas:

$$\Omega_1(R) = \frac{u_o}{R} \left[ \frac{\ln(1+R/R_o)}{R/R_o} - \frac{1}{1+R/R_o} \right]^{1/2} \quad (2.54)$$

e

$$\Omega_2(R) = \frac{u_o}{R_o} \frac{1}{(1+R/R_o)^2}. \quad (2.55)$$

Le leggi (2.52) e (2.53) sono le stesse adottate in *BEN13* e *A17*: la motivazione fisica è che consentono di riprodurre due modalità di velocità circolare nel caso del profilo NFW, che si rivelano coerenti con l'ellitticità dell'ICM effettivamente osservata una volta selezionati

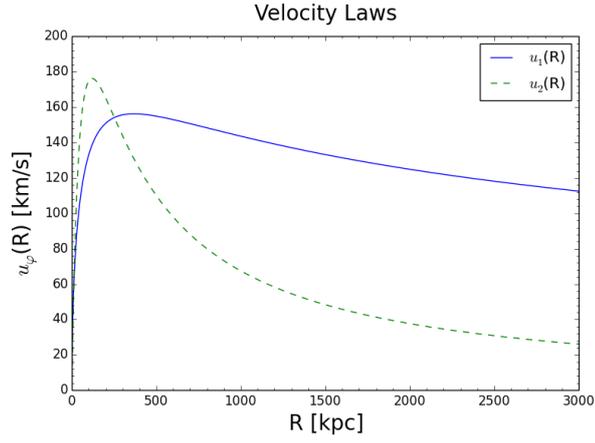


Figura 2.4: Profili di velocità (2.52) e (2.53) in funzione del raggio cilindrico  $R$ . Per il primo abbiamo posto  $R_o = 170$  kpc a cui è associata  $u_o = 336$  km/s, mentre per il secondo  $R_o = 120$  kpc e  $u_o = 705$  km/s.

opportunamente i valori numerici dei parametri  $R_o$  e  $u_o$ ; la prima di esse ha una rapida crescita seguita, dopo un massimo ad un raggio intermedio, da un lieve decremento, mentre l'altra, pur descrivendo un andamento simile, presenta una maggiore ripidità sia nella fase di aumento sia in quella di decrescita. La figura 2.4 ne dà una rispettiva rappresentazione secondo due diverse coppie di valori  $R_o$  e  $u_o$ .



# Capitolo 3

## Proprietà intrinseche dei modelli di ICM

In questo capitolo applichiamo le basi descritte nel precedente allo scopo di verificare il comportamento dell'ICM, in particolare in tre casi specifici: nel primo assumiamo un potenziale totale di tipo sferico nel quale il gas è in rotazione, nel secondo un potenziale schiacciato con ICM non rotante, mentre l'ultimo coinvolge un potenziale schiacciato ma con gas rotante; queste tipologie saranno caratterizzate dall'avere un profilo isoterma oppure di temperatura che dipende dalla posizione. Le nostre valutazioni si basano su una massa totale di ammasso  $M_{200} = 10^{15} M_{\odot}$  a redshift  $z = 0.1$ : riprendendo la formula (1.6) nella quale sostituiamo, per (1.7),  $H \approx 73.6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , convertito tramite (1.1), troviamo  $\rho_{\text{crit}} \approx 1.02 \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ , allora per (1.12) si ha  $r_{200} \approx 1995 \text{ kpc}$ . Dalla (1.23) abbiamo una concentrazione di circa 3.62, che per sua definizione (1.14) dà un raggio di scala  $r_s \approx 551 \text{ kpc}$ ; da (1.17) si ricava inoltre  $T \approx 6.85 \cdot 10^7 \text{ K}$  per la temperatura dell'ICM che, inserita in (1.24), restituisce a sua volta una frazione gassosa pari a  $f_{\text{gas}} \approx 0.12$ . Imponiamo allora tale valore, molto simile a 0.13 utilizzato da *BEN13* e *A17* (in accordo con *Vikhlinin et al. 2006* e *Maughan et al. 2008*), in tutti i modelli che esamineremo. Per essi verrà inoltre fissata una metallicità del gas di  $Z = 0.3 Z_{\odot}$ , vista la caratteristica accennata nel paragrafo 1.2. Le posizioni di plot sono definite da una griglia uniforme nei logaritmi, di intervallo  $x_{\text{min}} = 1$  e  $x_{\text{max}} = 3.4$  sia radialmente sia verticalmente, con  $\mathcal{N} = 256$  punti per asse: questa scelta permette di descrivere lo spazio da 10 fino a circa 2500 kpc in modo da avere una migliore risoluzione nelle zone interne dell'ammasso.

### 3.1 Distribuzione di massa

Dato un profilo di densità radiale  $\rho(r)$ , la massa contenuta entro un certo raggio è

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (3.1)$$

Come già evidenziato, la materia oscura è di gran lunga quella che costituisce la maggior parte della massa, di conseguenza utilizziamo nuovamente il profilo di densità (1.13), tracciato in figura 3.1: portando fuori le costanti  $4\pi\rho_c r_s^3$ , ridotto l'integrando a  $r/(r+r_s)^2$ ,

se a numeratore aggiungiamo e sottraiamo il raggio di scala  $r_s$ , con un semplice calcolo si giunge alla soluzione

$$M(r) = 4\pi\rho_c r_s^3 \left[ \ln(1 + r/r_s) - \frac{r/r_s}{1 + r/r_s} \right]. \quad (3.2)$$

Ne forniamo una rappresentazione in fig. 3.2, dove a grandi distanze si nota una minore ripidità per via del crollo della densità, il quale determina un forte calo della massa in aggiunta.

Anche per una distribuzione di densità assisimmetrica possiamo calcolare la massa contenuta in una sfera di raggio  $r$ : ragionando in coordinate cilindriche, la quantità rappresentata dalla (3.1) si riscriverà

$$M(r(R, z)) = 4\pi \int_0^R \int_0^z \rho(R', z') R' dR' dz', \quad (3.3)$$

alla quale si può pervenire mediante la (A.5). È conveniente utilizzare questa formula per stimare il profilo di massa dei modelli schiacciati e, una volta definito  $M(r)$ , possiamo calcolarne il raggio viriale  $r_{500}$ : ad esempio, se in questo modo integriamo numericamente l'espressione (2.28), per i nostri modelli oblati ricaviamo  $r_{500} \approx 1213$  kpc, valore a cui corrisponde  $M_{500} \approx 1.121 \cdot 10^{48}$  g  $\approx 5.64 \cdot 10^{14}$   $M_\odot$ . Identiche procedure sarebbero richieste nel caso in cui si ricercasse la distribuzione di massa della componente gassosa: stavolta il profilo di densità a cui riferirsi sarebbe ovviamente  $\rho_{\text{gas}}$ .

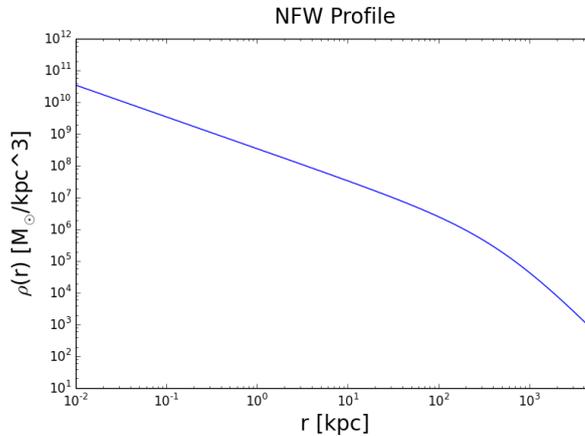


Figura 3.1: Profilo di densità radiale di tipo NFW in unità logaritmiche con valore di riferimento  $\rho_c = 4.31 \cdot 10^{-26}$  g/cm<sup>3</sup>. È evidente un cambio di pendenza della funzione a circa 500 kpc: esso definisce il raggio di scala  $r_s$  (in questo caso  $r_s = 551$  kpc).

## 3.2 Caso sferico rotante

In principio, guardiamo cosa succede se l'ICM ruota immerso in un semplice potenziale a forma sferica. Allo scopo, il moto è dettato dalle equazioni di Eulero (2.38) e (2.39), dove per il potenziale si considera dominante la componente oscura, il che equivale a

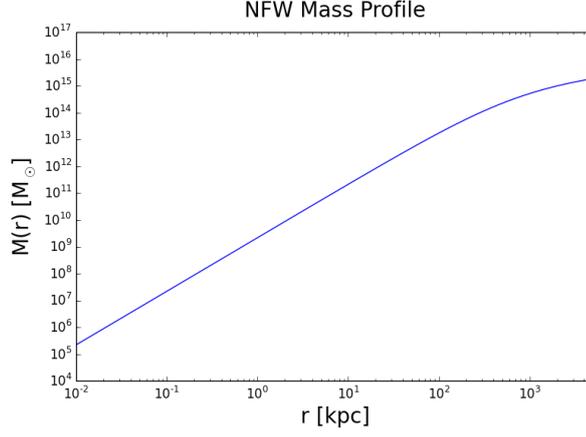


Figura 3.2: Profilo logaritmico di massa radiale, ovvero massa totale contenuta entro il raggio  $r$ , corrispondente ad una densità di tipo NFW. I valori di riferimento sono  $\rho_c = 4.31 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$  e  $r_s = 551 \text{ kpc}$ .

trascurare l'autogravità del gas: riferendoci alla densità di tipo NFW (1.13), nelle nostre ipotesi possiamo risalire al suo potenziale mediante la (2.24), di cui ricordando le varie normalizzazioni, ora per  $r_s$ , avremo

$$\Phi(r) = -4\pi G \rho_c r_s^2 \frac{\ln(1 + r/r_s)}{r/r_s}, \quad (3.4)$$

dove

$$\rho_c = \frac{200 \rho_{\text{crit}}}{3} \frac{c_{200}^3}{\ln(1 + c_{200}) - c_{200}/(1 + c_{200})}. \quad (3.5)$$

A redshift  $z = 0.1$  e concentrazione  $c_{200} = 3.62$  si ottiene  $\rho_c \approx 4.31 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$ .

Per quel che riguarda le grandezze termodinamiche della componente barionica, in generale la pressione è data dalla distribuzione politropica (2.44), inteso che il gas sia perfetto, mentre la densità è rappresentata dall'equazione (2.48), la quale è univocamente determinata una volta fissate le quantità  $\rho_0$ ,  $T_0$  e  $\tilde{\gamma}$ ; volendo tracciarne l'andamento in funzione della posizione, si utilizzerà l'apposita formula (2.50). È perciò necessario passare attraverso il potenziale efficace: nel primo caso, riprendiamo la definizione (2.40) nella quale sostituiamo la velocità angolare (2.54); scrivendo il tutto in coordinate cilindriche per mezzo della solita relazione  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ , otteniamo

$$\Phi_{\text{eff},1}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z) - u_o^2 \int_R \frac{dR'}{R'} \left[ \frac{\ln(1 + R'/R_o)}{R'/R_o} - \frac{1}{1 + R'/R_o} \right], \quad (3.6)$$

in cui con  $\Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z)$  indichiamo la riscrittura cilindrica del potenziale sferico dato in (3.4), la quale non è altro che

$$\Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z) = -4\pi G \rho_c r_s^2 \frac{\ln\left(1 + \sqrt{(R/r_s)^2 + (z/r_s)^2}\right)}{\sqrt{(R/r_s)^2 + (z/r_s)^2}}. \quad (3.7)$$

Scindendo l'integrale che compare a secondo membro di (3.6) nei suoi due termini, ed effettuando la sostituzione  $S' := R'/R_o$ , che implica  $dR' = R_o dS'$ , il primo può essere risolto per parti, poi per somma di addendi di minimo comune multiplo  $S'(1+S')$  e numeratori fissati arbitrariamente (come effettuato in par. 2.2), mentre per il secondo è sufficiente quest'ultimo metodo: a meno di costanti, le primitive risultanti sono  $\ln\left(\frac{S'}{1+S'}\right) - \frac{1}{S'} \ln(1+S')$  e  $\ln\left(\frac{S'}{1+S'}\right)$  rispettivamente, quindi alla fine si ricava

$$\Phi_{\text{eff},1}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z) - u_o^2 \left[ \frac{R_o}{R_o} \ln\left(1 + \frac{R_o}{R_o}\right) - \frac{R_o}{R} \ln\left(1 + \frac{R}{R_o}\right) \right], \quad (3.8)$$

dove siamo tornati alla variabile  $R$  per esprimere il risultato dell'integrale. Con  $R_o$  si intende il valore di raggio cilindrico corrispondente alla posizione di partenza  $\bar{x}_o$ , da non confondere con il caratteristico  $R_o$ ; tuttavia ignoreremo il termine costante che contiene questo raggio iniziale (come fatto per il potenziale), allora

$$\Phi_{\text{eff},1}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z) + u_o^2 \frac{R_o}{R} \ln\left(1 + \frac{R}{R_o}\right). \quad (3.9)$$

Agendo in maniera del tutto analoga con il secondo profilo di velocità angolare (2.55), partiamo da

$$\Phi_{\text{eff},2}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z) - u_o^2 \int_R \frac{1}{R_o^2} \frac{R'}{(1 + R/R_o)^4} dR', \quad (3.10)$$

dove per l'integrale conviene utilizzare di nuovo  $S' := R'/R_o$  e risolvere per parti: così facendo, a meno di costanti la primitiva è  $-\frac{S'}{3(1+S')^3} - \frac{1}{6(1+S')^2}$ , ovvero  $-\frac{1+3S'}{6(1+S')^3}$ , pertanto

$$\Phi_{\text{eff},2}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,sph}}(R, z) + u_o^2 \frac{1 + 3(R/R_o)}{6(1 + R/R_o)^3}. \quad (3.11)$$

Nelle figure 3.3 e 3.4 sono rappresentati i conseguenti profili delle quantità termodinamiche: in particolare, all'unità minima  $R_o = 10$  kpc sono associati, oltre a  $T_o = 6.85 \cdot 10^7$  K corrispondente a  $T_{\text{keV}} \approx 5.91$  keV, una caratteristica  $\rho_o = 2 \cdot 10^{-27}$  g/cm<sup>3</sup> e  $P_o = \frac{k_B \rho_o T_o}{\mu m_p} \approx 1.92 \cdot 10^{-11}$  dyne/cm<sup>2</sup>, dove è posto  $\mu = 0.59$  (questo valore si ottiene per un gas completamente ionizzato con metallicità  $Z = 0.3 Z_\odot$ ). La densità centrale in numero risulta  $n_o \approx 2 \cdot 10^{-3}$  cm<sup>-3</sup> (formula 2.43). Se il modello è isoterma ( $I$ ) abbiamo banalmente un valore  $T_o$  fisso per ogni posizione, e diretta proporzionalità tra pressione e densità  $P = \frac{P_o}{\rho_o} \rho$  attraverso l'equazione dei gas ideali (2.42), equivalente alla politropica con indice  $\tilde{\gamma} = 1$  dove, in queste condizioni, la densità è distribuita rispetto alle coordinate secondo la formula (2.51); se altrimenti non sussiste l'ipotesi isoterma ( $NI$ ), il profilo termico è dettato da (2.45) nel quale assumiamo  $T_o = 6.85 \cdot 10^7$  K come temperatura centrale, e la distribuzione spaziale della densità seguirà (2.50), che per la politropica (2.44) ci dà la pressione. Come indice politropico nei casi non isoterma facciamo uso di  $\tilde{\gamma} = 1.14$ , valore derivante da vincoli osservativi (*Markevitch et al. 1998, Vikhlinin et al. 2006*).

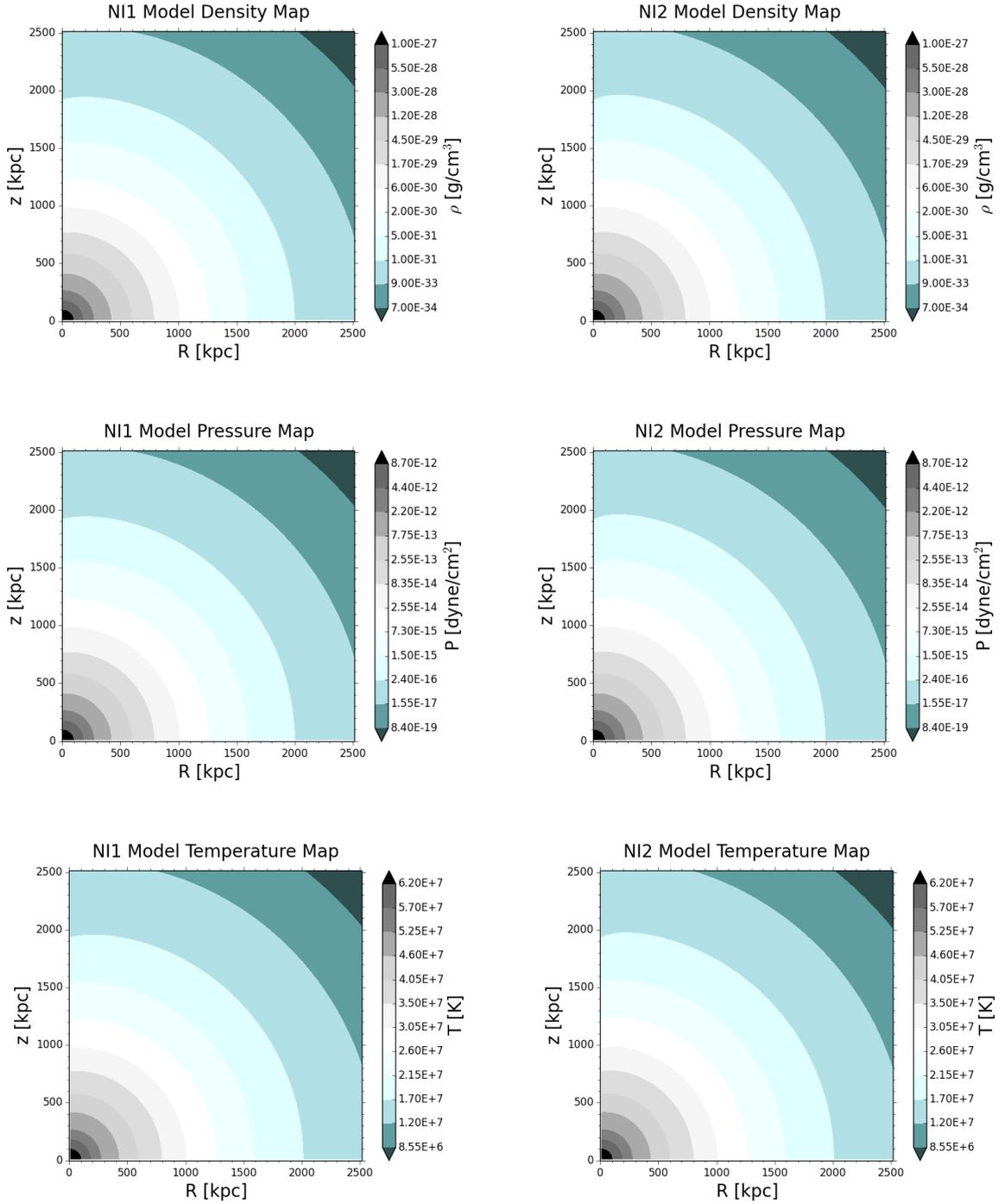


Figura 3.3: Distribuzione di densità, pressione e temperatura secondo le coordinate cilindriche  $R$  e  $z$  in modelli di ICM rotante in un potenziale di alone sferico, con profili di velocità 1 (2.52, a sinistra) e 2 (2.53, a destra) di parametri  $R_0$  e  $u_0$  come in figura 2.4, nel caso di gas non isoterma (NI) con temperatura centrale  $T_0 = 6.85 \cdot 10^7 \text{ K} \equiv 5.91 \text{ keV}$ . Si può notare che, a fissata legge di velocità, le tre quantità sono stratificate allo stesso modo (per ipotesi barotropica di 2.44 e 2.45), inoltre la rotazione del gas introduce un certo grado di schiacciamento oblatto.

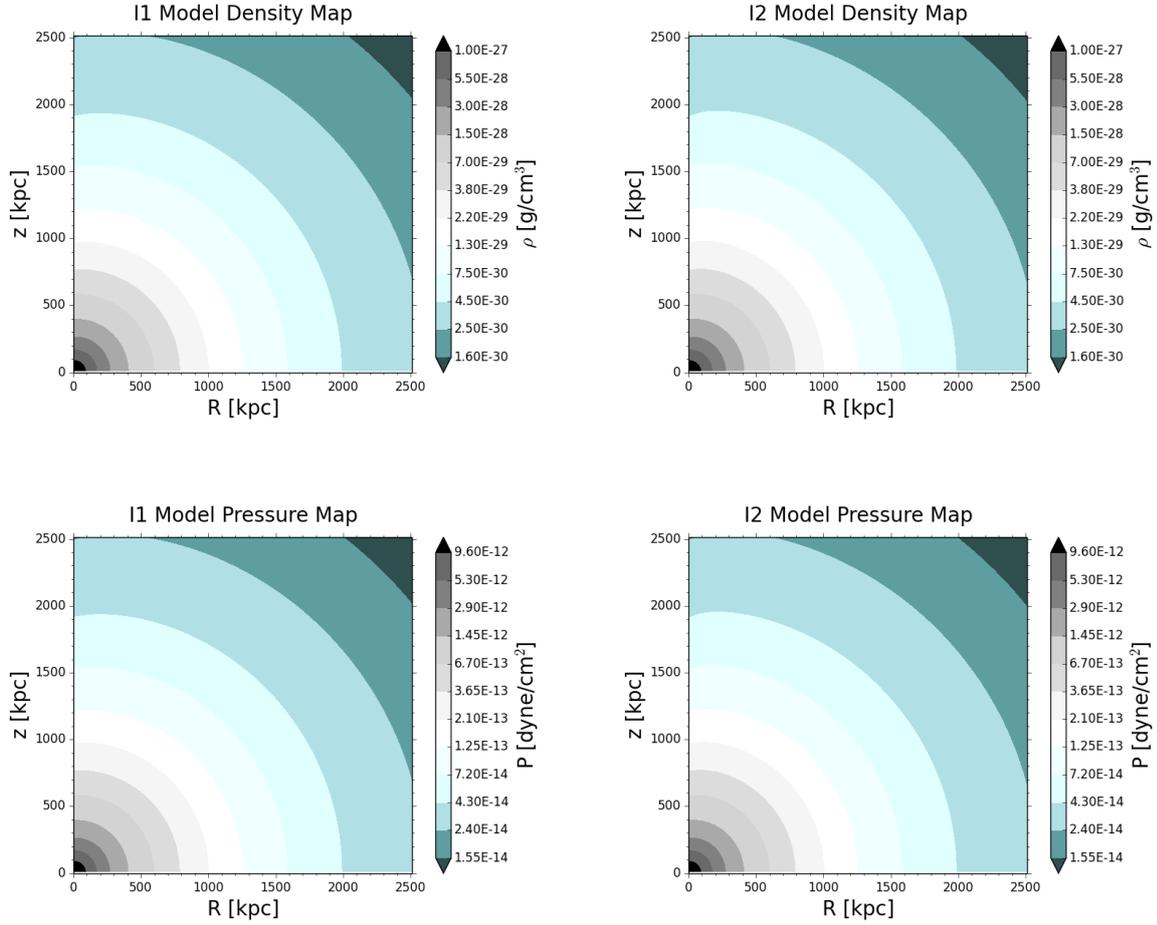


Figura 3.4: Distribuzione di densità e pressione secondo le coordinate cilindriche  $R$  e  $z$  in modelli di ICM rotante in un potenziale di alone sferico, con profili di velocità 1 (2.52, a sinistra) e 2 (2.53, a destra), di parametri  $R_o$  e  $u_o$  come in figura 2.4, nel caso che il gas sia isoterma ( $I$ ) con temperatura che per definizione vale  $T_0 = 6.85 \cdot 10^7 \text{ K} \equiv 5.91 \text{ keV}$  ovunque. Le distribuzioni sono isomorfe, ed oblate causa rotazione.

### 3.3 Caso schiacciato non rotante

Terminata la semplice analisi sferica, vogliamo complicare la trattazione assumendo che il gas intergalattico si trovi in un potenziale di alone schiacciato, una situazione più realistica della precedente (*Buote & Humphrey 2012ab, Roediger et al. 2012, Despali et al. 2017*). Procedendo in ordine di difficoltà, inizialmente ipotizziamo che l'ICM sia statico ( $0$ ), ovvero che gli elementi di fluido abbiano velocità  $\bar{u} = 0$ : ne segue che l'equazione di Eulero si riduce alla formula dell'equilibrio idrostatico (paragrafo 2.5), cioè gli elementi di gas subiscono una forza di pressione verso l'esterno ed una di gravità verso l'interno perfettamente bilanciate. Inoltre, il fatto che non ci sia rotazione corrisponde ad annullare qualsiasi profilo di velocità differenziale, pertanto le (2.38) e (2.39) diventano

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(R, z)}{\partial R} = - \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R}, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(R, z)}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z}, \quad (3.13)$$

e identicamente  $u_\varphi(R) = 0$  per ogni raggio cilindrico. In queste condizioni, dalla definizione (2.40) è poi immediato vedere che il potenziale effettivo coincide col potenziale gravitazionale. Quest'ultimo avrà forma analitica che, a stratificazione NFW, è dettata dalla (2.23), col caso oblatato ( $O$ ) e quello prolato ( $P$ ) ottenibili rispettivamente per  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = \eta$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{nfw,obl}}(R, z) = & -4\pi G \rho_c r_s^2 \left\{ \frac{\ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} + \frac{\eta}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} + \right. \right. \\ & + \frac{\ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})}{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} - \ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}) \left. \right] + \frac{\eta \tilde{z}^2}{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} \left[ \frac{1}{1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} - \frac{3}{2\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} - \frac{3 \ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} \right] \right\}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{nfw,pro}}(R, z) = & -4\pi G \rho_c r_s^2 \left\{ \frac{\ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} + \frac{2\epsilon}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} + \right. \right. \\ & + \frac{\ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})}{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} - \ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}) \left. \right] + \frac{\epsilon \tilde{R}^2}{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} \left[ \frac{1}{1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} - \frac{3}{2\sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2} - \frac{3 \ln(1 + \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2})}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} \right] \right\}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Queste formule, nelle quali il simbolo *tilda* ( $\tilde{\phantom{x}}$ ) specifica che le variabili sono normalizzate per il raggio di scala, sono già in versione cilindrica, ricavata ancora per  $r = \sqrt{\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2}$  ricordando che nel caso prolato conviene porre  $y^2 + z^2 =: R'^2$  e  $x =: z'$ . Per il resto, gli andamenti sono i medesimi ripresi nel paragrafo precedente: la distribuzione di densità è

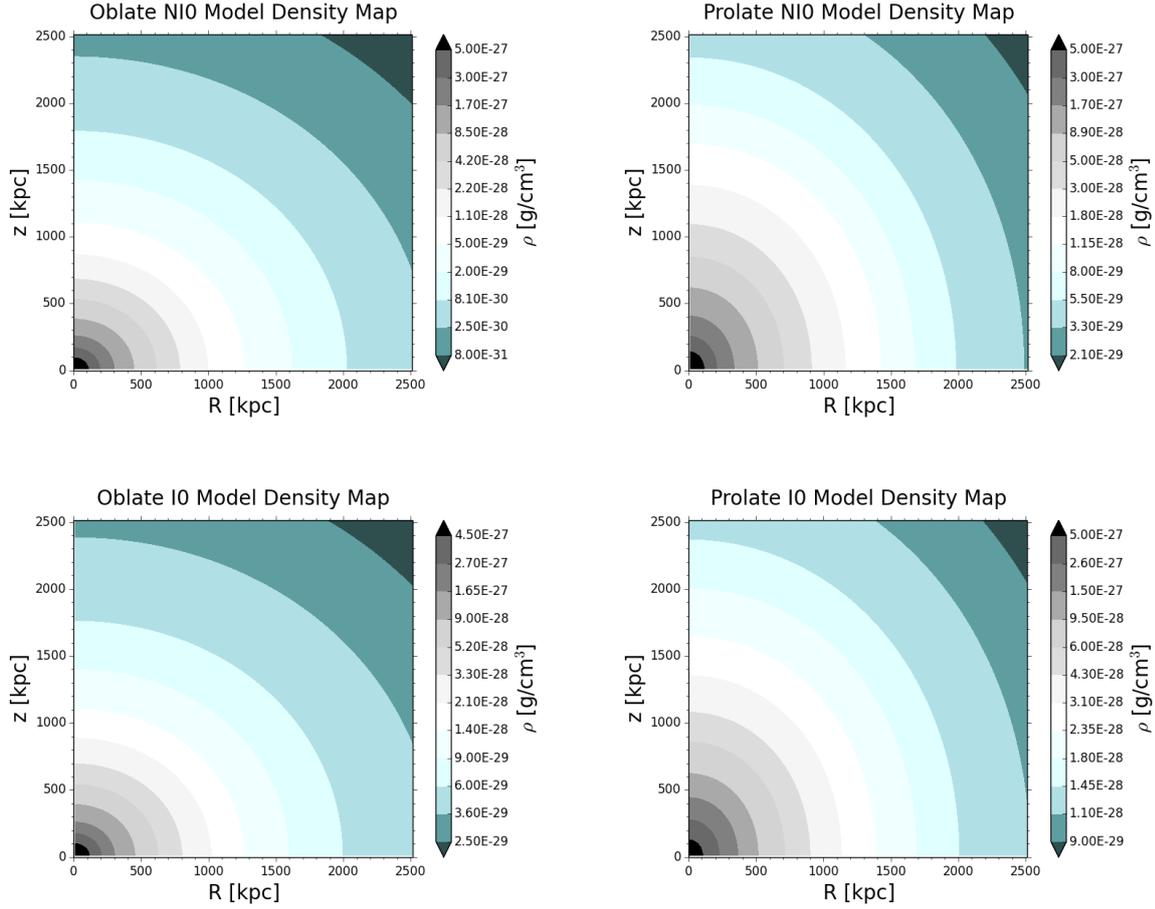


Figura 3.5: Distribuzione di densità secondo le coordinate cilindriche  $R$  e  $z$  in modelli di ICM non rotante (0) posto in un potenziale di alone oblatto ( $\epsilon = 0$  e  $\eta = 0.3$ , a sinistra) e prolato ( $\epsilon = \eta = 0.3$ , a destra) nel caso di gas non isoterma (sopra) ed isoterma (sotto), con temperatura  $T_0 = 6.85 \cdot 10^7$  K.

rappresentata da (2.50) o (2.51) a seconda che il modello sia generale, con temperatura data da (2.45), o isoterma, con  $T := T_0 \approx 6.85 \cdot 10^7$  K, i quali casi per la pressione corrispondono alla politropica (2.44) oppure a  $P = \frac{P_0}{\rho_0} \rho$  vista prima. Mostriamo in fig. 3.5 e 3.6 i grafici ottenuti, in cui è stata fissata  $n_0 = 0.01 \text{ cm}^{-3}$  cioè  $\rho_0 \approx 9.87 \cdot 10^{-27} \text{ g/cm}^3$ , quindi  $P_0 \approx 9.46 \cdot 10^{-11} \text{ dyne/cm}^2$ ; per i parametri di schiacciamento abbiamo scelto la rappresentativa coppia  $\epsilon = 0$  e  $\eta = 0.3$  nelle distribuzioni oblate e  $\epsilon = 0.3 = \eta$  in quelle prolato.

### 3.4 Caso schiacciato rotante

Quanto visto nelle due ultime sezioni ci aiuta ad analizzare la restante tipologia, ovvero il moto di rotazione dell'ICM all'interno di un potenziale di alone schiacciato: questa situazione è quella che desta maggior interesse, poiché è la più verosimile in assoluto. Tenendo a mente la definizione di potenziale effettivo, il termine rotatorio integrale sarà dato dagli ultimi addendi in (3.9) e (3.11), derivanti dalle due leggi di velocità e le conseguenti velocità angolari presentate in par. 2.8, mentre per il potenziale  $\Phi$  occorre riprendere

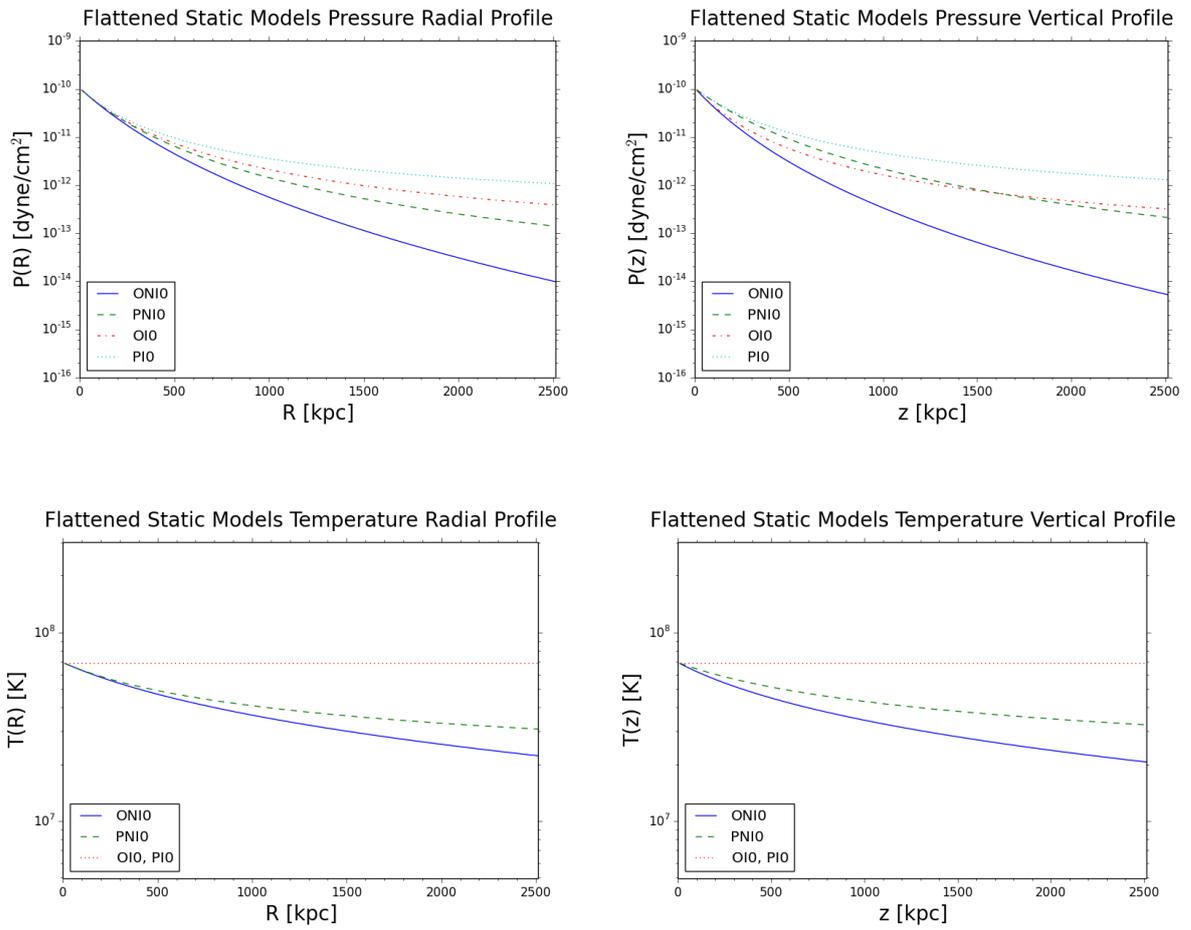


Figura 3.6: Profili radiali ( $z = 0$ , a sinistra) e verticali ( $R = 0$ , a destra) di pressione (in alto) e temperatura (in basso) per i modelli di ICM statico (0) in un potenziale di alone schiacciato ( $\epsilon = 0$  e  $\eta = 0.3$  negli oblati,  $\epsilon = \eta = 0.3$  nei prolati); la temperatura centrale è  $T_0 = 6.85 \cdot 10^7 \text{ K} \equiv 5.91 \text{ keV}$ , che ovviamente rimane costante nei casi isotermi.

le (3.14) e (3.15) a seconda di una forma oblata o prolata. Questa combinazione, per mezzo dell'usuale  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ , porta alle seguenti espressioni cilindriche:

$$\Phi_{\text{eff,obl},1}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,obl}}(R, z) + u_o^2 \frac{R_o}{R} \ln\left(1 + \frac{R}{R_o}\right), \quad (3.16)$$

$$\Phi_{\text{eff,pro},1}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,pro}}(R, z) + u_o^2 \frac{R_o}{R} \ln\left(1 + \frac{R}{R_o}\right), \quad (3.17)$$

$$\Phi_{\text{eff,obl},2}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,obl}}(R, z) + u_o^2 \frac{1 + 3(R/R_o)}{6(1 + R/R_o)^3}, \quad (3.18)$$

$$\Phi_{\text{eff,pro},2}(R, z) = \Phi_{\text{nfw,pro}}(R, z) + u_o^2 \frac{1 + 3(R/R_o)}{6(1 + R/R_o)^3}. \quad (3.19)$$

dove  $\Phi_{\text{nfw,obl}}(R, z)$  e  $\Phi_{\text{nfw,pro}}(R, z)$  rappresentano i potenziali gravitazionali relativi ad una distribuzione di densità NFW oblata e prolata rispettivamente, le cui formule esplicite sono proprio le precedenti (3.14) e (3.15). Ribadiamo che la distribuzione della densità segue (2.50) o (2.51) in caso di modello generico o isoterma (profilo termico secondo (2.45) o fisso alla centrale  $T_0 = 6.85 \cdot 10^7$  K), e che corrispondentemente la pressione segue la (2.44) o  $P = P_0 \rho / \rho_0$ .

Per le specifiche dei vari parametri ci siamo basati sulle indicazioni in *A17*, compatibili anche con *BEN13*: nell'ipotesi non isoterma la densità al centro degli oblati è stata presa di  $n_0 = 0.024 \text{ cm}^{-3}$  equivalente a  $\rho_0 \approx 2.37 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$ , per cui lì la pressione è  $P_0 \approx 2.27 \cdot 10^{-10} \text{ dyne/cm}^2$ , mentre per i prolati  $n_0 = 0.008 \text{ cm}^{-3}$ , cioè  $\rho_0 \approx 7.9 \cdot 10^{-27} \text{ g/cm}^3$  e  $P_0 \approx 7.57 \cdot 10^{-11} \text{ dyne/cm}^2$ ; in condizioni isoterme invece per gli oblati è  $n_0 = 0.01 \text{ cm}^{-3}$  ovvero  $\rho_0 \approx 9.87 \cdot 10^{-27} \text{ g/cm}^3$ , quindi pressione  $P_0 \approx 9.46 \cdot 10^{-11} \text{ dyne/cm}^2$ , mentre per i prolati  $n_0 = 0.0037 \text{ cm}^{-3}$ , corrispondente a  $\rho_0 \approx 3.65 \cdot 10^{-27} \text{ g/cm}^3$ , e  $P_0 \approx 3.5 \cdot 10^{-11} \text{ dyne/cm}^2$ . Le figure 3.7, 3.8 e 3.9 mostrano mappe e profili risultanti per le stesse coppie dei parametri di schiacciamento  $\epsilon$  e  $\eta$  fissate nel precedente paragrafo: è facile notare che, oltre al naturale schiacciamento lungo l'asse verticale e lungo l'asse radiale nei rispettivi casi oblato e prolato, già riscontrato nel cap. 2, la rotazione ha l'effetto di rendere la distribuzione del gas ancora più piatta, accentuando la flessione in direzione  $z$ . Quest'ultima caratteristica è evidente soprattutto nei prolati, in corrispondenza del picco dei profili di velocità adottati. Per una pronta consultazione abbiamo poi riunito nella tabella 3.1 i dati di base relativi a tutti i modelli esaminati in questo capitolo.

### 3.5 Le osservazioni *X-COP*

Facciamo qua riferimento ai risultati del progetto *X-COP* (*XMM Cluster Outskirts Project*, *Eckert et al. 2017*) che, combinando osservazioni in banda *X* effettuate da *XMM-Newton* con mappe del segnale S-Z ricostruite da *Planck*, ha studiato le proprietà dei profili radiali delle quantità termodinamiche fino al raggio del viriale in un campione di ammassi di galassie massicci e locali. *XMM-Newton*, ovvero *X-Ray Multi Mirror* battezzato in onore del grande fisico inglese Isaac Newton (1642-1727), è il più grande satellite dell'Agenzia Spaziale Europea (*ESA*) del programma *Horizon 2000* (in collaborazione con

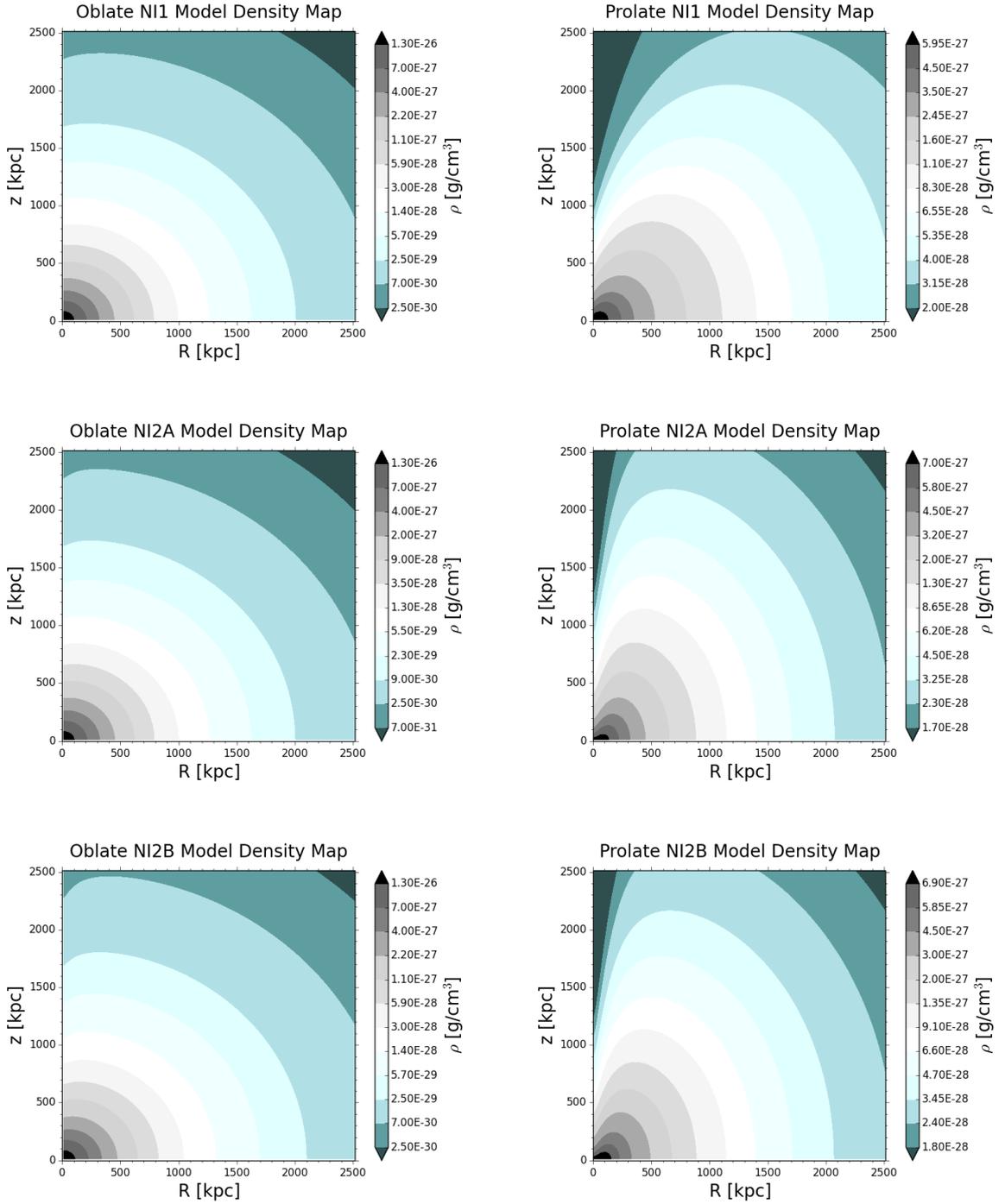


Figura 3.7: Distribuzione di densità secondo le coordinate cilindriche  $R$  e  $z$  in modelli di ICM non isoterma e rotante secondo i profili di velocità (2.52) e (2.53) in un potenziale oblatto (a sinistra) e prolato (a destra) di alone (si faccia riferimento alla tabella 3.1 per i parametri di schiacciamento e i valori di  $R_o$  e  $u_o$  nei singoli casi "1", "2A" e "2B").

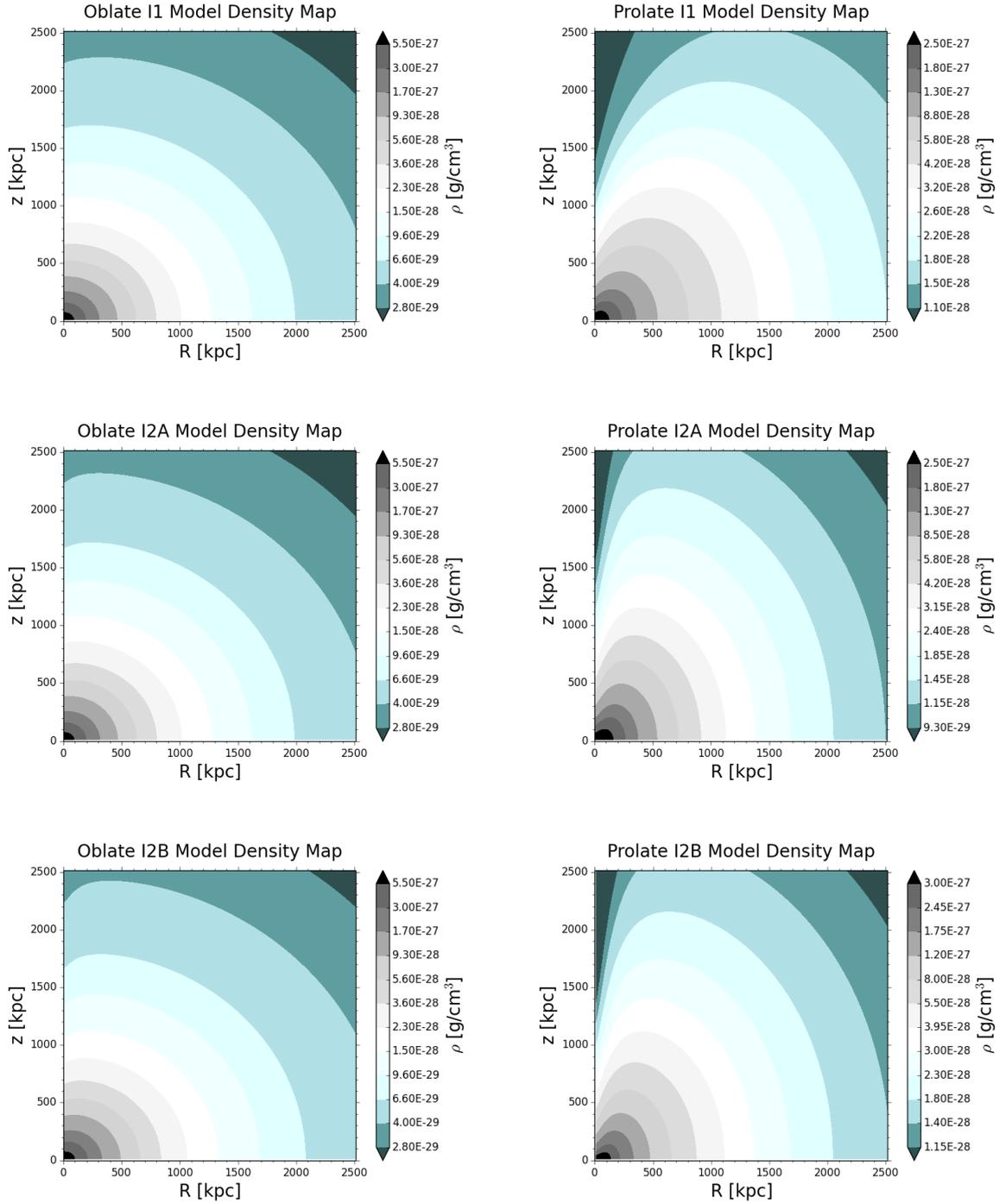


Figura 3.8: Distribuzione di densità secondo le coordinate cilindriche  $R$  e  $z$  in modelli di ICM isoterma ( $T_0 = 6.85 \cdot 10^7$  K) e rotante secondo i profili di velocità (2.52) e (2.53) in un potenziale oblato (a sinistra) e prolato (a destra) di alone (si faccia riferimento alla tabella 3.1 per i parametri di schiacciamento e i valori di  $R_0$  e  $u_0$  nei singoli casi "1", "2A" e "2B").

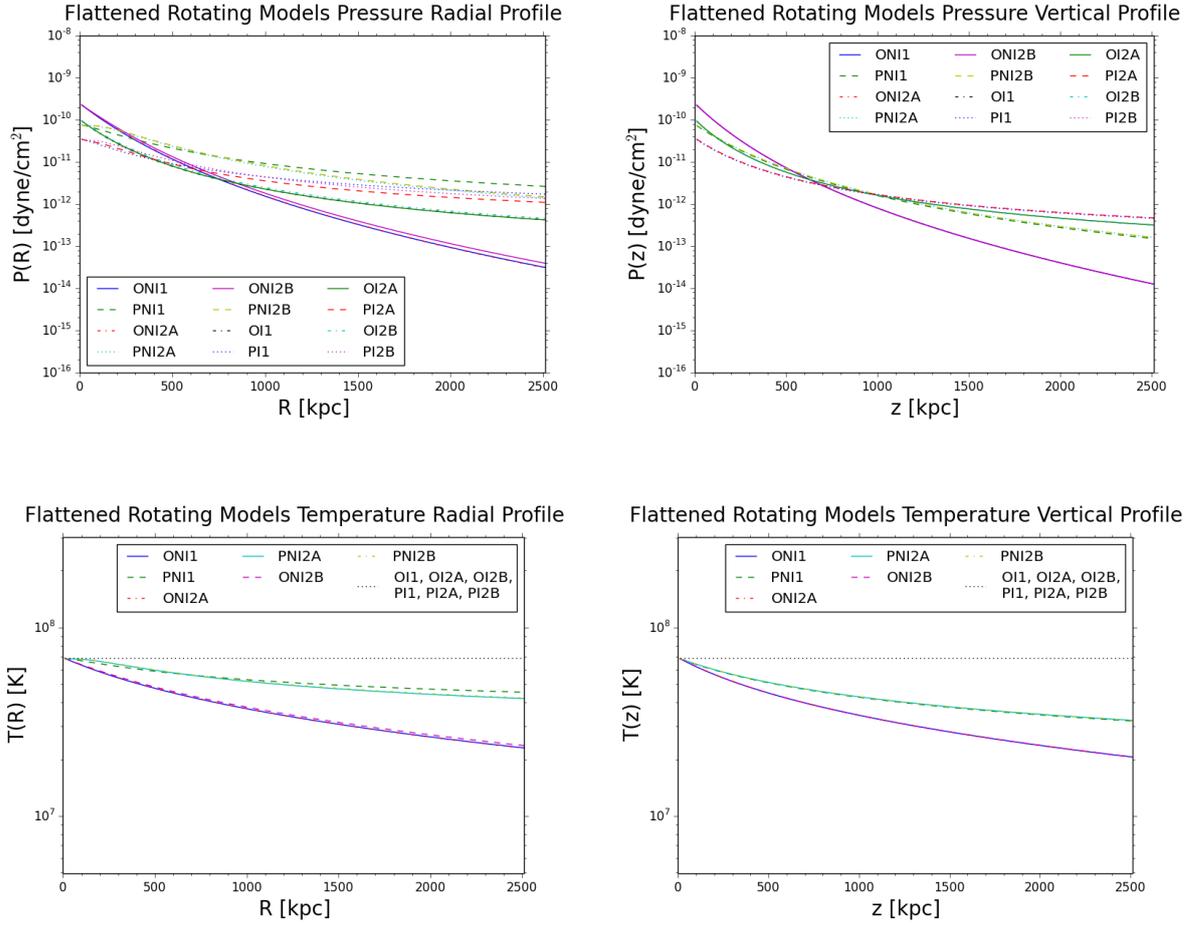


Figura 3.9: Profilo radiale ( $z = 0$ , a sinistra) e verticale ( $R = 0$ , a destra) di pressione (in alto) e temperatura (in basso) dei modelli di ICM rotante secondo i profili di velocità (2.52) e (2.53) in un potenziale di alone oblatto o prolato, con gas non isoterma o isoterma, con temperatura  $T_0 = 6.85 \cdot 10^7$  K (parametri generali in tab. 3.1).

Tabella 3.1: Lista dei modelli di ICM analizzati e relativi parametri che li caratterizzano: sono specificati il nome, la forma sferica ("Sph") oppure schiacciata ("Obl" per gli oblati e "Pro" per i prolatti, con espliciti  $\epsilon$  e  $\eta$ ) del potenziale di alone, l'indice politropico che permette di distinguere tra gli isotermi ( $\tilde{\gamma} = 1$ ) e i non isotermi ( $\tilde{\gamma} = 1.14$ ), la temperatura  $T_0$  e la densità  $\rho_0$  al centro; con  $u_\varphi$  indichiamo inoltre il profilo di velocità di rotazione del gas, che può essere dato dalla legge (2.52) o dalla (2.53), con posizione ( $R_o$ ) e valore ( $u_o$ ) di picco, oppure essere semplicemente 0 nei casi statici. La metallicità ed il peso molecolare medio del gas sono in ogni caso  $Z = 0.3 Z_\odot$  e  $\mu = 0.59$  rispettivamente.

Modello	$\Phi$	$\epsilon$	$\eta$	$\tilde{\gamma}$	$T_0$ [K]	$\rho_0$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$u_\varphi$	$R_o$ [kpc]	$u_o$ [km/s]
NI1	Sph	0	0	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$2.00 \cdot 10^{-27}$	(2.52)	170	336
NI2	Sph	0	0	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$2.00 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	705
I1	Sph	0	0	1	$6.85 \cdot 10^7$	$2.00 \cdot 10^{-27}$	(2.52)	170	336
I2	Sph	0	0	1	$6.85 \cdot 10^7$	$2.00 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	705
ONI0	Obl	0	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	0	—	—
PNI0	Pro	0.3	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	0	—	—
OI0	Obl	0	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	0	—	—
PI0	Pro	0.3	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	0	—	—
ONI1	Obl	0	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$2.37 \cdot 10^{-26}$	(2.52)	170	336
ONI2A	Obl	0	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$2.37 \cdot 10^{-26}$	(2.53)	120	705
ONI2B	Obl	0	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$2.37 \cdot 10^{-26}$	(2.53)	120	1000
PNI1	Pro	0.3	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$7.90 \cdot 10^{-27}$	(2.52)	170	1456
PNI2A	Pro	0.3	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$7.90 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	2800
PNI2B	Pro	0.3	0.3	1.14	$6.85 \cdot 10^7$	$7.90 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	2841
OI1	Obl	0	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	(2.52)	170	336
OI2A	Obl	0	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	705
OI2B	Obl	0	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$9.87 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	1000
PI1	Pro	0.3	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$3.65 \cdot 10^{-27}$	(2.52)	170	1456
PI2A	Pro	0.3	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$3.65 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	2800
PI2B	Pro	0.3	0.3	1	$6.85 \cdot 10^7$	$3.65 \cdot 10^{-27}$	(2.53)	120	2841

la NASA) lanciato il 10 dicembre 1999 che ha rappresentato un notevole balzo evolutivo nelle rilevazioni  $X$ : è dotato di tre telescopi (collegati a *CCD* e spettrometri) ognuno costituito da 58 specchi concentrici di tipo *Wolter*, con un'area effettiva totale senza precedenti che si attesta sui  $3400 \text{ cm}^2$  in grado di osservare con risoluzione spaziale e temporale molto buona una finestra da 0.1 a 15 keV circa, anche per intervalli di tempo relativamente lunghi grazie alla sua particolare orbita ellittica intorno al nostro pianeta; al suo interno incorpora pure un rivelatore ottico, il primo che sia mai stato montato su una sonda di questo genere. *Planck*, facente parte a sua volta del programma *Horizon 2000* ed intitolato al fisico Max Planck (1858-1947), è stato lanciato il 14 maggio 2009 in modo da raggiungere il *punto lagrangiano*  $L_2$  dell'orbita terrestre (una posizione di equilibrio instabile nel campo gravitazionale combinato di Sole, Terra e Luna): aveva l'obiettivo di fornire una mappa dettagliata della radiazione cosmica di fondo evidenziandone le *anisotropie*, ovvero quelle disomogeneità che come accennato nel paragrafo 1.3 sono la fonte principale di informazioni sull'origine e l'evoluzione delle strutture nell'Universo<sup>1</sup>; il suo complesso di antenne e radiometri, opportunamente raffreddati per captare in maniera corretta il segnale, sono stati in grado di coprire un vastissimo spettro di frequenze, approssimativamente da 30 a 857 GHz, ottenendo un'immagine a tutto cielo del fondo cosmico con un'accuratezza e una risoluzione angolare (di  $\approx 7$  arcmin) migliore di quelle raggiunte dai satelliti precedenti, come *COBE* (*Smoot 1992, Bennett 1996*) e *WMAP* (*Bennett 2003, Hinshaw 2003, Hinshaw 2009*).

L'articolo di *Ghirardini et al. (2019)*, da qui in poi *Ghi+19*, è il primo di una serie dedicata alla presentazione dei risultati ottenuti dallo studio dell'intero campione del progetto *X-COP*, costituito da dodici massicci ammassi a  $z < 0.1$  di cui quattro, individuati dal valore di entropia centrale ripreso da *Cavagnolo et al. (2009)*, sono cool-core: la selezione è avvenuta tra gli oggetti appartenenti a *PSZ1*, il primo catalogo S-Z di *Planck* (*Planck Collaboration XXIX, 2014*), secondo rigorosi criteri di intensità del segnale e di risoluzione<sup>2</sup>. La più importante novità è data dal fatto che le analisi sono compiute in un intervallo radiale da  $0.01R_{500}$  a  $2R_{500}$ , ovvero coprente ben due ordini di grandezza fino a spingersi oltre il raggio viriale: ciò si è reso possibile attraverso la combinazione dei dati  $X$ , elaborati con opportune tecniche di caratterizzazione del *background* a livelli di qualche punto percentuale, e di dati relativi all'effetto Sunyaev-Zel'dovich i quali permettono, fino a distanze tipiche di  $3R_{500}$ , una ricostruzione del segnale dal processo inverse-Compton di CMB dovuto agli elettroni del plasma (si veda la descrizione in 1.7.4). L'attenzione è principalmente rivolta al comportamento dei profili radiali delle singole quantità termodinamiche, in modo tale da provare a tracciarne forme universali: sono utilizzate due differenti tecniche di fit dei dati osservativi, una "a tratti", che consiste nel descrivere ogni predefinito sottointervallo in  $R$  con un'opportuna legge di potenza avente una dispersione intrinseca di tipo logaritmico, mentre l'altra "globale", per la quale l'andamento complessivo è approssimato da un'unica apposita funzione  $f$ , con permessa dispersione intrinseca variabile col raggio<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>Il CMB non è rigorosamente isotropo: presenta piccolissime fluttuazioni (dell'ordine di  $10^{-5}$ ) di temperatura, che corrispondono a primordiali fluttuazioni di densità. Si distinguono anisotropie *primarie*, quelle all'origine del segnale, e *secondarie*, che lo perturbano durante il suo tragitto (e.g. effetto S-Z).

<sup>2</sup>Oltre al basso redshift, sono richiesti un alto rapporto segnale/rumore S-Z ( $S/N > 12$ ), un'estensione angolare comodamente risolvibile dai rilevatori ( $\theta_{500} := \theta(R_{500}) > 10$  arcmin), e una bassa densità di colonna dell'idrogeno neutro galattico lungo la linea di vista ( $N_{\text{H}} < 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ ), per limitare assorbimenti nelle finestre "soft" (intorno a 1 keV) utili alla riduzione dei dati e all'estrazione degli spettri.

<sup>3</sup>Posti  $x := R/R_{500}$  e  $q := Q/Q_{500}$ , dove  $Q$  è una certa grandezza termodinamica, il primo fit ha forma  $q(x) = Ax^B e^{\pm\sigma_{\text{int}}}$  a dato sottointervallo radiale, mentre il secondo  $q(x) = f(x) e^{\pm\sigma_{\text{int}}(x)}$  con *scatter* intrinseco  $\sigma_{\text{int}}(x) = \sigma_1 \log^2(x/x_0) + \sigma_0$  ( $x_0$  e  $\sigma_0$  posizione di minimo del logaritmo quadrato).

### 3.6 Profili termodinamici

Da ciò che si è ricavato in par. 3.4 raccogliamo in particolare il comportamento puramente radiale e verticale delle quantità termodinamiche per i nostri modelli *ONI1*, *ONI2A* e *ONI2B*. Ci siamo focalizzati sulle proprietà di ammassi massicci non isotermi. Per questo, ci siamo confrontati con i risultati medi di *Ghi+19*, che sono ottenuti per un campione che comprende sia ammassi *CC* (cool-core) sia *NCC* (non-cool-core). Per una diretta comparazione, si sono impostate le stesse unità assiali che compaiono nelle figure 3, 4 e 5 di quel lavoro. Più precisamente, in ascissa riportiamo il raggio cilindrico oppure l'altezza cilindrica normalizzati a  $r_{500} = 1213$  kpc (par. 3.1), mentre per quel che riguarda l'ordinata, nel primo caso si trova la densità numerica scalata per  $E(z)^2 \approx 1.11$  (a redshift  $z = 0.1$ , formula 1.5), invece nel secondo e nel terzo la pressione e la temperatura espresse rispetto alle integrate quantità di natura universale  $P_{500}$  e  $T_{500}$  rispettivamente, definite a partire da  $M_{500}$  secondo queste equazioni (vedi anche *Ghi+19*):

$$P_{500} = 3.426 \cdot 10^{-3} \left( h_0 \frac{M_{500}}{[10^{15} M_{\odot}]} \right)^{2/3} \frac{f_b}{0.16} \frac{\mu}{0.6} \frac{\mu_e}{1.14} E(z)^{8/3} \text{ keV cm}^{-3}, \quad (3.20)$$

$$T_{500} = 8.85 \left( h_0 \frac{M_{500}}{[10^{15} M_{\odot}]} \right)^{2/3} \frac{\mu}{0.6} E(z)^{2/3} \text{ keV}, \quad (3.21)$$

dove  $f_b$  è la frazione cosmologica  $\Omega_B/\Omega_M$  (fissata a 0.16 grazie a *Planck Collaboration et al. 2016c*) e  $\mu_e$  è la massa molecolare media per elettrone<sup>4</sup>, che abbiamo preso pari a 1.2, assumendo ancora che quella per particella sia 0.59. Si noti che la (3.20) tiene conto del fatto che dimensionalmente la pressione corrisponde ad una densità di energia<sup>5</sup>, e che nella (3.21) la temperatura ha unità energetica (relazione 1.18). Quanto alla massa viriale, è stato ripreso il risultato ottenuto integrando numericamente il profilo di densità NFW oblatto,  $M_{500} := M(r_{500}) = 5.64 \cdot 10^{14} M_{\odot}$  (vedi paragrafo 3.1). Anche qui, al fine di permettere un confronto diretto tra i modelli e i risultati dell'analisi del campione *X-COP*, in ogni plot abbiamo riprodotto la forma funzionale che indica il fit di tipo globale, cioè in grado di descrivere bene l'andamento di quella specifica grandezza termodinamica in tutto il dominio  $R$ . Dato  $x := R/R_{500}$ , le espressioni per la densità, la pressione e la temperatura sono rispettivamente i seguenti funzionali<sup>6</sup>

$$f_n(x) := n_e(x) = n_0 \frac{(x/r_c)^{-\alpha/2}}{(1+x^2/r_c^2)^{\frac{3\beta-\alpha/2}{2}}} \frac{1}{(1+x^\gamma/r_s^\gamma)^{\frac{\epsilon}{2\gamma}}}, \quad (3.22)$$

$$f_P(x) := \frac{P(x)}{P_{500}} = \frac{P_0}{(c_{500} x)^\gamma [1 + (c_{500} x)^\alpha]^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}}, \quad (3.23)$$

<sup>4</sup>Analogamente a  $\mu$ , questa grandezza è tale che  $\rho_g = \mu_e m_p n_e$ .

<sup>5</sup>La pressione è per definizione una forza per unità di superficie, ovvero  $P := [\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2}] = [\frac{\text{dyne}\cdot\text{cm}}{\text{cm}^3}] = [\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}]$ ; rammentiamo inoltre che  $1 \text{ keV} \approx 1.602 \cdot 10^{-9} \text{ erg}$ .

<sup>6</sup>Queste formule sono altrettanto valide assumendo  $x := z/z_{500}$  (vedi grafici successivi), poiché la trattazione di *Ghi+19* è generale e non ristretta ad una certa geometria di ammasso.

Tabella 3.2: Parametri di *best-fit* per le funzioni globali di densità ( $f_n$ ), pressione ( $f_P$ ), temperatura ( $f_T$ ) ed entropia ( $f_K$ ) del campione completo *X-COP* secondo *Ghi+19*, a meno di scatter permessi; i valori sprovvisti di incertezza si intendono fissati.

	$\ln(n_0)$	$\ln(r_c)$	$\ln(r_s)$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\epsilon$
$f_n$	$-4.4 \pm 0.5$	$-3.0 \pm 0.5$	$-0.29 \pm 0.15$	$0.89 \pm 0.59$	$0.43 \pm 0.02$	3	$2.86 \pm 0.38$

	$P_0$	$c_{500}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$f_P$	$5.68 \pm 1.77$	$1.49 \pm 0.30$	1.33	$4.40 \pm 0.41$	$0.43 \pm 0.10$

	$T_0$	$T_{\min}/T_0$	$\ln(r_{\text{cool}})$	$r_t$	$a_{\text{cool}}$	$c/2$
$f_T$	$1.21 \pm 0.23$	$0.50 \pm 0.24$	$-2.8 \pm 1.1$	$0.34 \pm 0.10$	$1.03 \pm 0.78$	$0.27 \pm 0.04$

	$\ln(K_0)$	$K_1$	$\alpha$
$f_K$	$-3.98 \pm 1.22$	$1.21 \pm 0.03$	$0.83 \pm 0.04$

$$f_T(x) := \frac{T(x)}{T_{500}} = T_0 \frac{T_{\min}/T_0 + (x/r_{\text{cool}})^{a_{\text{cool}}}}{1 + (x/r_{\text{cool}})^{a_{\text{cool}}}} \frac{1}{[1 + (x/r_t)^2]^{c/2}}. \quad (3.24)$$

La prima riprende la rappresentazione di *Vikhlinin et al. (2006)* e dipende da sette parametri in tutto ( $n_0, r_c, r_s, \alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ ), la seconda è un profilo NFW generalizzato introdotto da *Nagai et al. (2007)* e dipendente da cinque parametri ( $P_0, c_{500}, \alpha, \beta, \gamma$ ) mentre l'ultima, ancora di *Vikhlinin et al. (2006)*, è costituita da sei parametri ( $T_0, T_{\min}, r_{\text{cool}}, a_{\text{cool}}, r_t, c$ ). Il valore assunto da ognuna di queste quantità deriva dal miglior fit complessivo ricavato da *Ghi+19* sull'intero campione, e quindi è applicabile indistintamente per ogni tipologia di ammasso: esponiamo nella tabella 3.2 tutti i dati utili.

### 3.7 Entropia

Vogliamo arricchire la nostra discussione includendo un'analisi sull'entropia ( $\mathcal{S}$ ), come effettuato in *Ghi+19*: questa particolare grandezza termodinamica merita un discorso a parte. Come ben noto la sua unità ordinaria è erg/K, rapporto tra il calore scambiato da un sistema fisico e la temperatura alla quale si trova. Si usa dire, abbastanza rozzamente, che è un indice del grado di "disordine": come insegna l'esperienza comune, in natura vige il fatto che trasformazioni spontanee (irreversibili) in un sistema isolato portano necessariamente ad una situazione di equilibrio che si può vedere meno ordinata rispetto

a quella di partenza, e in cui l'energia disponibile è minima, ovvero  $\mathcal{S}$  è massima<sup>7</sup>. La visione "microscopica" della meccanica statistica collega l'entropia a tutti i possibili stati particellari in cui il sistema si può disporre a data configurazione macroscopica. Senza addentrarci in altre considerazioni prettamente termodinamico-statistiche, di solito in contesto astrofisico quella che viene chiamata entropia è in realtà una rielaborazione della costante adiabatica  $K := P/\rho^\gamma$  che caratterizza ambienti appunto adiabatici (privi di scambi di calore con l'esterno): richiamando la legge dei gas perfetti (2.42) e ponendo  $\gamma = 5/3$  (gas monoatomico) possiamo scrivere

$$K = \frac{T_{\text{keV}}}{n_e^{2/3}}, \quad (3.25)$$

ottenuta anche grazie al legame tra densità numerica e densità di massa, oltreché alla conversione (1.18). La  $K$  così espressa, avente dimensione  $\text{keV cm}^2$ , si rivela essere tra le grandezze più rappresentative degli ammassi o dei gruppi, infatti può essere considerata un eccellente tracciante di processi di tipo non gravitazionale che accompagnano la loro storia evolutiva. Ciò dipende dal fatto che, rispetto ad altre quantità come  $T_{\text{keV}}$ , questa "entropia" è particolarmente sensibile ai mutamenti di contenuto energetico dell'ICM; inoltre, in condizioni ideali prive di irraggiamento, simulazioni numeriche producono ammassi *auto-similari* con legge  $K(r) \propto r^{1.1}$  (e.g. *Tozzi & Norman 2001, Voit et al. 2005, Lau et al. 2015* e loro riferimenti). Il valore rispetto al quale l'entropia dovrebbe scalare nel modo appena esposto è

$$K_{500} = 1667 \left( h_0 \frac{M_{500}}{[10^{15} M_\odot]} \right)^{2/3} \left( \frac{f_b}{0.16} \right)^{-2/3} \frac{\mu}{0.6} \left( \frac{\mu_e}{1.14} \right)^{2/3} E(z)^{-2/3} \text{ keV cm}^2, \quad (3.26)$$

mentre la funzione con cui globalmente viene praticato il fit consta della semplice legge di potenza (*Cavagnolo et al. 2009*)

$$f_K(x) := \frac{K(x)}{K_{500}} = K_1 x^\alpha + K_0, \quad (3.27)$$

dove di nuovo  $x := R/R_{500}$ , invece  $K_0$  e  $K_1$  sono due opportune costanti (miglior fit in tab. 3.2).

I risultati graficati in 3.10 e 3.11 mostrano distribuzioni molto ravvicinate per i tre modelli, che tuttavia sembrano essere in sostanziale accordo con le analoghe osservative della popolazione *X-COP* e con le funzioni di fit proposte: il rapporto tra i valori in ordinata che abbiamo ottenuto e quelli associati al fit si attestano dell'ordine di 1, soprattutto per la temperatura; le deviazioni più significative si registrano per la densità e la pressione a distanze intermedie o grandi dal centro, ma in particolare per l'entropia a distanze elevate (specialmente nel profilo verticale). In definitiva possiamo comunque concludere che le ipotesi su cui abbiamo basato le nostre speculazioni, concernenti la forma schiacciata del potenziale, l'andamento politropico non isoterma dell'ICM e le leggi con cui ruota lo stesso gas, sono compatibili con quello che effettivamente vediamo negli ammassi di galassie reali.

---

<sup>7</sup>Il concetto è espresso dal *Secondo Principio della Termodinamica*, per il quale l'entropia non può mai spontaneamente diminuire: si pensi ai classici esempi del passaggio di calore da un corpo caldo ad uno freddo, o all'espansione libera dei gas in un dato volume vuoto.

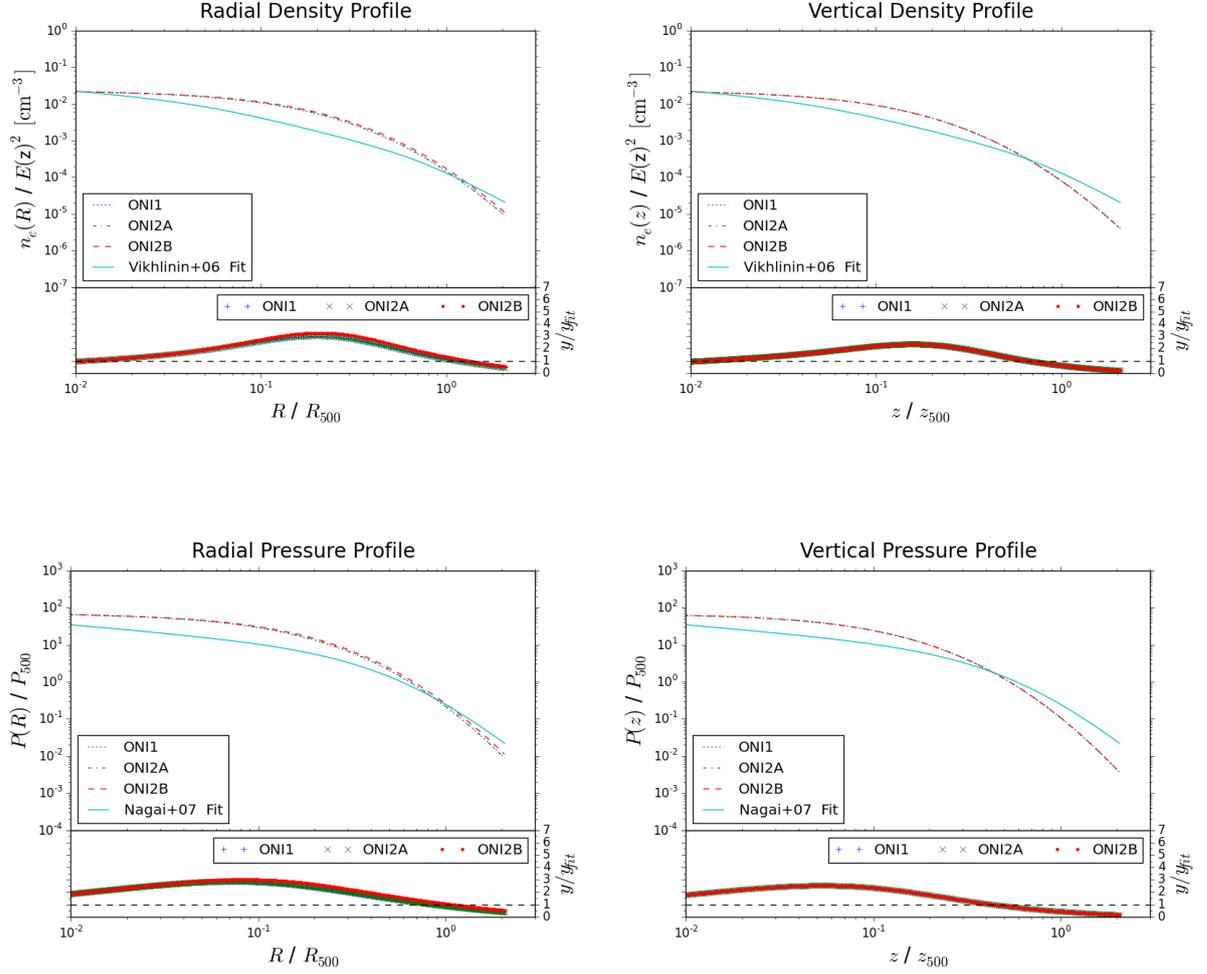


Figura 3.10: Profilo radiale ( $z = 0$ , a sinistra) e verticale ( $R = 0$ , a destra) di densità (in alto) e pressione (in basso) in modelli di ICM oblati non isoterma e rotanti con leggi di velocità "1", "2A" e "2B" (parametri specifici in tabella 3.1), posti a confronto con le relative funzioni di fit globale del campione *X-COP*. I grafici sono logaritmici e hanno le stesse rispettive unità di *Ghirardini et al. (2019)*: coordinata cilindrica normalizzata per il raggio virale  $r_{500}$ , densità numerica e pressione normalizzate rispettivamente per il quadrato di  $E(z = 0.1)$  e per la quantità universale  $P_{500}$  (definita in termini di  $M_{500}$ , vedi testo). Nella parte inferiore di ogni plot si riporta il rapporto tra i profili computati ( $y$ ) e quello di fit ( $y_{fit}$ ), evidenziando con una linea tratteggiata il valore ideale 1 che indicherebbe la loro perfetta corrispondenza ( $y = y_{fit}$ ).

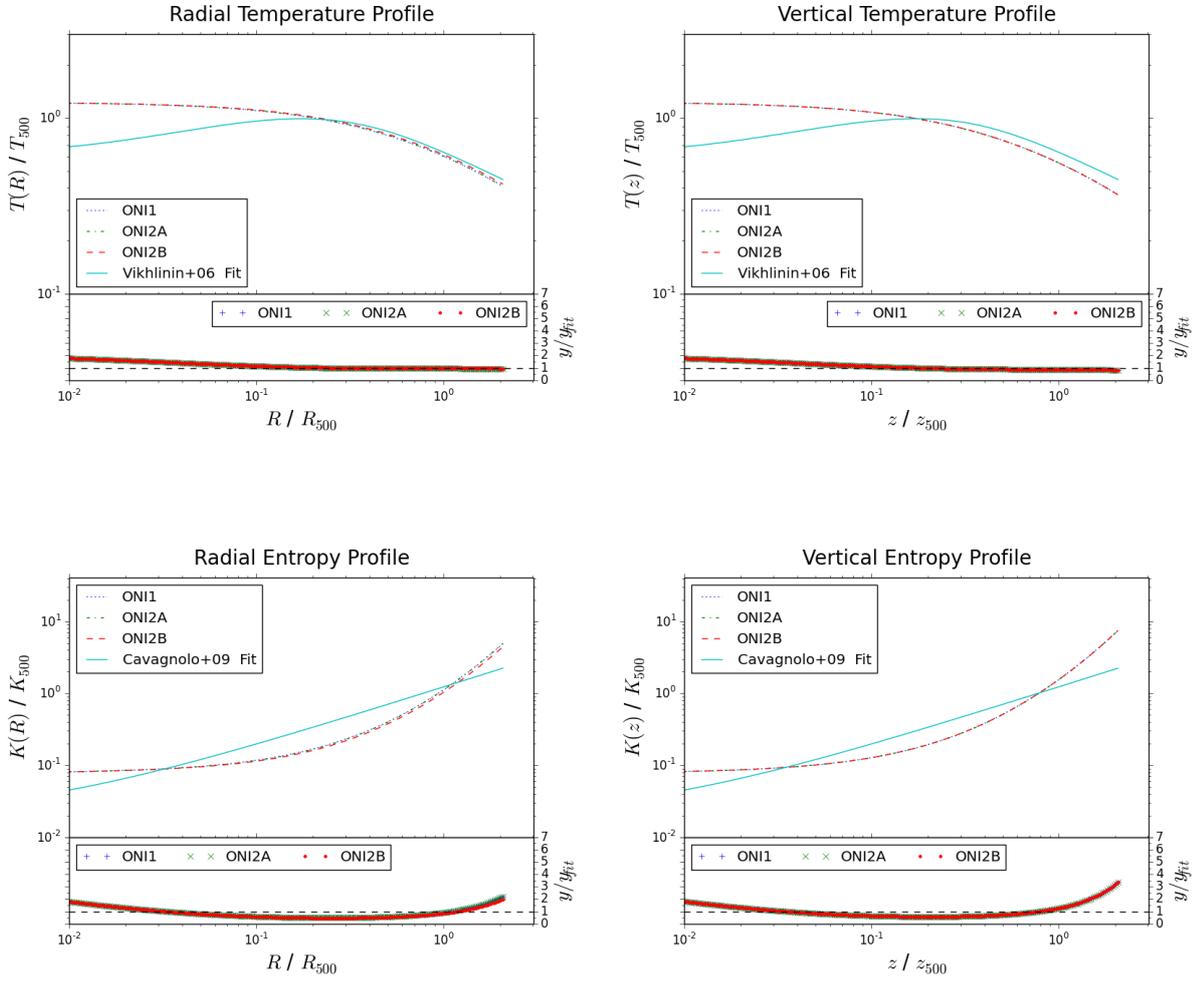


Figura 3.11: Profilo radiale ( $z = 0$ , a sinistra) e verticale ( $R = 0$ , a destra) di temperatura (in alto) ed entropia (in basso) in modelli di ICM oblati non isoterma e rotanti con leggi di velocità "1", "2A" e "2B" (parametri specifici in tabella 3.1), posti a confronto con le relative funzioni di fit globale del campione *X-COP*. Analogamente a prima, come in *Ghi+19*, i grafici sono logaritmici e hanno in ascissa la posizione scalata per  $r_{500}$ , mentre in ordinata la temperatura e l'entropia sono in unità dei valori universali  $T_{500}$  e  $K_{500}$  (definiti in termini di  $M_{500}$ , vedi testo per le espressioni esplicite); inferiormente riportiamo inoltre il rapporto tra i profili computati ( $y$ ) e quello di fit ( $y_{\text{fit}}$ ), evidenziando con una linea tratteggiata il valore ideale 1 che indicherebbe la loro perfetta corrispondenza ( $y = y_{\text{fit}}$ ).

# Capitolo 4

## Proprietà osservabili dei modelli di ICM

### 4.1 Brillanza superficiale

Questo capitolo è dedicato all'ottenimento delle più immediate grandezze fisiche che potremmo effettivamente osservare in associazione ai modelli che in precedenza abbiamo costruito: esse non a caso sono note in generale come *osservabili* e sono di fondamentale importanza, poiché forniscono l'unico modo per creare un collegamento diretto tra gli elementi di teoria e i reali riscontri dati dalle osservazioni. Di nuovo, noi ci concentreremo sui modelli di tipo oblato non isotermi, il che ci consentirà di fare qualche confronto con altre conclusioni di letteratura.

Una delle cruciali grandezze osservative che ricerchiamo è la *brillanza superficiale*: abbiamo già più volte fatto presente che l'ICM emette principalmente tramite bremsstrahlung (appendice C) per via della sua alta temperatura, pertanto osservando un ammasso in banda  $X$  ci aspettiamo di vedere un'ingente luminosità in proiezione sul "piano" del cielo; vale a dire, una volta identificato il centro dell'ammasso, ad ogni coppia di generici  $R$  e  $z$  proiettati corrisponderà un determinato valore di energia fluente per unità di tempo e di superficie, che è possibile ricavare integrando l'emissività lungo la linea di vista secondo (appendice B, formula B.8)

$$\Sigma(R, z) = 2 \int_R^{+\infty} \frac{\dot{\mathcal{E}}(R', z) R' dR'}{\sqrt{R'^2 - R^2}}, \quad (4.1)$$

dove  $\dot{\mathcal{E}}$  è quella data da (1.26), nella quale la funzione di cooling è in forma (1.27) con i parametri là sotto specificati. La relazione sottintende che l'ammasso è visto di lato ("edge-on"), ignorando autoassorbimento ed altri simili fenomeni di degradazione della radiazione. Quanto all'integrale, sebbene sia unidimensionale, non ha una primitiva esprimibile con funzioni elementari, quindi nei codici *Python* di cui ci siamo serviti per calcolarlo abbiamo fatto uso di un metodo numerico, il cosiddetto *metodo del trapezoide*<sup>1</sup>. All'atto pratico è possibile assumere il raggio viriale  $r_{200} = 1995 \text{ kpc}$  come estremo superiore, oltre il

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che qui, a fissato  $z$ , campionata la funzione integranda  $f$  in punti discreti  $R'_i$  del suo dominio radiale di definizione, equidistanti tra loro ( $R'_i - R'_{i-1} =: \Delta R'$ ), la procedura consiste in una stima dell'area sottesa alla funzione mediante la semplice somma delle aree dei singoli trapezi rettangoli aventi come altezza lo step  $\Delta R'$  e come basi i valori assunti dall'integrando  $f(R'_i, z)$ .

quale tra l'altro i contributi alla brillantezza diventano pressoché trascurabili a causa del crollo della densità. Comunque, nelle successive analisi prenderemo come principale raggio di riferimento  $r_{500}$ , per essere coerenti con le trattazioni con cui effettueremo qualche comparazione.

Le mappe della grandezza fotometrica  $\Sigma$  si rivelano utili come "traccianti" del modo in cui l'ICM si distribuisce nello spazio e, in casi speciali (come per un gas statico), anche della forma del potenziale. A questi fini è altrettanto importante analizzare la forma delle *isofote*, cioè le linee che osservativamente presentano un identico valore di brillantezza superficiale: esse contribuiscono a darci informazioni sugli effetti che l'eventuale rotazione del gas ha sulla sua distribuzione. Il prossimo paragrafo contiene la descrizione del metodo di fit adoperato per misurare lo schiacciamento delle isofote stesse.

## 4.2 Ellitticità delle isofote

Poiché la distribuzione di materia si presenta, nel caso più generale, triassiale, le mappe di brillantezza superficiale attese hanno isofote di forma non circolare, bensì con un certo grado di appiattimento. Questa caratteristica può essere accentuata dal fatto che l'ICM sia in rotazione; inoltre, lo schiacciamento può variare con il raggio proiettato, così come l'orientazione spaziale delle singole isofote. Pure nella presente trattazione quindi le curve di brillantezza saranno appiattite ma, poiché consideriamo modelli di ICM assisimmetrici, ci aspettiamo isofote concentriche e con assi giacenti lungo  $R$  e  $z$ . Si rammenta che nel nostro caso 2D lo schiacciamento, assunto ellittico oblato, può essere quantificato dall'ellitticità

$$\epsilon = 1 - \frac{c}{a}, \quad (4.2)$$

dove  $c/a$  è il rapporto tra i semiassi minore e maggiore: una circonferenza di raggio  $R_0$ , avendo  $a = c = R_0$ , ha  $\epsilon = 0$ , mentre  $\epsilon \rightarrow 1$  quanto più un'ellisse sarà schiacciata.

Per ricavare l'ellitticità delle isofote ci siamo serviti del metodo esposto ed utilizzato nel lavoro di *Lau et al. (2012)*, che chiamiamo *Lau+12*: applicato anche in *BEN13* e *A17*, esso consiste in un fit iterativo basato sui momenti d'inerzia della mappa di brillantezza superficiale. In realtà esistono anche altre procedure, ad esempio quella che opera direttamente sulla forma ellittica delle isofote, che presentiamo nell'appendice D; tuttavia, il metodo di *Lau+12* ci permette di confrontare i nostri risultati con altri di letteratura, quindi lo eleggiamo come principale.

Si prenda una mappa di  $\Sigma$  in banda  $X$ , e se ne individui un anello circolare: assumendo un sistema di riferimento  $(x, y)$  esso sarà rappresentato da

$$R_{\text{int}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_{\text{ext}}, \quad (4.3)$$

dove  $R_{\text{int}}$  e  $R_{\text{ext}}$  sono i due valori di distanza dal centro che delimitano la corona, la quale essendo circolare ha ellitticità  $\epsilon_0 = 0$ . Calcoliamo il *tensore d'inerzia* relativo alla distribuzione dei fotoni ivi conteggiati: dal momento che abbiamo a che fare con un diagramma bidimensionale, sappiamo che genericamente questo tensore si rappresenta attraverso la matrice

$$I := \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xz} \\ I_{zx} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

dove ogni elemento, noto come *momento d'inerzia*, ha formula

$$I_{xx} = \sum_{i,j} W(x_i, z_j) x_i x_i, \quad (4.5)$$

$$I_{xz} = \sum_{i,j} W(x_i, z_j) x_i z_j, \quad (4.6)$$

$$I_{zx} = \sum_{i,j} W(x_i, z_j) z_j x_i, \quad (4.7)$$

$$I_{zz} = \sum_{i,j} W(x_i, z_j) z_j z_j, \quad (4.8)$$

in cui il peso  $W$  si definisce

$$W(x_i, z_j) := \Sigma(x_i, z_j) A_{i,j} \quad (4.9)$$

dove  $\Sigma(x_i, z_j)$  è la brillantezza misurata in un elemento di area  $A_{i,j}$  centrato nel punto di coordinate  $(x_i, z_j)$  appartenente alla corona circolare prefissata. In particolare abbiamo  $I_{xx} = I_{zz}$ , perché il tensore è simmetrico ( $I_{ij} = I_{ji}$ ). Il calcolo passa poi attraverso gli *autovalori*, che come noto si ricavano dal determinante  $\det|I - \lambda \mathcal{I}| = 0$ , con  $\mathcal{I}$  *matrice identità* tale che  $\mathcal{I}_{ij} = \delta_{ij}$ , dove  $\delta_{ij}$  è il *simbolo di Kronecker* che vale 1 se  $i = j$  e 0 altrimenti (i soli elementi non nulli, pari a 1, sono quelli sulla sua diagonale principale). L'equazione da risolvere risulta essere di secondo grado in  $\lambda$ , pertanto in generale si trovano due autovalori  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  come soluzioni: essi sono tali che il tensore di partenza si possa riscrivere nella forma diagonalizzata

$$I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Da qui il rapporto assiale  $c/a$  risulta  $\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$  se  $\lambda_1 < \lambda_2$ , viceversa se  $\lambda_2 < \lambda_1$ ; ovvero, abbiamo l'ellitticità a seconda dei casi

$$\epsilon = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} & \lambda_i < \lambda_j, \\ 1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} & \lambda_i > \lambda_j. \end{cases} \quad (4.11)$$

Tutto ciò permette di fornire un primo valore di appiattimento  $\epsilon_1 > 0$ , il quale viene utilizzato per cambiare la forma della regione rendendola così ellittica: riprendendo il raggio ellissoidale visto nel paragrafo 2.1, ed esprimendolo in due dimensioni, la nuova corona sarà data da

$$R_{\text{int}} \leq \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{(1 - \epsilon_1)^2}} \leq R_{\text{ext}}. \quad (4.12)$$

In questo modo viene assecondata in maniera migliore la distribuzione della brillantezza di cui si dispone. Il procedimento è successivamente iterato  $k$  volte fino a soddisfare la condizione  $|\epsilon_k - \epsilon_{k-1}| \leq 10^{-4}$  (il valore di ellitticità non subisce alcun ulteriore cambiamento significativo).

Guardiamo ora cosa accade nel caso particolare assisimmetrico: provando a calcolare i momenti d'inerzia con le formule esplicite date sopra, è facile constatare che  $I_{xz} = 0 = I_{zx}$ , ovvero il tensore d'inerzia si presenta già in forma diagonale; poiché vale

$$\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{I_{zz}}{I_{xx}}} \quad (4.13)$$

è quindi sufficiente calcolare i due elementi del tensore sulla diagonale principale e farne il rapporto per ricavare subito l'ellitticità secondo (4.11). In effetti le nostre mappe di brillantezza includono isofote che sono già allineate secondo gli assi privilegiati  $R$  e  $z$ , come naturale conseguenza delle premesse di simmetria cilindrica.

### 4.3 Test del metodo di misura dell'ellitticità

Allo scopo di calcolare il profilo radiale dell'ellitticità delle isofote dei nostri modelli abbiamo sviluppato un codice *python* le cui istruzioni seguono le indicazioni teoriche date nel precedente paragrafo: nel calcolo dei due necessari momenti d'inerzia (4.5) e (4.8) abbiamo usato come elemento di area

$$A_{i,j} := \frac{(R_{i+1} - R_{i-1})(z_{j+1} - z_{j-1})}{4}, \quad (4.14)$$

dove  $i$  e  $j$  indicano il campionamento della griglia logaritmica utilizzata. Inoltre, in ogni ciclo numerico associamo ad ognuno dei punti della nostra griglia il valore di ellitticità della shell a cui lo stesso punto apparteneva nell'iterazione precedente, fino a convergenza. Abbiamo ritenuto opportuno verificare l'effettiva affidabilità degli algoritmi del metodo con un semplice test: questo è stato possibile costruendo una mappa ad hoc le cui isofote hanno tutte lo stesso valore di schiacciamento, il quale idealmente ci aspettiamo restituito per ogni  $R$  una volta terminata la procedura. Nello specifico, abbiamo tracciato una brillantezza superficiale secondo l'elementare legge

$$\Sigma(m) = \Sigma_0 \frac{m_0}{m}, \quad (4.15)$$

in funzione del raggio ellittico

$$m = \sqrt{R^2 + \frac{z^2}{(1 - \epsilon)^2}} \quad (4.16)$$

con il valore di ellitticità fissato a  $\epsilon = 0.3$  ovunque, mentre  $\Sigma_0$  è la brillantezza quando  $m = m_0$ , dove  $m_0$  è un raggio ellittico di riferimento (ai fini della tesi  $\Sigma_0$  e  $m_0$  possono essere scelti arbitrariamente). La figura 4.1 mostra la mappa di questo modello di prova ed il relativo profilo dell'ellitticità, da noi ottenuto suddividendo l'intervallo radiale in 15 anelli in cui abbiamo calcolato i momenti d'inerzia e quindi il rapporto assiale (vedi formula 4.13). Notiamo come a bassi valori radiali vi sia una discrepanza significativa rispetto allo schiacciamento fissato a priori, ma in generale vi è un buon accordo: ciò si evince anche dalla tabella 4.1 che riporta, oltre al valore di  $R$  intermedio delle singole

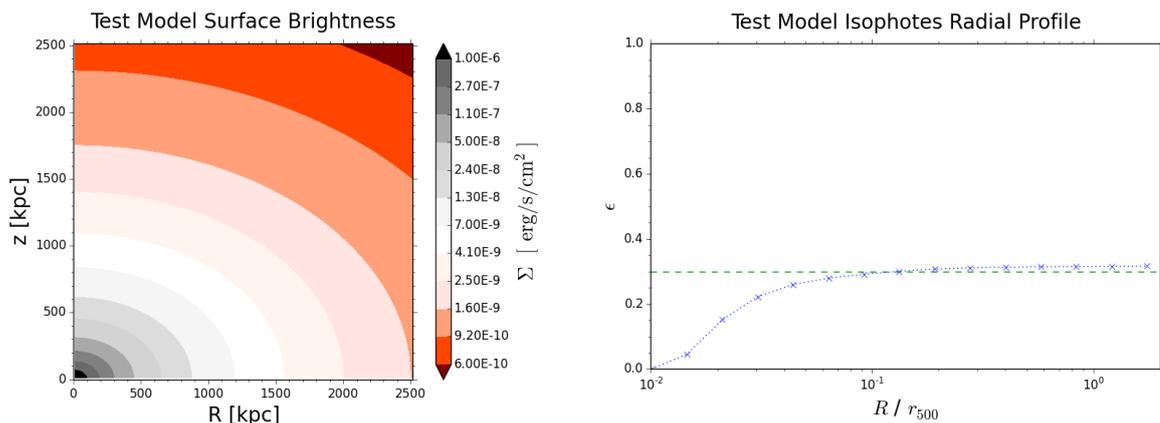


Figura 4.1: Mappa di brillantezza (a sinistra) e profilo radiale di ellitticità delle isofote (a destra) del modello di test per il metodo di *Lau et al. (2012)*. Le isofote sono ellissi con  $\epsilon = 0.3$  e la brillantezza scala secondo il raggio ellittico come  $\Sigma(m) \propto m^{-1}$ : il profilo calcolato riproduce lo schiacciamento prefissato (linea tratteggiata) con buona precisione, eccetto che a  $R/r_{500} \lesssim 0.04$  ( $r_{500} = 1213$  kpc) forse per cause di campionamento.

shell (effettivo e normalizzato per  $r_{500} = 1213$  kpc) e la corrispondente ellitticità  $\epsilon_c(R)$ , l'errore percentuale sulla misura di quest'ultima

$$\Delta_{\%}(\epsilon_c) = \frac{|\epsilon_c - \epsilon|}{\epsilon} \cdot 100. \quad (4.17)$$

Poiché a partire da  $R/r_{500} \approx 0.04$  l'errore si attesta circa sul 13% o minore, possiamo giudicare il metodo numerico sufficientemente accurato. Il valore medio risultante è  $\epsilon = 0.3023 \pm 0.0184$ , dove l'errore è stato ricavato dalla dispersione (deviazione standard) dei numeri tabulati per  $R/r_{500} \gtrsim 0.04$ . Impostando un differente valore di  $\epsilon$ , abbiamo potuto osservare che i risultati ottenuti presentano un comportamento simile.

Un analogo test su una mappa di isofote con ellitticità settata a  $\epsilon = 0.3$  era stato effettuato in *A17*: anche in quell'occasione, nonostante evidenti deviazioni nelle parti più interne (fino a qualche decina di kpc dal centro) probabilmente dovute ad un peggior campionamento, era stato computato un valore di  $\epsilon \approx 0.27$  con fluttuazioni entro il 15% circa, confermando che la procedura è abbastanza affidabile.

## 4.4 Profili di ellitticità dei modelli di ICM

In questa sezione illustriamo le mappe di brillantezza superficiale ed i relativi profili radiali di ellitticità, che abbiamo ottenuto rispettivamente mediante integrazione numerica della formula (4.1) ed il metodo per momenti d'inerzia di *Lau+12* descritto nel paragrafo 4.2, sicuri del fatto che l'algoritmo di quest'ultimo ha una buona accuratezza (come abbiamo dedotto dall'applicazione su una distribuzione di prova nel paragrafo precedente). La figura 4.2 contiene i risultati dei nostri principali modelli *ONI1*, *ONI2A* e *ONI2B*: in particolare, con  $r_{500} = 1213$  kpc (par. 3.1), il dominio di rilevazione dell'ellitticità delle isofote ha in ogni caso  $R/r_{500} = 0.04$  come estremo inferiore, perché abbiamo visto che è questo il valore minimo che fornisce un risultato di  $\epsilon$  abbastanza credibile (vedi figura 4.1). Per sapere se ciò che abbiamo ottenuto può essere compatibile con qualche diretto riscontro

Tabella 4.1: Dati risultanti dal test numerico del metodo di *Lau+12* per il profilo di ellitticità delle isofote sulla distribuzione di brillantezza di prova: ad ogni valore di  $R$  riportiamo la normalizzazione a  $r_{500} = 1213$  kpc, la relativa  $\epsilon_c$  calcolata e il suo errore percentuale rispetto a  $\epsilon = 0.3$  prefissato.

$R$ [kpc]	$R/r_{500}$	$\epsilon_c$	$\Delta\%$
12.227	0.010080	$1.2799 \cdot 10^{-5}$	99.996
17.674	0.014570	$4.5715 \cdot 10^{-2}$	84.762
25.546	0.021060	$1.5207 \cdot 10^{-1}$	49.310
36.926	0.030442	$2.2194 \cdot 10^{-1}$	26.019
53.374	0.044001	$2.6004 \cdot 10^{-1}$	13.322
77.148	0.063601	$2.7907 \cdot 10^{-1}$	6.9760
111.51	0.091932	$2.9150 \cdot 10^{-1}$	2.8317
161.19	0.13288	$3.0030 \cdot 10^{-1}$	0.099181
232.98	0.19207	$3.0773 \cdot 10^{-1}$	2.5760
336.77	0.27763	$3.1096 \cdot 10^{-1}$	3.6546
486.77	0.40130	$3.1284 \cdot 10^{-1}$	4.2785
703.60	0.58005	$3.1469 \cdot 10^{-1}$	4.8966
1017.0	0.83843	$3.1536 \cdot 10^{-1}$	5.1203
1470.0	1.2119	$3.1600 \cdot 10^{-1}$	5.3335
2124.8	1.7517	$3.1632 \cdot 10^{-1}$	5.4395

osservativo, abbiamo deciso di porre a confronto in un unico grafico (fig. 4.3) i nostri dati con quelli contenuti nello stesso articolo di *Lau+12*: questi ultimi punti, tracciati con le loro singole barre di errore, provengono dalle rilevazioni del satellite *Chandra* per la parte radiale più interna e da quelle del satellite *ROSAT* per quella più esterna. Infine in figura 4.4, allo scopo di vedere l'andamento radiale dell'ellitticità a fissata legge di velocità dell'ICM e variando la geometria del potenziale gravitazionale di alone, abbiamo rappresentato i profili di  $\epsilon$  in un insieme ristretto di modelli: abbiamo considerato i più realisticamente non isotermi, e rotanti secondo la formula (2.53) in un potenziale sferico (*NI2*), oblato (*ONI2A*) e prolato (*PNI2A*). Al grafico abbiamo aggiunto anche il modello statico non isoterma *ONI0*, per includere un potenziale schiacciato con gas non rotante. I valori di raggio  $R$  sono ancora normalizzati per il raggio viriale: in particolare, applicando la procedura di integrazione delineata nel paragrafo 3.1 per ogni opportuno potenziale, abbiamo trovato  $r_{500} \approx 1291$  kpc per il caso sferico e  $r_{500} \approx 1069$  kpc per quello prolato, mentre ricordiamo che per gli oblati  $r_{500} \approx 1213$  kpc. Interessante si rivela il comportamento del caso prolato: se l'ICM che contengono è in rotazione, la loro distribuzione di brillantezza in generale non è prolata, come possiamo desumere dalle mappe di densità 3.7 e 3.8; infatti, per il modello *PNI2A* il codice numerico che abbiamo utilizzato per gli oblati non ha necessitato di modifiche nella definizione dello schiacciamento (4.2). Dallo stesso plot 4.4 notiamo che i valori di ellitticità del caso prolato raffigurato si possono accordare con quelli osservativi per un intervallo radiale abbastanza esteso.

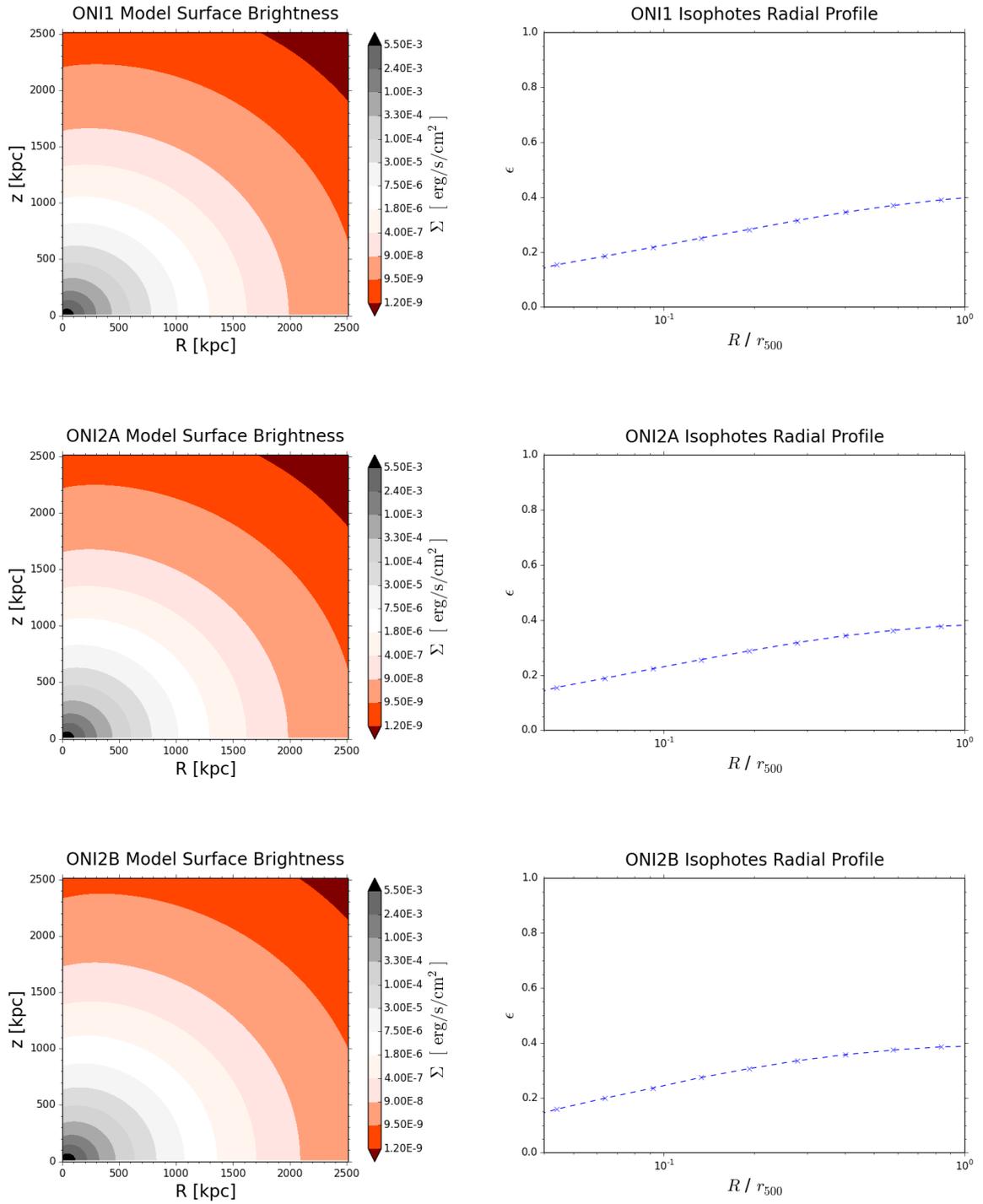


Figura 4.2: Mappe di brillantezza superficiale (a sinistra) e relativi profili di ellitticit  delle isofote (a destra) dei modelli *ONI1*, *ONI2A* e *ONI2B* con  $r_{500} = 1213$  kpc (tabella 3.1 per i rispettivi parametri), ottenuti col metodo basato sui momenti d'inerzia (*Lau+12*): come si vede, le isofote presentano uno schiacciamento di tipo oblatto pi  o meno marcato a seconda del picco del profilo di velocit . Nei grafici di destra abbiamo soppresso i valori radiali pi  prossimi al centro ( $R/r_{500} \lesssim 0.04$ ) in conseguenza degli eventuali risultati inaffidabili di  $\epsilon$  (vedi test del metodo, par. 4.3).

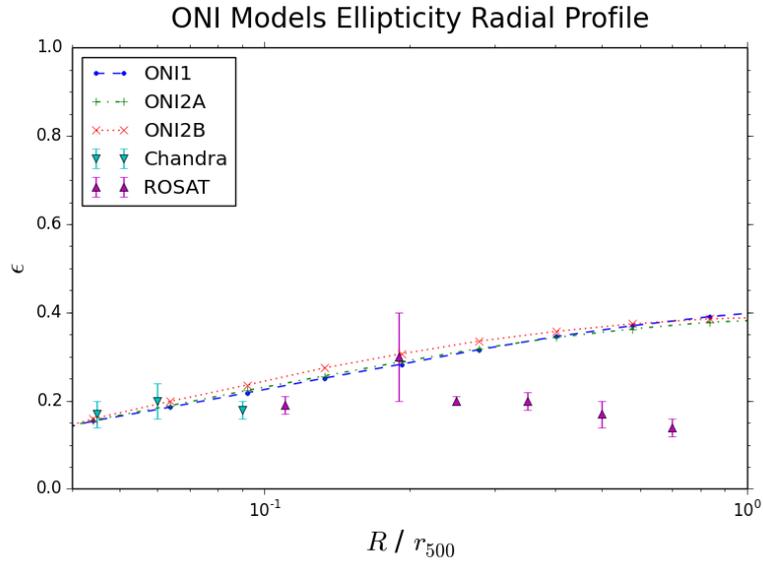


Figura 4.3: Profili di ellitticità radiale risultanti dei modelli oblati non isotermi ( $ONI1$ ,  $ONI2A$  e  $ONI2B$ , tabella 3.1), aventi  $r_{500} = 1213$  kpc, posti a confronto con i dati osservativi, provvisti delle rispettive barre di errore, contenuti in *Lau et al. (2012)*: quelli a distanze minori dal centro sono stati rilevati dal satellite *Chandra*, mentre quelli nelle regioni periferiche da *ROSAT*.

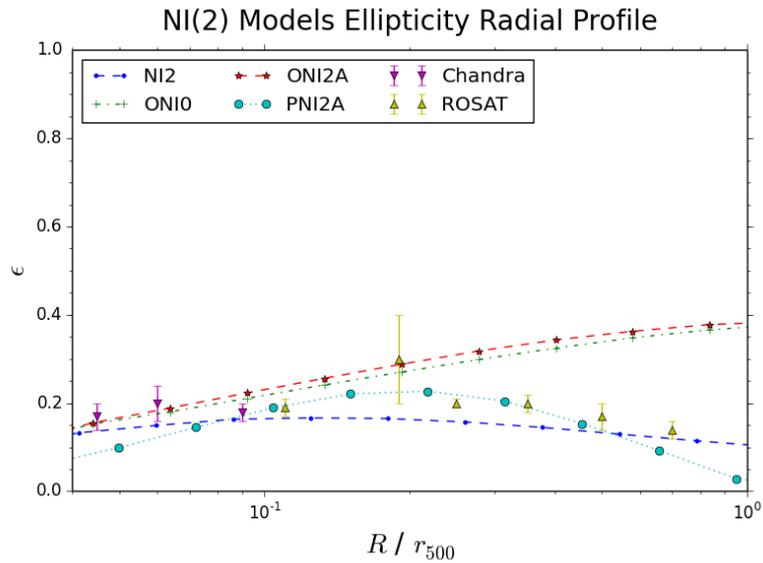


Figura 4.4: Profili di ellitticità radiale dei modelli non isotermi di ICM statico oppure rotante con legge di velocità "2" (eq. 2.53) in un potenziale gravitazionale di alone sferico ( $r_{500} = 1291$  kpc) oppure schiacciato (oblati,  $r_{500} = 1213$  kpc, o prolato,  $r_{500} = 1069$  kpc), confrontati con i dati osservativi di *Chandra* e *ROSAT* (*Lau+12*).

# Capitolo 5

## Conclusioni

### 5.1 Sintesi e discussione dei risultati

In queste sezioni finali ripercorriamo gli argomenti trattati in questa tesi, fornendo una sintesi coerente dei risultati che abbiamo ottenuto ed aggiungendo all'occorrenza qualche utile considerazione. Innanzitutto abbiamo aperto il lavoro introducendo il lettore agli ammassi di galassie, di cui nel capitolo 1 si sono descritte le caratteristiche fisiche di base, soffermandoci sui vari parametri che li definiscono e come sono legati tra loro, soprattutto da un punto di vista teorico e cosmologico.

Nel capitolo 2 ci siamo riferiti agli sviluppi analitici di *Ciotti & Bertin (2005)* grazie ai quali abbiamo potuto ricavare le espansioni delle coppie potenziale-densità per piccoli valori dei parametri di schiacciamento: esse permettono di generalizzare la forma geometrica delle distribuzioni di materia, rendendola realisticamente più piatta rispetto ad una prima semplice approssimazione sferica. Abbiamo applicato ciò ad un profilo di densità  $\gamma$ -model con  $\gamma = 2$ , trovando che i valori massimi tali che  $\rho$  sia non negativa in ogni punto sono  $\eta_{\max} = 0.27$  nel caso oblatto, avente per definizione  $\epsilon := 0$ , e  $\epsilon := \eta = 0.27$  nel caso prolato, risultato in accordo con lo stesso *Ciotti & Bertin (2005)*; applicando poi un analogo ragionamento ad un profilo NFW, abbiamo  $\eta_{\max} = 0.37$  a modello oblatto ( $\epsilon := 0$ ) e  $\epsilon := \eta = 0.37$  se prolato, in accordo con la tesi di Alberto Acuto su modelli e predizioni osservative in banda  $X$  di ammassi di galassie massicci (Bologna, 2017). Il secondo esercizio in particolare dà un risultato fondamentale, perché ci permette di costruire modelli fisici di ammassi di galassie con aloni assisimmetrici significativamente schiacciati, con profili di densità NFW. Successivamente abbiamo scritto le equazioni che descrivono l'ICM rotante in equilibrio nel potenziale gravitazionale dell'ammasso: nello specifico, partendo dalla basilare equazione fluidodinamica di Eulero e da quella di stato dei gas perfetti abbiamo mostrato che, se assumiamo l'ipotesi assisimmetrica per cui la velocità degli elementi di fluido dipende solo dalla distanza dall'asse verticale, la distribuzione del mezzo è di tipo barotropico, ovvero  $P = P(\rho)$ ; in particolare consideriamo per la pressione una distribuzione politropica come articoli recenti, ad esempio *Ghirardini et al. (2019b)*, sembrano suggerire. Avendo definito il potenziale effettivo, ricaviamo quindi la densità del gas nel caso generale o isoterma, ed esplicitiamo due verosimili leggi di rotazione differenziale che adotteremo nei casi di ICM rotante.

Nel capitolo 3, dopo alcune brevi ma importanti considerazioni sul profilo radiale della massa, abbiamo tutti gli elementi per tracciare un vasto insieme di modelli assisimmetrici, variando in maniera opportuna i rispettivi parametri: mostriamo mappe e profili delle

quantità termodinamiche relative a modelli con distribuzione di massa sferica, oblata o prolata, i quali possono essere statici oppure rotanti, ed ancora isotermi o non isotermi. Vediamo in particolare come la componente di rotazione influenzi l'andamento delle grandezze fisiche, essendo in particolare responsabile di un ulteriore schiacciamento della distribuzione dell'ICM: emblematico è il caso sferico rotante, il quale evidenzia chiaramente un appiattimento che è imputabile solamente al moto del gas all'interno del potenziale, visto che questo è assunto a simmetria sferica. Da qui proseguiamo ponendo a confronto i risultati dei nostri modelli oblata, rotanti e non isotermi *ONI1*, *ONI2A* e *ONI2B* (dove "1" e "2" sono due probabili leggi di velocità dell'ICM, mentre "A" e "B" distinguono diversi valori di raggio caratteristico e picco di velocità), quelli più generali e verosimili, con il recente articolo di *Ghirardini et al. (2019)* relativo all'analisi completa di 12 ammassi massicci e locali (campione *X-COP*): i parametri di best-fit lì illustrati fanno sì che le funzioni di fit globale, che riproducono l'andamento delle quantità termodinamiche lungo l'intero dominio radiale sia degli ammassi di tipo non-cool-core sia dei cool-core, si rivelano in accordo molto buono con i profili radiali e verticali di densità, pressione e temperatura. Questo discorso, almeno fino a distanze intermedie dal centro, abbiamo verificato che vale anche per l'entropia, il che è una conferma della bontà delle nostre supposizioni.

Il quarto capitolo tratta delle osservabili relative ai tre modelli citati poc'anzi, in particolare per ognuno ne calcoliamo la mappa di brillantezza superficiale  $X$  di cui andiamo anche a ricavare il profilo di ellitticità delle isofote (curve di costante livello di brillantezza) facendo uso del metodo di *Lau et al. (2012)*: esso consiste in un fit iterativo che procede ricavando i momenti d'inerzia, in corone di forma inizialmente circolare e poi ellittica, della distribuzione dei fotoni nella mappa. Un semplice test sull'immagine di una distribuzione di brillantezza, costruita a priori con un prefissato schiacciamento, ci assicura che il metodo è affidabile. In appendice D proponiamo un metodo alternativo di deduzione del profilo di ellitticità, che lavora direttamente sulla forma delle isofote: questo fit ellittico restituisce risultati che si accordano con quello basato sul momento d'inerzia, eccetto che a bassi valori di  $R$  probabilmente a causa di un insufficiente campionamento; inoltre, esso sembra molto sensibile al tipo di griglia utilizzata per la mappa della brillantezza, poiché se di tipo lineare invece che logaritmico opera in modo visibilmente migliore, a maggior ragione se le distanze sono scalate per il raggio viriale.

## 5.2 Eventuali perfezionamenti futuri

I modelli di ICM che abbiamo tracciato poggiano sull'ipotesi assisimmetrica secondo la quale la velocità, se diversa da zero quale è nei casi rotanti, ha un profilo che dipende unicamente da quanto le posizioni distano dall'asse  $z$ , ovvero dipende soltanto dalla coordinata cilindrica  $R$ : questa in generale può essere una comoda assunzione ma comunque abbastanza valida, e i nostri risultati danno già un'idea di quel che possiamo aspettarci dalle osservazioni, anche perché in questa tesi siamo andati oltre il semplice caso sferico, esaminando potenziali di alone schiacciati con parametri di valori rappresentativi. Un comportamento ancora più realistico sarebbe dato da profili di velocità di forma  $u_\varphi = u_\varphi(R, z)$ , cioè tenere conto del fatto che le leggi di rotazione abbiano un gradiente anche verticale, che in generale ci aspettiamo negativo all'aumentare della distanza dal centro dell'ammasso. Se come prospettato i nuovi satelliti che i maggiori enti spaziali intendono sviluppare e lanciare in orbita nel futuro prossimo avranno le caratteristiche tecniche per risolvere accuratamente la distribuzione dell'ICM, oltre a poter fissare con

più precisione i valori di riferimento o almeno a porvi dei vincoli, anche le stesse formule di rotazione potranno subire modifiche, oppure potrebbero esserne proposte di nuove: ricordiamo che quelle qui assunte si accordano con i profili di ellitticità che vediamo, ma sia dal punto di vista teorico sia da quello osservativo, questo rimane sostanzialmente un campo aperto.

Un perfezionamento di questa tesi potrebbe consistere in una verifica della frazione di gas: noi abbiamo preso il valore 0.12 in conseguenza di una massa di ammasso di  $10^{15} M_{\odot}$  e di opportune definizioni e leggi di scala (par. 1.5), ma occorrerebbe una ricerca più approfondita per vedere come cambia in funzione del raggio, ad esempio con una procedura di integrazione analoga a quella con cui abbiamo ricavato  $r_{500}$  e  $M_{500}$  nel paragrafo 3.1.

Una naturale evoluzione del nostro lavoro potrebbe essere un'analisi spettroscopica sui modelli di ICM presentati, simile a quella tracciata nel capitolo 5 della tesi di Alberto Acuto sopra citata: questi studi, effettuati mediante software specifici di manipolazione spettrale come *XSPEC*, contribuiscono a far luce sulle proprietà dinamiche e termiche del gas, in particolare dallo spostamento Doppler del centroide di righe note e dall'allargamento delle stesse (come accennato nel paragrafo 1.2), in più permettono di visualizzare e discutere in maniera più completa ciò che ci possiamo aspettare dalle osservazioni negli anni a venire. Riguardo all'allargamento di righe, ribadiamo che fornisce preziose informazioni anche su eventuali componenti aggiuntive non riconducibili al moto termico né ad una rotazione coerente, pur tuttavia in grado di rendere stabile la presenza dell'ICM, una su tutte la turbolenza: anch'essa potrebbe essere inclusa, in versione più o meno semplificata, nei modelli del moto del gas in ammassi (e.g. *Ettori 2014*), contribuendo tra l'altro a risolvere il delicato problema del bias di massa idrostatica (si veda il sottopar. 1.7.5).

Un altro eventuale elemento di complicazione che si potrebbe considerare riguarda il campo magnetico: è noto che l'ICM presenta una magnetizzazione dell'ordine di  $\mu\text{G}$  ( $10^{-6} \text{ Gauss}$ )<sup>1</sup> verificata dalle osservazioni (ad esempio *Kronberg 1994*, *Govoni & Feretti 2004*, *Ryu et al. 2012*), anche se la sua origine è tuttora controversa: potrebbe essere un debole magnetismo primordiale risalente alla ricombinazione (come *Widrow et al. 2012*) o alla formazione delle grandi strutture (*Biermann 1950*), ma anche generato da oggetti astrofisici come stelle (*Schleicher et al. 2010*), galassie attive (*Kronberg et al. 2001*), supernovae o "venti galattici" (*Arieli et al. 2011*): in questo secondo caso è inizialmente localizzato, ma col passare del tempo possiamo aspettarci che venga ugualmente "spalmato" nello spazio tendendo a diventare uniforme; in teoria è possibile distinguere le due tipologie a seconda che il tempo scala di omogeneizzazione sia maggiore o minore del tempo di Hubble. Simulazioni portano a ritenere che la turbolenza in particolare si presta ad essere un efficiente meccanismo di amplificazione del campo magnetico iniziale, che quindi può giustificare i valori che si riscontrano nell'ICM (*Batchelor 1950*, *Vainstein & Ruzmaikin 1972*, *Kulsrud & Anderson 1992*, *Brandenburg & Subramanian 2005*, *Yoo & Cho 2014* solo per citarne alcuni).

Se ipotizziamo che il gas rotante sia debolmente magnetico, saranno introdotti termini magnetici nelle equazioni che ne governano il moto: queste analisi di *magneto-idrodinamica* (*MHD*) portano inevitabilmente a studiare instabilità *magneto-rotazionali*, come emerge da articoli come quello di *Balbus & Hawley (1991)*. *Nipoti & Posti (2014)* in particolare hanno affrontato questo tipo di questioni applicate a generici plasmi con cooling radiativo in ammassi o galassie, mentre *Nipoti et al. (2015)* le hanno ristrette ad alcuni cool-core realistici attraverso perturbazioni locali assisimmetriche: in ogni caso le procedure numeriche supportano fortemente l'idea che conseguenti processi turbolenti e dissipativi, in

---

<sup>1</sup>  $1 \text{ G} := 10^{-4} \text{ T}$  (*Tesla*).

concomitanza con altre tipologie di instabilità che possono comparire come quella *termica* (Field 1965), la *magneto-termica* (Balbus 2000) e la *convettiva per flussi di calore* (Quartaert 2008), abbiano un enorme impatto sull'evoluzione termodinamica degli ammassi.

# Appendice A

## Coordinate cilindriche

In ambito fisico-matematico, per specificare una determinata posizione nello spazio si possono utilizzare svariati sistemi di coordinate. Il più comune è indubbiamente quello cartesiano, il quale come noto associa univocamente ad ogni punto spaziale una tripletta  $\bar{x} = (x, y, z)$  di numeri reali che rappresentano le rispettive proiezioni del punto sugli assi ortogonali  $x$ ,  $y$  e  $z$  di origine  $O$ , opportunamente orientati e graduati secondo una prefissata unità di misura della lunghezza. Esistono però altri sistemi a cui conviene affidarsi, specialmente quando peculiari simmetrie del problema considerato possono renderne in questo modo più agevole la trattazione. Nei modelli assisimmetrici, cioè a simmetria cilindrica, risulta particolarmente comodo adottare un sistema di riferimento costituito da *coordinate cilindriche*: la localizzazione avviene tramite  $\bar{x} = (R, \varphi, z)$ , dove  $R$  è la distanza tra l'origine e la proiezione del punto generico sul piano orizzontale  $x$ - $y$ ,  $\varphi$  è l'*azimuth*, ovvero l'angolo, in genere preso in senso antiorario, tra il precedente segmento e il semiasse  $x$  positivo, mentre  $z$  coincide con la coordinata verticale cartesiana, ovvero l'altezza dal piano  $x$ - $y$ . Questo sistema differisce anche da quello sferico,  $\bar{x} = (r, \varphi, \theta)$ , in cui la variabile  $\varphi$  ha lo stesso significato, ma il raggio  $r$  è la distanza diretta dall'origine, e  $\theta$  è l'angolo *zenitale*, tra  $0$  e  $\pi$ , che intercorre tra il raggio e il semiasse  $z$  positivo. In generale, anche la descrizione cilindrica dello spazio permette una corrispondenza univoca tra posizioni e coordinate, tuttavia i punti appartenenti all'asse  $z$  hanno raggio  $R = 0$  ma angolo azimutale  $\varphi$  indefinito; inoltre, è immediato verificare che le trasformazioni tra i sistemi cartesiano e cilindrico sono:

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \\ z = z \end{cases} . \quad (\text{A.1})$$

Speciale cautela è necessaria per l'argomento dell'arcotangente nell'identità  $\varphi = \varphi(x, y)$ , a seconda se è assunto l'ordinario  $[0, 2\pi[$  o l'alternativo  $[-\pi, \pi[$  come intervallo di definizione di  $\varphi$  in radianti.

E' altresì noto che per gli operatori *gradiente* e *laplaciano* sono valide le seguenti espressioni<sup>1</sup>:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \hat{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z, \quad (\text{A.2})$$

---

<sup>1</sup>Il sistema cilindrico è un'estensione di quello *polare* a due dimensioni, pertanto è "curvilineo": il fatto stesso che contenga una coordinata radiale ed una azimutale introduce delle sostanziali modifiche ai concetti di distanza propri della visione cartesiana.

$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{A.3})$$

dove  $\hat{e}_R = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ ,  $\hat{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  e  $\hat{e}_z = (0, 0, 1)$  sono i versori, i.e. vettori di norma unitaria, nelle direzioni radiale, azimutale e verticale rispettivamente. Da ultimo, si ricorda che anche gli elementi infinitesimi di superficie e di volume si scrivono in maniera specifica: all'atto pratico, questi sono richiesti nel calcolo di quantità fisiche per mezzo di grandezze definite superficiali  $f_S$  o volumiche  $f_V$ , combinate con opportuni integrali multipli. Qui riportiamo sinteticamente le forme più elementari, ancora in comparazione al caso cartesiano:

$$\iint f_S(x, y) dx dy \quad \longrightarrow \quad \iint f_S(R, \varphi) R dR d\varphi, \quad (\text{A.4})$$

$$\iiint f_V(x, y, z) dx dy dz \quad \longrightarrow \quad \iiint f_V(R, \varphi, z) R dR d\varphi dz. \quad (\text{A.5})$$

Fondamentalmente, occorre tener presente che  $R d\varphi$  è l'arco infinitesimo "azimutale", il quale di fatto con  $dR$  e  $dz$  completa i tre contributi ortogonali cilindrici. In tutte le formule viste, è evidente che rispetto al sistema cartesiano la componente in  $z$  rimane come atteso inalterata.

# Appendice B

## Proiezione di un sistema trasparente

In quest'appendice ci proponiamo di fornire una rapida analisi sulla proiezione relativa ad un sistema *trasparente*, cioè che conserva tutta la sua luce indipendentemente dalla direzione secondo la quale viene osservato (*linea di vista*, detta anche *l.o.s.*). La trattazione trova la sua utilità ogniqualvolta sia richiesta la quantità di materia, energia ecc. per unità di superficie sul piano osservativo, risultante da una procedura di integrazione dell'associata densità lungo la linea di vista: applicazioni tipiche si riscontrano nella *densità di colonna* [ $\text{cm}^{-2}$ ] a partire da quella numerica (numero di particelle per unità di volume), e nella *brillanza superficiale* [ $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ ] per mezzo dell'emissività (luminosità di volume); noi faremo uso dell'ordinaria massa volumica, ma è chiaro che il ragionamento resta valido per ogni altra grandezza definita per unità di volume se osservata secondo una prefissata direzione e proiettata sulla conseguente superficie planare.

In un riferimento cartesiano sia dato un generico oggetto tridimensionale con distribuzione di densità  $\rho(\bar{x})$ : vogliamo trovare in che modo risulta proiettato su un piano arbitrario. Allo scopo conviene attuare un cambio di coordinate  $\bar{x} = (x, y, z) \longrightarrow \bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , che può essere effettuato attraverso una matrice di rotazione  $\mathcal{R}$  (di determinante  $\pm 1$ ) per cui  $\bar{\xi} = \mathcal{R} \bar{x}$ , in modo tale che una delle nuove variabili, diciamo  $\xi_3$ , identifichi la direzione lungo la linea di osservazione (perpendicolare al piano di proiezione): la formula

$$\Sigma(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathcal{R} \bar{\xi}) d\xi_3 \quad (\text{B.1})$$

è la scrittura matematica finalizzata ad ottenere, in un punto  $(\xi_1, \xi_2, 0)$  appartenente al piano individuato dalle prime due variabili della nuova terna, tutta la quantità di materia dell'oggetto di partenza lungo la retta data dalla direzione della terza  $\xi_3$ .

Nel semplice caso di un sistema sferico centrato nell'origine, la densità sarà puramente radiale, del tipo  $\rho(r)$ : se per convenienza prendiamo come linea di vista la direzione individuata dall'asse  $y$ , la proiezione avverrà sul piano  $x-z$  e, com'è facile intuire, ne risulterà una figura ad anelli circolari concentrici di valore crescente verso il centro; fissata su quel piano una posizione  $(x_p, z_p)$ , e chiamata  $R_O := \sqrt{x_p^2 + z_p^2}$  la sua distanza da  $O$  proiettata, possiamo scrivere

$$r = \sqrt{R_O^2 + y^2}, \quad (\text{B.2})$$

raggio corrispondente alla distanza dall'origine di un punto situato sulla l.o.s. lungo la quale avviene la procedura di integrazione<sup>1</sup>. Per simmetria avremo in particolare

---

<sup>1</sup>Questa retta interseca il piano di proiezione nella posizione  $(x_p, 0, z_p)$ .

$$\Sigma(R_O) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) dy = 2 \int_0^{+\infty} \rho(r) dy. \quad (\text{B.3})$$

Se adesso esprimiamo la variabile  $y$  in termini di  $r$  secondo la (B.2) e differenziamo, si ricaverà

$$dy = \frac{r}{\sqrt{r^2 - R_O^2}} dr, \quad (\text{B.4})$$

la quale, sostituita nella precedente (B.3), dà

$$\Sigma(R_O) = 2 \int_{R_O}^{+\infty} \frac{\rho(r) r}{\sqrt{r^2 - R_O^2}} dr. \quad (\text{B.5})$$

Onde tradurre questo risultato in coordinate cilindriche, il valore proiettato  $R_O$  sarà individuabile con i suoi riferimenti  $R_p$  e  $z_p$  (sempre sul piano  $x$ - $z$ ), in particolare  $R_O = \sqrt{R_p^2 + z_p^2}$ ; dal canto suo, per come è definita, la variabile  $r$  è riscrivibile attraverso

$$r = \sqrt{R^2 + z_p^2}, \quad (\text{B.6})$$

dove in effetti il valore di altezza rimane costante una volta fissato il punto in cui si richiede il valore di proiezione. Differenziando, stavolta si ha

$$dr = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z_p^2}} dR, \quad (\text{B.7})$$

dunque per sostituzione in (B.5) otteniamo infine

$$\Sigma(R_p, z_p) = 2 \int_{R_p}^{+\infty} \frac{\rho(R, z_p) R}{\sqrt{R^2 - R_p^2}} dR. \quad (\text{B.8})$$

Questa formula è altrettanto valida per un sistema assisimmetrico, tale che  $\rho = \rho(R, z)$ .

# Appendice C

## Bremsstrahlung

La *Bremsstrahlung*, ovvero in tedesco "radiazione di frenamento", in generale consiste nell'emissione di fotoni a seguito della decelerazione subita da una carica elettrica interagente col campo coulombiano di un'altra carica elettrica di segno opposto: il processo è anche noto come emissione *free-free*, in riferimento allo stato non legato delle particelle coinvolte, sia prima che dopo la loro interazione. Questo fenomeno ha luogo specialmente in un *plasma*, i.e. un fluido che ha caratteristiche fisiche così estreme da essere formato da atomi ionizzati, che quindi si presenta sotto forma di ioni positivi (cationi) e negativi (anioni), rispettivamente nuclei atomici ed elettroni: ciò perché gli elevati valori di temperatura rendono impossibili configurazioni neutre per gli atomi. Il processo si rivela il principale meccanismo di raffreddamento di un plasma molto caldo. Qui ne daremo una elementare descrizione "termica" per ottenere l'ideale emissività associata, assumendo che i corpuscoli del mezzo emittente abbiano una distribuzione maxwelliana delle velocità, il che permette di definire una temperatura di equilibrio termodinamico<sup>1</sup>: una trattazione rigorosa richiederebbe elementi approfonditi di meccanica quantistica e di relatività, ma una visione prevalentemente classica in situazioni pratiche si rivela abbastanza accurata, almeno per quanto concerne le dipendenze funzionali della maggioranza dei parametri fisici.

Usualmente, per motivazioni che saranno chiare a breve, ci si pone nel sistema di riferimento centrato nello ione positivo supposto di *numero atomico*  $Z$ , avente cioè  $Z$  protoni di carica elettrica  $+e$ , indicando con  $v$  la velocità dell'elettrone, di carica  $-e$ , in moto rispetto al nucleo precedente con *parametro d'urto*  $b$ , identificante sostanzialmente la minima distanza a cui verrebbero a trovarsi le due particelle nell'ipotesi che non interagiscano. Sia  $r$  la distanza effettiva tra nucleo ed elettrone e  $a$  l'accelerazione di quest'ultimo: in *cgs*, la *legge di Coulomb* dice che la forza tra i due corpi carichi è in modulo

$$F = \frac{Z e^2}{r^2}, \quad (\text{C.1})$$

quindi il modulo dell'accelerazione, per Newton, risulta

$$a = F/m_e = \frac{Z e^2}{m_e r^2}, \quad (\text{C.2})$$

con  $m_e \approx 9.109 \cdot 10^{-28}$  g; d'altro canto, la *legge di Larmor* afferma che la potenza totale irradiata da una particella accelerata di carica  $e$  ( $c$  velocità della luce nel vuoto) si scrive

---

<sup>1</sup>In caso contrario, si parla di *bremsstrahlung relativistica*, in cui le velocità sono dell'ordine di  $c$  e la distribuzione, in energia, è spesso a legge di potenza, da cui deriva un'emissività dello stesso tipo.

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2, \quad (\text{C.3})$$

pertanto riprendendo la formula appena sopra abbiamo

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{Ze^2}{m_e r^2} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m_e^2 r^4}. \quad (\text{C.4})$$

In un discorso generale, si può affermare che l'accelerazione è inversamente proporzionale sia alla massa della particella sia alla distanza al quadrato; combinandola con la formula di Larmor si deduce che l'energia luminosa, nell'unità di tempo, scala come  $W \propto m^{-2} r^{-4}$ . Questo significa che l'emissione è molto più apprezzabile tanto più leggera è la particella carica: a titolo d'esempio, basti pensare che se lo ione positivo consta di un singolo protone ( $Z = 1$ ), equivalente ad un nucleo di idrogeno, essendo  $m_p \approx 1800 m_e$ , la radiazione associata sarebbe già circa tre o quattro milioni di volte minore, quindi trascurabile; per la stessa differenza di massa, sussistendo l'equilibrio a temperatura  $T$ , ci aspettiamo pure che mediamente gli elettroni si muovano a velocità sensibilmente maggiore. Ciò giustifica la correttezza dell'analisi del processo di bremsstrahlung come radiazione elettronica "vista" dal nucleo positivo. Secondariamente, l'emissione sarà più ingente a piccole distanze, ovvero è attesa maggiore a bassi valori del parametro d'impatto. Si noti che comunque l'interazione non è istantanea, visto che la forza tra cariche elettriche, come quella gravitazionale, è a *range* infinito: solitamente però viene adottata la cosiddetta "approssimazione impulsiva", per la quale l'evento avviene per

$$\Delta t \approx \frac{2b}{v}, \quad (\text{C.5})$$

cosicché a distanze maggiori del rappresentativo  $r \approx b$  si può ignorare la forza percepita dalle due particelle. Ne segue che l'energia totale irradiata nella collisione è

$$W \Delta t \approx \frac{4}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m_e^2} \frac{1}{b^3 v}, \quad (\text{C.6})$$

in particolare a parità di  $v$  l'energia è maggiore quanto minore è il parametro d'urto, mentre a parità di  $b$  gli elettroni lenti hanno un rilascio energetico maggiore poiché l'interazione in questo caso dura di più. Un'analisi di Fourier del moto dell'elettrone, assumendo il segnale avente periodo  $\Delta t$ , consente di ricavare la distribuzione spettrale della radiazione, cioè la potenza in funzione della frequenza  $W(\nu)$ : da uno studio simile emerge che essa è piuttosto piatta fino ad una frequenza massima

$$\nu_{\max} \approx \frac{1}{2\Delta t} \approx \frac{v}{4b} \quad (\text{C.7})$$

dopo la quale vi è un crollo esponenziale; questo comportamento è ascrivibile al fatto che l'elettrone può cedere una quantità massima di energia pari alla sua energia cinetica. Se ammettiamo uno spettro costante fino a quella soglia, per (C.6) possiamo trovare l'energia irradiata nell'unità di frequenza:

$$\frac{W \Delta t}{\Delta \nu} \approx \frac{W \Delta t}{\nu_{\max}} \approx \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m_e^2} \frac{1}{b^2 v^2}. \quad (\text{C.8})$$

Quanto visto finora riguarda l'emissione di un singolo processo d'interazione, da cui peraltro risulta una radiazione *polarizzata*<sup>2</sup>; tuttavia, sono gli analoghi fenomeni di gruppo che acquisiscono rilevanza per le osservazioni, caratterizzati in generale da radiazione non polarizzata a causa dei moti disordinati delle particelle. A tal proposito, consideriamo il caso più realistico di un insieme di elettroni, di densità numerica  $n_e$ , in movimento a velocità  $v$  verso una "nuvola" di ioni positivi di densità numerica  $n_i$ : rammentiamo che la densità numerica è in generale legata a quella di massa attraverso la (2.43). Dall'incontro dei due gruppi avranno luogo molte collisioni del tipo analizzato: il numero di urti con parametro d'impatto tra  $b$  e  $b + db$  sperimentato da un solo elettrone sarà dato dalla densità di bersagli  $n_i$  moltiplicata per il volume associato all'intervallo di  $b$  specificato che, tenendo conto che il moto avviene a velocità  $v$ , è  $2\pi b db v \Delta t$ , quindi nell'unità di tempo avremo  $2\pi b db n_i v$  interazioni; moltiplicando questa espressione per la densità elettronica, otteniamo che il numero totale di collisioni nell'unità di volume e a fissata velocità è  $2\pi n_i n_e v b db$ , allora utilizzando (C.8) si ha la relativa emissività di bremsstrahlung in unità di frequenza

$$\dot{\epsilon}_{\text{br}} \approx \int_{b_{\text{min}}}^{b_{\text{max}}} \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 m_e^2} \frac{1}{b^2 v^2} 2\pi n_i n_e v b db = \frac{32}{3} \frac{\pi e^6}{c^3 m_e^2} n_i n_e Z^2 \frac{1}{v} \ln\left(\frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}\right). \quad (\text{C.9})$$

L'integrale in teoria avrebbe estremi 0 e  $+\infty$ , ma nella pratica esisteranno limiti finiti diversi: il massimo valore di  $b$  deriva dall'approssimazione che a data frequenza i contributi significativi soddisfano  $\nu < \nu_{\text{max}}$ , cioè (vedi C.7)

$$b_{\text{max}} \approx \frac{v}{4\nu_{\text{max}}}. \quad (\text{C.10})$$

Per il minimo parametro d'impatto invece va effettuato un confronto tra una versione classica ed una quantistica. In particolare, la prima di esse parte da  $\Delta v \leq v$ , con  $\Delta v \approx a \Delta t$  quindi, riprendendo (C.2) e (C.5), sarà

$$b_{\text{min,class}} \approx \frac{2 Z e^2}{m_e v^2}, \quad (\text{C.11})$$

mentre l'altra fa uso del *principio di indeterminazione* di Heisenberg<sup>3</sup>: visto che a piccole distanze l'impulso è praticamente confondibile con la sua incertezza,  $\Delta p \approx m_e v \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \hbar/b_{\text{min}}$ , cioè

$$b_{\text{min,quant}} \approx \frac{h}{2\pi m_e v}. \quad (\text{C.12})$$

La scelta tra le due espressioni del minimo parametro d'urto può essere agevolata dal loro rapporto, che in termini della velocità della luce risulta

$$\frac{b_{\text{min,quant}}}{b_{\text{min,class}}} \approx \frac{137}{Z} \frac{v}{c}. \quad (\text{C.13})$$

<sup>2</sup>Il campo elettrico e magnetico della radiazione in uscita oscillano lungo due precise direzioni: quella del piano del moto dell'elettrone e quella ad essa ortogonale.

<sup>3</sup>Esso pone un limite alla precisione con cui è possibile conoscere contemporaneamente posizione e velocità delle particelle in meccanica quantistica, concetto rappresentato dalla celebre formula  $\Delta x \Delta p \approx \hbar/2$  che lega le incertezze sulla posizione e sull'impulso tramite  $\hbar := \frac{h}{2\pi}$ , dove  $h \approx 6.626 \cdot 10^{-27}$  erg s è la *costante di Planck*.

Ricordando la relazione tra energia termica e cinetica media (formula 1.15), si può evincere che plasmi a temperature minori si descrivono tramite  $b_{\min, \text{class}}$ , invece quelli più caldi, come è il caso degli ammassi di galassie, richiedono quello quantistico. A causa della dipendenza di  $b_{\max}$  dalla frequenza, è comunque impossibile utilizzare un valore univoco di  $\ln(b_{\max}/b_{\min})$ : per ovviare a questo si ricorre al *fattore di Gaunt*

$$g_{\text{ff}}(\nu, T) := \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln(b_{\max}/b_{\min}), \quad (\text{C.14})$$

una grandezza che apporta correzioni di natura quantistica: mediamente, ad alte frequenze è approssimabile all'unità, invece nel radio può arrivare fino a 10 o 15.

Riprendendo l'ipotesi di equilibrio termodinamico, se è soddisfatto le particelle del fluido seguono la distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann

$$f(v) dv = 4\pi \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T}} dv, \quad (\text{C.15})$$

detta anche *maxwelliana*, che rappresenta la probabilità che un elettrone abbia una velocità compresa tra  $v$  e  $v + dv$ . Se la moltiplichiamo per la densità  $n_e$  avremo il numero di elettroni nell'unità di volume con velocità nell'intervallo infinitesimo specificato, quindi il prossimo naturale passo è integrare su tutti i valori di  $v$  possibili: per farlo occorre però ribadire che i fotoni emessi non possono avere energia maggiore di quella cinetica posseduta dagli elettroni che li generano, ovvero a data frequenza deve valere  $\frac{1}{2}m_e v^2 \geq h\nu$ , cioè  $v_{\min} \approx \sqrt{2h\nu/m_e}$ ; fatta questa precisazione, e per mezzo di (C.9), otteniamo l'emissività totale di bremsstrahlung [ $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$ ]:

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{br}}(\nu, T) = \int_{v_{\min}}^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_{\text{br}}(v, \nu) f(v) dv \approx 6.8 \cdot 10^{-38} T^{-1/2} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} n_i n_e Z^2 \langle g_{\text{ff}}(\nu, T) \rangle. \quad (\text{C.16})$$

Di nuovo, il tipico andamento è tale da essere pressoché piatto a basse frequenze, fino ad un punto oltre cui decade esponenzialmente: per convenzione questo *cut-off* è posto ad una frequenza in corrispondenza della quale l'emissività si è ridotta di un fattore  $1/e$ , ovvero ponendo  $h\nu/(k_B T) := 1$  si ha

$$\nu_{\max} [\text{Hz}] = \frac{k_B}{h} T \approx 2.08 \cdot 10^{10} T, \quad (\text{C.17})$$

formula che è possibile utilizzare nelle osservazioni per una stima della temperatura del plasma. Integrando infine quanto ricavato in (C.16) su tutte le frequenze dello spettro elettromagnetico, se si assume che la distribuzione degli ioni sia simile a quella delle abbondanze cosmiche (prevalenza di idrogeno ed elio,  $\langle Z \rangle \approx 1.3$ ) si può dedurre che l'emissività *bolometrica* è

$$\dot{\mathcal{E}}_{\text{br}}(T) = \int_0^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_{\text{br}}(\nu, T) d\nu \approx 2.4 \cdot 10^{-27} T^{1/2} n_e^2 \langle g_{\text{ff}}(T) \rangle [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}]. \quad (\text{C.18})$$

# Appendice D

## Fit ellittico delle isofote

Qui presentiamo uno dei metodi di fit alternativo a quello di *Lau et al. (2012)* utilizzato per dedurre il profilo di ellitticità delle isofote. Il procedimento che ci apprestiamo a descrivere può apparire più intuitivo poiché parte da un'ispezione visiva della forma geometrica delle stesse isofote, cui segue un opportuno calcolo volto a ricavare l'equazione analitica che meglio si adatta a quella forma: in particolare, dalle mappe esposte nel cap. 4 possiamo stabilire che i livelli di brillantezza tracciano approssimativamente delle ellissi concentriche e coassiali, in conseguenza sia dell'assunta distribuzione assisimmetrica più o meno schiacciata, sia dell'eventuale rotazione del gas; è pertanto naturale fare uso di un fit ellittico. Detto ciò, ricordiamo che per definizione un'isofota è il luogo dei punti di costante brillantezza superficiale ovvero, come delineato da *Pascale, Binney & Nipoti (2019)* ("Flattened stellar systems based on distribution functions depending on actions", appendice A), l'insieme delle coppie  $(R_i, z_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  tali che  $\Sigma(R_i, z_i) = \Sigma_0$ , dove  $\Sigma_0$  è un opportuno livello di brillantezza prefissato. Si introduce la quantità

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^N \left[ 1 - \left( \frac{R_i^2}{a^2} + \frac{z_i^2}{c^2} \right) \right]^2, \quad (\text{D.1})$$

che rappresenta sostanzialmente lo scarto quadratico di ogni punto rispetto ad una interpolazione con una pura ellisse di generico semiasse maggiore  $a$  e minore  $c$ : il valore migliore di questi ultimi proverrà dal rendere minima l'espressione di sopra, quindi attraverso  $\frac{\partial \chi^2}{\partial (a^2)} = 0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial (c^2)}$  e successivi sviluppi si può ottenere

$$a = \sqrt{\frac{(\sum_i R_i^2 z_i^2)^2 - \sum_i R_i^4 \sum_i z_i^4}{\sum_i R_i^2 z_i^2 \sum_i z_i^2 - \sum_i R_i^2 \sum_i z_i^4}},$$
$$c = \sqrt{\frac{(\sum_i R_i^2 z_i^2)^2 - \sum_i R_i^4 \sum_i z_i^4}{\sum_i R_i^2 z_i^2 \sum_i R_i^2 - \sum_i R_i^4 \sum_i z_i^2}}. \quad (\text{D.2})$$

Dal punto di vista numerico abbiamo agito come segue: per ogni valore  $R'$  lungo l'asse radiale abbiamo preso la corrispondente brillantezza superficiale  $\Sigma'$ , fissandola come riferimento per l'isofota, dopodiché si è effettuato un ciclo su tutti i raggi  $R_i < R'$  trovando ogni richiesto associato  $z_i$  mediante interpolazione lineare della funzione  $\Sigma(R_i) \rightarrow z(\Sigma(R_i))$

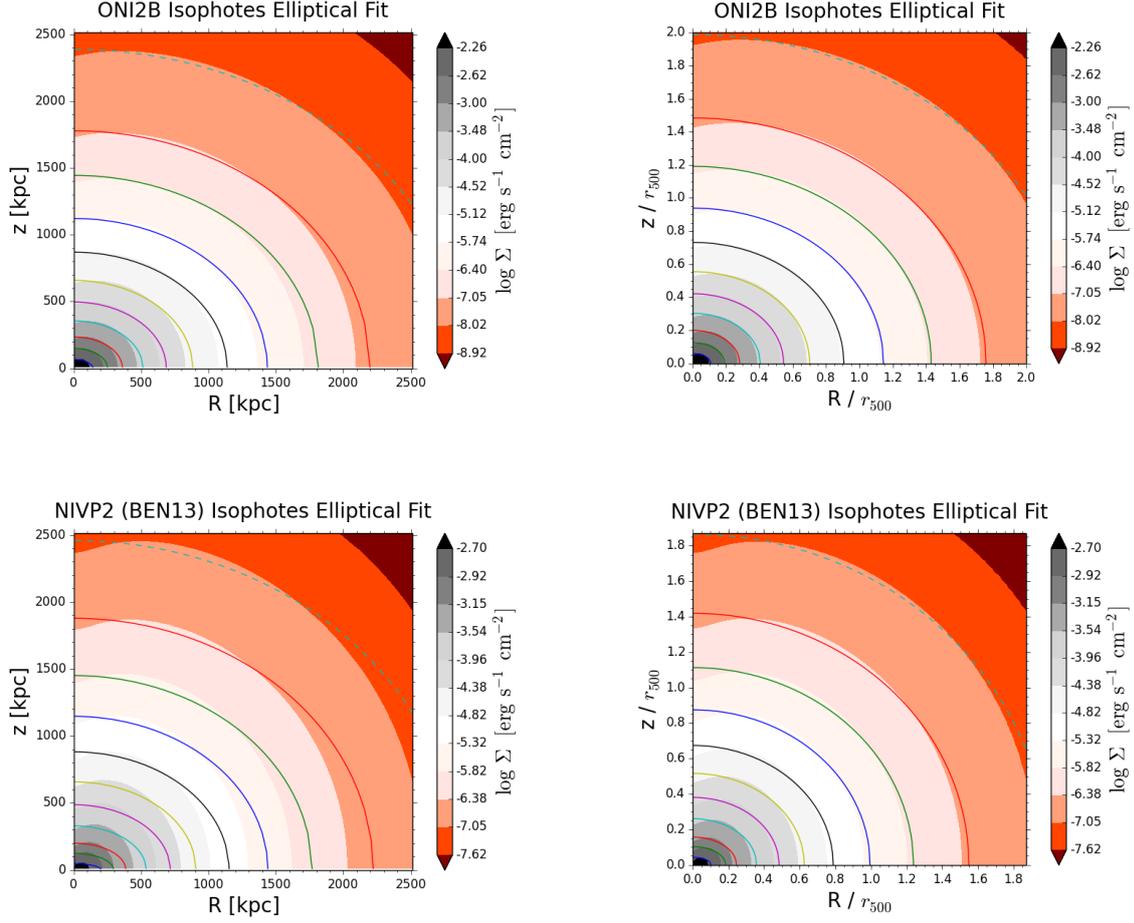


Figura D.1: Fit ellittico all’opera sulle isofote del modello oblatto *ONI2B* della presente tesi (in alto) e del modello sferico *NIVP2* di *BEN13* (in basso): a sinistra è rappresentato l’uso di una griglia con valori radiali e verticali definiti logaritmici (introduzione cap. 3), mentre a destra i valori sono gli ordinari lineari normalizzati a  $r_{500} = 1213$  kpc (sopra) e  $r_{500} = 1345$  kpc (sotto); i contorni tratteggiati si riferiscono all’estensione del metodo in verticale. Il secondo caso lineare sembra decisamente migliore, soprattutto per quel che riguarda la parte prossima all’asse  $R$ .

come risulta definita dalla griglia del programma<sup>1</sup>. Da qui è facile applicare le due formule in (D.2) che portano immediatamente all’ellitticità quale era stata definita in (4.2): in altre parole, la forma dell’isofota in questione è riprodotta dall’ellisse avente questi parametri. Al fine di estendere quanto più possibile la nostra analisi abbiamo ripetuto, utilizzando tutto il dominio radiale per l’interpolazione lineare, un’analogia procedura a partire dalla posizione teorica  $(0, z)$ , associata all’isofota  $\Sigma(R_{\max})$ , fino a  $z_{\max}$ : ciò ci permette di dedurre il comportamento dell’ellitticità includendo pure l’intero dominio verticale. Graficamente, questo vuol dire che sono escluse soltanto quelle brillanze  $\Sigma$  tali che la loro isofota intercetterebbe l’asse delle ordinate in uno  $z > z_{\max}$ .

La figura D.1 illustra i risultati dell’operazione descritta sulle mappe di brillantezza dei modelli *ONI2B* e *NIVP2*: abbiamo deciso di concentrarci su questi perché rappresentano i due casi estremi delle tipologie di maggior interesse tra quelle contenute in questo lavoro e in *BEN13*. In figura D.2 sono invece mostrati, a dato modello, i profili di ellitticità

<sup>1</sup>Assumiamo che l’andamento funzionale tra punti contigui sia dato dalla retta che li unisce: indicando con  $\Sigma_j$  i valori discreti della mappa di brillantezza a fissato  $R_j$ , ed individuato il sottointervallo di questo dominio tale che  $\Sigma_j \leq \Sigma' \leq \Sigma_{j+1}$ , si avrà perciò la stima  $z(\Sigma') = z(\Sigma_j) + \frac{z(\Sigma_{j+1}) - z(\Sigma_j)}{\Sigma_{j+1} - \Sigma_j} (\Sigma' - \Sigma_j)$ .

radiale derivanti da entrambi i metodi di fit visti: in questi plot, per evitare problemi di scarso campionamento, scartiamo i primi valori ( $R \lesssim 50$  kpc). Dalla prima di queste figure si può evincere che l'utilizzo di una griglia lineare normalizzata implica un notevole miglioramento della procedura di tipo ellittico, specialmente nel semiquadrante inferiore. Riteniamo che la ragione principale che porta a giustificare questo comportamento sia il fatto che l'ordinaria definizione lineare degli assi rende la griglia omogenea, quindi il campionamento è regolare, di contro la definizione logaritmica dà una griglia più "fitta" e più "diradata" rispettivamente a basse ed alte distanze (questo era anche il motivo per cui era stata scelta).

Per completezza includiamo un confronto conclusivo applicando i due metodi di fit alla mappa di brillantezza di prova  $\Sigma \propto 1/m$  utilizzata per testare l'accuratezza della procedura numerica di quello basato sui momenti d'inerzia (par. 4.3). Dalla figura D.3 è evidente che per una semplice distribuzione ellittica entrambi i metodi danno lo stesso risultato (almeno per  $R/r_{500} \gtrsim 0.04$ ), tuttavia lo stesso non si può dire se le isofote hanno una forma più complicata: i valori significativamente differenti che si ottengono in quest'ultimo caso (fig. D.2) non implicano necessariamente che un metodo sia giusto mentre l'altro sia sbagliato, ma semplicemente che stanno misurando cose diverse. Noi usiamo il metodo di *Lau+12* perché vogliamo confrontarci con le loro misure effettuate su cluster osservati.

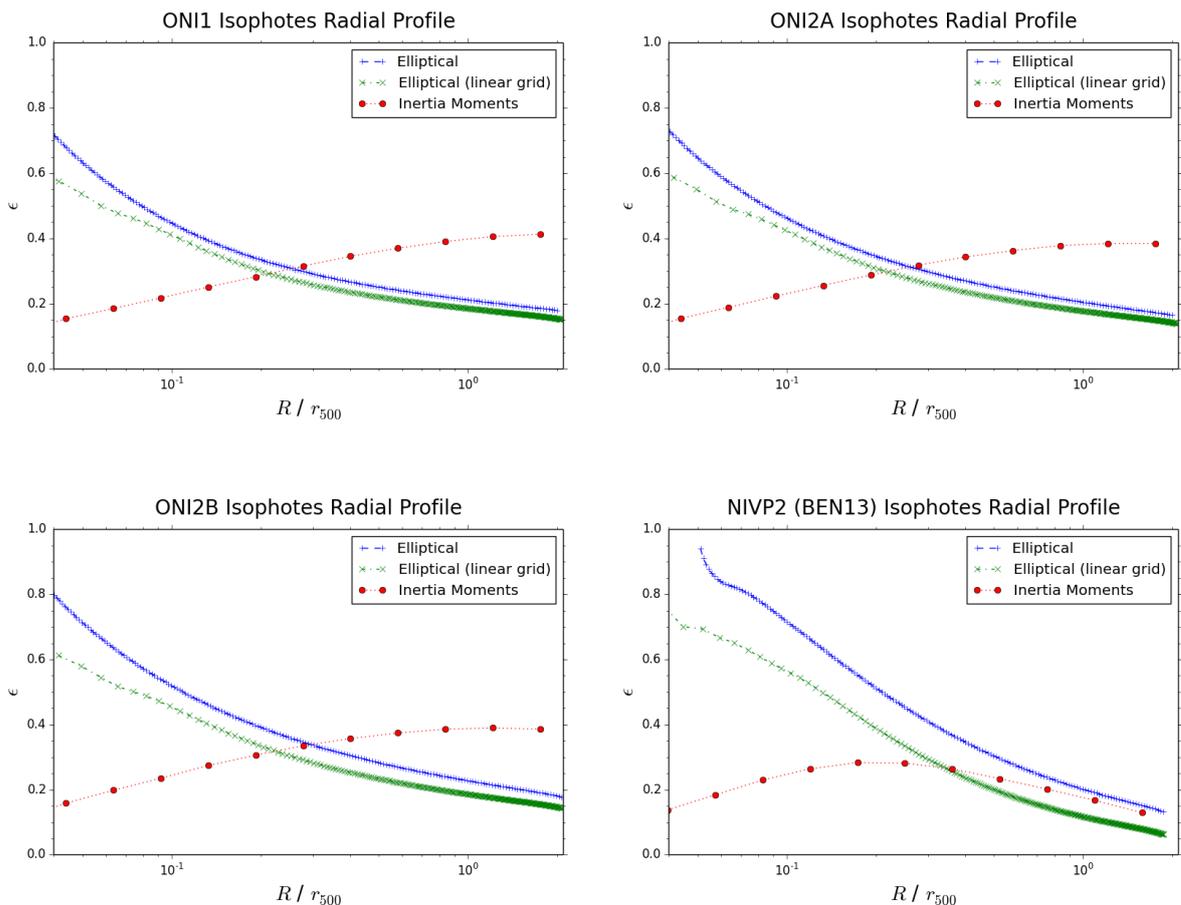


Figura D.2: Profilo radiale di ellitticità delle isofote nei modelli *ONI1*, *ONI2A*, *ONI2B* e *NIVP2 (BEN13)* ottenuto con il metodo di fit ellittico (griglia logaritmica o lineare normalizzata) confrontato con l'analogo ottenuto nel cap. 4 tramite il metodo di *Lau et al. (2012)* basato sui momenti d'inerzia.

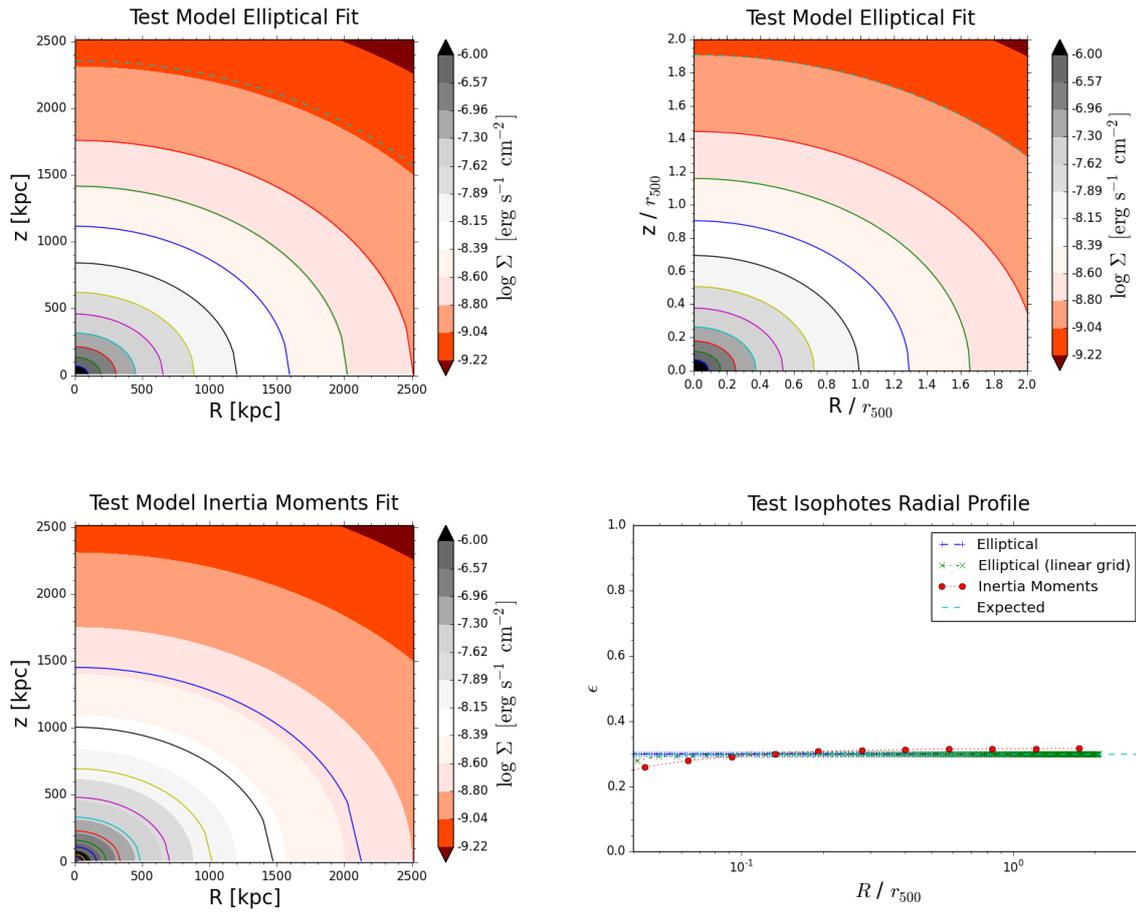


Figura D.3: Mappe di brillantezza del modello di test del metodo di *Lau+12* (vedi par. 4.3) con sovrapposte le ellissi di fit delle isofote quali risultano dal metodo ellittico (griglia logarimica in alto a sinistra, griglia lineare normalizzata in alto a destra) e dallo stesso metodo per momenti d'inerzia (ellitticit  delle 15 shell in cui   suddiviso il dominio, in basso a sinistra). Nell'angolo inferiore destro sono riportati tutti i profili radiali dell'ellitticit , da cui si vede che con entrambi i metodi l'operazione d  risultati visivamente molto buoni rispetto all'atteso  $\epsilon = 0.3$ .

# Bibliografia

- Gas rotation in galaxy clusters: signatures and detectability in X-rays* [M. Bianconi, S. Ettori and C. Nipoti, MNRAS 434, 1565-1575 (2013)]
- A simple method to construct exact density-potential pairs from a homeoidal expansion* [L. Ciotti and G. Bertin, A&A 437, 419-427 (2005)]
- Magnetorotational instability in cool cores of galaxy clusters* [C. Nipoti, L. Posti, S. Ettori and M. Bianconi, J. Plasma Phys., Cambridge University Press, vol. 81, 1-16 (2015)]
- Gas rotation in massive galaxy clusters with axisymmetric potential: models and perspectives for X-ray observations* [Alberto Acuto, relatore Chiar.mo Prof. Carlo Nipoti, Co-relatore Dott. Stefano Ettori, Tesi di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia, DIFA, Università degli Studi di Bologna (A.A. 2016/2017 Sessione I)]
- Universal thermodynamic properties of the intracluster medium over two decades in radius in the X-COP sample* [V. Ghirardini, D. Eckert, S. Ettori, E. Pointecouteau, S. Molendi, M. Gaspari, M. Rossetti, S. De Grandi, M. Roncarelli, H. Bourdin, P. Mazzotta, E. Rasia and F. Vazza, A&A 621, A41 (2019)]
- Constraining cluster physics with the shape of X-ray clusters: comparison of local X-ray clusters vs.  $\Lambda$ CDM clusters* [E. T. Lau, D. Nagai, A. V. Kravtsov, A. Vikhlinin and A. R. Zentner, ApJ 755 (2), 116 (2012)]
- The baseline intracluster entropy profile from gravitational structure formation* [G. M. Voit, S. T. Kay and G. L. Bryan, MNRAS 364, 909-916 (2005)]
- Flattened stellar systems based on distribution functions depending on actions* [R. Pascale, J. Binney and C. Nipoti, MNRAS arXiv:1907.09526 (preprint version, July 2019)]
- Gas dynamics in galaxies* [Prof. Filippo Fraternali, dispensa di "Dinamica del gas nelle galassie", corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia, DIFA, Università degli Studi di Bologna (A.A. 2016/2017)]
- Fluid dynamics equations* [Prof. Carlo Nipoti, appunti di "Dinamica del gas nelle galassie", corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia, DIFA, Università degli Studi di Bologna (A.A. 2018/2019)]

- The polytropic state of the intracluster medium in the X-COP cluster sample* [V. Ghirardini, S. Ettori, D. Eckert and S. Molendi, A&A 627, A19 (2019)]
- The structure of cold dark matter halos* [J. F. Navarro, C. S. Frenk and S. D. M. White, ApJ 462, 563 (1996)]
- What is a cool-core cluster? A detailed analysis of the cores of the X-ray flux-limited HIFLUGCS cluster sample* [D. S. Hudson, R. Mittal, T. H. Reiprich, P. E. J. Nulsen, H. Andernach and C. L. Sarazin, A&A 513, A37 (2010)]
- Measuring the hydrostatic mass bias in galaxy clusters by combining Sunyaev-Zel'dovich and CMB lensing data* [G. Hurier and R. E. Angulo, A&A 610, L4 (2018)]
- Arc(let)s in clusters of galaxies* [B. Fort and Y. Mellier, The Astronomy and Astrophysics Review 5, 239-292 (1994)]
- Kinetic Sunyaev-Zeldovich effect from galaxy cluster rotation* [J. Chluba and K. Mannheim, A&A 396, 419-427 (2002)]
- The XXL Survey (IV. Mass-temperature relation of the bright cluster sample)* [M. Lieu, G. P. Smith, P. A. Giles, F. Ziparo, B. J. Maughan, J. Démoclès, F. Pacaud, M. Pierre, C. Adami, Y. M. Bahé, N. Clerc, L. Chiappetti, D. Eckert, S. Ettori, S. Lavoie, J. P. Le Fevre, I. G. McCarthy, M. Kilbinger, T. J. Ponman, T. Sadibekova and J. P. Willis, A&A 592, A4 (2016)]
- Origin of magnetic field in the intracluster medium: primordial or astrophysical?* [J. Cho, ApJ (draft version, August 2018)]
- The interaction of matter and radiation in a hot-model Universe* [Y. B. Zel'dovich and R. A. Sunyaev, Ap&SS 4 (3), 301-316 (1969)]
- A powerful local shear instability in weakly magnetized disks (I. Linear analysis)* [S. A. Balbus and J. F. Hawley, ApJ 376, 214 (1991)]
- On the coherent rotation of diffuse matter in numerical simulations of clusters of galaxies* [A. S. Baldi, M. De Pretis, F. Sembolini, G. Yepes, L. Lamagna and E. Rasia, MNRAS 465, 2584-2594 (2017)]
- Lensing and X-ray mass estimates of clusters (simulations)* [E. Rasia, M. Meneghetti, R. Martino, S. Borgani, A. Bonafede, K. Dolag, S. Ettori, D. Fabian, C. Giocoli, P. Mazzotta, J. Merten, M. Radovich and L. Tornatore, New Journal of Physics, 14(5):055018 (2012)]
- Extragalactic Astronomy and Cosmology (An Introduction)* [P. Schneider, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006)]
- Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure* [P. Coles and F. Luc-

chin, Wiley, 2nd Edition (2002)]

*Una finestra sull'Universo "Invisibile"* [C. and R. Fanti, dispensa di "Lezioni di Radioastronomia", Università degli Studi di Bologna (A.A. 2011/2012)]