

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**LA SOLUZIONE DI HURWITZ
DEL PROBLEMA ISOPERIMETRICO**

Tesi di laurea in Complementi di Analisi

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Mariachiara Corucci

II Sessione
Anno Accademico 2018-2019

Alla mia famiglia

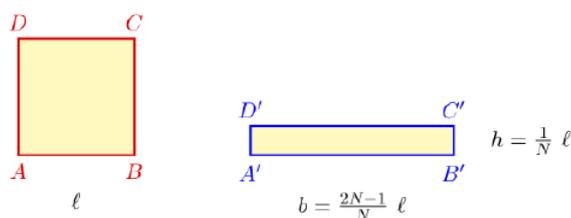
Indice

Introduzione	i
1 L'Analisi di Fourier	1
1.1 Polinomi trigonometrici reali	1
1.2 Polinomi e serie di Fourier	3
1.3 Convergenza puntuale della serie di Fourier	11
1.4 Integrazione termine a termine della serie di Fourier	19
1.5 Convergenza uniforme della serie di Fourier	24
1.6 Convergenza in L^2 della serie di Fourier e Identità di Parseval	25
2 La soluzione di Hurwitz	27
A Teorema di Gauss Green per il calcolo dell'area	31
Bibliografia	34

Introduzione

Tra tutte le curve chiuse di perimetro fissato nel piano, quale curva, se esiste, massimizza l'area della regione inclusa?

Tale problema, noto come *problema isoperimetrico*, ha rappresentato per i matematici motivo di profondo interesse per molti secoli. Già gli antichi Greci, nel tentativo di stimare la grandezza di nuovi territori e città, o di dividere in modo equo appezzamenti di terreno, si accorsero che misurare il perimetro non era un criterio efficiente per stabilire l'estensione di una superficie, in quanto figure di ugual area potevano avere perimetri estremamente differenti e, viceversa, figure con ugual perimetro potevano avere aree molto diverse. Si immagini infatti ad esempio di prendere un quadrato $ABCD$ di lato l e dunque di area $A = l^2$ e di perimetro $4l$ e, dato un numero naturale N , di costruire un rettangolo $A'B'C'D'$ di altezza $h = \frac{l}{N}$ e di base $b = \frac{2N-1}{N}l$ e dunque di area $A' = (\frac{2N-1}{N^2})l^2$ e di perimetro $P' = 4l$.



Queste due figure hanno stesso perimetro P e diversa area ($A' < A$) e si può osservare che, all'aumentare di N , l'area A' diventa sempre minore dell'area A .

Nonostante la semplicità di questo esempio, è importante osservare come questo concetto non fosse così ovvio all'epoca, si pensi infatti che molti governanti si erano guadagnati una reputazione di uomini onesti, distribuendo alla popolazione appezzamenti di terreno con lo stesso perimetro, ma con minor area di quelli che tenevano per sè.

Anche nella mitologia il problema isoperimetrico trova una sua formulazione. Scrive Virgilio nel I libro dell'Eneide:

“[...] <i>dux femina facti.</i> <i>Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis</i> <i>moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,</i> <i>mercantique solum, facti de nomine Byrsam,</i> <i>taurino quantum possent circumdare terga”</i>	<i>“fragile donna a tanto ardire è guida!</i> <i>E vennero nei luoghi ove fra poco</i> <i>vedrai le grandi mura e, già sorgente,</i> <i>della nuova Cartagine la rocca;</i> <i>e, comprarono il suol (Birsa pel nome</i> <i>detto del fatto) quanto ne potesse</i> <i>una taurina pelle contenere”</i>
--	---

La leggenda a cui Virgilio fa riferimento in questo passo dell'Eneide è quella di Didone e della fondazione della città di Cartagine. La principessa fenicia, dopo aver appreso che suo fratello Pigmalione aveva ucciso suo marito Sicheo per impossessarsi del regno, fuggì da Tiro, accompagnata da alcuni sudditi fedeli. Viaggiò a lungo, fino ad approdare sulle coste libiche, dove si rivolse al re locale Iarba per l'acquisto di un appezzamento di terra su cui costruire una nuova città. Quest'ultimo le promise tanta terra quanta ne potesse contenere una pelle di toro. La tradizione narra che Didone fece tagliare tale pelle in strisce sottili, le fece annodare tra di loro ottenendo una lunga corda che fece disporre a forma di semicerchio e con gli estremi in mare, in modo da poter recintare la massima estensione di terra, comprendendo anche la costa. I suoi sudditi, e con loro, nel corso dei secoli, molti studiosi e matematici si domandarono se quella fosse realmente la scelta migliore, dando così adito alla ricerca sui problemi di isoperimetria. In particolare questo problema è noto come *problema di Didone* e può essere formulato matematicamente nel seguente modo: *“tra tutte le curve della stessa lunghezza aventi estremi su una retta assegnata, determinare quelle che delimitano con la retta la figura piana di area maggiore”*, o equivalentemente, *“tra tutte le curve aventi estremi su una retta assegnata che delimitano con la retta figure piane della stessa area, determinare quelle che hanno lunghezza minore”*. Si osservi che il problema così formulato è strettamente correlato al problema isoperimetrico enunciato all'inizio, in quanto, se C è una curva che risolve il problema di Didone, allora, riflettendo, rispetto alla retta assegnata, la figura delimitata da C , necessariamente si ottiene una figura che è soluzione del problema isoperimetrico. Nella mitologia vengono narrati anche altri episodi simili al precedente, come ad esem-

pio la vicenda di Orazio Coclite, eroe romano che riuscì ad arrestare l'avanzata degli Etruschi guidati da Porsenna. Tito Livio narra che i Romani, per omaggiarlo, gli dedicarono una statua e gli promisero un terreno avente perimetro tracciabile con l'aratro in un'unica giornata di lavoro (“*Grata erga tantam virtutem civitas fuit: statua in comitio posita; agri quantum uno die circumaravit datum*”). Interpretando il vincolo dell'unica giornata di lavoro come vincolo sulla lunghezza dell'arco tracciato dall'aratro, è chiaro che il problema affrontato da Coclite rientra in un problema di massimizzazione dell'area.

Pur essendo la soluzione del problema isoperimetrico intuitivamente nota fin dall'antichità, come mostrano i precedenti esempi, molti illustri matematici hanno a lungo lavorato per dare basi rigorose a tale intuizione, riuscendoci solo a partire dalla fine del 1800, molti anni dopo la sua formulazione.

Le prime congetture nella determinazione delle soluzioni vengono attribuite al matematico greco Zenodoro (200-140 a.C) il quale, con ragionamenti geometrici, riuscì a dimostrare che il cerchio ha area maggiore di ogni poligono di ugual perimetro.

Con il passare degli anni vennero fatti importanti progressi, basati su ragionamenti di tipo geometrico: J. Steiner (1796-1863) propose tecniche innovative (simmetrizzazione di Steiner) per mostrare l'unicità del cerchio come soluzione, lasciando però aperto il problema dell'esistenza di una soluzione; solo in seguito W. Blaschke (1885-1962) perfezionò i metodi di Steiner, riuscendo a dimostrare l'esistenza di una figura di area minima usando un teorema di compattezza nella classe delle figure convesse; T. Bonnesen (1873-1935) stimò che il così detto *deficit isoperimetrico* di una figura E , ossia la quantità $\Delta(E) = P^2(E) - 4\pi A(E)$, è sempre non minore di $\alpha(E) := \pi^2(R - r)^2$, con r e R raggi dei cerchi inscritti e circoscritti in E .

A partire dalla fine del 1800 iniziarono ad essere proposte anche rigorose dimostrazioni analitiche: K. Weierstrass (1815-1897) propose una dimostrazione variazionale dell'esistenza di figure di area massima, A.Hurwitz (1859-1919) e H.Lebesgue (1875-1941) sfruttarono la teoria delle serie di Fourier ed alcune disuguaglianze integrali per raggiungere lo stesso scopo; H. Minkowski (1864-1909) riuscì a dare un'altra dimostrazione dell'esistenza, limitata però al caso di figure convesse.

Il problema fu completamente risolto da Ennio de Giorgi (1928-1996), il quale consi-

derò la più grande classe possibile di insiemi, gli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Egli infatti, riprendendo alcune idee di R. Cacciopoli (1904-1959), ridefinì la nozione di perimetro e dimostrò l'esistenza di soluzioni al *problema isoperimetrico generale*, così formulato: *“tra tutte le figure piane aventi perimetro di De Giorgi assegnato, determinare quelle aventi misura di Lebesgue massima”*.

La dimostrazione proposta da De Giorgi è valida anche in uno spazio di dimensione finita qualsiasi, ed in tal caso sono le sfere N-dimensionali a massimizzare la misura N-dimensionale di Lebesgue tra tutti gli insiemi di ugual perimetro di De Giorgi N-dimensionali.

Questa tesi si propone di studiare la soluzione analitica del problema isoperimetrico nel piano proposta da Adolf Hurwitz nel 1902 nell'articolo dal titolo *“Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier”*.

Nel primo capitolo vengono presentati i risultati principali dell'Analisi di Fourier, fondamento della dimostrazione di Hurwitz, che sarà invece presentata in dettaglio nel secondo capitolo. Segue inoltre un'appendice sull'applicazione del Teorema di Gauss Green per il calcolo dell'area di una figura piana, risultato utilizzato nella dimostrazione del nostro problema.

Capitolo 1

L'Analisi di Fourier

In questo capitolo vengono presentati alcuni notevoli risultati riguardanti le serie di Fourier. Si parte dalle prime definizioni, per poi addentrarsi nello studio della convergenza, puntuale e uniforme, di tale serie, fino ad arrivare a dimostrarne la convergenza in L^2 .

1.1 Polinomi trigonometrici reali

Definizione 1.1.1. Si dice *polinomio trigonometrico reale* ogni funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della forma:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.1)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ costanti reali.

Se i coefficienti a_n e b_n di indice massimo non sono entrambi nulli si dice che p ha grado n .

Si indica con T_n l'insieme dei polinomi trigonometrici reali di grado $\leq n$.

Teorema 1.1.1. Se $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

è un polinomio trigonometrico reale di grado $\leq n$ allora:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos kt \, dt \quad \forall k \geq 0, \quad (1.2)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin kt \, dt \quad \forall k \geq 1. \quad (1.3)$$

Dimostrazione. Integrando p sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, sfruttando la linearità dell'integrale rispetto alla somma e ricordando che le funzioni $\cos kt$ e $\sin kt$, per ogni $k \geq 1$, hanno integrale nullo su tale intervallo, si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dt = \pi a_0. \quad (1.4)$$

Si moltiplica ora $p(t)$ per $\cos ht$, con $1 \leq h \leq n$, e si integra su $[-\pi, \pi]$. Sfruttando ancora la linearità dell'integrale rispetto alla somma, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos ht \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ht \, dt + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos ht \, dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos ht \, dt \right) \\ &= \pi a_h \end{aligned} \quad (1.5)$$

in quanto, come si può facilmente verificare utilizzando le Formule di Prostaferesi,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos ht \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ \pi & \text{se } k = h \end{cases}$$

mentre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos ht \, dt = 0 \quad \forall k, h \in \mathbb{N}.$$

(1.4) e (1.5) provano (1.2). In modo analogo, moltiplicando $p(t)$ per $\sin ht$, con $1 \leq h \leq n$, e integrando su $[-\pi, \pi]$, si ottiene (1.3). \square

Corollario 1.1.2. *Si osserva che ogni polinomio $p(t) \in T_n$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di seni e coseni e cioè, se*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

allora

$$a_k = \alpha_k \quad \forall k \geq 0 \quad e \quad b_k = \beta_k \quad \forall k \geq 1.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente da (1.2) e da (1.3). \square

Teorema 1.1.3. T_n è uno spazio vettoriale di dimensione $2n + 1$ rispetto alle consuete operazioni di somma e di prodotto per scalare e $U = \{1, \cos kt, \sin kt, k = 1, \dots, n\}$ è una base di T_n .

Dimostrazione. Risulta ovvio che T_n è il sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ generato dai $2n + 1$ elementi di U . Si considerino ora $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema 1.1.1 segue che $a_0 = a_k = b_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$ e ciò prova la lineare indipendenza degli elementi di U . \square

1.2 Polinomi e serie di Fourier

Definizione 1.2.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si definisce **polinomio di Fourier di grado n di f** il seguente polinomio trigonometrico reale:

$$S_n(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.6)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ks \, ds \quad \forall k \geq 0 \quad (1.7)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ks \, ds \quad \forall k \geq 1. \quad (1.8)$$

I coefficienti a_k e b_k in (1.7) e in (1.8) sono chiamati **coefficienti di Fourier di f** .

Osservazione 1.2.1. Tali coefficienti sono ben definiti in quanto $|\cos kt| \leq 1$, $|\sin kt| \leq 1 \quad \forall k = 1, \dots, n$ e $f \in L^1([-\pi, \pi])$.

Osservazione 1.2.2. *Si può osservare che il passaggio da $S_n(f)(t)$ a $S_{n+1}(f)(t)$ richiede l'aggiunta della quantità:*

$$a_{n+1} \cos((n+1)t) + b_{n+1} \sin((n+1)t).$$

La successione S_n dei polinomi di Fourier di f “si presenta dunque spontaneamente come una serie” ([7], pag. 74)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

Viene pertanto data la seguente definizione:

Definizione 1.2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si chiama **serie di Fourier di f** la serie trigonometrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.9}$$

dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f .

Si introduce ora una famiglia di funzioni che consentirà di ottenere rappresentazioni integrali dei polinomi di Fourier.

Definizione 1.2.3. *Si definisce **n -esimo nucleo di Dirichlet**, $n \in \mathbb{N}$, il seguente polinomio trigonometrico di grado n :*

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

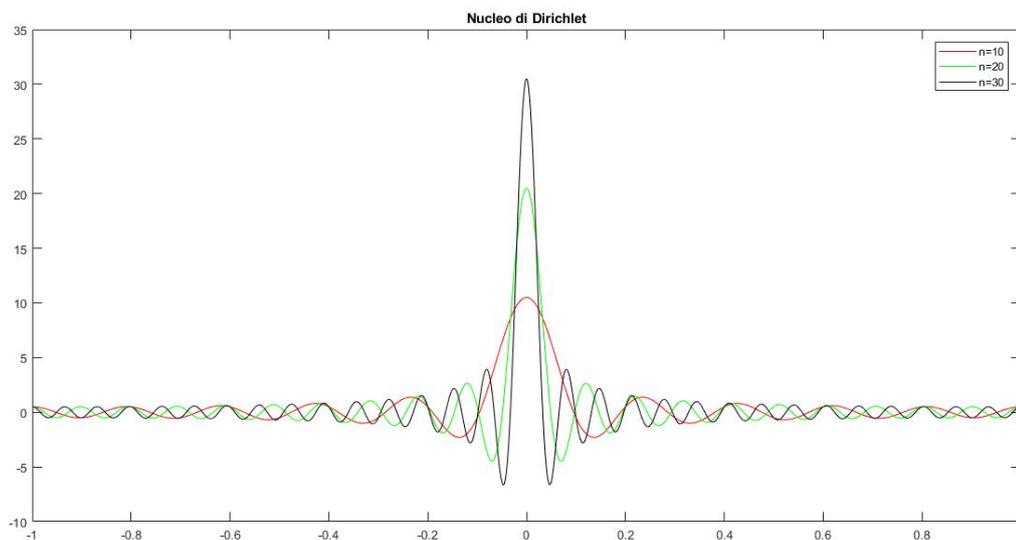


Figura 1.1: Grafici di D_n per $n = 10, 20, 30$

Prima di procedere nello studio di questo nucleo, viene enunciato un lemma, che risulterà essere un utile strumento per dimostrare risultati importanti.

Lemma 1.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f \in L^1([-\pi, \pi])$, allora $f \in L^1([a - \pi, a + \pi])$ $\forall a \in \mathbb{R}$ e risulta:*

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

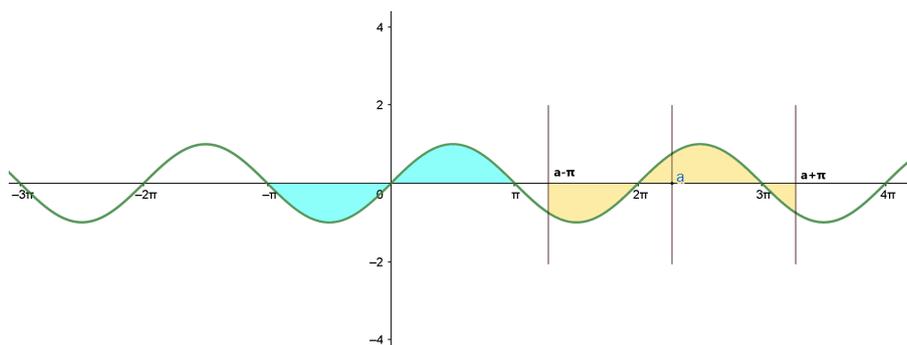


Figura 1.2: L'integrale su un periodo è invariante per traslazione.

Dimostrazione. Occorre distinguere in due casi:

(i) $a = 2k\pi$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$.

Ponendo $t - 2k\pi = s$ e sfruttando la 2π -periodicità di f , si ha che:

$$\int_{2k\pi-\pi}^{2k\pi+\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(s + 2k\pi) ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds.$$

(ii) $a \neq 2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$.

Poichè si sta lavorando in un intervallo di lunghezza 2π , si ha che $\exists \tilde{k} \in \mathbb{Z}$ tale che $2\tilde{k}\pi \in [a - \pi, a + \pi]$. Si considera $2\tilde{k}\pi \in [a - \pi, a]$. Risulta dunque:

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) dt = \int_{a-\pi}^{(2\tilde{k}+1)\pi} f(t) dt + \int_{(2\tilde{k}+1)\pi}^{a+\pi} f(t) dt = (*)$$

Ponendo nel secondo integrale $t - 2\pi = s$ e sfruttando la 2π periodicità della f si ha che:

$$(*) = \int_{a-\pi}^{(2\tilde{k}+1)\pi} f(t) dt + \int_{(2\tilde{k}-1)\pi}^{a-\pi} f(s + 2\pi) ds = \int_{(2\tilde{k}-1)\pi}^{(2\tilde{k}+1)\pi} f(t) dt.$$

Per quanto mostrato nel caso (i) risulta:

$$\int_{(2\tilde{k}-1)\pi}^{(2\tilde{k}+1)\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

da cui segue la tesi.

Si procede in modo analogo nel caso in cui $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ sia tale che $2\tilde{k}\pi \in [a, a + \pi]$.

□

Il nucleo di Dirichlet gode delle seguenti proprietà:

- (i) $D_n(t)$ è una funzione 2π -periodica;
- (ii) $D_n(t)$ è una funzione pari, ossia $D_n(t) = D_n(-t)$;
- (iii) Vale:

$$\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{\pi}{2}. \quad (1.11)$$

Infatti, poichè $\int_0^{\pi} \cos kt dt = 0 \forall k \geq 1$, risulta $\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Sull'intervallo $]0, \pi[$ il nucleo D_n può essere scritto in forma chiusa nel seguente modo:

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Infatti, moltiplicando per $\sin(\frac{t}{2})$ entrambi i membri di (1.10) e utilizzando l'identità

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \alpha))$$

valida $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{t}{2}\right) D_n(t) &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \left(\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{t}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t \right) + \cdots + \left(\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) - \sin \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) t \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right). \end{aligned}$$

Ciò mostra (1.12).

Come mostra il seguente teorema, tale nucleo permette di dare un rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier.

Teorema 1.2.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Allora:*

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad (1.13)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sostituendo (1.7) e (1.8) in (1.6), si ottiene:

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ks \cos kt + \sin ks \sin kt) \right) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(s-t)) \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(s-t) ds \\
&\text{(ponendo } s-t = \sigma) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma \\
&\text{(applicando il lemma 1.2.1 alla funzione } 2\pi\text{-periodica } \sigma \mapsto f(t+\sigma) D_n(\sigma)) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma + \int_0^{\pi} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t-s) D_n(-s) + f(t+s) D_n(s)) ds \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} D_n(s) ds.
\end{aligned}$$

□

Viene ora introdotto un importante risultato il quale mostra che, tra tutti i polinomi trigonometrici, quello che meglio approssima una funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ è proprio il polinomio di Fourier di f .

Teorema 1.2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Allora:*

$$\|f - p\|_{L^2([-\pi, \pi])} \geq \|f - S_n(f)\|_{L^2([-\pi, \pi])} \quad \forall p \in T_n$$

dove con $\|\cdot\|_{L^2}$ si indica la norma quadratica indotta dal prodotto interno (indicato con \langle, \rangle) di cui è munito lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$ e cioè $\|p\|_{L^2} = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} p(t)^2 dt}$.

Osservazione 1.2.3. *Si ponga innanzitutto l'attenzione sul fatto che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi]$, allora f è*

sommabile su $[-\pi, \pi]$. Infatti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f| dt = \int_{\{|f| \leq 1\}} |f| dt + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} dt + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^2 dt \leq 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt.$$

É dunque lecito definire il polinomio di Fourier $S_n(f)$ per ogni funzione 2π -periodica, di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi]$.

Dopo aver fatto questa importante osservazione, si può ora dimostrare il teorema.

Dimostrazione. Sia $U^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\}$. Per brevità di notazione si indicano gli elementi di U^* nel seguente modo: $\{u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}\}$.

Si verifica facilmente che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_k u_h dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ 1 & \text{se } k = h \end{cases}$$

e cioè che U^* è una base ortonormale di T_n rispetto alla norma quadratica.

Si può dunque scrivere

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k$$

dove

$$\hat{f}_k = \langle f, u_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f u_k dt.$$

Se p è un qualunque polinomio trigonometrico di grado $\leq n$, esistono c_0, c_1, \dots, c_{2n} in \mathbb{R} tali che $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k$.

Si sfruttano ora le proprietà di linearità del prodotto interno e di ortonormalità degli elementi della base U^* per poter sviluppare entrambi i membri della disuguaglianza da dimostrare. Al primo membro si ottiene:

$$\begin{aligned} \|(f - p)\|_{L^2}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\langle p, f \rangle_{L^2} + \|p\|_{L^2}^2 \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k + \sum_{k=0}^{2n} (c_k)^2 = \sum_{k=0}^{2n} ((c_k)^2 - 2c_k \hat{f}_k) + \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

mentre al secondo

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{L^2}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 - 2\langle f, S_n(f) \rangle + \|S_n(f)\|_{L^2}^2 \\ &= \|f\|_{L^2}^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} (\hat{f}_k)^2 + \sum_{k=0}^{2n} (\hat{f}_k)^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n(f)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Questi sviluppi mostrano che dimostrare la disuguaglianza cercata equivale a provare che

$$\sum_{k=0}^{2n} ((c_k)^2 - 2c_k \hat{f}_k) + \|f\|_{L^2}^2 \geq \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n(f)\|_{L^2}^2$$

e cioè

$$\sum_{k=0}^{2n} \left((c_k)^2 - 2c_k \hat{f}_k + (\hat{f}_k)^2 \right) = \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2 \geq 0$$

disuguaglianza sempre verificata in quanto una somma di quadrati è sempre positiva. \square

Corollario 1.2.3 (Disuguaglianza di Bessel). *Nelle ipotesi del Teorema 1.2.2 risulta:*

$$\|S_n(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.14)$$

Dimostrazione. Per quanto dimostrato nel teorema precedente, basta osservare che

$$0 \leq \|f - S_n(f)\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n(f)\|_{L^2}^2$$

da cui segue

$$\|S_n(f)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

\square

Osservazione 1.2.4. *Usando la notazione introdotta nella dimostrazione del teorema 1.2.2, si può riscrivere la (1.14) nel seguente modo:*

$$\sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indicando con a_k e b_k i coefficienti di Fourier di f , risulta $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_0$ e, per $1 \leq k \leq n$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{f}_k$, $b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{f}_{n+k}$.

La disuguaglianza di Bessel (1.14) si può quindi scrivere anche così:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.15)$$

Osservazione 1.2.5. *Nella dimostrazione del Teorema 1.2.2 si è visto che*

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|S_n(f)\|_{L^2}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che tale uguaglianza vale per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|f\|_{L^2}^2$ non dipende da n , ne consegue che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2}^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

Ciò significa che nella disuguaglianza di Bessel (1.14) vale il segno di uguaglianza (ossia quella che in seguito verrà chiamata *Identità di Parseval*) se e solo se la serie di Fourier di f converge ad f nella norma L^2 .

Scopo di questo capitolo sarà arrivare a dimostrare la convergenza della serie di Fourier in L^2 , dalla quale dedurre, per quanto appena osservato, l'identità di Parseval, che risulterà essere un utile strumento nella dimostrazione del problema isoperimetrico proposta da Hurwitz. Per poter fare ciò, occorre prima studiare altri importanti risultati riguardanti in particolare la convergenza, puntuale e uniforme, della serie di Fourier.

1.3 Convergenza puntuale della serie di Fourier

Definizione 1.3.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi]$. Si dice che la serie di Fourier di f **converge puntualmente** in $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) \in \mathbb{R}.$$

Si dice invece che f è **svilupppabile in serie di Fourier** nel punto $t \in \mathbb{R}$ se la sua serie di Fourier converge nel punto t ed ha somma uguale a $f(t)$.

In questo caso dunque, se gli a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f , risulta

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (1.16)$$

Osservazione 1.3.1. È importante osservare che il problema della convergenza della serie di Fourier (ossia l'esistenza del limite reale di S_n) è differente dal problema della svilupppabilità di f (ossia l'eventuale uguaglianza di questo limite con $f(t)$). Infatti, se si modifica la funzione $f(t)$ su un insieme di misura nulla, in particolare in un punto, i suoi coefficienti di Fourier a_k e b_k , essendo definiti come integrali di Lebesgue, rimangono invariati. Conseguentemente anche la successione dei polinomi $(S_n(f))$ rimane invariata. In generale è quindi possibile che la serie sia convergente in un punto, ma il suo limite

non coincida con la funzione valutata in quel punto. Per questo motivo si preferisce studiare il problema della sviluppabilità in serie di Fourier cercando condizioni sufficienti per la convergenza di $(S_n(f)(t))$ che consentano anche di determinare l'eventuale valore del limite.

Dopo questa importante precisazione, vengono introdotti alcuni risultati necessari per lo studio della convergenza puntuale della serie di Fourier.

Teorema 1.3.1 (Localizzazione di Riemann). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$. $\forall t \in \mathbb{R}$ fissato, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda,$$

(ii) $\exists c \in]0, \pi[$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{1}{s} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = 0.$$

Per poter dimostrare questo teorema, occorre il seguente lemma:

Lemma 1.3.1 (Riemann-Lebesgue). *Per ogni funzione sommabile $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, vale:*

$$\lim_{|M| \rightarrow \infty} \int_a^b g(s) \sin(Ms) ds = 0 \quad (1.17)$$

e, analogamente,

$$\lim_{|M| \rightarrow \infty} \int_a^b g(s) \cos(Ms) ds = 0. \quad (1.18)$$

Dimostrazione. Per la densità dell'insieme delle funzioni C^∞ e a supporto compatto nello spazio delle funzioni sommabili, $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $\text{supp } \phi \subseteq]a, b[$ e $\|g - \phi\|_{L^1} = \int_a^b |g(s) - \phi(s)| ds < \varepsilon$. Allora:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(s) \sin(Ms) ds \right| &\leq \left| \int_a^b (g(s) - \phi(s)) \sin(Ms) ds \right| + \left| \int_a^b \phi(s) \sin(Ms) ds \right| \\ &\leq \int_a^b |g(s) - \phi(s)| ds + \left| \int_a^b \phi(s) \sin(Ms) ds \right| \\ &< \varepsilon + \left| \int_a^b \phi(s) \sin(Ms) ds \right|. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\int_a^b \phi(s) \sin(Ms) ds = \left[-\phi(s) \frac{\cos(Ms)}{M} \right]_{s=a}^{s=b} + \int_a^b \phi'(s) \frac{\cos(Ms)}{M} ds = \frac{1}{M} \int_a^b \phi'(s) \cos(Ms) ds$$

dato che $\phi = 0$ in un intorno di a e di b .

Dunque:

$$\left| \int_a^b \phi(s) \sin(Ms) ds \right| \leq \frac{1}{|M|} \int_a^b |\phi'(s)| ds \rightarrow 0 \quad \text{per } |M| \rightarrow +\infty.$$

Dunque esiste $\bar{M} = M(\varepsilon, \phi)$ tale che $\forall M > \bar{M}$

$$\left| \int_a^b \phi(s) \sin(Ms) ds \right| < \varepsilon.$$

Da questa e da (1.19) segue (1.17).

In modo analogo si può dimostrare anche (1.18). □

Si può ora dimostrare il teorema 1.3.1.

Dimostrazione. Per abbreviare la notazione, si pone $m_f(t, s) := \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2}$.

Si osserva innanzitutto che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) - \lambda = 0$$

(per teorema 1.2.1)

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi m_f(t, s) D_n(s) ds - \lambda = 0$$

(per la proprietà (iii) del nucleo di Dirichlet)

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (m_f(t, s) - \lambda) D_n(s) ds = 0. \quad (1.20)$$

Dunque, invece di verificare direttamente l'equivalenza tra (i) e (ii), si verifica l'equivalenza tra (1.20) e (ii).

Si definisce la funzione:

$$g(s) = (m_f(t, s) - \lambda) \frac{1}{2 \sin\left(\frac{s}{2}\right)}$$

Tale funzione è sommabile su $]c, \pi[\forall c \in]0, \pi[$, dunque per il lemma 1.3.1 risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^\pi g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0$$

Ne segue che

$$(1.20) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^c g(s) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = 0$$

se e solo se $\exists c \in]0, \pi[$ tale che

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(s, t) - \lambda) \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds \right. \\ \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{s} (m_f(s, t) - \lambda) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds \right) = 0. \end{aligned}$$

La funzione $s \mapsto \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right)$ è continua e limitata su $]0, c[$, quindi la funzione

$$s \mapsto (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right)$$

è sommabile su $]0, c[$. Usando ancora il lemma 1.3.1 si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c (m_f(t, s) - \lambda) \left(\frac{1}{2 \sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = 0$$

e quindi si conclude che:

$$(1.20) \Leftrightarrow \exists c \in]0, \pi[\text{ tale che } \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{s} (m_f(t, s) - \lambda) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) s \right) ds = 0.$$

□

Da questo teorema si deducono importanti criteri di convergenza della serie di Fourier.

Notazione 1.3.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione per la quale esistono finiti i limiti destro $f(t^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t + s)$ e sinistro $f(t^-) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t - s)$. Si definisce

$$f^*(t) := \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad (1.21)$$

Teorema 1.3.2 (Teorema di Dini). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$. Se nel punto $t \in \mathbb{R}$ esiste finito $f^*(t)$ e se la funzione

$$s \mapsto \left(\frac{f(t + s) + f(t - s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s} \quad (1.22)$$

è sommabile su $]0, c[$, per un opportuno $c \in]0, \pi[$, allora la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è $f^*(t)$.

Dimostrazione. Poichè la funzione in (1.22) è sommabile, per il lemma di Riemann Lebesgue (lemma 1.3.1) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = 0$$

Si conclude con il teorema 1.3.1. □

Osservazione 1.3.2. *Se f è continua in t allora $f^*(t) = f(t)$ e quindi, se la condizione di Dini è soddisfatta, f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto t .*

Viene ora introdotto un criterio che garantisce l'esistenza del limite (1.21) e la sommabilità della funzione (1.22).

Teorema 1.3.3 (Criterio di Hölder). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, e sia $t \in \mathbb{R}$. Se esistono $\alpha \in]0, 1]$, M e $c > 0$ tali che*

$$|f(s) - f(\tau)| \leq M|s - \tau|^\alpha \quad \forall s, \tau \in]t, t+c[\text{ e } \forall s, \tau \in]t-c, t[\quad (1.23)$$

(si osservi che per $\alpha = 1$ si ottiene la condizione di Lipschitz), allora:

- (i) esistono in \mathbb{R} $f(t^+)$ e $f(t^-)$;
- (ii) la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è $f^*(t)$.

Dimostrazione.

- (i) Si dimostra innanzitutto che esiste finito $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(t+s)$. Ciò equivale a mostrare che per una qualunque successione reale a termini positivi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tale che $a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, esiste finito $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+a_n)$. Dalla condizione di Holderianità (1.23) segue che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n, m > \bar{n}$

$$|f(t+a_n) - f(t+a_m)| \leq M|a_n - a_m|^\alpha.$$

Da tale disuguaglianza e dal fatto che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, segue che anche $(f(t+a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R} e dunque esiste finito $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+a_n)$. Provando in modo analogo l'esistenza del limite sinistro, risulta soddisfatta (i).

(ii) Dalla condizione di holderianità segue che

$$|f(t+s) - f(t^+)| = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} |f(t+s) - f(t+\tau)| \leq \lim_{\tau \rightarrow 0^+} M|s-\tau|^\alpha = Ms^\alpha$$

per $0 < s < c$. Analogamente

$$|f(t-s) - f(t^-)| \leq Ms^\alpha \quad \text{per } 0 < s < c.$$

Allora, per $0 < s < c$ si ha:

$$\frac{|f(t+s) + f(t-s) - 2f^*(t)|}{s} \leq \frac{|f(t+s) - f(t^+)|}{s} + \frac{|f(t-s) - f(t^-)|}{s} \leq \frac{2M}{s^{1-\alpha}}$$

Si conclude con il teorema 1.3.2, dato che, essendo $\alpha > 0$, la funzione $s \mapsto \frac{1}{s^{1-\alpha}}$ è sommabile su $]0, c[$.

□

Vengono ora introdotte le così dette *funzioni a variazione limitata* ed alcune loro proprietà.

Definizione 1.3.2. Sia $[a, b]$ un intervallo di \mathbb{R} , sia $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una partizione di $[a, b]$ e sia $\Omega_{[a,b]}$ l'insieme di tutte le scomposizioni di $[a, b]$.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si pone:

$$v_a^b(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Si dice che f è **a variazione limitata** se:

$$V_a^b(f) := \sup\{v_a^b(f, \sigma) \mid \sigma \in \Omega_{[a,b]}\} < \infty.$$

Si indica con $f \in BV([a, b])$. V_a^b è detta **variazione totale** di f su $[a, b]$. Si dice inoltre che la funzione

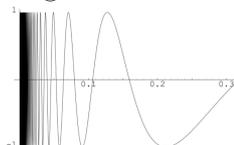
$$[a, b] \ni x \mapsto V_a^x(f)$$

è la **funzione variazione totale** associata a f .

Tali funzioni godono di alcune proprietà importanti:

- (i) Sono limitate su un intervallo (ciò segue direttamente dalla definizione). In generale non vale però il viceversa, ne è infatti esempio la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



che è limitata ma non a variazione limitata.

- (ii) $f \in BV([a, b])$ se e solo esistono $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni monotone non decrescenti tali che $f = \phi - \psi$. Tale risultato prende il nome di **Teorema di Decomposizione di Jordan**.

Dimostrazione. Se $f = \phi - \psi$ con ϕ, ψ crescenti, allora si può scrivere

$V_a^b(f) = V_a^b(\phi) - V_a^b(\psi)$, da cui segue immediatamente la tesi osservando che le funzioni monotone sono un particolare esempio di funzioni a variazione limitata.

Viceversa, supponiamo che f sia a variazione limitata e poniamo, per $x \in [a, b]$,

$$\phi(x) = f(x) - f(a) + V_a^x(f) \quad \text{e} \quad \psi(x) = V_a^x(f) - f(a).$$

Si verifica facilmente che ϕ e ψ sono come richiesto, infatti: $f = \phi - \psi$, la monotonia di ϕ segue dal fatto che $V_{x_1}^{x_2}(f) \geq |f(x_2) - f(x_1)|$, mentre la monotonia di ψ segue dall'osservare che se f è una funzione a variazione limitata allora la sua funzione variazione totale $V_a^b(f)$ è monotona non decrescente.

□

- (iii) Se f è a variazione limitata in $[a, b]$, allora f appartiene a $L^1[a, b]$.

Dimostrazione. Ricordando che le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann e che ogni funzione Riemann integrabile su un intervallo compatto è sommabile nel senso di Lebesgue, tale proprietà segue direttamente dal Teorema di Decomposizione di Jordan.

□

Per questa classe di funzioni vale il seguente notevole risultato di convergenza.

Teorema 1.3.4 (di Jordan per serie di Fourier). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in BV([-\pi, \pi])$. Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f^*(t) \forall t \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Si osserva innanzitutto che, come visto nella proprietà (iii), la funzione f dell'enunciato è sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si osserva inoltre che la decomposizione di f nella differenza di due funzioni monotone (proprietà (ii)) garantisce l'esistenza del limite $f(t^+)$ in ogni punto $t \in [-\pi, \pi[$ e l'esistenza di $f(t^-)$ in ogni punto $t \in]-\pi, \pi]$ e, di conseguenza, la 2π -periodicità di f assicura l'esistenza di $f(t^+)$ e di $f(t^-)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$.

Sia $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Come osservato nella proprietà (ii), si può decomporre f come $f = \phi - \psi$ con ϕ, ψ monotone e limitate su $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) &= \frac{f(t+s) - f(t^+)}{2} + \frac{f(t-s) - f(t^-)}{2} \\ &= \frac{\phi(t+s) - \phi(t^+)}{2} + \frac{\phi(t-s) - \phi(t^-)}{2} - \frac{\psi(t+s) - \psi(t^+)}{2} - \frac{\psi(t-s) - \psi(t^-)}{2} \\ &= (\phi_1 + \phi_2 + \psi_3 + \psi_4)(s) \end{aligned}$$

dove $\phi_1(s)$ è una funzione monotona crescente, positiva e tale che $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi_1(s) = 0$; $\phi_2(s)$ è monotona decrescente, negativa e tale che $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi_2(s) = 0$; $\phi_3(s)$ è monotona decrescente, negativa e tale che $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi_3(s) = 0$; $\phi_4(s)$ è monotona crescente, positiva e tale che $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi_4(s) = 0$.

Per poter applicare il Teorema di Localizzazione di Riemann, si vuole ora mostrare che esiste un $c > 0$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \sum_{j=1}^4 \phi_j(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = 0$$

e cioè, per linearità dell'integrale, tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^4 \int_0^c \phi_j(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = 0.$$

Si mostra in particolare che esiste $c > 0$ tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \phi_1(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds = 0,$$

per ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 la dimostrazione è del tutto analoga. Ponendo $\tau = ((n + \frac{1}{2})s)$ e ricordando che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ è convergente nel senso di Riemann generalizzato e dunque per ogni fissato $\varepsilon > 0 \exists m > 0$ tale che $|\int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x} dx| < \varepsilon \forall \alpha, \beta \geq m$, risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^c \phi_1(s) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds &= \int_0^{((n + \frac{1}{2})c)} \phi_1\left(\frac{\tau}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \\ &= \int_0^m \phi_1\left(\frac{\tau}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \int_m^{((n + \frac{1}{2})c)} \phi_1\left(\frac{\tau}{n + \frac{1}{2}}\right) \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \\ &= I_1(n) + I_2(n). \end{aligned}$$

Dal momento che $|\frac{\sin \tau}{\tau}| \leq 1 \forall \tau > 0$ e ϕ_1 è monotona crescente ed anche positiva, si ha:

$$|I_1(n)| \leq \int_0^m \phi_1\left(\frac{\tau}{n + \frac{1}{2}}\right) \left|\frac{\sin \tau}{\tau}\right| d\tau \leq \phi_1\left(\frac{m}{n + \frac{1}{2}}\right) m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_1(0^+) = 0.$$

Per poter invece stimare I_2 , si applica il Teorema della media integrale alle funzioni $\phi_1(s)$ e $\frac{\sin s}{s}$, ossia: se $(n + \frac{1}{2})c > m$, esiste $\eta \in]m, (n + \frac{1}{2})c[$ tale che

$$I_2(n) = \phi_1\left(\frac{m}{n + \frac{1}{2}}\right) \int_m^\eta \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \phi_1(c) \int_\eta^{((n + \frac{1}{2})c)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$$

Sfruttando ancora la convergenza dell'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$, la monotonia e la positività di ϕ_1 , risulta:

$$|I_2(n)| \leq 2\phi_1(c)\varepsilon.$$

Mettendo insieme queste due stime si conclude la dimostrazione. \square

1.4 Integrazione termine a termine della serie di Fourier

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che una qualunque serie di Fourier può essere integrata termine a termine su ogni intervallo compatto della retta reale.

Teorema 1.4.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi]$ e sia*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

la sua serie di Fourier. Sia inoltre

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$$

la funzione integrale di f , nulla in $-\pi$. Allora:

(i) F è continua in \mathbb{R} e $F \in BV([-\pi, \pi])$;

(ii) $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G(x) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = F(x) - \frac{a_0}{2}(x + \pi)$$

è una funzione 2π -periodica e la sua serie di Fourier risulta essere

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

dove

$$A_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{k}$$

Dimostrazione.

(i) Per mostrare la continuità di F , si considera $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}$

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \chi_{[x, x+h]}(t) dt.$$

Poichè $\chi_{[x, x+h]}$, per definizione di funzione caratteristica, è una funzione limitata da 1 e tale che $\lim_{h \rightarrow 0^+} \chi_{[x, x+h]} = 0$, si può passare al limite sotto segno di integrale, come garantito del Teorema della convergenza dominata di Lebesgue, ottenendo:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) - F(x) = 0.$$

Ripetendo un procedimento analogo sull'intervallo $[x+h, x]$ con $h \rightarrow 0^-$, si ottiene la continuità di F in ogni punto.

Si scompone ora f come $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, dove $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$. Risulta dunque:

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt = \int_{-\pi}^x f^+(t) dt - \int_{-\pi}^x f^-(t) dt =: \phi(x) - \psi(x),$$

con $\phi(x), \psi(x)$ monotone crescenti, essendo f^+ e f^- entrambe positive. Dal Teorema di decomposizione di Jordan segue che $F \in BV([-\pi, \pi])$.

(ii) G è 2π -periodica, in quanto, $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} G(x+2\pi) &= \int_{-\pi}^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = G(x) + \int_x^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \\ &\text{(per la } 2\pi\text{-periodicit\`a di } f \text{ e per il lemma 1.2.1)} \\ &= G(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = G(x) + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \pi a_0 \\ &= G(x). \end{aligned}$$

Si possono dunque calcolare i coefficienti di Fourier della G . $\forall k \geq 1$ si ha:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^x f(t) - \frac{a_0}{2} dt \right) \cos kx dx \\ &\text{(scambiando l'ordine di integrazione)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \cos kx dx \right) \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{\sin kt}{k} dt \\ &= -\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt f(t) dt \right) = -\frac{1}{k} b_k \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \right) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_t^{\pi} \sin kx dx \right) \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k} (\cos kt - (-1)^k) \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{k} a_k. \end{aligned}$$

Poichè $G(x) = F(x) - \frac{a_0}{2}(x + \pi)$, per quanto mostrato in (i), G è una funzione continua in ogni punto e a variazione totale limitata in $[-\pi, \pi]$. Per il Teorema di Jordan (teorema 1.3.4), G è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto e dunque $\forall x \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx).$$

Valutando questo sviluppo nel punto $x = -\pi$ si ottiene:

$$0 = G(-\pi) = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{k}$$

da cui

$$A_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k b_k}{k}$$

□

Osservazione 1.4.1. *In questa dimostrazione si è visto che, essendo $G \in C([-\pi, \pi]) \cap BV([-\pi, \pi])$, per il Teorema di Jordan (1.3.4), si ha che*

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da questa relazione, dalla definizione di G e dalla definizione di A_0 , si ottiene:

$$F(x) = \frac{a_0}{2}(x + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx + b_k ((-1)^k - \cos kx)). \quad (1.24)$$

È importante osservare che la serie al secondo membro è proprio la serie ottenuta integrando termine a termine la serie di Fourier di f sull'intervallo $[-\pi, x]$.

Si vuole ora dare una formulazione duale del teorema appena visto. Per fare ciò occorre prima introdurre le funzioni *assolutamente continue*.

Definizione 1.4.1. *Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **assolutamente continua** se :*

(i) *f è derivabile quasi dappertutto in $[a, b]$,*

(ii) *la funzione derivata f' è sommabile su $[a, b]$ e risulta:*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Osservazione 1.4.2. *Le funzioni assolutamente continue sono continue e a variazione limitata.*

Osservazione 1.4.3. *Ogni funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e C^1 a tratti è assolutamente continua.*

Teorema 1.4.2. *Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, assolutamente continua in $[-\pi, \pi]$. Allora F è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto di \mathbb{R} . Inoltre la serie di Fourier di F' si ottiene derivando termine a termine quella di F .*

Dimostrazione. Si denota con f la funzione derivata di F , ponendo $f = 0$ nei punti in cui F non è derivabile. Per le ipotesi fatte su F , f risulta essere 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$ ed inoltre

$$F(x) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^x f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.25}$$

la serie di Fourier di f .

Si osserva che:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} (F(\pi) - F(-\pi)) = 0$$

essendo F 2π -periodica. Per il teorema 1.4.1 (punto (ii)), la funzione

$$x \mapsto G(x) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \int_{-\pi}^x f(t) dt = F(x) - F(-\pi)$$

è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto di \mathbb{R} e, poichè F e G differiscono per una costante, i loro coefficienti di Fourier A_k e $B_k \forall k \geq 1$ coincidono, cioè:

$$A_k = -\frac{1}{k} b_k \quad \text{e} \quad B_k = \frac{1}{k} a_k.$$

La serie di Fourier di F risulta pertanto essere

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) \tag{1.26}$$

con

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx.$$

Si verifica facilmente che derivando 1.26 termine a termine si ottiene proprio 1.25. \square

Dal teorema 1.4.1 si ottiene l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier, enunciata nel seguente teorema.

Teorema 1.4.3. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$ e sia*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

la sua serie di Fourier. Allora, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt. \quad (1.27)$$

Dimostrazione. Poichè $\int_{\alpha}^{\beta} = \int_{-\pi}^{\beta} - \int_{-\pi}^{\alpha}$ basta dimostrare (1.27) per gli integrali del tipo $\int_{-\pi}^x$. Per $\alpha = -\pi$ e $\beta = x$, (1.27) coincide con (1.24). \square

1.5 Convergenza uniforme della serie di Fourier

Teorema 1.5.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, assolutamente continua su $[-\pi, \pi]$ e tale che f' sia di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi]$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f su \mathbb{R} .

Dimostrazione. Si è già dimostrato nel teorema 1.4.2 che f è sviluppabile in Serie di Fourier. Sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

le serie di Fourier di f . Usando la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (k|a_k| + k|b_k|) \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n (ka_k)^2 + (kb_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Osservando che

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$$

e che, per la disuguaglianza di Bessel (si veda (1.15)), essendo f' di quadrato sommabile,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((ka_k)^2 + (kb_k)^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 dt < +\infty$$

si conclude che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty.$$

Questo prova la convergenza totale della serie di Fourier di f , dalla quale segue la convergenza uniforme. \square

1.6 Convergenza in L^2 della serie di Fourier e Identità di Parseval

Dopo aver visto i risultati di convergenza puntuale e uniforme, si può ora dimostrare la convergenza della serie di Fourier in L^2 , come già annunciato nell'osservazione 1.2.5.

Teorema 1.6.1 (Fischer-Riesz). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Allora:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0$$

Dimostrazione. Si osserva innanzitutto che l'applicazione $f \mapsto S_n(f)$ è lineare, dal momento che $S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ e i coefficienti di Fourier a_k e b_k dipendono linearmente da f . Poichè l'insieme C_0^∞ è denso in L^2 , data $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \phi \in C_0^\infty([-\pi, \pi])$ tale che $\|f - \phi\|_{L^2} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{L^2} &= \|(S_n(f) - S_n(\phi)) + (S_n(\phi) - \phi) + (\phi - f)\|_{L^2} \\ &\quad (\text{per disuguaglianza triangolare e per linearità di } S_n(f)) \\ &\leq \|S_n(f - \phi)\|_{L^2} + \|S_n(\phi) - \phi\|_{L^2} + \|f - \phi\|_{L^2} \\ &\quad (\text{applicando la disuguaglianza di Bessel al primo membro}) \\ &\leq \|f - \phi\|_{L^2} + \|S_n(\phi) - \phi\|_{L^2} + \|f - \phi\|_{L^2} \\ &= 2\|f - \phi\|_{L^2} + \|S_n(\phi) - \phi\|_{L^2} < 2\varepsilon + \|S_n(\phi) - \phi\|_{L^2} = (*) \end{aligned}$$

Essendo $\phi \in C^\infty([-\pi, \pi])$, $S_n(\phi)$ converge uniformemente a ϕ . La convergenza uniforme permette di passare al limite sotto segno di integrale, cioè:

$$\|S_n(\phi) - \phi\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(\phi)(t) - \phi(t))^2 dt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Segue dunque che

$$(*) < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

e ciò dimostra la convergenza forte, ossia in norma L^2 , di $S_n(f)$ a f . □

Teorema 1.6.2 (Identità di Parseval). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f \in L^2([-\pi, \pi])$. Allora:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \tag{1.28}$$

Dimostrazione. Segue per quanto detto nell'osservazione 1.2.5. □

Osservazione 1.6.1. *Come già visto in osservazione 1.2.5, indicando con a_k e b_k i coefficienti di Fourier di f , si può riscrivere l'Identità di Parseval (1.28) nel seguente modo:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt. \quad (1.29)$$

Questa identità può essere riformulata in una forma più generale come segue:

Teorema 1.6.3. *Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodiche e di quadrato sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Indicati con a_k, b_k i coefficienti di Fourier di f e c_k, d_k quelli di g , risulta:*

$$\frac{1}{\pi} \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k + b_k d_k. \quad (1.30)$$

Dimostrazione. Si considera la somma $f + g$ e la sua serie di Fourier

$$\frac{a_0 + c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + c_k) \cos kt + (b_k + d_k) \sin kt.$$

Si applica ora la (1.29) alla funzione $f + g$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \|f + g\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{\pi} (\|f\|_{L^2}^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|_{L^2}^2) \\ &= \frac{(a_0 + c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k + c_k)^2 + (b_k + d_k)^2). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Applicando (1.29) a f e g e sottraendo le corrispondenti equazioni per f e g in (1.31), si ottiene (1.30). □

Capitolo 2

La soluzione di Hurwitz

In questo capitolo viene presentata nel dettaglio la dimostrazione del problema isoperimetrico nel piano proposta da Adolf Hurwitz (1902). Egli, utilizzando solamente strumenti analitici, in particolare l'analisi di Fourier (trattata nel Capitolo 1) e l'applicazione del teorema di Gauss Green per il calcolo dell'area di figure piane (per la quale si veda l'Appendice A), è riuscito a mostrare che *“tra tutte le curve piane, semplici, chiuse, regolari e rettificabili di lunghezza fissata, la circonferenza è l'unica a racchiudere maggior area”*.

Teorema 2.0.1. *Sia C una curva piana, chiusa, semplice, regolare, rettificabile e definita da una parametrizzazione assolutamente continua e con derivata debole di quadrato sommabile. Se L è la lunghezza di C e A l'area della regione racchiusa da C , allora:*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Tale disuguaglianza è nota come disuguaglianza isoperimetrica.

Si verifica l'uguaglianza se e solo se C è una circonferenza.

Dimostrazione. Si parametrizza la curva C nel seguente modo:

$$C := \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

dove $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue e $BV[a, b]$ tali che:

$$f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b) \quad (C \text{ curva chiusa})$$

e

$$(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2)), \quad \forall t_1 \neq t_2 \in (a, b] \quad (C \text{ curva semplice}).$$

Senza perdita di generalità, si riparametrizza la curva in funzione della lunghezza d'arco s , con $s \in [0, L]$. Le funzioni $x(s)$ e $y(s)$ così ottenute sono ancora continue ed a variazione limitata ed inoltre, per definizione di ascissa curvilinea, vale che:

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

Si vuole ora esprimere $x(s)$ e $y(s)$ in serie di Fourier. A tale scopo, si sostituisce il parametro s con un nuovo parametro $u = \frac{2\pi s}{L}$, ottenendo così due funzioni 2π -periodiche, dal momento che la curva C che esse parametrizzano è chiusa. Si ha dunque:

$$C := \begin{cases} x = \phi(u) := x(Lu/2\pi) \\ y = \psi(u) := y(Lu/2\pi) \end{cases}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$, $\phi(0) = \phi(2\pi)$, $\psi(0) = \psi(2\pi)$.

Si suppone inoltre che $\phi(u)$ e $\psi(u)$ siano assolutamente continue e che ammettano derivate in L^2 .

Tali ipotesi garantiscono, per i risultati studiati nel primo capitolo, la sviluppabilità di $\phi(u)$, $\psi(u)$ e delle loro derivate $\phi'(u)$ e $\psi'(u)$ in serie di Fourier. Si scrivono dunque gli sviluppi in serie di Fourier di $\phi(u)$, $\phi'(u)$ e $\psi(u)$, $\psi'(u)$:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ku + b_k \sin ku), \\ \psi(u) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos ku + B_k \sin ku) \end{aligned}$$

e, per il teorema 1.4.2,

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos ku - a_k \sin ku), \\ \psi'(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(B_k \cos ku - A_k \sin ku). \end{aligned}$$

Si osserva ora che

$$(\phi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 ((x'(s))^2 + (y'(s))^2) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

e dunque:

$$\int_0^{2\pi} ((\phi'(u))^2 + (\psi'(u))^2) dt = \frac{L^2}{2\pi}.$$

Secondo la formula di Gauss-Green per il calcolo dell'area di una figura piana (si veda Appendice A), l'area A racchiusa da C può essere espressa nel seguente modo:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(u)\psi'(u) du$$

e, dall' Identità di Parseval scritta nella sua forma generale (1.30), si ottiene la seguente relazione:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(u)\psi'(u) du = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k B_k - b_k A_k).$$

D'altra parte, per quanto riguarda $\frac{L^2}{2\pi}$, utilizzando ancora l'identità di Parseval (1.29) si ha che:

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} ((\phi'(u))^2 + (\psi'(u))^2) du = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + A_k^2 + B_k^2).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2(a_k^2 + b_k^2 + A_k^2 + B_k^2) - 2k(a_k B_k - b_k A_k)] \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(ka_k - B_k)^2 + (kb_k + A_k)^2 + (k^2 - 1)(A_k^2 + B_k^2)]. \end{aligned}$$

Poichè l'ultima serie ha termini non negativi, ne segue che

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

che è la *disuguaglianza isoperimetrica*.

L'uguaglianza può essere verificata se e solo se tutti i termini della serie sono nulli e cioè quando:

$$ka_k - B_k = 0, \quad kb_k + A_k = 0, \quad (k^2 - 1)(A_k^2 + B_k^2) = 0,$$

ossia se e solo se :

$$a_k = b_k = A_k = B_k = 0, \quad \forall k > 1; \quad B_1 = a_1, \quad A_1 = -b_1.$$

Si ha dunque che:

$$\begin{cases} x = \phi(u) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos u + b_1 \sin u \\ y = \psi(u) = \frac{A_0}{2} - b_1 \cos u + a_1 \sin u \end{cases}$$

ossia:

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{A_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2$$

che rappresenta proprio una famiglia di circonferenze di centro $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{A_0}{2}\right)$ e di raggio r , con $r^2 = a_1^2 + b_1^2$. □

Appendice A

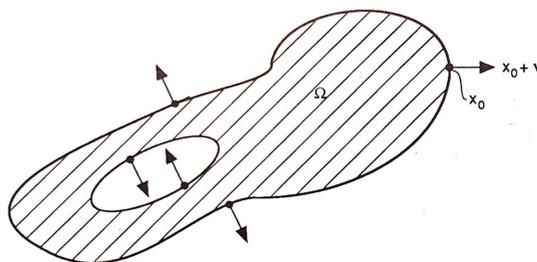
Teorema di Gauss Green per il calcolo dell'area

Definizione A.0.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Si dice che Ω è un **aperto regolare** se:

- (i) Ω è limitato,
- (ii) $\text{int}(\bar{\Omega}) = \Omega$,
- (iii) $\partial\Omega$ è una varietà $(n - 1)$ -dimensionale di classe C^1 .

Definizione A.0.2. Se Ω è un aperto regolare, si definisce ν **normale esterna** a Ω in $x_0 \in \partial\Omega$, un vettore normale a $\partial\Omega$ e per cui esista $\delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} x_0 + t\nu \notin \Omega & \forall 0 < t < \delta \\ x_0 - t\nu \notin \Omega & \forall 0 < t < \delta \end{cases}$$



Teorema A.0.1 (di Gauss-Green nel piano). *Sia Ω un aperto regolare di \mathbb{R}^2 e sia $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ una 1-forma differenziale di classe $C^1(\bar{\Omega})$, dove P e Q sono funzioni di due variabili, derivabili e con derivate parziali del primo ordine continue in un aperto contenente la chiusura di Ω . Allora:*

$$\int_{(\partial\Omega)^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{A.1})$$

Il simbolo $(\partial\Omega)^+$ indica che la frontiera $\partial\Omega$ è orientata positivamente e cioè percorsa in senso antiorario.

Dimostrazione. Si ricorda innanzitutto che, dato $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\bar{\Omega})$, con Ω aperto regolare di \mathbb{R}^n , si definisce divergenza di F :

$$\text{div} F := \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

Si può pertanto osservare che, prendendo $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (Q, -P)$, con P e Q come nell'enunciato, risulta:

$$\text{div} F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Si applica ora il teorema della divergenza ¹:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} \text{div} F dx dy = \int_{(\partial\Omega)^+} (Q\nu_x - P\nu_y) ds = (*)$$

dove $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ indica la normale esterna a Ω .

Sia ora $\partial\Omega =: \gamma$ una curva regolare di \mathbb{R}^2 (essendo Ω un aperto regolare di \mathbb{R}^2) e sia $r(t) = (x(t), y(t))$ una sua parametrizzazione, dove $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. La parametrizzazione viene scelta in modo tale che la curva γ sia percorsa in senso antiorario e quindi in modo tale che il versore normale alla curva $n(t) := \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ x'(t) & y'(t) \end{pmatrix} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$ coincida con la normale esterna ν .

¹Dato Ω aperto regolare di \mathbb{R}^n , $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\bar{\Omega})$, risulta:

$$\int_{\Omega} \text{div}(F) dx = \int_{(\partial\Omega)^+} \langle F, \nu \rangle d\sigma$$

Osservando che $ds = \|r'(t)\|dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$, risulta:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\gamma} (Q\nu_x - P\nu_y)ds = \int_a^b Q(r(t))y'(t) dt + \int_a^b P(r(t))x'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \end{aligned}$$

□

Osservazione A.0.1. *Il Teorema di Gauss Green può essere applicato per calcolare aree. Infatti, se si scelgono P e Q in modo tale che*

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1$$

allora l'integrale curvilineo

$$\int_{(\partial\Omega)^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

rappresenta l'area di Ω . In particolare, scegliendo $P(x, y) = y$ e $Q(x, y) = 0$, nella (A.1) si ottiene:

$$area(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy = - \int_{(\partial\Omega)^+} y dx, \quad (A.2)$$

scegliendo invece $Q(x, y) = x$ e $P(x, y) = 0$ nella (A.1), si ottiene:

$$area(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{(\partial\Omega)^+} x dy. \quad (A.3)$$

Inoltre, sommando la (A.2) e la (A.3) e dividendo poi per due, si ricava:

$$area(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{(\partial\Omega)^+} x dy - y dx. \quad (A.4)$$

Bibliografia

- [1] Adolf Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 19 (1902),p. 357 – 408.
- [2] Richard Courant, David Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Volume I, Springer, 1937.
- [3] Nicola Fusco, *The classical isoperimetric theorem*, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, vol. 71 n.4, 2004.
- [4] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte* Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [5] Carlo Domenico Pagani, Sandro Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli.
- [6] Annamaria Montanari, *Complementi di Analisi Matematica*, note del corso di Complementi di Analisi Matematica, Università di Bologna, A.A. 2018/2019.
- [7] Giulio Cesare Barozzi, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli, Bologna, 2004.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare innanzitutto la professoressa Montanari, per la disponibilità e gentilezza con la quale mi ha sempre ricevuto.

Ringrazio la mia famiglia, il babbo, la mamma e Fede per avermi dato la possibilità di studiare a Bologna e per avermi sempre sostenuto, compreso e accompagnato anche nei momenti di fatica e di sconforto.

Ringrazio gli amici incontrati in questi anni di università, in particolare Eli, Terri, Ele, Ciamma, Luce, Sup e Pengu, per la compagnia durante le ore di lezione, nello studio e nella preparazione degli esami, Paola, Olli, Ele per questi anni vissuti insieme in appartamento.

Ringrazio gli amici di Pesaro, in particolare Eli, Matti, Luca, Sharon, Katia e Scavo, per l'amicizia che, nonostante le distanze, è fiorita ancora di più.

Ringrazio i miei insegnanti per avermi saputo trasmettere la passione per lo studio.

Un ringraziamento speciale va infine ai miei nonni: alla nonna Joelle e alle nostre chiacchiate via Skype che ci hanno fatto sentire più vicine, alla nonna Dora che con il suo sguardo e i suoi occhi azzurri, pur senza dire una parola, mi testimonia ancora tutto il suo amore, al nonno Duilio che sarebbe sicuramente stato orgoglioso di me e sono certa starà già festeggiando in Cielo.