

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

SULL'INTERFERENZA QUANTISTICA
INDOTTA DAL
POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Relatore:
Chiar.^{mo} Prof.
Roberto Casadio

Presentata da:
Goffredo Piani

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Con l'avvento della meccanica quantistica è emerso un nuovo parametro che non ha alcun equivalente nella meccanica classica. La fase di un'onda di materia. Essa è direttamente influenzata dal potenziale cui l'onda è sottoposta, dunque anche dal potenziale gravitazionale.

Colella, Overhauser e Werner in uno storico esperimento del 1975 ne introdussero una modalità di verifica che prevede un'interferometria su di un fascio di neutroni. Infatti, i due rami dell'interferometro, se soggetti a un livello differente di potenziale, producono una figura di interferenza.

In questa tesi sono trattati i vari fattori che influenzano gli esperimenti COW. A fianco degli effetti gravitazionali, vi sono quelli causati dalla rotazione terrestre, quelli dovuti alla deformazione del cristallo interferometrico e quelli introdotti dalla teoria della *dynamical diffraction*.

Infine viene descritta, una tra le tante, l'applicazione di questa tipologia di esperimenti nella verifica del principio di equivalenza in ambito quantistico.

Indice

Introduzione	v
1 Fase e potenziale gravitazionale	1
1.1 Livello zero di potenziale	1
1.1.1 Trattazione generale	1
1.1.2 Potenziale gravitazionale	2
1.2 Prima verifica sperimentale	4
1.2.1 Apparato sperimentale	4
1.2.2 Risultati ottenuti	6
1.3 Successivi esperimenti COW	6
1.3.1 Risultati ottenuti	9
2 Effetti secondari	11
2.1 Effetto Sagnac	11
2.1.1 Derivazione formale dalla Lagrangiana	11
2.1.2 Interferometro verticale	13
2.2 Deformazione	14
2.2.1 Raggi-X	15
2.2.2 Interferometro a due lunghezze d'onda	15
2.3 Dynamical diffraction	17
2.4 Termini minori	20
3 Conseguenze degli esperimenti COW	21
3.1 Principio di equivalenza	21
3.1.1 Equivalenza debole	21
3.1.2 Equivalenza forte	23
3.2 Esperimenti COW con fotoni	24
3.2.1 Effetto Sagnac su fotoni	24
3.2.2 Effetto COW su fotoni	25
4 Conclusione	27

Introduzione

Con l'avvento della meccanica quantistica è emerso un nuovo parametro che non ha alcun equivalente nella meccanica classica. La fase di un'onda di materia.

La fase è direttamente influenzata dal potenziale all'interno del quale la particella compie il suo moto. Essendo la particella un corpo massivo, uno dei potenziali a cui può essere soggetta è quello gravitazionale.

$$\Delta\Phi = -\frac{m}{\hbar} \int gz dt$$

Una delle particolari conseguenze è la dipendenza della fase dell'onda di materia dal rapporto m/\hbar e dunque la profonda connessione tra il mondo quantistico e il potenziale gravitazionale. Così come, rivoluzionario, è lo scardinamento dell'idea della gravità come teoria puramente geometrica, in quanto questo aspetto dei suoi effetti non è indipendente dalla massa probatoria che viene posta all'interno del potenziale per analizzarne le caratteristiche.

La presente trattazione si prefigge di analizzare i principali risvolti dell'esperimento volto alla verifica di questi peculiari esiti della meccanica quantistica. Nel 1975 Colella, Overhauser e Werner pubblicano l'articolo "*Observation of gravitationally induced quantum interference*" in cui riportano la conferma sperimentale dello sfasamento causato dal potenziale gravitazionale.

L'idea di base è di impiegare un classico interferometro per separare un fascio di neutroni altamente collimato in due percorsi, far correre questi a due altezze diverse e infine riunirli per vederne la figura di interferenza prodotta.

Successivamente, una pleora di esperimenti ispirati a questo si sono susseguiti nella speranza di migliorare tecniche di sperimentazione e risultati ottenibili. I degni eredi sono riportati nell'articolo del 1980 di Staudenmann, Werner, Colella e Overhauser e in quello del 1997 di Littrell, Allman e Werner. Le principali e più importanti innovazioni introdotte sono l'uso di due lunghezze d'onda per i neutroni e il così detto interferometro a *phase-shifting* in cui una lamina metallica

rotante è frapposta alle lastre dell'interferometro. Entrambe vengono impiegate per migliorare il metodo di *fitting* dei dati.

Una delle conseguenze più interessanti e forse inaspettata di tutto ciò è l'aver trovato un metodo per verificare il principio di equivalenza in ambito quantistico. La connessione tra gravità e meccanica quantistica rende quest'ultima imprescindibilmente necessaria nell'analisi in cui appaiono sia la massa inerziale che quella gravitazionale. Dunque è chiaro che se si riescono a verificare con questo impianto i postulati del principio di equivalenza, esso sarà verificato in ambito quantistico.

Capitolo 1

Fase e potenziale gravitazionale

1.1 Livello zero di potenziale

1.1.1 Trattazione generale

Classicamente il livello assoluto di potenziale non ha valore fisico in quanto la Lagrangiana di un sistema è tale a meno di una costante. Dunque qualsiasi valore di potenziale venga scelto come livello zero si può andare a modificare la Lagrangiana perché ne tenga conto senza causare variazioni nelle equazioni del moto. Queste, infatti, dipendono solamente da derivate della Lagrangiana e non possono presentare termini dovuti a una costante che necessariamente viene nullificata dalla derivazione. In meccanica quantistica ciò non è più valido. Infatti emerge una nuova caratteristica che non ha corrispettivi nella meccanica classica che è la fase. Questa è influenzata direttamente dall'energia del sistema e dunque risente del valore assoluto del potenziale a cui l'oggetto in analisi è sottoposto.

Si ipotizzi, infatti, di considerare uno stato quantico $|\Psi, t_0\rangle$ soggetto a un potenziale $V(\mathbf{x})$ e la sua evoluzione nel tempo. La generica Hamiltoniana del sistema sarà

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

e si ha l'usuale relazione di propagazione temporale

$$|\Psi, t\rangle = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\dot{q}, q, t) dt\right] |\Psi, t_0\rangle \quad (1.2)$$

Considerando ora un nuovo potenziale, diverso dal precedente unicamente per il livello di zero scelto

$$\widetilde{V}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) + V_0 \quad (1.3)$$

e convenendo sul fatto che al tempo $t = t_0$ sia

$$|\widetilde{\Psi}, t_0\rangle = |\Psi, t_0\rangle \quad (1.4)$$

si può lavorare sulla precedente eq. 1.2 per ricavare la relazione tra lo stato soggetto a potenziale $V(\mathbf{x})$ e quello inizialmente considerato $|\Psi, t\rangle$. Inizialmente si sostituiscono la Lagrangiana con il nuovo potenziale e l'eq. 1.4

$$\begin{aligned} |\widetilde{\Psi}, t\rangle &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \widetilde{\mathcal{L}}(\dot{q}, q, t) dt\right] |\widetilde{\Psi}, t_0\rangle \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\dot{q}, q, t) - V_0 dt\right] |\Psi, t_0\rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

poi grazie alle proprietà degli integrali e degli esponenziali si ottiene

$$\begin{aligned} &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\dot{q}, q, t) dt - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_0 dt\right] |\Psi, t_0\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_0 dt\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\dot{q}, q, t) dt\right] |\Psi, t_0\rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove si ritrova l'eq. 1.2 del propagatore che può essere sostituita, si nota inoltre che il potenziale V_0 è una costante e quindi può essere portato fuori dall'integrale

$$|\widetilde{\Psi}, t\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} V_0 \int_{t_0}^t dt\right] |\Psi, t\rangle \quad (1.7)$$

Dunque appare evidente che lo sfasamento causato da V_0 allo stato quantico $|\widetilde{\Psi}, t\rangle$ rispetto allo stato $|\Psi, t\rangle$, che è direttamente dipendente sia dal livello zero di potenziale stesso, sia dal tempo, è

$$\Delta\Phi_{V_0}(t) = -\frac{V_0}{\hbar}(t - t_0) \quad (1.8)$$

1.1.2 Potenziale gravitazionale

Un'interessante conseguenza di questo ragionamento si ha nel caso del potenziale gravitazionale, ovvero $V_{grav} = mgz$.¹

Classicamente la generica Lagrangiana di un punto materiale libero di muoversi all'interno del potenziale gravitazionale è

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - mgz \quad (1.9)$$

¹Valido anche per i neutroni in caduta libera, verificato da McReynolds [1], Dabbs, Harvey, Paya et al. [2] e Koester [3]

Essa può essere inserita all'interno del principio di minima azione

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - mgz dt = 0 \quad (1.10)$$

e sostituita nelle equazioni del moto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \quad m\ddot{\mathbf{x}} = -mg \quad (1.11)$$

Chiaramente in entrambe le relazioni è immediata l'eliminazione della massa che di fatto non gioca alcun ruolo nella dinamica classica.

Anche per questo la gravità viene considerata come una teoria puramente geometrica ovvero dipendente solo e unicamente dall'ambiente all'interno del quale un oggetto è posto e non dalle caratteristiche del corpo stesso quali la massa.

Invece nell'analisi con l'impianto teorico della meccanica quantistica, l'analogo di partenza è l'equazione di Schrödinger. In questa, come si può facilmente notare sotto, risulta impossibile cancellare il rapporto m/\hbar che lega profondamente i due mondi della meccanica quantistica e della gravità.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mgz \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.12)$$

Questo fornisce una prima idea intuitiva del fatto che la dinamica dell'oggetto in analisi debba essere influenzata dal suddetto rapporto tra massa e costante di Plank ridotta.

Un caso triviale della gravità in ambito quantistico è conseguenza diretta del teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}] \right\rangle \quad (1.13)$$

che se applicato agli operatori \hat{x} e \hat{p} fornisce

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \left\langle \frac{\hat{p}}{m} \right\rangle \quad (1.14a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = \left\langle -\frac{\partial}{\partial x} V(x) \right\rangle = \langle \mathbf{F} \rangle \quad (1.14b)$$

Ovvero, in definitiva, combinandole si ricava l'analogo delle equazioni del moto classiche in valor medio della meccanica quantistica

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{x} \rangle = -mg\hat{\mathbf{z}} \quad (1.15)$$

Queste, però, sono un caso triviale perché, appunto, la massa si cancella² e non si riscontra un effetto in cui essa appaia esplicitamente.

Come anticipato precedentemente, per poter rilevare un esito diretto del potenziale gravitazionale, ovvero una relazione in cui compaia esplicitamente la massa, occorre rifarsi all'eq. 1.8 in cui va sostituito il potenziale gravitazionale al posto di V_0 . Infatti la fase delle onde di materia è direttamente dipendente, come visto poco sopra, dal potenziale in cui l'onda si propaga e dunque nel caso del potenziale gravitazionale, dipendente dalla massa.

1.2 Prima verifica sperimentale

1.2.1 Apparato sperimentale

Per verificare sperimentalmente che il potenziale gravitazionale ha un ruolo diretto nella fase delle onde di materia, per primi, Overhauser e Colella [4] e Colella, Overhauser e Werner [5] ipotizzarono e realizzarono un apparato interferometrico con l'impiego di neutroni. Da qui in poi una serie di esperimenti sempre più precisi e accurati furono realizzati, basandosi sulla stessa idea teorica, per eviscerare ogni fattore intervenisse nello sfasamento e per migliorare il più possibile i risultati ottenuti. Questi esperimenti successivi, in onore degli avanguardisti, vengono detti esperimenti COW.

L'idea generale fu quella di usare un interferometro per separare un fascio di neutroni, far camminare le due gambe dell'interferometro ad altezze dal suolo diverse per poi ricombinarle e analizzare la figura di interferenza prodotta. Essendo a due altezze diverse dal suolo, infatti, le due traiettorie percorse dai neutroni sono a livelli di potenziale gravitazionale diversi per cui le due onde guadagnano una fase differente l'una dall'altra. Per la precisione presentano uno sfasamento come da eq. 1.2.

Viene riportato in fig. 1.1 un diagramma schematico dell'apparato interferometrico impiegato. Qui si vede il cristallo interferometrico di silicio scolpito da un blocco unico per assicurarsi la maggiore precisione possibile nell'allineamento dei piani rifrattivi del materiale. Questo presenta tre falde, la prima delle quali impiegata per separare il fascio neutronico, la seconda per reindirizzare le due gambe dell'interferometro verso un punto comune e l'ultima per riunire in un unico fascio e dunque creare la figura di interferenza cercata. Sul fondo sono presenti tre contatori di neutroni. Tra la seconda e la terza lastra è posta un'ulteriore lamina verticale che può ruotare su un asse normale al piano dei percorsi interferometrici.

²Si assume qui che anche in meccanica quantistica resti valido il principio di equivalenza tra la massa inerziale e quella gravitazionale, si veda 3.1 a pagina 21

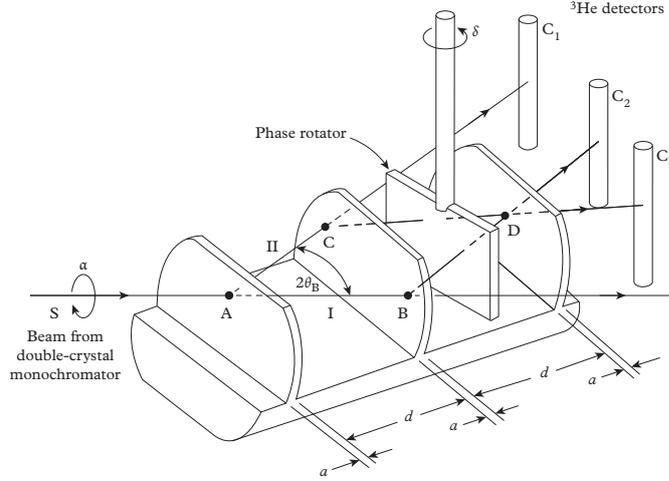


Figura 1.1: Rauch e Werner [6]

Essa è impiegata, come si vedrà in seguito, per misurare in maniera più accurata lo sfasamento. Infine si noti l'angolo di rotazione α attorno alla direzione di incidenza del fascio neutronico al quale viene fatto ruotare l'interferometro per porre il ramo II a un livello di potenziale maggiore del ramo I.

Per analizzare più approfonditamente la fisica che caratterizza questo impianto sperimentale si deve partire dalla conservazione dell'energia. Visto che la Lagrangiana non è dipendente dal tempo, l'energia risulta essere un integrale primo del moto. Avendo, dunque, valida l'eq. 1.1 della generica Hamiltoniana, sostituendovi $p = \hbar k$ e considerando, infine, che l'energia dei due rami all'interno dell'interferometro deve conservarsi come appena detto, si avrà

$$E = \frac{\hbar^2 k_I^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_{II}^2}{2m} + mgH(\alpha) \quad (1.16)$$

nella quale si è definito anche $H(\alpha) = H \sin \alpha$ in quanto il livello della seconda gamba dell'interferometro è dipendente dal seno dell'angolo di rotazione dell'interferometro stesso.

Ora, essendo il potenziale gravitazionale molto minore dell'energia cinetica del fascio di neutroni, si può approssimativamente ricavare la differenza tra i numeri d'onda dei due percorsi [6]

$$\Delta k \approx -\frac{m^2 g H}{\hbar^2 k_I} \sin \alpha \quad (1.17)$$

Potendo scrivere $k_0 = 2\pi/\lambda$ e ponendo $L = \overline{AB}$ la lunghezza del segmento AB, sapendo inoltre che la differenza di fase è data da $\Delta k L$, si ottiene facilmente la

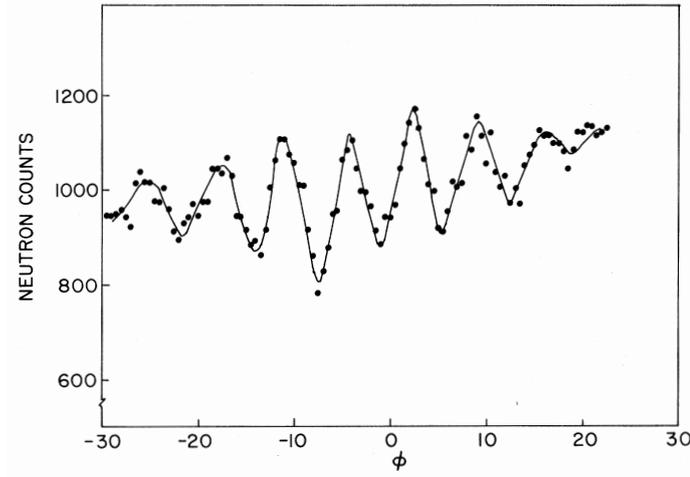


Figura 1.2: Colella, Overhauser e Werner [5]

relazione per lo sfasamento dovuto al potenziale gravitazionale

$$\Delta\Phi_{COW} = -2\pi\lambda\frac{m^2}{h^2}gA\sin\alpha \quad (1.18a)$$

$$\Delta\Phi_{COW} = -q_{COW}\sin\alpha \quad (1.18b)$$

$$q_{COW} = 2\pi\lambda\frac{m^2}{h^2}gA \quad (1.18c)$$

nelle quali si sostituisce l'espressione $A = HL$ per l'area del parallelogramma racchiuso tra i due percorsi interni all'interferometro e si pone q_{COW} la frequenza di oscillazione della figura di interferenza.

1.2.2 Risultati ottenuti

I dati raccolti da Colella, Overhauser e Werner [5] furono la conta dei neutroni giunti ai sensori posti a valle dell'interferometro verso l'angolo di alzo dell'interferometro stesso. In questo modo fu possibile creare il grafico di interferenza riportato in fig. 1.2. A questo punto, per ottenere la frequenza di oscillazione q_{COW} dell'eq. 1.18c, gli autori trasformarono con Fourier i dati raccolti.

Il livello di accuratezza fu del 12% di scostamento sperimentale dalla teoria.

1.3 Successivi esperimenti COW

Furono svariati gli esperimenti successivi a quello di Colella, Overhauser e Werner [5] che seguendo le loro orme cercarono di migliorare il più possibile le

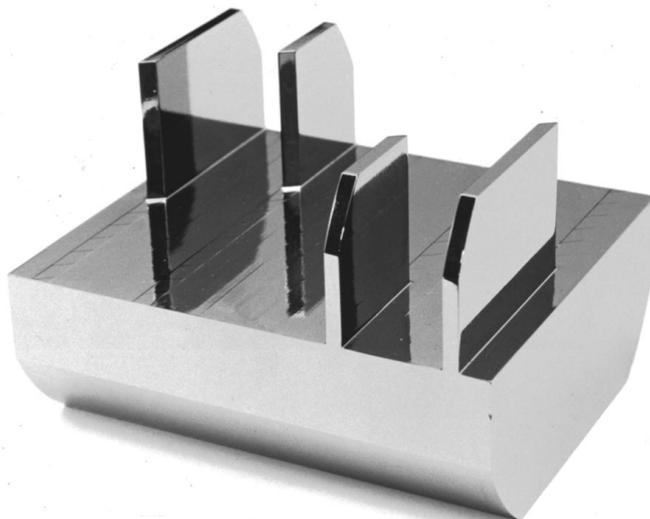


Figura 1.3: Littrell, Allman e Werner [9]

tecniche e i risultati ottenibili. I principali e più rinomati in letteratura sono quelli di Staudenmann, Werner, Colella et al. [7], di Werner, Kaiser, Arif et al. [8] e di Littrell, Allman e Werner [9].

Tre furono le principali innovazioni apportate in questi esperimenti.

Skew-symmetric interferometer Fu introdotto l'utilizzo dell'interferometro di cui in fig. 1.3 in modo da testare variazioni nelle misurazioni dovute alla forma del cristallo. Queste, qualora vi fossero state, si sarebbero potute ricondurre appunto alla forma dell'interferometro stesso e quindi si avrebbe avuto la possibilità di studiarne le cause.

Two-wavelength interferometer Grazie all'impiego di due diverse lunghezze d'onda del fascio di neutroni fu possibile determinare sfasamenti dovuti alla deformazione del cristallo interferometrico.³

Per entrare più nel dettaglio, si possono considerare le differenze di fase dovute al potenziale gravitazionale e alla deformazione del cristallo di silicio come funzioni dell'angolo di alzo dell'interferometro e della lunghezza d'onda⁴, la prima

³Saranno discussi una serie di fenomeni che influenzano la differenza di fase tra i due rami dell'interferometro non causati dal potenziale gravitazionale, si veda 2.2 a pagina 14

⁴La relazione gravitazionale è già stata derivata in 1.2.1, eq. 1.18a; la relazione di deformazione sarà analizzata più nel dettaglio successivamente in 2.2 a pagina 14, eq. 2.13a

direttamente proporzionale a λ , la seconda proporzionale a λ^{-1} [9]

$$\Delta\Phi_{grav}(\alpha, \lambda) = -u\lambda \sin \alpha \quad (1.19a)$$

$$\Delta\Phi_{bend}(\alpha, \lambda) = w\lambda^{-1} \sin \alpha \quad (1.19b)$$

per poter determinare i due parametri incogniti u e w è necessario avere due equazioni diverse per la differenza di fase totale, altrimenti si avrebbe un'equazione in due incognite. Queste si ottengono grazie all'impiego delle due diverse lunghezze d'onda di cui sopra.

Phase-shifting interferometer Innovazione molto più importante fu, invece, l'introduzione di una lamina rotante posta tra le due lastre intermedie e quella finale dell'interferometro così come già riportato in 1.2.1 in fig. 1.1. Questo cambiò definitivamente il metodo di analisi dati per ricavare la differenza di fase causata dall'interferometro.

Viene a crearsi, infatti, un'ulteriore differenza di fase tra le due gambe dell'interferometro, dovuta alla lamina metallica frapposta alle lastre di silicio. Lo sfasamento è dipendente dallo spessore relativo di questa lamina per ogni percorso considerato [9]

$$\Delta\Phi_{Nucl}(\delta, \lambda) = \lambda N b D \left[\frac{1}{\cos(\theta_B + \delta)} - \frac{1}{\cos(\theta_B - \delta)} \right] \quad (1.20)$$

nella quale si hanno N densità atomica, b lunghezza di *scattering* nucleare, D spessore e δ angolo di rotazione, tutti e quattro della lamina rotante; θ_B è l'angolo di Bragg del silicio. Da questa può essere, poi, ricavata l'intensità misurata a valle dell'interferometro [9]

$$I(\delta, \alpha) = a + b \cos \left[\omega \left(\frac{1}{\cos(\theta_B + \delta_0 + \delta)} - \frac{1}{\cos(\theta_B - \delta_0 - \delta)} \right) + \Delta\Phi(\alpha, \lambda) \right] \quad (1.21)$$

nella quale ω è la frequenza di oscillazione della figura di interferenza, δ_0 è l'offset dell'angolo di rotazione della lamina e gli altri sono parametri mobili da ricavare con il *fit* attraverso l'impiego di metodi dei minimi quadrati non lineari. Tra questi ultimi termini v'è $\Delta\Phi(\alpha, \lambda)$ che è la differenza di fase ricercata. La metodologia appena descritta migliora di molto il livello di precisione con cui si può andare ad analizzare gli esperimenti COW.

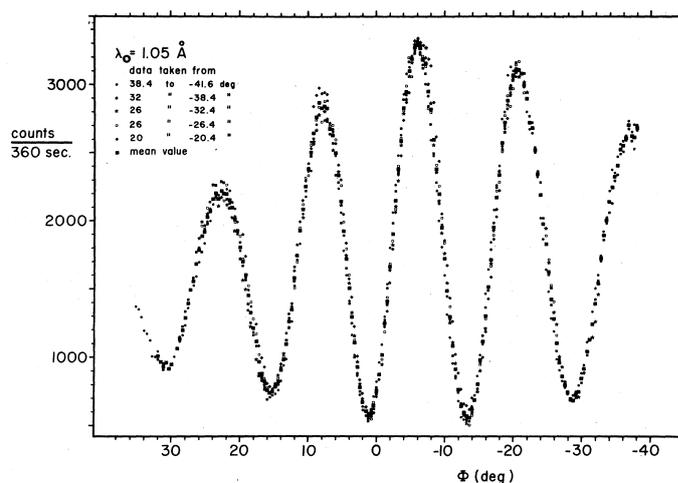


Figura 1.4: Staudenmann, Werner, Colella et al. [7]

1.3.1 Risultati ottenuti

I dati ottenuti con questi nuovi esperimenti COW sono decine di punti percentuali di discostamento esperimento-teoria migliori del primo. Una tabella riassuntiva di questi, così come una figura di interferenza rappresentativa, sono riportati in fig. 1.5 e in fig. 1.4

Authors	Interferometer	λ [Å]	A_0 [cm ²]	θ_B [°]	q_{COW} (theory) [rad]	q_{COW} (exp) [rad]	q_{bend} [rad]	Agreement with theory (%)
Colella et al. (1995)	Symmetric LLL #1	1.445(2)	10.52(2)	22.10(5)	59.8(1)	54.3(2.0)		12
Staudenmann et al. (1980)	Symmetric LLL #2	1.419(2)	10.152(4)	21.68(1)	56.7(1)	54.2(1)	3.30(5)	4.4
		1.060(2)	7.332(4)	16.02(1)	30.6(1)	28.4(1)	2.48(5)	7.3
Werner et al. (1988)	Symmetric LLL #2	1.417(1)	10.132(4)	21.65(1)	56.50(5)	56.03(3)	1.41(1)	0.8
Jacobson et al. (1993)	Symmetric LLL #2	1.422(1)	10.177(4)	21.73(1)	56.94(5)	54.7(2)	1.6(1)	3.9
Littrell et al. (1997)	Skew symmetric (440) reflection							
	Full range data	1.078(6)	12.016(3)	314.15(1)	50.97(5)	49.45(5)	2.15(4)	3.0
	Restricted range data	1.078(6)	12.016(3)	314.15(1)	50.97(5)	50.18(5)	2.03(4)	1.5
	(220) reflection							
Full range data	2.1440(4)	11.921(3)	33.94(1)	100.57(10)	97.58(10)	1.07(2)	3.0	
Restricted range data	2.1440(4)	11.921(3)	33.94(1)	100.57(10)	99.02(10)	1.01(2)	1.5	
Littrell et al. (1997)	Large symmetric LLL (440) reflection							
	Full range data	0.9464(5)	30.50(1)	29.50(1)	113.60(10)	112.89(15)	8.09(6)	0.6
	Restricted range data	0.9464(5)	30.50(1)	29.50(1)	113.60(10)	112.62(15)	8.36(6)	0.9
	(220) reflection							
Full range data	1.8796(10)	30.26(1)	29.30(1)	223.80(10)	222.38(30)	4.02(3)	0.6	
Restricted range data	1.8796(10)	30.26(1)	29.30(1)	223.80(10)	221.85(30)	4.15(3)	0.9	

Figura 1.5: Rauch e Werner [6]

Capitolo 2

Effetti secondari

2.1 Effetto Sagnac

Oltre all'effetto gravitazionale, uno dei principali contributi del potenziale efficace che va considerato nell'analisi degli esperimenti COW è sicuramente l'analogo dell'effetto Sagnac. La Terra, infatti, è chiaramente un sistema di riferimento non inerziale per cui deve entrare in gioco anche la sua rotazione.

2.1.1 Derivazione formale dalla Lagrangiana

Per tenere conto della rotazione terrestre si rende necessaria l'aggiunta di un ulteriore termine nella Lagrangiana del moto dei neutroni, che dunque diventa

$$\mathcal{L} = \frac{m_i v^2}{2} + G \frac{m_g M}{r} + m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} + \frac{m_i |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2}{2} \quad (2.1)$$

ricordando la trasformata di Legendre per l'Hamiltoniana e le equazioni di Hamilton

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} \quad (2.2)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} \quad (2.3)$$

è diretto ricavare l'Hamiltoniana e le equazioni del moto in un sistema di riferimento in rotazione

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m_i} - G \frac{m_g M}{r} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} \quad (2.4)$$

nella quale come solito è definito $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = m_g \mathbf{g}_0 - m_i \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2m_i \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.5)$$

dove $\mathbf{g}_0 = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$.

Definendo, poi

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0(R) + \left(\frac{m_i}{m_g}\right) \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \quad (2.6)$$

si hanno per l'eq. 2.5 le soluzioni [6]

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \frac{1}{3} t^3 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{g} \quad (2.7)$$

In cui, considerando i parametri terrestri, è verificabile che il rapporto tra i termini di terzo e second'ordine in t è nell'ordine di grandezza 10^{-9} , per cui l'effetto di Coriolis sulla traiettoria è del tutto trascurabile.

Infine si nota essere

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m_i \mathbf{v} + m_i \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.8)$$

Per quanto riguarda l'influenza dell'effetto Sagnac sulla differenza di fase si procede come prescritto dall'eq. 1.2 a pagina 1

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{1}{\hbar} \int_{ACD} \mathcal{L} dt - \frac{1}{\hbar} \int_{ABD} \mathcal{L} dt \\ &= \frac{1}{\hbar} \int_{ACD} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{\hbar} \int_{ABD} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.9)$$

facendo il secondo integrale in verso opposto, ovvero dal punto D al punto A e dunque cambiandolo di segno, si nota come la somma dei due sia in realtà un integrale chiuso sul percorso ACDBA; sostituendo poi il momento con quello ottenuto poco fa, eq.2.8, si ottiene

$$= \frac{1}{\hbar} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\frac{m_i}{\hbar} \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}_{\Delta\Phi_{COW}^1} + \underbrace{\frac{m_i}{\hbar} \oint (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}_{\Delta\Phi_{Sagnac}} \quad (2.10)$$

Con l'analisi vettoriale il secondo termine può essere scritto come un integrale di superficie (\mathbf{A} è l'area della superficie contenuta all'interno del percorso interferometrico) e di conseguenza essere valutato²

$$\Delta\Phi_{Sagnac} = \frac{2m_i}{\hbar} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} = \frac{2m_i}{\hbar} \Omega A (\cos \theta_L \cos \alpha + \sin \gamma \sin \theta_L \sin \alpha) \quad (2.11a)$$

¹Attraverso la derivazione di questo termine si ottiene la stessa eq. 1.18a a pagina 6 già dedotta, ma è reso evidente il prodotto $m^2 = m_i m_g$ come si vedrà più nel dettaglio in 3.1 a pagina 21 eq. 3.4c

²Questa relazione è stata ricavata con le più svariate modalità, da Page [10] con un'argomentazione di ottica ondulatoria, da Anandan [11] e da Stodolsky [12] con l'impiego della relatività generale

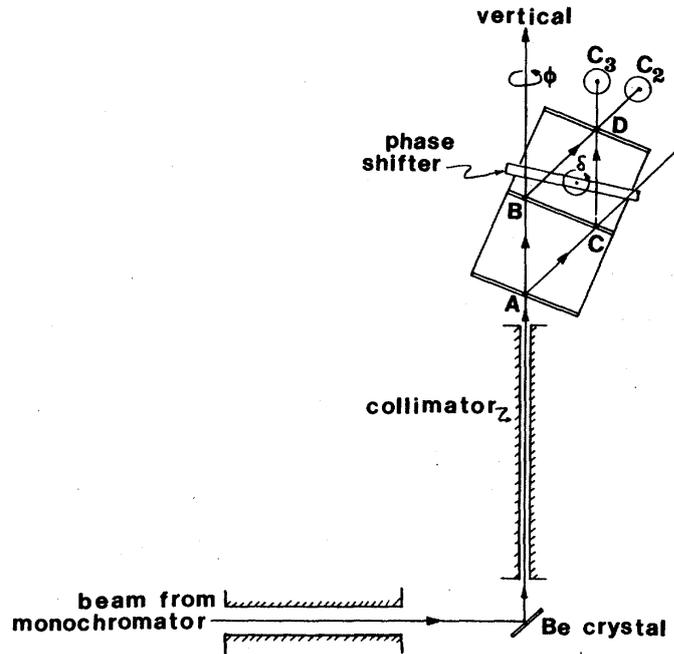


Figura 2.1: Staudenmann, Werner, Colella et al. [7]

$$\Delta\Phi_{Sagnac} = q_{Sagnac} \cos \alpha \quad (2.11b)$$

$$q_{Sagnac} = \frac{2m_i}{\hbar} \Omega A \cos \theta_L \quad (2.11c)$$

si hanno θ_L angolo di colatitudine, γ l'angolo Ovest-Sud della direzione del fascio di neutroni incidente, che è accuratamente scelto uguale a zero in tutti gli esperimenti COW; come per lo sfasamento COW si è introdotta q_{Sagnac} la frequenza di oscillazione del *pattern* di interferenza.

2.1.2 Interferometro verticale

Per verificare che effettivamente le previsioni sull'effetto Sagnac fossero corrette fu proposto da Anandan [11] di effettuare un esperimento, poi effettivamente messo in atto da Werner, Staudenmann e Colella [13], nel quale l'interferometro è posto verticalmente. Il fascio di neutroni viene fatto deviare per incidere sul cristallo interferometrico con direzione parallela alla normale alla superficie terrestre. L'interferometro viene fatto ruotare, come nei casi precedenti, attorno alla direzione incidente dei neutroni, ovverosia lungo la verticale, di un angolo α .

In questa disposizione, riportata in fig.2.1, è chiaro, per motivi di simmetria, che il potenziale gravitazionale non possa giocare alcun ruolo. I percorsi all'interno dell'interferometro sottostanno, difatti, allo stesso potenziale gravitazionale per ogni

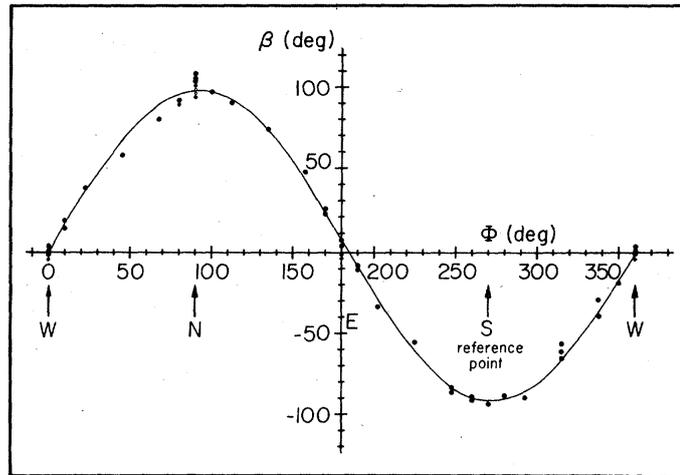


Figura 2.2: Staudenmann, Werner, Colella et al. [7]

angolo di rotazione. Inoltre è evidente che anche eventuali effetti di deformazione del cristallo di silicio sotto il proprio stesso peso non possano variare con l'angolo α , per considerazioni analoghe a quelle appena fatte per la gravità. Dunque è l'arrangiamento ideale per analizzare l'effetto Sagnac, l'unico presente.

Dal punto di vista quantitativo si deve far riferimento alla stessa relazione già trovata in precedenza, eq. 2.11a nella quale però, vanno inseriti i corretti angoli di posizionamento dell'apparato rispetto alla Terra. Così facendo, vedono annullarsi termini diversi da quelli elisi in precedenza in quanto γ , scelto accuratamente per gli altri esperimenti perché si annullasse, ora non è più fisso. Il raggio incidente non è più in direzione Nord-Sud, ma anch'esso variabile con α . Risulta dunque

$$\Delta\Phi_{Sagnac}(\alpha) = \frac{2m_i}{\hbar}\Omega A \sin\theta_L \sin\alpha \quad (2.12)$$

Essendo questo l'unico contributo alla differenza di fase, se i dati così ottenuti vengono graficati contro l'angolo α è possibile notare una perfetta forma sinusoidale lungo tutti i 360° così come riportato in fig. 2.2.

2.2 Deformazione

L'interferometro, variando posizione con la rotazione, subisce una forza di gravità variabile e di conseguenza una deformazione anch'essa variabile. L'asse di rotazione del cristallo di silicio, ovvero la direzione di incidenza del fascio di neutroni, non è un'asse di simmetria elastica dello strumento. Per cui un'eventuale analisi della deformazione non può essere portata avanti affidabilmente in maniera teorica.

Per questo nel corso dei vari esperimenti si assunse che potesse essere modellata in maniera semplificata, senza però perdere in consistenza, da una variazione nella lunghezza del percorso dei due rami dell'interferometro. Seppur potesse esserci la presenza di altri effetti minori dovuti comunque alla deformazione, qui si ipotizza possano ad ogni modo essere inclusi in questa modellazione.

$$\Delta\Phi_{bend}(\alpha) = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L \sin \alpha \quad (2.13a)$$

$$\Delta\Phi_{bend}(\alpha) = -q_{bend} \sin \alpha \quad (2.13b)$$

$$q_{bend} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L \quad (2.13c)$$

2.2.1 Raggi-X

Per trovare il contributo dovuto alla deformazione del cristallo, inizialmente, si è pensato di eseguire lo stesso esperimento di interferometria con l'ausilio di raggi-X al posto del fascio di neutroni. Questo perché il fotone, essendo senza massa, non subisce effetti del potenziale gravitazionale o relativi alla rotazione terrestre.³

L'approccio messo in atto è stato lo stesso fin qui descritto per gli esperimenti COW classici con l'impiego di neutroni. Di volta in volta, poi, q_{bend} è stato considerato alla stregua di un parametro intrinseco del cristallo e sottratto a q_{COW} .

2.2.2 Interferometro a due lunghezze d'onda

layer e Greene [14] suggerirono che le discrepanze che fino ad allora continuavano a presentarsi in ogni esperimento COW, di almeno una variazione esperimento-teoria dello 0.8%, potessero essere dovute all'impiego dei raggi-X per determinare i contributi di deformazione del cristallo di silicio. Questo perché si ipotizzò che la differente interazione dei fotoni con il reticolo del silicio facesse in modo che questi andassero, di fatto, a ispezionare zone diverse da quelle interessate dal passaggio dei neutroni. Per ovviare a questo problema, come già anticipato in 1.3 a pagina 7, Littrell, Allman e Werner [9] impiegarono due diverse lunghezze d'onda del fascio neutronico.

Si riportano qui per comodità le eq. 1.19a e 1.19b dal paragrafo già citato 1.3

$$\Delta\Phi_{grav}(\alpha, \lambda) = -u\lambda \sin \alpha$$

$$\Delta\Phi_{bend}(\alpha, \lambda) = w\lambda^{-1} \sin \alpha$$

³L'analisi è fatta con l'impianto teorico classico, in seguito si tratterà dei possibili effetti Sagnac e COW sui fotoni, si veda 3.2 a pagina 24.

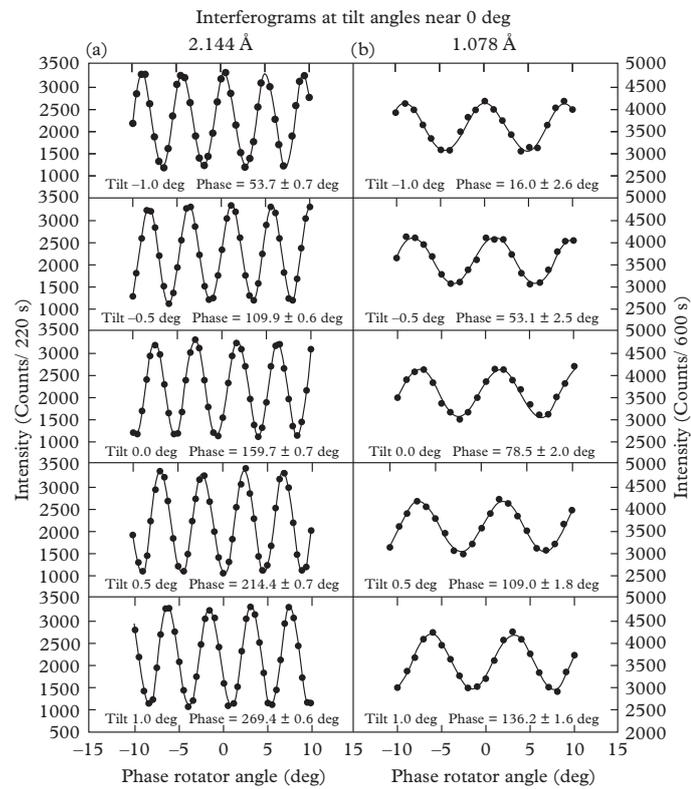


Figura 2.3: Rauch e Werner [6]

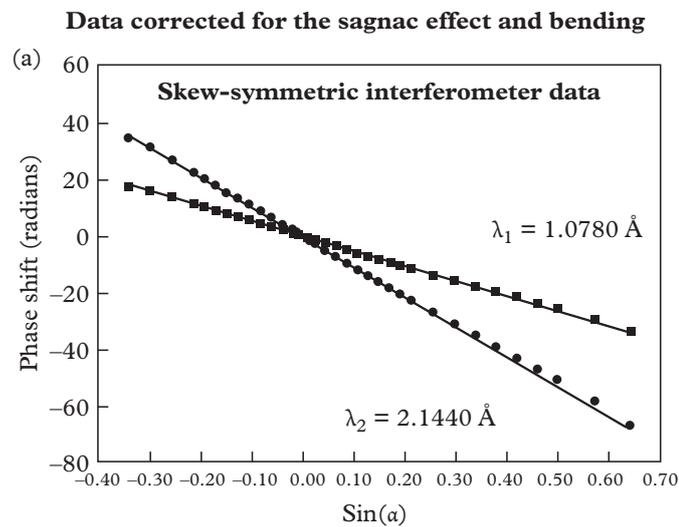


Figura 2.4: Rauch e Werner [6]

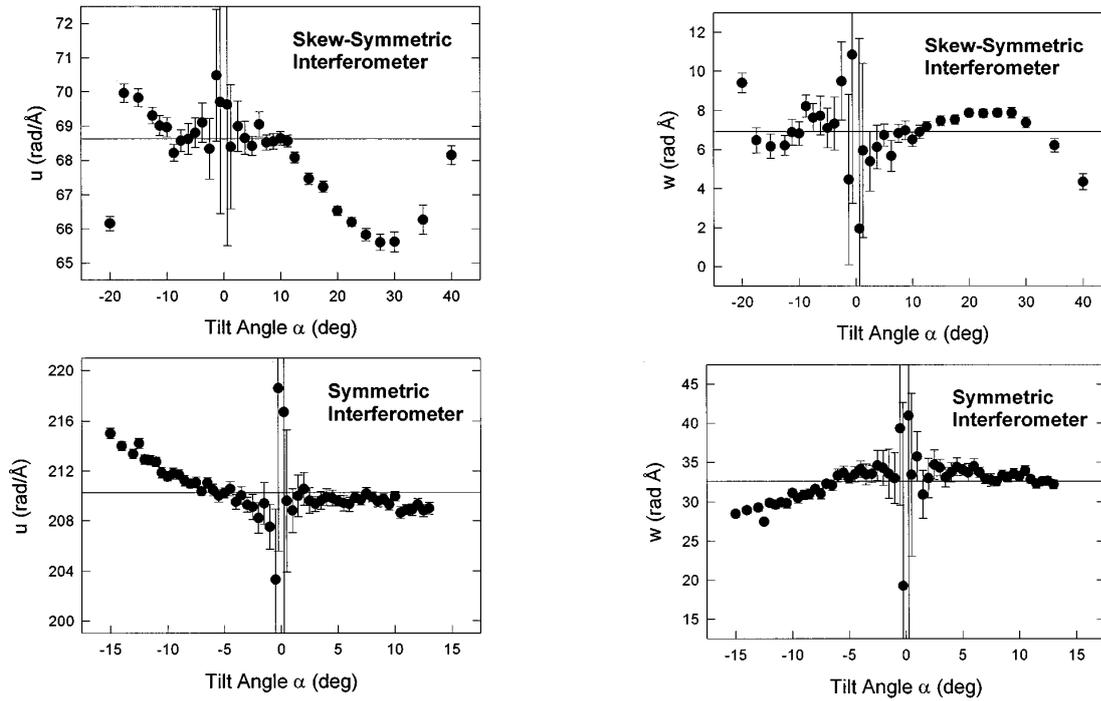


Figura 2.5: Littrell, Allman e Werner [9]

Grazie all'impiego di due lunghezze d'onda si possono ricavare dati sperimentali come quelli riportati in fig. 2.3. Questa mostra la differenza di fase totale $\Delta\Phi$ per ogni angolo di alzo α dell'interferometro, sia per una che per l'altra lunghezza d'onda. Lo sfasamento, come solito, si da dai dati grezzi con un metodo di fit non lineare dei minimi quadrati. Un grafico più generale e utile è quello riportato in fig. 2.4 nella quale v è $\Delta\Phi$ vs. $\sin \alpha$. Successivamente, da questi dati, attraverso un ulteriore fit con l'impiego delle relazioni riportate sopra, 1.19a e 1.19b, si possono ricavare i valori medi di u e w che altro non sono che q_{grav} e q_{bend} a meno della loro dipendenza da λ . Questi sono riportati in fig.2.5 come funzioni dell'angolo di alzo, sul quale poi sono stati mediati. Si noti che per valori distanti dalla configurazione orizzontale dell'interferometro, ovvero per $\alpha = 0$, vi sono più deviazioni dalla media delle frequenze di oscillazione. Questo, come si vedrà in seguito, è dovuto ad altri effetti.

2.3 Dynamical diffraction

Oltre agli effetti Sagnac e di deformazione, che principalmente vanno a influenzare in maniera quantitativa i risultati degli esperimenti COW, v'è un'altra importante considerazione da dover fare riguardo un aspetto che invece va ad

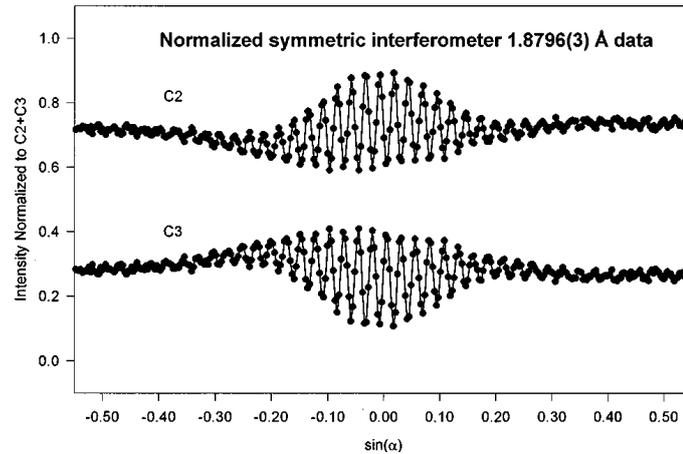


Figura 2.6: Littrell, Allman e Werner [9]

influenzare maggiormente qualitativamente gli stessi. Prendendo un qualsiasi interferogramma prodotto da un esperimento COW, per esempio quello riportato in fig. 2.6, si nota chiaramente come vi sia una perdita di contrasto con l'aumentare della deviazione dell'angolo di rotazione dalla configurazione orizzontale. Inoltre, seppur un po' meno chiaramente, si può notare anche una leggera traslazione del centro della forma involupata rispetto allo zero sull'ascissa.

Queste due caratteristiche sono dovute a effetti di interferenza tra i percorsi dei neutroni all'interno dell'interferometro stesso. La teoria ottica detta *dynamical diffraction* spiega in maniera più che esaustiva questi fenomeni e fornisce metodi matematici adeguati alla modellazione e predizione dei risultati sperimentali. Si veda per esempio in fig.2.7 il confronto di dati sperimentali con quelli modellati teoricamente.

Esulerebbe gli scopi di questa trattazione andare ad analizzare in dettaglio tutto l'impianto della *dynamical diffraction* ma si rimanda, per completezza, all'ottima trattazione nell'articolo di Littrell, Allman, Motrunich et al. [15] e alla spiegazione più che esaustiva nel capitolo 11 del libro di Rauch e Werner [6]. Inoltre non si può non citare il primo lavoro in cui le correzioni dovute alla *dynamical diffraction* furono evidenziate, ovvero l'articolo di Bonse e Wroblewski [16, 17]. Infine, un lavoro piuttosto recente che si prefigge lo scopo di migliorare le previsioni teoriche per ridurre definitivamente quel persistente divario di circa un 1% tra esperimenti e teoria, Heacock, Arif, Haun et al. [18].

Una spiegazione intuitiva e qualitativa dei processi che entrano in gioco attraverso le correzioni dinamiche si ha con l'immagine riportata in fig. 2.8 nella quale sono tracciati tutti i percorsi di interferenza intrapresi dai neutroni che passano all'interno del cristallo di silicio. L'interferometro in questione non è, come elementarmente si potrebbe pensare, un semplice interferometro a due percorsi,

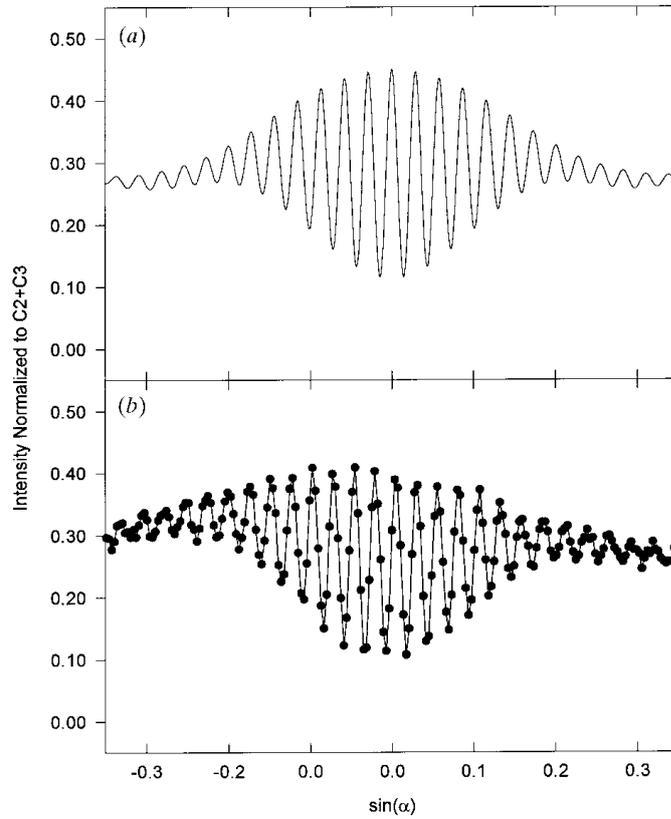


Figure 2.7: Littrell, Allman, Motrunich et al. [15]

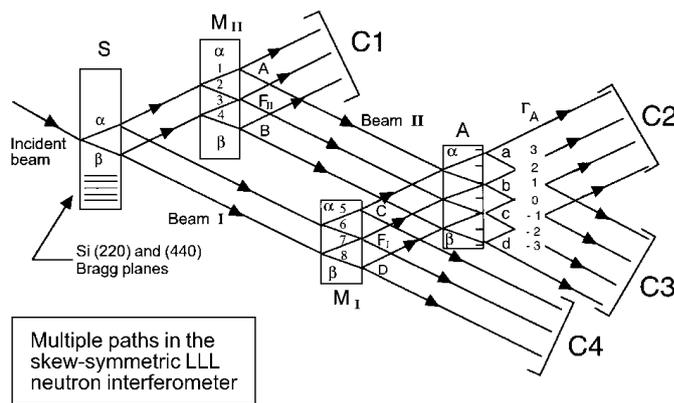


Figure 2.8: Littrell, Allman, Motrunich et al. [15]

ovvero con due sole gambe, bensì un interferometro a otto percorsi. Questo fa in modo che l'area da dover considerare ai fini del computo della differenza di fase sia, sì maggiore di quella ipotizzata inizialmente, ma soprattutto fortemente dipendente dall'angolo di alzo del piano interferometrico. Per cui diretta conseguenza di questa dipendenza da fattori di *dynamical diffraction* è la perdita di contrasto ad angoli di alzo elevati.

Inoltre, come inizialmente suggerito, v'è una traslazione del centro della figura di interferenza che dipende unicamente dalle specifiche delle lamine dell'interferometro, spessore e distanza. Questa viene usualmente modellata attraverso la relazione

$$q_{grav} = q_{COW} (1 + \epsilon) \quad (2.15)$$

per fornire un'idea dell'ordine di grandezza di questa variazione, nel caso dell'esperimento di Werner, Kaiser, Arif et al. [19] si ha $\epsilon = 0.0476$.

2.4 Termini minori

Ulteriori termini che influenzano in maniera pressoché impercettibile la fase indotta dal potenziale gravitazionale e dalla rotazione terrestre possono essere ricavati con una trattazione relativistica dell'esperimento COW. Il maggiore di questi è nell'ordine di 10^{-9} .

Vari articoli che ne parlano sono Anandan [11], Stodolsky [12], Varjú e Ryder [20], Wolf, Blanchet, Borde et al. [21], Greenberger, Schleich e Rasel [22] e Lan, Kuan, Estey et al. [23]. Solo per completezza se ne riportano qui le equazioni citate da Rauch e Werner [6] e da Kuroiwa, Kasai e Toshifumi [24]

$$\Delta\Phi_{grav} = \Delta\Phi_{COW} \left(1 + \frac{v_0^2}{2c^2} - \frac{R_S}{2R_E} - \frac{3}{2} \frac{R_S H}{R_E^2} \right) \quad (2.16)$$

$$\Delta\Phi_{rot} = \Delta\Phi_{Sagnac} \left\{ 1 + \frac{2}{5} \frac{R_S}{R_E} \left[1 - \frac{3 (\hat{R} \cdot \hat{A}) (\hat{\Omega} \cdot \hat{R})}{\hat{\Omega} \cdot \hat{A}} \right] \right\} \quad (2.17)$$

Capitolo 3

Conseguenze degli esperimenti COW

3.1 Principio di equivalenza

Una delle più importanti conseguenze e applicazioni degli esperimenti COW è sicuramente la possibilità di verifica del principio di equivalenza. Già in passato (per esempio Koester [3]) si cercò di dimostrare che anche in ambito quantistico si mantiene valido il principio di equivalenza. Ma l'esperimento COW può dirsi davvero completo in quanto, come già mostrato in 1.1.2 a pagina 2 qui il rapporto m/\hbar , che non può elidersi in alcun modo, lega strettamente il potenziale gravitazionale con la meccanica quantistica.

Vi sono due versioni del principio di equivalenza dette *forte* e *debole* [25–27]

Equivalenza debole la massa inerziale e quella gravitazionale, rispettivamente le proprietà di opporsi a variazioni del moto e di subire un campo gravitazionale, coincidono numericamente

Equivalenza forte in un campo gravitazionale qualsiasi si può scegliere un sistema di riferimento accelerato in modo tale che localmente gli effetti dell'accelerazione gravitazionale siano nulli

3.1.1 Equivalenza debole

Per quanto riguarda l'equivalenza debole gli esperimenti COW analizzati fino a qui sono più che sufficienti. Si è, infatti, visto che $q_{Sagnac} \propto m_i$, eq. 2.11c e si è accennato anche come $q_{COW} \propto m_i m_g$. Di seguito si vedrà in dettaglio la derivazione di quest'ultima proporzionalità, eq. 3.4c. Se gli esperimenti COW riescono a verificare queste relazioni, è già chiaro come dall'effetto Sagnac sia immediato ricavare un valore per la massa inerziale. Per poi utilizzarla nella relazione propriamente

COW per trovare anche il valore della massa gravitazionale di un neutrone. Esse risultano coincidere, si noti infatti che spesso è stata utilizzata l'eq. 1.18a in cui la massa appare al quadrato invece che come prodotto $m_i m_g$ senza che i risultati ne venissero influenzati in maniera alcuna.

Si ricorda la trattazione per ricavare la differenza di fase causata dall'effetto Sagnac, nel dettaglio la Lagrangiana del sistema e il momento generalizzato che erano stati trovati in 2.1.1 a pagina 11, eq. 2.1 e 2.8

$$\mathcal{L} = \frac{m_i v^2}{2} + G \frac{m_g M}{r} + m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} + \frac{m_i |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2}{2}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m_i \mathbf{v} + m_i \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

ma anche la relazione per trovare la differenza di fase totale 2.10.

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\hbar} \int_{ACD} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \frac{1}{\hbar} \int_{ABD} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$$

Ora, essendo l'interferometro di ridottissime dimensioni in riferimento a quelle della Terra, si può introdurre una variabile posizione locale $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ tale per cui la Lagrangiana è approssimabile come [9]

$$\mathcal{L} \approx \frac{m_i |\dot{\mathbf{x}}|^2}{2} + m_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathcal{L}_0 \quad (3.1)$$

in cui si usa $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\mathbf{R})$ e \mathbf{g} come solito. Risulta, inoltre [9]

$$\mathbf{p} \approx m_i \left(v_0 - \frac{m_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{m_i v_0} \right) \hat{\mathbf{I}} + m_i \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (3.2)$$

con $\hat{\mathbf{I}}$ la direzione lungo la traiettoria del neutrone.

Il primo membro del momento è una costante, per cui all'interno dell'integrazione per il calcolo della differenza di fase si elide nella sottrazione; il terzo membro è quello da cui sorge l'effetto Sagnac. Il secondo membro, come anticipato nell'eq. 2.10, è quello che dà vita allo sfasamento causato dal potenziale gravitazionale

$$\Delta \Phi_{COW} = \frac{m_g}{\hbar v_0} \left[\int_{II} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} dl - \int_I \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} dl \right]$$

$$= -\frac{m_g}{\hbar v_0} g A \sin \alpha \quad (3.3)$$

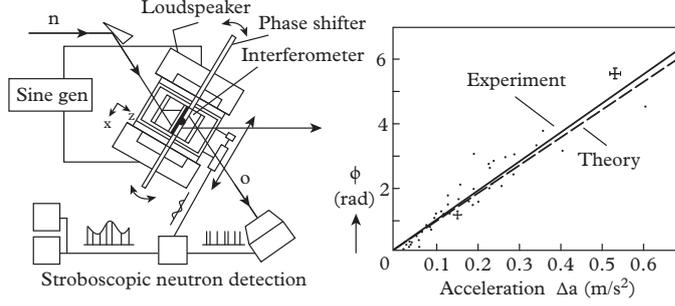


Figura 3.1: Rauch e Werner [6]

avendo A l'area racchiusa dalle traiettorie dei neutroni. Quindi, sapendo $v_0 = h/\lambda m_i$ in conclusione si trova

$$\Delta\Phi_{COW} = -2\pi\lambda\frac{m_i m_g}{h^2}gA \sin\alpha \quad (3.4a)$$

$$\Delta\Phi_{COW} = -q_{COW} \sin\alpha \quad (3.4b)$$

$$q_{COW} = 2\pi\lambda\frac{m_i m_g}{h^2}gA \quad (3.4c)$$

3.1.2 Equivalenza forte

Manca, però, un tassello nell'argomentazione sulla validità del principio di equivalenza anche in ambito quantistico. Staudenmann, Werner, Colella et al. [7] diedero per scontata la validità dell'equazione di Schrödinger in un sistema di riferimento accelerato. Bonse e Wroblewski [16] dando seguito a questa affermazione ritennero, invece, opportuno verificarne la validità con un esperimento dedicato.

Viene montato un interferometro su di un carrello mobile estremamente preciso nel posizionamento in ogni direzione dello spazio. Azionato da magneti, esso può spostarsi lungo la guida del carrello compiendo un movimento armonico secondo impulsi sinusoidali. Il fascio neutronico è controllato anch'esso in maniera estremamente precisa perché i neutroni escano dal cristallo di silicio nel momento esatto in cui l'accelerazione è la massima possibile $a_{\pm} = \pm x_0\omega^2$. Tutto ciò è riportato schematicamente in fig.3.1.

Vari set di differenze di fase verso la corrispondente accelerazione dell'interferometro furono ottenuti per varie combinazioni di parametri tra cui frequenza e ampiezza di oscillazione. Su questi dati è stato poi realizzato un fit basandosi sull'equazione di Schrödinger per una particella in un sistema di riferimento accelerato [28, 29]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + m_i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.5)$$

La differenza di fase causata dall'accelerazione è risultata in linea con quella causata dal potenziale gravitazionale ricavata con il solito metodo degli altri esperimenti COW.

Si nota che l'equazione di Schrödinger del neutrone nel potenziale gravitazionale

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - m_g \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

è equivalente alla 3.5 solo ed unicamente se vale

$$m_i \mathbf{a} = -m_g \mathbf{g} \quad (3.7)$$

Avendo, però, l'accelerazione \mathbf{a} che va a compensare gli effetti di quella gravitazionale si ha necessariamente che vale anche il principio di equivalenza debole $m_i = m_g$

3.2 Esperimenti COW con fotoni

In 2.2.1 a pagina 15 si era fatto riferimento a eventuali effetti Sagnac e COW sui fotoni. In quel momento erano stati ignorati in quanto la trattazione era nell'ambito della meccanica classica in cui la gravità non ha alcun ruolo sulla dinamica di particelle prive di massa.

Rauch e Werner [6] fecero un'interessante nota di commento al fatto che siano più che possibili effetti di sfasamento causati, sia dalla gravità che dalla rotazione della Terra, su fotoni. Inoltre valutarono gli ordini di grandezza che essi assumerebbero se venisse usato l'interferometro originale di Colella, Overhauser e Werner [5]. Si capisce così, che l'averli ignorati nelle trattazioni precedenti non fa perdere di correttezza queste ultime visti gli svariati ordini di grandezza in meno rispetto agli effetti di deformazione del cristallo.

Si ricorda valgono le relazioni di Compton per la frequenza e di de Broglie

$$mc^2 = \hbar\omega \quad \hbar k = mv \quad (3.8)$$

3.2.1 Effetto Sagnac su fotoni

Grazie alla derivazione della relazione dello sfasamento di Sagnac svolta da Dresden e Yang [30] attraverso un approccio di ottica ondulatoria si può affermare con certezza che l'equazione da loro trovata sia applicabile sia alle onde di materia che a quelle elettromagnetiche.

$$\Delta\Phi_{Sagnac} = 2\frac{k}{v_0} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} \quad (3.9)$$

Qui, come solito, k è il vettore d'onda e v_0 è la velocità di gruppo dell'onda. Da questa si può ricavare in maniera diretta, attraverso le eq. 3.8, l'eq. 2.11a

$$\Delta\Phi_{Sagnac} = 2\frac{k}{v_0}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} = 2\frac{m_i v_0}{\hbar v_0}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} = \frac{2m_i}{\hbar}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}$$

3.2.2 Effetto COW su fotoni

Invece dall'eq. 1.18a si può ricavare per sostituzione con le eq. 3.8

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_{COW} &= -2\pi\lambda\frac{m^2}{\hbar^2}gA\sin\alpha = -4\pi^2\lambda\frac{m^2}{\hbar^2 2\pi}gA\sin\alpha \\ &= -\frac{m}{\hbar}\frac{m}{\hbar k}gA\sin\alpha = -\frac{mc^2}{\hbar}\frac{1}{vc^2}gA\sin\alpha\end{aligned}\quad (3.10a)$$

$$\Delta\Phi_{COW} = -\frac{\omega}{vc^2}gA\sin\alpha \quad (3.10b)$$

Il campo gravitazionale terrestre può essere visto come una regione di spazio con indice di rifrazione per i fotoni [6, 31]

$$n(\mathbf{r}) = \frac{k}{k_\infty} = 1 + \frac{2GM}{rc^2} \approx 1 + \frac{2GM}{R_0 c^2} - \frac{2g_0 z}{c^2} \quad (3.11)$$

in cui k_∞ è il vettore d'onda all'infinito, dove il campo gravitazionale va ad annullarsi.

Unendo le eq. 3.10b e 3.11, usando la nota relazione $n = c/v$ si ottiene infine la differenza di fase causata dal potenziale gravitazionale sui fotoni

$$\Delta\Phi_{COW}^{fotoni} = -\frac{2\omega}{c^3}gA\sin\alpha \quad (3.12)$$

I valori approssimativi calcolati da Rauch e Werner [6] per gli sfasamenti sui fotoni sono $\Delta\Phi_{Sagnac}^{fotoni} \approx 1.5 \times 10^{-5}$ rad e $\Delta\Phi_{COW}^{fotoni} \approx 5.3 \times 10^{-9}$ rad, quindi valori estremamente piccoli.

Capitolo 4

Conclusione

Lo scopo che questa trattazione si era posta nell'introduzione era quello di analizzare nel più chiaro modo possibile quello che è l'esperimento avanguardista di Colella, Overhauser e Werner [5].

Nel primo capitolo si sono viste e derivate le basi teoriche che spiegano e forniscono una motivazione fisica allo sfasamento indotto dal potenziale gravitazionale. Il propagatore temporale presenta un termine di fase direttamente dipendente dal potenziale a cui uno stato quantico è sottoposto. Per cui nel caso specifico del potenziale gravitazionale la fase indotta dipende dall'importante rapporto m/\hbar che lega strettamente il mondo quantistico con la gravità.

Inoltre si è introdotta l'idea alla base dell'esperimento COW, ovvero quella di impiegare un interferometro per separare un fascio di neutroni in due percorsi distinti posti a due livelli dal suolo diversi in modo che siano sottoposti a due potenziali diversi. Successivamente riuniti, i due rami apportano contributi sfasati a causa del potenziale gravitazionale e dunque creano una figura di interferenza.

$$\Delta\Phi_{COW} = -2\pi\lambda\frac{m_i m_g}{h^2} g A \sin\alpha$$

Il primo esperimento presentò un discostamento esperimento-teoria del 12%, per cui nel tempo si susseguirono svariati altri tentativi di migliorare le tecniche e le tecnologie impiegate in questa tipologia di verifica sperimentale per giungere a risultati migliori. Gli articoli più importanti in questo senso sono quelli di Staudenmann, Werner, Colella et al. [7] e di Littrell, Allman e Werner [9]. In questi sono state impiegate varie innovazioni tra cui forme diverse di interferometri, l'uso di lunghezze d'onda differenti in modo da avere sufficienti equazioni da cui ricavare i parametri incogniti dipendenti da λ e, maggiormente importante, l'uso di una lamina metallica rotante frapposta alle lastre dell'interferometro per poter migliorare le tecniche di *fit* dei dati grezzi.

Il miglior risultato ottenuto ha un divario esperimento-teoria dello 0.8% che permane inspiegabilmente in tutti gli esperimenti.

Nel secondo capitolo sono stati introdotti vari effetti che influenzano la misurazione della interferenza indotta dal potenziale gravitazionale e che non possono essere ignorati se si vuole svolgere una verifica accurata. Basti pensare che nell'esperimento originale del 1975 non fu tenuto conto se non degli effetti di deformazione dell'interferometro e si giunse ad una bassissima precisione con un divario esperimento-teoria addirittura del 12%.

Primo tra tutti questi contributi è l'effetto Sagnac, dovuto alla rotazione della Terra e dunque al fatto che i neutroni si muovono all'interno di un sistema di riferimento accelerato. Questo è uno degli effetti più studiato in relazione agli esperimenti COW e con la maggior letteratura. Tra i principali analisti si ricordano alcuni tra gli avanguardisti come Page [10], Anandan [11] e Stodolsky [12].

$$\Delta\Phi_{Sagnac} = \frac{2m_i}{\hbar}\Omega A \cos\theta_L \cos\alpha$$

Altro importantissimo effetto è quello di deformazione del cristallo di silicio sotto il proprio peso. Per questo è pressoché impossibile, o per lo meno inutile, una modellazione teorica in quanto l'asse su cui è ruotato non è affatto un'asse di simmetria elastica del materiale. Dunque inizialmente si ovviò al problema attraverso l'uso di raggi-X, sostituendoli ai neutroni e trovando la differenza di fase che subiscono. Questa è poi possibile sottrarla, a quella trovata per i neutroni, come fosse un parametro di costruzione dell'interferometro. Successivamente si ipotizzò che questo approccio non fosse del tutto corretto, per cui si passò all'impiego di due lunghezze d'onda differenti di neutroni in modo da rendere possibile un *fit* che fornisse sia la frequenza da potenziale gravitazionale sia quella da deformazione.

$$\Delta\Phi_{bend} = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L \sin\alpha$$

Ulteriori effetti dovuti alla teoria della *dynamical diffraction* sono modellati con la modifica della frequenza COW secondo la relazione

$$q_{grav} = q_{COW} (1 + \epsilon)$$

Nel terzo e ultimo capitolo si è discusso di un possibile impiego dell'esperimento COW per verificare il principio di equivalenza in ambito quantistico. Nella sua parte così detta *debole* è pressoché diretta la verifica in quanto il termine di sfasamento di Sagnac dipende unicamente dalla massa inerziale e viceversa quello da potenziale gravitazionale dal prodotto tra la massa inerziale e quella gravitazionale. Dunque

trovati questi termini, ricavatosi la massa inerziale è poi possibile calcolare anche quella gravitazionale e verificarne l'uguaglianza numerica. Nella sua parte *forte*, che fu originariamente data per scontata, è invece necessario un ulteriore esperimento. Svolto per la prima volta da Bonse e Wroblewski [16], prevede di accelerare l'interferometro dell'esperimento COW in modo da avere un sistema di riferimento la cui accelerazione vada ad annullare gli effetti della gravità.

Infine è stato notato come anche i fotoni, classicamente oggetti non massivi e dunque non perturbati in alcun modo dal potenziale gravitazionale, possano subire uno sfasamento, sia di tipo COW che causato da effetto Sagnac.

Per completezza si fa riferimento a due articoli che riportano di aver raggiunto precisioni molto maggiori di quelle raggiunte con gli esperimenti COW classici. Il primo, di Zouw, Weber, Zeilinger et al. [32] impiega l'uso di *very cold neutrons* e riesce a giungere a uno scostamento della teoria dello 0.08% seppur il fattore di correzione dovuto a una distribuzione asimmetrica delle lunghezze d'onda è piuttosto grande. Il secondo è più recente e impiega una tecnica detta *spin-echo*, è di Haan, Plomp, Well et al. [33] e giunge alla precisione di 0.1 punti percentuali di differenza tra esperimento e teoria.

Per concludere, si riporta la relazione completa che fornisce la differenza di fase tra i rami dell'interferometro e che dunque descrive la figura di interferenza indotta dal potenziale gravitazionale.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\alpha) &= \Delta\Phi_{grav} + \Delta\Phi_{bend} + \Delta\Phi_{Sagnac} \\ &= -q_{grav} \sin \alpha - q_{bend} \sin \alpha + q_{Sagnac} \cos \alpha \\ &= q \sin(\alpha - \alpha_0)\end{aligned}$$

nella quale si hanno

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{(q_{grav} + q_{bend})^2 + (q_{Sagnac})^2} \\ \alpha_0 &= \tan^{-1} \left(\frac{q_{Sagnac}}{q_{grav} + q_{bend}} \right)\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] A. W. McReynolds. «Gravitational Acceleration of Neutrons». In: *Phys. Rev.* 83 (1 lug. 1951), pp. 172–173. DOI: 10.1103/PhysRev.83.172. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.83.172>.
- [2] J. W. T. Dabbs, J. A. Harvey, D. Paya et al. «Gravitational Acceleration of Free Neutrons». In: *Phys. Rev.* 139 (3B ago. 1965), B756–B760. DOI: 10.1103/PhysRev.139.B756. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.139.B756>.
- [3] L. Koester. «Verification of the equivalence of gravitational and inertial mass for the neutron». In: *Phys. Rev. D* 14 (4 ago. 1976), pp. 907–909. DOI: 10.1103/PhysRevD.14.907. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.907>.
- [4] A. W. Overhauser e R. Colella. «Experimental Test of Gravitationally Induced Quantum Interference». In: *Phys. Rev. Lett.* 33 (20 nov. 1974), pp. 1237–1239. DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1237. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1237>.
- [5] R. Colella, A. W. Overhauser e S. A. Werner. «Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference». In: *Phys. Rev. Lett.* 34 (23 giu. 1975), pp. 1472–1474. DOI: 10.1103/PhysRevLett.34.1472. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.34.1472>.
- [6] H. Rauch e S. A. Werner. *Neutron Interferometry. Lessons in Experimental Quantum Mechanics, Wave-Particle Duality, and Entanglement*. 2^a ed. Oxford University Press, 2015. Cap. Gravitational, Inertial, and Motional Effects, pp. 246–291. ISBN: 978-0-19-871251-0.
- [7] J. -L. Staudenmann, S. A. Werner, R. Colella et al. «Gravity and inertia in quantum mechanics». In: *Phys. Rev. A* 21 (5 mag. 1980), pp. 1419–1438. DOI: 10.1103/PhysRevA.21.1419. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.21.1419>.

- [8] S.A. Werner, H. Kaiser, M. Arif et al. «Neutron interference induced by gravity: New results and interpretations». In: *Physica B+C* 151.1 (1988), pp. 22–35. ISSN: 0378-4363. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4363\(88\)90141-6](https://doi.org/10.1016/0378-4363(88)90141-6). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378436388901416>.
- [9] K. C. Littrell, B. E. Allman e S. A. Werner. «Two-wavelength-difference measurement of gravitationally induced quantum interference phases». In: *Phys. Rev. A* 56 (3 set. 1997), pp. 1767–1780. DOI: 10.1103/PhysRevA.56.1767. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.1767>.
- [10] Lorne A. Page. «Effect of Earth's Rotation in Neutron Interferometry». In: *Phys. Rev. Lett.* 35 (8 ago. 1975), pp. 543–543. DOI: 10.1103/PhysRevLett.35.543. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.35.543>.
- [11] J. Anandan. «Gravitational and rotational effects in quantum interference». In: *Phys. Rev. D* 15 (6 mar. 1977), pp. 1448–1457. DOI: 10.1103/PhysRevD.15.1448. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.1448>.
- [12] Leo Stodolsky. «Matter and light wave interferometry in gravitational fields». In: *General Relativity and Gravitation* 11.6 (dic. 1979), pp. 391–405. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/BF00759302. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00759302>.
- [13] S. A. Werner, J. -L. Staudenmann e R. Colella. «Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron». In: *Phys. Rev. Lett.* 42 (17 apr. 1979), pp. 1103–1106. DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.1103. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1103>.
- [14] Howard P. layer e Geoffrey L. Greene. «Elastic deformation of a monolithic perfect crystal interferometer: implications for gravitational phase shift experiments». In: *Physics Letters A* 155.8 (1991), pp. 450–454. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(91\)90645-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90645-0). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960191906450>.
- [15] K. C. Littrell, B. E. Allman, O. I. Motrunich et al. «The Effects of Dynamical Diffraction on the Measurement of Gravitationally Induced Quantum Phase Shifts by Neutron Interferometry». In: *Acta Crystallographica Section A* 54.5 (set. 1998), pp. 563–580. DOI: 10.1107/S0108767398001330. URL: <https://doi.org/10.1107/S0108767398001330>.
- [16] Ulrich Bonse e Thomas Wroblewski. «Measurement of Neutron Quantum Interference in Noninertial Frames». In: *Phys. Rev. Lett.* 51 (16 ott. 1983), pp. 1401–1404. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.1401. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1401>.

- [17] Ulrich Bonse e Thomas Wroblewski. «Dynamical diffraction effects in noninertial neutron interferometry». In: *Phys. Rev. D* 30 (6 set. 1984), pp. 1214–1217. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.1214. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.1214>.
- [18] B. Heacock, M. Arif, R. Haun et al. «Neutron interferometer crystallographic imperfections and gravitationally induced quantum interference measurements». In: *Phys. Rev. A* 95 (1 gen. 2017), p. 013840. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.013840. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.013840>.
- [19] S.A. Werner, H. Kaiser, M. Arif et al. «Full rotation gravitationally induced quantum interference experiment». In: *Physica B+C* 136.1 (1986). Neutron Scattering, pp. 137–140. ISSN: 0378-4363. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4363\(86\)80040-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4363(86)80040-7). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378436386800407>.
- [20] K. Varjú e Lewis H. Ryder. «General relativistic treatment of the Colella-Overhauser-Werner experiment on neutron interference in a gravitational field». English. In: *American Journal of Physics* 68.5 (mag. 2000), pp. 404–409. ISSN: 0002-9505.
- [21] Peter Wolf, Luc Blanchet, Christian J. Borde et al. «Testing the gravitational redshift with atomic gravimeters?». In: *2011 Joint Conference of the IEEE International Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS) Proceedings* (mag. 2011). DOI: 10.1109/fcs.2011.5977899. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/FCS.2011.5977899>.
- [22] Daniel M. Greenberger, Wolfgang P. Schleich e Ernst M. Rasel. «Relativistic effects in atom and neutron interferometry and the differences between them». In: *Phys. Rev. A* 86 (6 dic. 2012), p. 063622. DOI: 10.1103/PhysRevA.86.063622. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.063622>.
- [23] Shau-Yu Lan, Pei-Chen Kuan, Brian Estey et al. «A Clock Directly Linking Time to a Particle’s Mass». In: *Science* 339.6119 (2013), pp. 554–557. ISSN: 0036-8075. DOI: 10.1126/science.1230767. URL: <https://science.sciencemag.org/content/339/6119/554>.
- [24] Josuke Kuroiwa, Masumi Kasai e Futamase Toshifumi. «A treatment of general relativistic effects in quantum interference». In: *Physics Letters A* 182.4 (1993), pp. 330–334. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90403-M](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90403-M). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019390403M>.
- [25] R. V. Eotvos. In: *Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn* (1860).

- [26] R. H. Dicke. «Proc. Intern. School Phys. “Enrico Fermi,” Course 20, Evidence for Gravitational Theories, G. Polyani». In: *Academic Press, New York* (1962).
- [27] P. G. Roll, R. Krotkov e R. H. Dicke. «The equivalence of inertial and passive gravitational mass». In: *Annals of Physics* 26.3 (feb. 1964), pp. 442–517. DOI: 10.1016/0003-4916(64)90259-3.
- [28] Daniel M. Greenberger e A. W. Overhauser. «Coherence effects in neutron diffraction and gravity experiments». In: *Rev. Mod. Phys.* 51 (1 gen. 1979), pp. 43–78. DOI: 10.1103/RevModPhys.51.43. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.43>.
- [29] W.H. Klink. «Quantum Mechanics in Noninertial Reference Frames». In: *Annals of Physics* 260.1 (1997), pp. 27–49. ISSN: 0003-4916. DOI: <https://doi.org/10.1006/aphy.1997.5720>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491697957201>.
- [30] Max Dresden e Chen Ning Yang. «Phase shift in a rotating neutron or optical interferometer». In: *Phys. Rev. D* 20 (8 ott. 1979), pp. 1846–1848. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.1846. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.1846>.
- [31] Ta-Pei Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. 2010.
- [32] G. van der Zouw, M. Weber, A. Zeilinger et al. «Aharonov-Bohm and gravity experiments with the very-cold-neutron interferometer». In: *Nucl. Instrum. Meth. A* 440 (2000), pp. 568–574. DOI: 10.1016/S0168-9002(99)01038-4.
- [33] Victor-O. de Haan, Jeroen Plomp, Ad A. van Well et al. «Measurement of gravitation-induced quantum interference for neutrons in a spin-echo spectrometer». In: *Phys. Rev. A* 89 (6 giu. 2014), p. 063611. DOI: 10.1103/PhysRevA.89.063611. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.063611>.
- [34] Philip D. Mannheim. «Classical underpinnings of gravitationally induced quantum interference». In: *Phys. Rev. A* 57 (2 feb. 1998), pp. 1260–1264. DOI: 10.1103/PhysRevA.57.1260. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.57.1260>.
- [35] Valery V. Nesvizhevsky, Hans G. Börner, Alexander K. Petukhov et al. «Quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field». In: *Nature* 415.6869 (2002), pp. 297–299. DOI: 10.1038/415297a. URL: <https://doi.org/10.1038/415297a>.

- [36] H. Kaiser, N.L. Armstrong, F.E. Wietfeldt et al. «Gravitationally induced quantum interference using a floating interferometer crystal». In: *Physica B: Condensed Matter* 385-386 (2006), pp. 1384–1387. ISSN: 0921-4526. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2006.05.206>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452606010787>.
- [37] Hartmut Abele e Helmut Leeb. «Gravitation and quantum interference experiments with neutrons». In: *New Journal of Physics* 14.5 (mag. 2012), p. 055010. DOI: 10.1088/1367-2630/14/5/055010. URL: <https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F14%2F5%2F055010>.
- [38] J. J. Sakurai. «Potentials and gauge transformations». In: *Modern quantum mechanics. Revised edition*. A cura di San Fu Tuan. 10^a ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994. Cap. Quantum dynamics, pp. 123–129. ISBN: 0-201-53929-2.
- [39] P. A. M. Dirac. «On the Analogy Between Classical and Quantum Mechanics». In: *Rev. Mod. Phys.* 17 (2-3 apr. 1945), pp. 195–199. DOI: 10.1103/RevModPhys.17.195. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.17.195>.
- [40] S. A. Werner. «Gravitational and magnetic field effects on the dynamical diffraction of neutrons». In: *Phys. Rev. B* 21 (5 mar. 1980), pp. 1774–1789. DOI: 10.1103/PhysRevB.21.1774. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.21.1774>.
- [41] J. Anandan. «Sagnac effect in relativistic and nonrelativistic physics». In: *Phys. Rev. D* 24 (2 lug. 1981), pp. 338–346. DOI: 10.1103/PhysRevD.24.338. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.24.338>.
- [42] D. K. Atwood, M. A. Horne, C. G. Shull et al. «Neutron Phase Shift in a Rotating Two-Crystal Interferometer». In: *Phys. Rev. Lett.* 52.19 (mag. 1984), pp. 1673–1676. DOI: 10.1103/PhysRevLett.52.1673.
- [43] J. Anandan. «Curvature effects in interferometry». In: *Phys. Rev. D* 30 (8 ott. 1984), pp. 1615–1624. DOI: 10.1103/PhysRevD.30.1615. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.1615>.
- [44] Bahram Mashhoon. «Neutron interferometry in a rotating frame of reference». In: *Phys. Rev. Lett.* 61 (23 dic. 1988), pp. 2639–2642. DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.2639. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.2639>.
- [45] Friedrich W. Hehl e Wei-Tou Ni. «Inertial effects of a Dirac particle». In: *Phys. Rev. D* 42 (6 set. 1990), pp. 2045–2048. DOI: 10.1103/PhysRevD.42.2045. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.2045>.

- [46] Hong-Hua Xu e Chien-Hua Tsai. «Quantum interference effect in general rotating systems». In: *Phys. Rev. A* 41 (7 apr. 1990), pp. 4046–4048. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.4046. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.41.4046>.
- [47] B. E. Allman, A. Cimmino, A. G. Klein et al. «Observation of the scalar Aharonov-Bohm effect by neutron interferometry». In: *Phys. Rev. A* 48 (3 set. 1993), pp. 1799–1807. DOI: 10.1103/PhysRevA.48.1799. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.48.1799>.
- [48] V. V. Nesvizhevsky, H. Börner, A. M. Gagarski et al. «Search for quantum states of the neutron in a gravitational field: gravitational levels». In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 440.3 (feb. 2000), pp. 754–759. DOI: 10.1016/S0168-9002(99)01077-3.
- [49] K. A. Nugent e D. Paganin. «Matter-wave phase measurement: A noninterferometric approach». In: *Phys. Rev. A* 61 (6 mag. 2000), p. 063614. DOI: 10.1103/PhysRevA.61.063614. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.61.063614>.
- [50] Yuri N. Obukhov. «Spin, Gravity, and Inertia». In: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2 gen. 2001), pp. 192–195. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.192. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.192>.
- [51] V. V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. M. Gagarski et al. «Measurement of quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field». In: *Phys. Rev. D* 67 (10 mag. 2003), p. 102002. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.102002. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.102002>.
- [52] K. K. Nandi, I. R. Kizirgulov, O. V. Mikolaychuk et al. «Quantum phase shift in Chern-Simons modified gravity». In: *Physical Review D* 79.8 (apr. 2009). ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.79.083006. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.083006>.
- [53] A. Rembold, G. Schütz, W. T. Chang et al. «Correction of dephasing oscillations in matter-wave interferometry». In: *Physical Review A* 89.3 (mar. 2014). ISSN: 1094-1622. DOI: 10.1103/physreva.89.033635. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.89.033635>.
- [54] Anirban Saha. «Colella-Overhauser-Werner test of the weak equivalence principle: A low-energy window to look into the noncommutative structure of space-time?» In: *Phys. Rev. D* 89 (2 gen. 2014), p. 025010. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.025010. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.025010>.

- [55] Giovanni Manfredi, Omar Morandi, Lazar Friedland et al. «Chirped-frequency excitation of gravitationally bound ultracold neutrons». In: *Phys. Rev. D* 95 (2 gen. 2017), p. 025016. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.025016. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.025016>.
- [56] D. Condado, J. L. Díaz-Cruz, A. Rosado et al. «Diffraction of particles in free fall». In: *Physical Review A* 98.4 (ott. 2018). ISSN: 2469-9934. DOI: 10.1103/physreva.98.043618. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.98.043618>.
- [57] C. G. Shull e N. S. Gingrich. «Neutron Diffraction Effects with Moving Lattices». In: *Journal of Applied Physics* 35.3 (1964), pp. 678–682. DOI: 10.1063/1.1713434. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1713434>.
- [58] U. Bonse e M. Hart. «AN X-RAY INTERFEROMETER». In: *Applied Physics Letters* 6.8 (1965), pp. 155–156. DOI: 10.1063/1.1754212. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1754212>.
- [59] U. Bonse e M. Hart. «Small angle X-ray scattering by spherical particles of Polystyrene and Polyvinyltoluene». In: *Zeitschrift für Physik* 189.2 (apr. 1966), pp. 151–162. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF01327152. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01327152>.
- [60] J. Anandan e H. R. Brown. «On the reality of space-time geometry and the wavefunction». In: *Foundations of Physics* 25.2 (feb. 1995), pp. 349–360. ISSN: 1572-9516. DOI: 10.1007/BF02055212. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02055212>.
- [61] K. Raum, M. Koellner, A. Zeilinger et al. «Effective-Mass Enhanced Deflection of Neutrons in Noninertial Frames». In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (15 apr. 1995), pp. 2859–2862. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.2859. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2859>.
- [62] D. V. Ahluwalia e C. Burgard. «Gravitationally induced neutrino-oscillation phases». In: *General Relativity and Gravitation* 28.10 (ott. 1996), pp. 1161–1170. ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/BF03218936. URL: <https://doi.org/10.1007/BF03218936>.
- [63] Yuji Hasegawa e Helmut Rauch. «Quantum phenomena explored with neutrons». In: *New Journal of Physics* 13.11 (nov. 2011), p. 115010. DOI: 10.1088/1367-2630/13/11/115010. URL: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/11/115010>.