ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Visualizzazione e Concettualizzazione tra 2D e 3D.
Un percorso didattico sulla geometria solida in una scuola secondaria di primo grado

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Prof.ssa
ALESSIA CATTABRIGA

Presentata da:
DOMENICA STILO

Sessione unica

Anno Accademico 2018/2019

Ai miei genitori,
i pilastri della mia vita.

Introduzione

" ... il difetto dello spirito matematico... è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile istrumento dialettico" [Enriques cit. in [14]].

Attraverso l'insegnamento della geometria nella scuola dell'obbligo si cerca di formare l'allievo affinché possa essere in grado di percepire, dare senso e capire il mondo fisico circostante, l'intento è quindi quello di fornire una conoscenza che permetta una modellizzazione della realtà che ci circonda. In particolare, la geometria che si può insegnare nella scuola primaria e secondaria di primo grado è una geometria intuitiva; come afferma Maria Dedò in [11] non si ha, dunque, la pretesa di costruire l'intero edificio della geometria dalle fondamenta, e di costruirlo in maniera logicamente corretta, piuttosto il vero obiettivo è portare i ragazzi a costruirsi un "bagaglio" di fatti geometrici (figure, oggetti, proprietà, relazioni, costruzioni, problemi), che negli anni si organizzeranno in "pacchetti" sempre più coerenti da un punto di vista logico e sempre più ampi. Il ragazzo va inoltre guidato ad osservare, perché anche questa è un'abilità che si impara. Con il passare degli anni imparerà a rendere questa osservazione sempre più fine, sempre più critica, sempre più educata, a domandarsi quali sono (a seconda del problema che si sta considerando) gli

aspetti che meritano di essere osservati e quali quelli che, in prima battuta, si possono anche ignorare.
Nella scuola primaria e secondaria di primo grado l'insegnamento della geometria è tradizionalmente fondato sull'impostazione euclidea che parte dal piano per poi passare solo successivamente allo spazio. Un approccio che però, come evidenziano Arrigo e Sbaragli [1], rischia di far perdere il contatto con la geometria tridimensionale che, dal punto di vista didattico, rappresenta una lettura della realtà più intuitiva per gli allievi perché vicina alle loro esperienze. Per un bambino infatti risulta essere più sofisticata una figura piana, da immaginare senza spessore, rispetto a un solido, proprio perché tutto ciò che lo circonda è tridimensionale.
Nello studio della geometria 3D, un ruolo particolarmente importante lo riveste lo sviluppo della visualizzazione e della concettualizzazione. Con questo lavoro di tesi, mi propongo di elaborare un percorso didattico, caratterizzato dalla congiunzione tra la geometria del piano e dello spazio, che mira a sviluppare le capacità di visualizzazione e di concettualizzazione in modo da favorire l'apprendimento in ambito geometrico.
In particolare, nel Capitolo 1 viene approfondita la "teoria dei concetti figurali" di Fischbein secondo cui il ragionamento geometrico è caratterizzato dalla capacità di integrare sia gli aspetti concettuali che quelli figurali degli oggetti geometrici considerati. Questa interazione risulta essere fondamentale per lo sviluppo dei concetti geometrici e dovrebbe costituire una continua, sistematica e principale preoccupazione dell'insegnante. Ci si concentra poi sulla visualizzazione puntanto l'attenzione sulle varie abilità visuo spaziali individuate dalla psicologia cognitiva. Diversi autori ritengono che le principali difficoltà siano legate all'interpretazione e all'uso delle rappresentazioni piane di oggetti 3D e, a questo proposito, la capacità di visualizzazione diventa

fondamentale, in quanto è attraverso la visualizzazione che si può rendere visibile ciò che non è accessibile attraverso la visione [13]. In altre parole si tratta della capacità di controllare le proprietà dell'oggetto, che si preservano nella sua rappresentazione, e quelle che invece non vengono mantenute.

Nel Capitolo 2 si propone un percorso didattico da attuare in una prima o seconda classe di una scuola secondaria di primo grado. Questo è caratterizzato da due questionari: uno in entrata, grazie al quale è possibile testare le competenze degli alunni, e uno in uscita, utile per analizzare gli sviluppi del gruppo classe. Nell'intermezzo dei due questionari si colloca una attività didattica che consta di tre lezioni, nelle quali ci si concentra sui "punti di vista", sul "processo di definizione" e sul "passaggio 3D-2D" e viceversa. Tutte quelle appena elencate sono situazioni in cui è necessario mettere in atto un processo di integrazione tra la componente figurale e concettuale per raggiungere un buon risultato.

Il Capitolo 3 è dedicato all'analisi della attività didattica, descritta al capitolo precedente, effettuata in una seconda classe di una scuola secondaria di primo grado.

Nel Capitolo 4, infine, si riflette sui cambiamenti positivi derivanti dal lavoro svolto e sui suoi possibili limiti.

Indice

Capitolo 1

Il quadro teorico di riferimento

In questo primo capitolo si vuole riflettere sulla natura dei concetti e del ragionamento geometrico. In particolare si prendono in considerazione le teorie concernenti la visualizzazione e la concettualizzazione in geometria, elaborate sia nell'ambito della didattica della matematica che in quello della psicologia con l'obiettivo di gettare le basi teoriche su cui verranno strutturati i capitoli successivi.

1.1 Teoria dei concetti figurali

Nelle teorie psicologiche e cognitive i concetti e le immagini sono solitamente considerate come due categorie distinte di entità mentali. Da una parte i concetti, considerati come espressione di un'idea, sono legati a una rappresentazione generale ed ideale di una classe di oggetti in base alle loro caratteristiche comuni, dall'altra le immagini sono considerate come rappresentazioni sensoriali di un oggetto o di un fenomeno. Nei ragionamenti geometrici, però, queste due entità non sono così indipendenti, in particolare, esse vengono mescolate come Fischbein sostiene in [15]. A differenza di tutte le scienze empiriche, per le quali l'oggetto ultimo della ricerca resta il mondo reale, del quale ogni scienza cattura solo parte della complessità, per la geometria la realtà viene ad essere completamente sostituita da rappresentazioni mentali. Nel caso della geometria, oggetti e proprietà possono essere considerati come pure costruzioni mentali; a tal proposito, Henri Poincaré afferma: «I principi della geometria non sono dei fatti sperimentali. [...] È chiaro che l'esperienza gioca un ruolo insostituibile nella genesi della geometria: ma sarebbe un errore concludere che la geometria è una scienza sperimentale, anche solo in parte» ([25], p. 90-92). In teoria, «un geometra può limitare la sua attività di ricerca a livello puramente mentale, esplorazioni concrete non sono necessarie» ([19], p.20). Non di meno il legame con la realtà è mantenuto, in particolare i processi di pensiero mantengono una proprietà della realtà rappresentabile pittoricamente: lo spazio. Secondo Fischbein tutte le figure, su cui si basa il ragionamento geometrico, non possono essere considerate né come puri concetti né come pure immagini, in quanto esse rappresentano delle costruzioni mentali che possiedono allo stesso tempo sia proprietà concettuali che figurali. Si tratta di «a mixture of two independent, defined entities, that is abstract ideas (concepts), on one hand, and sensorial representations reflecting some concrete operation»[1] ([15], p.140). Ad esempio, quando si tratta la congruenza di due triangoli, ci si riferisce ai concetti di punto, angolo, lato e triangolo ma anche a informazioni o ad operazioni figurali, come per esempio la sovrapposizione di due triangoli. Le entità geometriche a cui ci riferiamo quindi, per loro natura, possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali e sono appunto definite da Fischbein "figural concept". Un **concetto figurale** è dunque un'entità mentale che è controllata da concetti ma che

[1] Un misto di due entità indipendenti e definite, ovvero da un lato idee astratte (concetti), dall'altro rappresentazioni sensoriali che riflettono parte delle operazioni concrete.

preserva la sua spazialità. Fischbein spiega questo aspetto sostenendo che gli oggetti possiedono una natura figurale intrinseca, in quanto solo facendo riferimento alle immagini, ai disegni è possibile prendere in considerazione delle operazioni come sovrapporre, distaccare o invertire, necessarie per la comprensione della materia. Il **disegno**, ossia una «traccia scritta su un foglio e che rappresenta un oggetto geometrico» ([20], p.126) ha una funzione centrale nel processo di concettualizzazione all'interno del contesto scolastico: è pratica comune introdurre un concetto geometrico fornendo esempi e questo avverrà soprattutto attraverso disegni che lo rappresentano. Si innesca, così, un duplice processo: da un lato la concettualizzazione è guidata da una definizione espressa verbalmente, dall'altro la concettualizzazione è guidata dall'esperienza percettiva di disegni dai quali estrarre le proprietà caratterizzanti. Tuttavia, il disegno, pur essendo esso stesso un oggetto reale, fornisce sempre e comunque una rappresentazione bidimensionale.
L'idealità, l'astrattezza, la perfezione e la generalità delle entità geometriche possono, quindi, essere prese in considerazione solo in modo concettuale, esse infatti non possiedono una corrispondenza materiale: oggetti 0-, 1-, 2-dimensionali come punto, linea e piano non possono esistere nella realtà, che è 3-dimensionale. Ma anche se prendiamo in considerazione oggetti solidi come il cubo o la palla, questi sono sempre considerati come costrutti mentali che si suppone non possiedano realtà sostanziale. Dunque, gli enti geometrici possiedono una proprietà della realtà, che gli enti matematici non geometrici non possiedono, la spazialità. «When conceptualizing, for instance, a wheel in order to describe its roundness, we may get not only the idea of roundness, not only the image of the wheel associated with it, but also a third type of construct which is the geometrical figure called circle»[2] ([15], p.141). Analo-

[2]Nel concettualizzare, ad esempio, una ruota, per descrivere la sua rotondità è possibile che cogliamo non solo l'idea di rotondo, non solo l'immagine della ruota ad essa associata,

gamente, un rettangolo, in termini geometrici non è l'immagine di un oggetto reale anche se può essere legato a qualche oggetto reale come, per esempio, ad un foglio di carta. Tuttavia il rettangolo può condividere con un foglio di carta solo quelle proprietà che sono determinate dalla sua definizione: "un quadrilatero con i lati perpendicolari a due a due". Quest'ultimo aspetto è specifico dei concetti geometrici, che fanno parte di un sistema teorico; in altri termini i concetti geometrici sono del tutto controllati dalla loro definizione, in modo che ogni loro proprietà deriva da essa: tutte e sole le proprietà del rettangolo derivano dalla sua definizione.
Lo schema in Figura 1.1 rappresenta la complessità delle relazioni in gioco. Lo studio dei rapporti tra realtà, disegno e geometria risulta particolarmente interessante, da un punto di vista didattico, perchè permette di comprendere l'unitarietà della problematica del disegno, ma anche la complessità di tutte le sue sfaccettature.

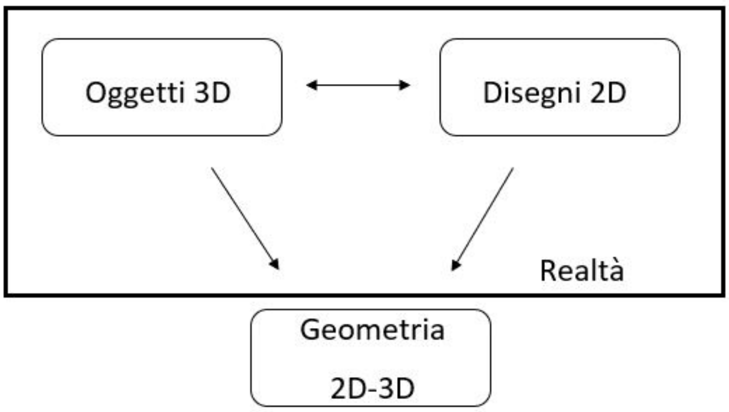


Figura 1.1: Oggetto, disegni, figure geometriche, ([19], p.31).

Consideriamo il problema seguente proposto da Fischbein in [15]: "Dato un cubo, considerare le due sue diagonali: sono tra loro perpendicolari?" Ad

ma anche un terzo tipo di costrutto che è la figura geometrica chiamata cerchio.

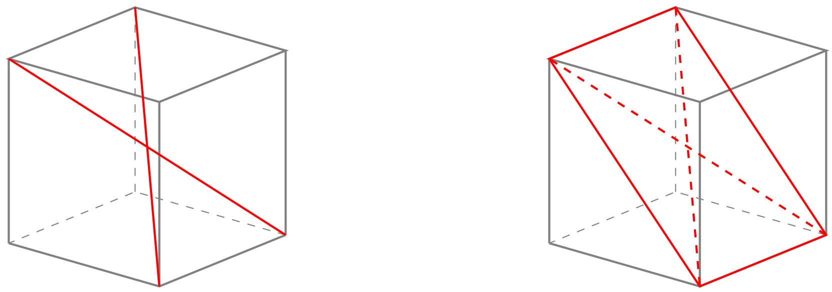


Figura 1.2: a sinistra due diagonali di un cubo, a destra le diagonali del cubo come diagonali di un rettangolo.

un primo esame (si veda l'immagine a sinistra della Figura 1.2) può sembrare un problema assai semplice, ma nonostante il cubo possa considerarsi una figura familiare, la domanda può lasciare perplessi e spesso produce una risposta errata. Al principio, se immaginiamo il cubo, sembra impossibile "vedere" se le due diagonali sono perpendicolari o meno. In realtà è necessario un semplice ragionamento: per esempio, considerare le due diagonali come le diagonali di un rettangolo formato da due spigoli del cubo e da due diagonali di una coppia di facce opposte (si veda l'immagine a destra della figura 1.2).

La struttura intrinseca del cubo determina tale rettangolo e il fatto che tale rettangolo non può essere un quadrato, dunque le due diagonali non possono essere perpendicolari. Tale proprietà non dipende dal particolare cubo, piuttosto deriva logicamente dalla sua definizione. Ma il punto fondamentale è che è possibile arrivare immediatamente alla conclusione considerando allo stesso tempo l'immagine del cubo e la sua concettualizzazione, in un processo mentale unitario, nel quale l'immagine è completamente controllata dalla logica del concetto. fischbein sottolinea che la completa fusione risulta essere solo «an ideal, extreme situation usually not reached absolutely because of psychological constraint»[3] ([15], p.143): uno legato alla percezione sensoriale

[3]Una situazione ideale, estrema, che vincoli psicologici non permettono di raggiungere completamente.

e l'altro legato al dominio concettuale. Questi distinti vincoli non impediscono però una armonizzazione dei due aspetti, necessaria e cruciale dal punto di vista didattico. In effetti i concetti geometrici, diversamente da altri concetti matematici, necessitano di rappresentazioni figurali per poter essere compresi, ma la sola rappresentazione figurale non è di per sé sufficiente per formare il concetto geometrico; solo con un atto mentale, un disegno può essere interpretato e può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità. Se ciò non avviene, c'è il rischio che la rappresentazione iconica venga identificata con il concetto geometrico, come illustrato in [7], ossia che l'aspetto figurale sia troppo forte e porti a cancellare gli indispensabili vincoli concettuali. Il giusto equilibrio tra la componente concettuale e figurale di un determinato oggetto geometrico non sempre si realizza nell'allievo; talvolta misconcezioni sono imputabili proprio alla preponderanza di una sull'altra, soprattutto dell'aspetto figurale su quello concettuale (si veda [10]). Invece, idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure, per stabilire un controllo conforme alla teoria geometrica, senza far scomparire il contributo della componente figurale. Tale processo di costruzione dei concetti figurali non è naturale e spontaneo per l'allievo; per questo l'insegnante deve aver cura di stimolare in modo continuativo e sistematico «The integration of conceptual and figural properties in unitary mental structures, with the predominance of the conceptual constraints over the figural ones»[4] ([15], p.156), scegliendo strumenti e situazioni adatte a tale scopo.

[4] L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali.

1.2 Il ruolo della visualizzazione in ambito geometrico

Dal punto di vista cognitivo, come affermano Duval e D'Amore in [9], "vedere" è riconoscere una forma a colpo d'occhio grazie al contorno chiuso o al colore che la evidenzia, come "figura", da uno sfondo rispetto ad altre forme. Questo riconoscimento visivo si fonde con il riconoscimento cognitivo dell'oggetto la cui forma è la sua sagoma caratteristica. Ma le due cose sono tra loro indipendenti. Vedere, dunque, è in generale un processo automatico che non mette in campo apparati cognitivi, un puro atto sensibile; ma in geometria questo processo acquista un ruolo determinante nell'ambito dell'apprendere o dell'agire scolastico. Bisogna non solo "vedere", ma anche "saper vedere" grazie a un opportuno allenamento cognitivo, il che significa distinguere, riconoscere, stabilire e mettere in relazione. In particolare Duval, in [13], osserva che gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione come sono gli oggetti comunemente detti "reali" o "fisici", pertanto le diverse rappresentazioni semiotiche[5] di un oggetto matematico sono assolutamente necessarie; egli evidenzia tuttavia, che, per la comprensione della materia, è essenziale non confondere il concetto con le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili. Per fare ciò, da un punto di vista didattico, è necessario che lo studente sia in grado di muoversi tra i diversi possibili registri di rappresentazione. Duval, come si evince da [13], fa inoltre una distinzione tra visualizzazione e visione sostenenendo che la **visione** fornisce un accesso diretto a qualsiasi oggetto fisico, mentre la **visualizzazione** non consiste solo nel percepire ciò che è visibile agli occhi, bensì nell'osservare e capire ciò che è realmente rappresentato. Essa si basa sulla produzione di rappre-

[5] La semiotica è la scienza che si occupa della rappresentazione dei concetti mediante un sistema di segni.

sentazioni semiotiche, le quali mostrano «relations or, better, organization of relations between representational units»[6] ([13], p.13). Tali rappresentazioni non mostrano l'oggetto così com'è, nella sua totalità, ma necessitano di una comprensione globale dell'oggetto. Ad esempio, il disegno di un solido proiettato sul piano è comprensibile ed interpretabile come figura tridimensionale solo se avviene il processo di visualizzazione, ovvero se esiste la capacità di cogliere in modo diretto l'intera configurazione di relazioni presenti, selezionando ciò che è importante per la comprensione. In questo senso, Duval sostiene che «visualization makes visible all that is not accessible to vision» [7] ([13], p.13). Nelle situazioni che richiedono la visualizzazione di entità geometriche si osserva che per molti studenti vi sono delle difficoltà. Queste si legano al fatto che le figure geometriche possono avere più di un'interpretazione come ad esempio avviene nell'immagine riportata in Figura 1.3.Tale immagine può essere soggetta ad una duplice interpretazione, infatti è possibile visualizzare un cubo appogiato sul pavimento di una stanza oppure un cubo con una cavità cubica.

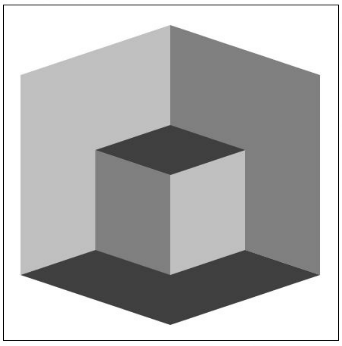


Figura 1.3: immagine tratta da `http://www.wyrmcorp.com/galleries/illusions/flipflop.shtml`

[6]Relazioni o, meglio, un'organizzazione di relazioni tra le unità di rappresentazione.

[7]La visualizzazione si può rendere visibile tutto ciò che non è accessibile attraverso la visione.

A tal proposito si può osservare come Duval in [12] distingue quattro forme di comprensione cognitiva collegate al modo in cui una persona guarda il disegno di una figura geometrica: percettiva, sequenziale, discorsiva e operativa. La comprensione percettiva si riferisce a ciò che una persona riconosce a una prima occhiata quando guarda una figura geometrica; essa assume quindi una funzione importante: «Il pensiero visivo (visual thinking) non potrà mai essere semplicemente relegato sullo sfondo ma resterà sempre una componente da non trascurare» ([19], p.65) sulla quale è necessario riflettere didatticamente. Per pensiero visivo si intende il processo di ricostruzione di un immagine interna, a partire dagli stimoli sensoriali. La rappresentazione figurale non è verità oggettiva, ma soggettiva, rappresentazione cioè sempre interpretabile. Questo principio è stato testimoniato dagli studi sulla percezione visiva ma è fondamentale anche in ambito matematico, dove la componente figurale è intrinsecamente collegata agli "oggetti" geometrici. In effetti, risulta didatticamente importante far percepire la varietà di interpretazione e gli "inganni" che si celano nelle rappresentazione iconiche, spesso legati a fattori percettivi. A questo scopo occorre sensibilizzare gli allievi ad un "pensiero visivo" acuto e critico, per renderli "diffidenti" nei confronti dell'aspetto gurale ed essere così capaci di far prevalere l'aspetto concettuale. Da questo punto di vista è possibile proporre agli allievi immagini "reversibili", immagini cioè che consentono più letture ugualmente valide, ma che si escludono a vicenda. Si può osservare, in Appendice A.1, il terzo quesito del questionario iniziale, che può essere un valido strumento per sviluppare un "occhio intelligente" in grado di interpretare, manipolare in diversi modi e criticamente le immagini, senza ancorarsi troppo all'aspetto figurale, ma mettendo in azione quello concettuale.

La capacità di manipolare le immagini mentali ed elaborare gli stimoli spaziali è necessaria per lo studio della geometria, infatti fin dalle prime esperienze scolastiche lo studio di questa disciplina richiede all'alunno di sfruttare la sua esperienza visiva, tattile e motoria relativa alla forma, alla grandezza e alla posizione degli oggetti per poi procedere per razionalizzazioni successive delle prime osservazioni. Nell'ambito della psicologia risulta essere interessante la teoria della forma, sviluppatasi agli inizi del XX secolo in Germania. Questa mette in evidenza che uno dei fattori che influenza il modo di vedere forme e oggetti è l'orientamento spaziale, in particolare alla base di tale teoria vi è la "legge di simmetria" secondo cui le zone della scena visiva simmetriche rispetto agli assi principali, verticale e orizzontale, tendono ad assumere il carattere di figure mentre il resto viene percepito come sfondo, come descritto in [27]. Più in generale, secondo la psicologia cognitiva, la visualizzazione è legata a specifiche capacità dell'individuo, chiamate **abilità visuo spaziali**. Sulla base dei test utilizzati in [22], si prendono in considerazione le abilità che, probabilmente, vengono maggiormente coinvolte nella risoluzione di compiti geometrici. Mantenendo inalterata la classificazione della psicologia cognitiva, in [22] viene proposta un'interpretazione nell'ambito del ragionamento geometrico delle abilità scelte. Di seguito, si riportano le abilità visuo-spaziali prese in esame, sia nella definizione originale che trasposte nell'ambito del pensiero geometrico.

Abilità visuo-spaziali	**Psicologia Cognitiva**	**Interpretazione in ambito geometrico**
Organizzazione visiva	Abilità di organizzare modelli incompleti o non perfettamente visibili	Abilità di riconoscere concetti figurali a partire da rappresentazioni incomplete o non perfettamente visibili.

Scansione visiva	Abilità di ispezionare rapidamente e accuratamente una configurazione visiva per un dato scopo	Abilità di riconoscere le proprietà di una figura a partire dalla sua rappresentazione.
Abilità visiva ricostruttiva	Abilità di ricostruire un dato modello (tramite disegno o strumenti)	Abilità di ricostruire la componente figurale di un concetto figurale in una data rappresentazione autonomamente oppure a partire da indicazioni scritte o verbali o da rappresentazioni parziali.
Abilità di generare immagini	Abilità di generare rapidamente immagini mentali visuospaziali	Abilità di riprodurre istantaneamente in mente la componenete figurale di una concetto figurale recuperandola dalla memoria o elaborandola ex novo.
Memoria spaziale a lungo termine	Abilità di mantenere informazioni spaziali sul lungo periodo di tempo	É coinvolta nell'abilità di conservare nella memoria a lungo termine la componente figurale di un concetto figurale.

Abilità di manipolare immagini	Abilità di manipolare immagini mentali visuo-spaziali per trasformarle e valutarle	Abilità di utilizzare le proprietà di un concetto figurale overo di manipolare aspetti figurali di un concetto figurale, tenendo conto delle relazioni teoriche tra gli enti geoemtrici di cui è composto.
Memoria a breve termine spaziale sequenziale	Abilità di ricordare una sequenza di diverse posizioni	É coinvolta in diverse abilità utili in ambito geometrico, in particolare quella di ricordare diverse configurazioni assunte dalla componente figurale di un concetto figurale durante una manipolazione osservata o immaginata.

1.3 La visualizzazione nel passaggio tra 2D e 3D e viceversa

Clements e Battista definiscono il ragionamento spaziale come «the set of cognitive processes by which mental representations for spatial objects, relationships, and transformations are constructed and manipulated»[8]([5], p.420)

[8] L'insieme di processi cognitivi attraverso i quali vengono costruite ed elaborate rappresentazioni e concettualizzazioni di oggetti spaziali, di relazioni e trasformazioni di essi.

ed inoltre, Battista ([2], p.843) sostiene che «spatial resoning is the ability to see, examine and reflect about spatial objects, images, relationships and transformations».[9] Come già visto, nello studio della geometria, rappresentare figure 3D nel piano e, viceversa, ricostruire figure tridimensionali a partire da rappresentazioni 2D sono situazioni che coinvolgono il ragionamento spaziale e che rivestono un ruolo fondamentale. Diversi autori ([17], [21], [23], [24]) osservano che, in situazioni di visualizzazione che richiedono procedimenti come la coordinazione e l'integrazione di punti di vista, la rotazione di un oggetto tridimensionale nello spazio e il piegare e dispiegare sviluppi di solidi, gli errori e le difficoltà sono frequentemente associate all'interpretazione e all'uso delle rappresentazioni piane di oggetti 3D. In particolare affermano che le difficoltà incontrate dagli studenti, confrontati con situazioni di visualizzazione che includono rappresentazioni piane di oggetti 3D, sono spesso collegate al fatto che il ragionamento non viene fatto a partire dall'oggetto geometrico teorico (concetto) ma in base alla sua rappresentazione nel piano (immagine). A questo proposito, Parzysz in [23] sostiene che nella decodifica di una rappresentazione piana di un oggetto 3D il lettore potrebbe confondere la figura 3D rappresentata con una figura 2D avente la stessa rappresentazione. Una difficoltà definita "insolubile", perché inevitabile, che crea un conflitto tra quello che si vede e quello che si conosce dell'oggetto 3D. Rappresentando una figura 3D nel piano avviene infatti una perdita di informazioni, dato che si deve rinunciare a una delle tre dimensioni. In particolare, secondo Fischbein, la trasformazione di **sviluppo di un solido**, e quindi il passaggio tra 3D e 2D e viceversa, rappresenta un'ottima opportunità per promuovere la dialettica tra la componente figurale e concettuale di un oggetto geometrico. Egli osserva che negli sviluppi della figura 1.4 la

[9] Il ragionamento spaziale è l'abilità di vedere, esaminare e riflettere riguardo a oggetti spaziali, immagini, relazioni e trasformazioni.

componente figurale e quella concettuale sono ben integrate e di conseguenza si può manipolare lo sviluppo con i suoi elementi come concetto figurale, riconoscendo facilmente che il disegno rappresenta uno sviluppo di un cubo. In particolare questi tipi di sviluppi sono considerati come prototipi, nel senso che corrispondono ad una immagine stereotipata del cubo: quattro facce laterali e due basi. fischbein sostiene invece che, se si osserva l'immagine in Figura 1.5 è più difficile riconoscere che si tratta di uno sviluppo di un cubo, dato che per ricostruire il solido, non è sufficiente solo vedere le figure, bensì è necessario modificare le loro posizioni e immaginare l'effetto delle trasformazioni sulle figure adiacenti.

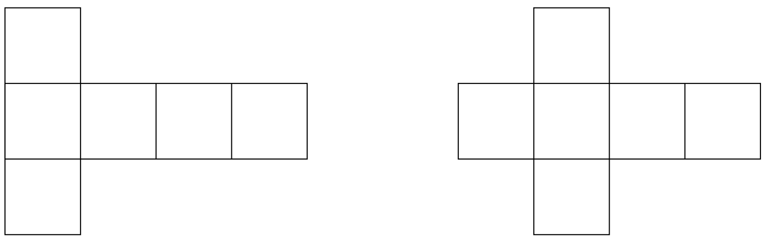


Figura 1.4: Sviluppi considerati come prototipi.

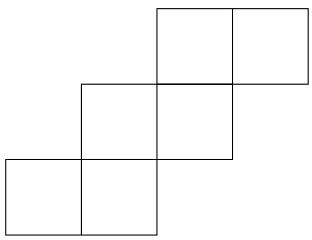


Figura 1.5: Sviluppo in configurazione 2-2-2.

Esercizi di questo genere, per fischbein, possono contribuire ad un miglioramento dei seguenti aspetti:

- la cooperazione costruttiva dell'aspetto figurale e concettuale in un'attività di problem solving in ambito geometrico;

- la capacità di mantenere in mente e coordinare il maggior numero possibile di elementi concettuali;
- la capacità di organizzare i processi mentali;
- la capacità di prevedere e integrare l'effetto di ogni trasformazione sulla strada della soluzione.

Nei problemi in cui è richiesta la visualizzazione di oggetti 3D molto spesso si lavora con le loro rappresentazioni (materiali o mentali). Per manipolare correttamente queste rappresentazioni dell'oggetto è necessario controllare le proprietà, che si preservano nella rappresentazione, e quelle che invece non vengono mantenute. La dialettica tra l'aspetto figurale e concettuale è dunque fondamentale e, come osserva Fischbein in [15], esiste la possibilità di far esercitare gli studenti con attività mentali in cui è richiesta la cooperazione tra i due aspetti. Così facendo si sviluppa il ragionamento spaziale ed insieme ad esso la visualizzazione e la concettualizzazione.

Capitolo 2

Progettazione dell'intervento didattico

Il Capitolo 2 contiene la descrizione di un percorso didattico progettato per studiare alcune competenze in ambito geometrico descritte nel capitolo precedente (visualizzazione e concettualizzazione) e per indagare i processi mentali coinvolti nel ragionamento geometrico, esplorando l'interazione tra la componente figurale e quella concettuale

2.1 Caratteristiche dell'attività

L'intevento didattico è pensato per gli studenti della scuola secondaria di primo grado.
Tradizionalmente, a livello della scuola primaria lo studio della geometria e in particolare della geometria tridimensionale è piuttosto trascurato nonostante le indicazioni nazionali lo prevedano (si veda Appendice C). Molto spesso le attività geometriche sono limitate alla classificazione delle figure, insieme ai corrispondenti disegni e definizioni, e alla memorizzazione di formule per il

calcolo di perimetri, aree e volumi delle figure. Della predominanza nell'insegnamento del piano sullo spazio, sono testimonianza, come osserva Sbaragli in [29], anche le ammissioni esplicite di diversi insegnanti che con estrema sincerità affermano di usare con i bambini un linguaggio specifico del mondo 2D, che viene però spesso impropriamente riferito anche al mondo 3D. Ad esempio un insegnante afferma: «Io, questo [indicando con un dito uno spigolo di un cubo] lo chiamo lato» ([29], p.2) (termine specifico del piano) e un altro: «Io questo lo chiamo triangolo [un modello di prisma triangolare con la faccia triangolare più estesa] e questo quadrato [un modello di prisma quadrangolare con la faccia quadrata più estesa]» ([29], p.3). Allo stesso tempo, alcuni insegnanti intervistati dichiarano di non conoscere, quindi di non fare uso, di un linguaggio specifico riguardante lo spazio: «La parola faccia non la uso in matematica», oppure «Questo è lo spigolo? Io ho sempre detto che questa punta [vertice] era lo spigolo» ([29], p.3). È chiaro che comportamenti di questo tipo possono condurre a misconcezioni e provocare ostacoli agli apprendimenti matematici successivi. Per quanto riguarda il problema specifico di sviluppo e ricostruzione di un solido, che sarà al centro dell'intervento didattico progettato in questo capitolo, le attività ad esso correlate hanno uno scopo essenzialmente pratico, concreto. Nelle indicazioni nazionali si legge tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria, nell'ambito spazio e figure, che lo studente dovrà riuscire a «costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione» (si veda Appendice C).

Per quanto riguarda l'insegnamento della geometria nella scuola secondaria di primo grado, target dell'intervento didattico, è prassi comune quella di partire nella classe prima dalla trattazione della geometria piana (in linea con la presentazione fornita dagli Elementi di Euclide) per arrivare alla geo-

metria solida solo alla fine della terza classe, sottovalutandone l'importanza, le potenzialità e creando così un'ulteriore frattura con il livello scolastico precedente durante il quale, almeno in modo intuitivo, la geometria dello spazio era stata già stata presentata.
Per ridurre tale frattura, l'intervento didattico proposto in questa tesi è pensato soprattutto per gli studenti di una classe prima o seconda della scuola secondaria di primo grado, come primo approccio, a tale grado scolastico, alla geometria solida. Si propone, inoltre, di contribuire al raggiungimento dei seguenti obiettivi di apprendimento di matematica, nell'ambito "spazio e figure", previsti nelle indicazioni nazionali per il termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado: «rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano» e «visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali» (si veda Appendice C). Inoltre, come si vedrà in seguito, l'intervento didattico è progettato tentando di favorire il processo di armonizzazione tra aspetti concettuali e figurali degli enti geometrici, facendo riflettere gli studenti su quello che è il processo di definizione in geometria e proponendo loro situazioni che coinvolgono il passaggio 2D-3D.

Per la realizzazione del percorso didattico sono necessarie:

- Schede cartacee (riportate in Appendice B) e cartoncini.
- La LIM, strumento necessario durante il percorso didattico per proiettare animazioni geogebra su cui riflettere collettivamente.
- Modellini in cartone di prismi e piramidi.

L'intervento didattico è strutturato in tre fasi distinte fra loro: nella prima si effettuano delle rilevazioni di ingresso attraverso un questionario, al fine di definire e analizzare la situazione iniziale degli allievi; nella seconda si progetta e realizza un itinerario didattico al fine di far evolvere le competenze; infine, al termine dell'itinerario, si sottopone agli allievi un questionario di uscita.

La fase centrale sarà caratterizzata dall'alternarsi di momenti frontali e attività di **cooperative learning** o apprendimento cooperativo. A chiusura di sezione, si richiamano alcune caratteristiche dell'apprendimento cooperativo per contestualizzare la scelta fatta ed evidenziare gli aspetti in gioco. Comoglio e Cardoso definiscono l'apprendimento cooperativo come un «insieme di tecniche di conduzione della classe, grazie alle quali gli studenti lavorano in piccoli gruppi per attività di apprendimento» ([3], p.243). Le finalità dell'utilizzo dell'apprendimento cooperativo non si limitano ad agevolare il raggiungimento degli obiettivi disciplinari, ma soprattutto rispondono alla necessità di insegnare agli allievi i comportamenti più efficaci nel relazionarsi con gli altri, i comportamenti da adottare per poter **lavorare in gruppo** in modo costruttivo, quelli che vengono definiti abilità sociali (o competenze sociali) cioè «. . . tendenza a cooperare, altruismo, capacità di comprendere ciò che gli altri sentono e le prospettive che assumono quando esprimono la loro opinione, abilità ad assumere un ruolo all'interno di un gruppo, a comunicare, a comprendere, a gestire le differenze di opinioni, ad agire dimostrando e infondendo fiducia» ([3], p. 244).

Dimensioni del gruppo

Non esistono dimensioni ideali per un gruppo di apprendimento cooperativo, poiché esse dipendono dagli obiettivi della lezione, dall'età e dall'esperienza degli studenti nel lavoro di gruppo, dalle materie di studio e dalle attrezzature e dal tempo disponibili (si veda [18]). È comunque importante tenere presente che con l'aumentare del numero dei componenti del gruppo le interazioni tra i membri diventano molto più complesse e sofisticate.

Criteri per comporre il gruppo

Non esistono i membri ideali per i gruppi di apprendimento cooperativo: ciò che determina la produttività di un gruppo non sono le caratteristiche del singolo componente, quanto le sue abilità nel lavoro di gruppo. Istruire gli studenti su come lavorare insieme in maniera costruttiva inciderà molto di più sulla produttività di gruppo che non l'assegnazione a esso di determinati studenti (si veda [18]). Occorre stabilire, a discrezione dell'insegnante se debbono essere OMOGENEI o ETEROGENEI in termini di rendimento scolastico. In genere nei casi in cui si devono insegnare abilità specifiche o raggiungere determinati obiettivi didattici può essere opportuno usare gruppi di apprendimento cooperativo omogenei in termini di capacità, tuttavia tra gli svantaggi di questa scelta ci si potrebbe aspettare una possibile competizione e frattura tra i gruppi dei "più bravi" e "meno bravi" e di conseguenza una eventuale demotivazione di questi ultimi. Anche la scelta dei gruppi eterogenei presenta dei vantaggi, tra cui quello di esporre gli studenti a molteplici prospettive e metodi di risoluzione dei problemi e quello di generare un maggiore squilibrio cognitivo (necessario per stimolare lo sviluppo intellettivo e l'apprendimento degli studenti); è probabile però che si verifichi una situazione dipendenza da alcuni compagni di gruppo.

Assegnare i ruoli

All'interno di ogni gruppo è possibile assegnare dei ruoli precisi come, ad esempio: il "tieni tempo" (che ha il compito di controllare che l'attività venga svolta nei tempi previsti), il "moderatore" (controlla che tutti i componenti interagiscano e si assicura che tutti esprimano la propria opinione durante il lavoro), il “verbalizzatore” (colui che riporta per iscritto il lavoro svolto) e il “portavoce” (che esporrà i risultati al momento della discussione collettiva). L’assegnazione di un ruolo ad ogni studente è di fondamentale importanza: in questo modo infatti si dà piena attenzione alla sua autonomia, cioè lo si autorizza a prendere decisioni, a valutare e a controllare. Quando più ruoli agiscono contemporaneamente, si viene a stabilire una situazione di pari autorevolezza, che mette in atto il protagonismo delle persone, cioè la personalità, le emozioni, la capacità di decidere e gestire le varie competenze. Il riconoscimento di un ruolo da parte dei compagni, che avviene a prescindere delle difficoltà della persona e si attiva attraverso le relazioni interpersonali, favorisce il superamento di eventuali problemi (come ad esempio una scarsa autostima, la mancanza di regolazione, il senso di non efficacia).

2.2 Questionario iniziale

Il questionario, riportato in Appendice A.1, consiste di 5 domande, che sono state selezionate con criteri specifici.

Domanda 1

Nonostante il riferimento alle figure geometriche, non è coinvolto alcun concetto geometrico specifico; il concetto chiave è quello di intersezione, col significato di “parte comune”. Ci si aspetta che gli alunni abbiano familiarità con questo tipo di problema sin dalla scuola primaria. L’obiettivo è quello di verificare questa ipotesi.

Domanda 2

I poligoni presenti in una determinata figura devono essere identificati e codificati in base alle lettere dei loro vertici. Sono identificabili due tipi di scomposizioni, la prima considera solo i poligoni che non sono suddivisi in poligoni più piccoli mentre la seconda considera anche le figure che sono unione di figure più piccole.

Dal punto di vista dell'interazione tra aspetto figurale e concettuale, a differenza della prima scomposizione, la seconda richiede all'allievo di superare l'ostacolo percettivo e identificare poligoni da un punto di vista più astratto. La domanda suggerisce l'uso di lettere che nominano i vertici come un codice per rappresentare i poligoni. Questo fatto può innescare una dialettica tra la pura concatenazione di lettere e il riconoscimento dei poligoni corrispondenti sul disegno. Un metodo efficace per armonizzare la logica del codice con la figura.

Domanda 3

Vengono disegnati due esagoni, che sono identici tranne che per il fatto che uno di loro ha la metà delle diagonali disegnate, in particolare l'uso delle linee rende il disegno una possibile rappresentazione di un cubo. Rispetto allo schema sulle abilità visuo-spaziali riportato nel Capitolo 1, quelle prevalentemente coinvolte sono l'*organizzazione visiva* e la *scansione visiva*. Lo scopo è quello di stabilire se gli studenti vedono la differenza tra i disegni e se sono consapevoli del ruolo di un codice di rappresentazione. Sarà interessante notare se, oltre a far riferimento alla differenza, sentono la necessità di esplicitare le differenze tra i disegni in termini di questo codice.

Domanda 4

Come la domanda precedente, anche questa si occupa della relazione tra un oggetto tridimensionale e la sua rappresentazione mediante proiezioni ortogonali. È una situazione abbastanza semplice; la parte più difficile riguarda la seconda consegna in cui si chiede di valutare la proiezione secondo diversi punti di vista riconoscendo D come quella non corrispondente all'oggetto in esame.

Domanda 5

Questa domanda è da considerarsi analoga alla seconda. La differenza consiste nel fatto che in un caso i poligoni esistono e devono solo essere rilevati (si tratta cioé di scomporre una figura), mentre nell'altro caso i poligoni non esistono ancora e devono essere immaginati per essere disegnati (si tratta quindi di comporre una figura). Le principali abilità visuo spaziali coinvolte sono l'*abilità visiva ricostruttiva* e l'*abilità di generare immagini.* Per risolvere il compito è necessaria una fase di esplorazione, in cui si realizzano disposizioni diverse dei quattro triangoli, che vengono definiti *uguali* nella consegna, intendendo che queste quattro figure si possono identificare applicando una isometria (in questo caso, delle traslazioni).

La seconda parte della domanda richiede di determinare quante configurazioni *diverse* si possono ottenere; il senso che si presuppone gli studenti diano al termine è “non sovrapponibili” anche se non viene esplicitato nel testo. Inoltre non vengono posti dei vincoli sul modo in cui si possono “incollare” i triangoli, in particolare non è richiesto di far coincidere tutto un lato di un triangolo con tutto un lato dell'altro. Dunque, facendo scivolare un lato sull'altro si possono ottenere infinite figure non congruenti, tuttavia è possibile che gli studenti pensino di dover far combaciare i lati dei traingoli. Sarà interessante osservare come viene interpretata la richiesta e verificare se gli alunni utilizzano ed esplicitano delle strategie sistematiche per determinare il numero di possibili configurazioni.

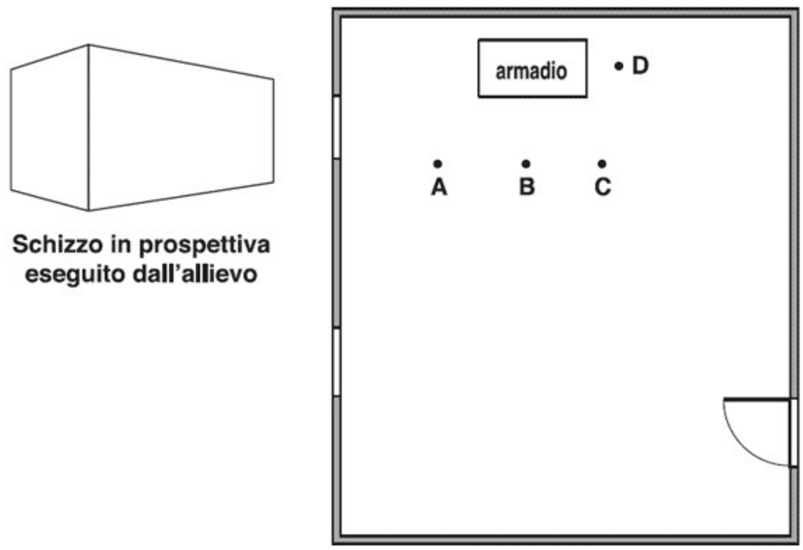
2.3 Prima Lezione

2.3.1 Fase 1: punti di vista

Come primo approccio all'argomento e per incominciare a discutere della relazione tra oggetti geometrici, rappresentazioni e disegni si propone, proiettandolo sulla LIM, il seguente quesito tratto dalle prove INVALSI [1] 2010/2011 di MATEMATICA per la classe terza della scuola secondaria di primo grado.

Un alunno, osservando dal suo banco l'armadio posto nell'aula, lo ha rappresentato mediante uno schizzo in prospettiva, cioè come lo vede. Cerchia sulla piantina dell'aula la lettera corrispondente alla posizione dell'alunno rispetto all'armadio

[1] L'Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione (INVASI) ha il compito di effettuare verifiche periodiche e sistematiche tramite speciali test standardizzati somministrati agli studenti italiani con lo scopo di valutare il loro livello di apprendimento. Sito web: `https://www.invalsi.it/invalsi/index.php`.



Lo studente deve collegare due rappresentazioni diverse: la rappresentazione prospettica di un oggetto tridimensionale (armadio) e la rappresentazione dall'alto (piantina dell'aula) per individuare il punto di vista della rappresentazione prospettica. La risposta corretta è l'opzione A.

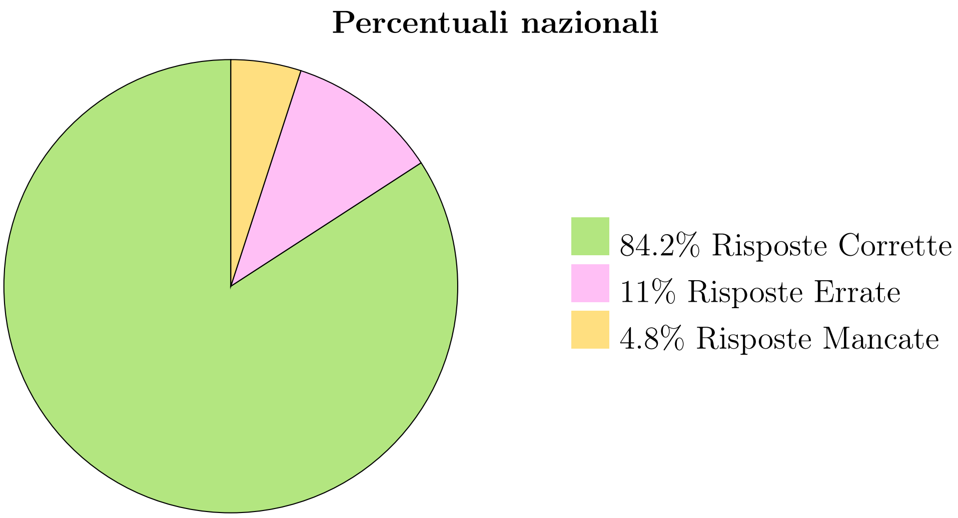
Nel sito www.gestinv.it, un servizio a disposizione degli insegnanti, delle scuole, degli studenti e delle famiglie che raccoglie e organizza i materiali delle prove Invalsi dal 2008 a oggi, il quesito è catalogato come segue.

- **Ambito**: spazio e figure
- **Compito**: Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e viceversa, rappresentare sul

piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni,...)

- **Processo prevalente**: saper riconoscere le forme dello spazio; individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali o partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper coglierele proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni.

Quello che è emerso dall'analisi dei risultati a livello nazionale è evidenziato dal seguente grafico a torta.



Il quesito appena descritto risultando abbastanza semplice per gli studenti, come evidenziato dai risultati nazionali, può essere utile come primo approccio alle discussioni collettive e appare un ottimo strumento per riflettere sul passaggio tra 3D-2D e viceversa.

2.3.2 Fase 2: discussione sul questionario iniziale

Una volta terminata la discussione del quesito INVALSI si passa all'analisi collettiva dei quesiti del test iniziale. Obiettivo di tal analisi è arrivare a condividere, attraverso una discussione collettiva, le risposte corrette, risolvendo le difficoltà emerse.

2.3.3 Fase 3: introduzione alla terminologia 3D

Segue una fase che ha l'obiettivo di condividere una terminologia specifica che permetta di "parlare" di fugure solide. Per farlo si mostra agli studenti un modello di cartone che rappresenta un cubo mettendo in evidenza la differenza tra una figura piana e una figura solida e facendoli riflettere chiedendo loro da "cosa è composto".

Si coglie, inoltre, l'occasione per introdurre tre nuovi termini quali vertice, spigolo e faccia di una figura solida. Si ritiene opportuno partire dal cubo in quanto, oltre ad essere sicuramente più familiare per i ragazzi rispetto ad altri solidi, era presente in 2 dei 5 quesiti del test iniziale.

2.3.4 Fase 4: lavoro di gruppo sulla classificazione dei solidi

Sulla cattedra vengono mostrati diversi modellini di solidi in cartone precedentemente contrassegnati con delle lettere. Ad esempio[2] sono presenti: prismi a base quadrata, esagonale e pentagonale, piramidi a base triangolare (tetraedro), esagonale e pentagonale. Si consegna, quindi agli studenti

[2] I solidi che si sceglie di proporre possono variare, ma la scelta deve essere fatta in modo che sia possibile classificare i solidi in diverse maniere (per tipo di facce presenti, per numero di facce, per colore...) e che sia presente almeno un solido delle categorie che poi si vorranno introdurre con gli studenti cioè piramidi e prismi.

una scheda, riportata in Appendice B.1, in cui si richiede di suddividere in diversi gruppi i solidi numerati e di assegnare loro un nome di fantasia. In particolare, gli elementi di uno stesso gruppo dovranno essere scelti in base a criteri arbitrari da esplicitare sulla scheda. È opportuno non fissare a priori il numero totale dei gruppi tra cui ripartire i solidi; si chiarisce infatti, agli studenti, che possono decidere di non compilare totalmente la scheda, di compilarla integralmente, o anche di utilizzarne più di una.

All'esposizione del lavoro svolto da parte di ciascun gruppo segue una discussione collettiva guidata col fine di giungere alla distinzione tra prismi e piramidi. L'obiettivo principale è quello di introdurre gli alunni nel processo di definizione che costituisce, come affermano Fischbein e Mariotti in [16], un punto cruciale nell'educazione matematica per raggiungere una buona armonia tra aspetti concettuali e figurali degli enti geometrici. Da una parte c'è l'oggetto concreto a cui ci si sta riferendo e dall'altra le sue proprietà alcune delle quali sono selezionate e dichiarate in una "definizione". Quest'ultima non deve essere considerata come una mera descrizione dell'aspetto, ma come una raccolta di condizioni che devono essere soddisfatte. Successivamente si recuperano le definizioni di vertice, spigolo e faccia che erano state introdotte precedentemente applicandole ai "nuovi" solidi e viene chiesto di individuare in quale gruppo fra piramidi e prismi è possibile inserire il cubo.

La lezione si può concludere chiedendo agli alunni se hanno in mente solidi che solitamente si incontrano nella vita quotidiana, ma che non sono stati presi in considerazione. Lo scopo di questa domanda è mettere in evidenza che i solidi analizzati non esauriscono tutti i possibili, ad esempio sono assenti quelli di rotazione. Inoltre, le risposte degli alunni torneranno utili nella lezione successiva per far riflettere la classe sui solidi che non possono essere sviluppati (ad esempio la sfera).

2.4 Seconda lezione

2.4.1 Fase 1: primo approccio con il concetto di sviluppo

La lezione ha inizio prendendo nuovamente il cubo come solido di riferimento. L'obiettivo è quello di introdurre, in modo informale, il concetto di sviluppo di un solido. A tal fine, inizialmente, si chiede agli allievi se riescono a spiegare cosa si vuole indicare con il termine sviluppo. È possibile infatti che gli studenti abbiano già affrontato l'argomento in altre discipline o in altri ambiti. Ad esempio, tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria, relativamente alla disciplina Tecnologia[3], si legge che lo studente dovrà essere capace di «realizzare un oggetto in cartoncino descrivendo la sequenza delle operazioni» e, tra quelli al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado, si evince che l'alunno dovrà essere in grado di «impiegare gli strumenti e le regole del disegno tecnico nella rappresentazione di oggetti o processi». Dopo questa prima fase è utile fare vedere agli studenti cosa si intende praticamente per sviluppo di un cubo aiutandosi con un modellino di cartone e con animazioni GeoGebra, grazie alle quali è possibile presentarne facilmente alla classe più di uno. Quest'ultima strategia è molto utile a far comprendere sin da subito agli studenti che lo sviluppo di un solido non è unico.

2.4.2 Fase 2: disegnare lo sviluppo di un solido

Si suddivide la classe nuovamente in gruppi come nella lezione precedente. Eventualmete si può anche pensare di modificare i gruppi già creati in base

[3] `http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf`

all'andamento dell'attività della prima lezione. Ad ogni gruppo viene fatto manipolare brevemente un modellino di solido (ad esempio: un prisma a base triangolare, una piramide a base quadrata o un tetraedro regolare) e subito dopo viene nascosto. A questo punto l'attività si articola in due fasi: una di lavoro individuale e l'altra di lavoro collettivo.

Lavoro individuale

Ad ogni alunno viene consegnata una scheda, riportata in Appendice B.2, nella quale si chiede di disegnare lo sviluppo del solido manipolato in precedenza se si ritiene che ve ne sia uno. Dopo aver ottenuto una prima risposta si rimette a disposizione del soggetto il modello di cartone e si chiede di controllare la propria soluzione.
La caratteristica principale di tale consegna consiste nel fatto che si chiede di risolvere il problema mentalmente, ossia senza che il modello del solido sia disponibile, dunque la principale abilità visuo spaziale coinvolta è la *memoria a breve termine spaziale sequenziale.* Di fronte alla richiesta di disegnare lo sviluppo, il problema principale è «quello di indentificare le proprietà invarianti, ossia tra tutte le proprietà del solido si deve scegliere quali saranno conservate nella trasformazione di sviluppo: per esempio la forma delle facce, il numero delle facce e così via» ([19], p.46). Un compito di questo tipo costituisce un ottimo contesto per analizzare il processo interattivo tra aspetti figurali e aspetti concettuali. Infatti la soluzione «richiede un buon coordinamento tra le proprietà spaziali dell'oggetto e le specifiche caratteristiche richieste dallo sviluppo: la relazione tra il disegno e l'oggetto è costituita dai vincoli stabiliti dalla definizione di sviluppo.» ([19], p.46)

Lavoro di gruppo

Si distribuisce ad ogni gruppo una scheda, riportata in Appendice B.3, nella quale si richiede di:

- indicare se il solido considerato è da collocare tra il gruppo dei prismi o delle piramidi, che erano stati oggetto del lavoro di gruppo della prima lezione.

- sulla base dei lavoro individuale, presentare uno o più sviluppi del solido assegnato oppure spiegare perché il solido non si sviluppa. Ogni gruppo ha la possibilità di manipolare nuovamente, per una sola volta, il solido considerato. Ciò richiede un lavoro cooperativo, in cui punti di vista diversi devono essere confrontati, discussi e infine accettati o respinti.

Successivamente il portavoce di ogni gruppo espone il lavoro effettuato e si osservano insieme delle animazioni geogebra grazie alle quali si propongono alla classe diversi sviluppi dei solidi analizzati.
Si domanda infine alla classe se riescono ad immaginare un solido che non può essere sviluppato.

2.5 Terza lezione

In questa lezione si vuole far riflettere nuovamente gli studenti sul passaggio da 2D a 3D e viceversa, mediante delle attività che contemplano contemporaneamente l'uso dello spazio e del piano.

2.5.1 Cammini sul cubo

Per effetuare l'attività gli studenti vengono suddivisi in piccoli gruppi come nella prima e seconda lezione. Ogni singolo gruppo è dotato di un modellino di cartone che rapresenta un cubo e di un suo sviluppo. Si richiede di tracciare un cammino a piacere, percorso da una formica, sulle facce dello sviluppo del cubo. Successivamente, i gruppi si scambiano tra loro i lavori effettuati e ogni gruppo deve riportare sul proprio modellino di cartone il percorso disegnato nello sviluppo che ha ricevuto. Al termine di tale attività il portavoce di ogni gruppo espone la strategia che è stata utilizzata per effettuare il compito assegnato.

La difficoltà di questa attività, che coinvolge l'*abilità visiva ricostruttiva* dipende dai particolari percorsi che verranno inventati dai gruppi. Si vuole lasciare ampia libertà nella scelta dei cammini, favorendo così un primo approccio con il passaggio da percorsi sullo sviluppo di un cubo a percorsi sul cubo e viceversa. Questa prima fase, dunque, vuole essere una preparazione per le attività successive sulla ricerca di cammini minimi.

2.5.2 Cammini minimi sul cubo

Si propongono agli studenti le attività in Appendice B.4, in cui si prendono in considerazioni i cammini minimi sul cubo da svolgere in piccoli gruppi.
Gli studenti hanno a disposizione un modellino di cartone che rappresenta un cubo, un cartoncino, forbici, righello e matita.

Attività 1: la formica su un percorso 1D

La prima attività richiede che gli alunni individuino il cammino minimo che una formica percorre per passare dal vertice di un cubo al suo opposto, con il vincolo di potersi muovere soltando lungo gli spigoli. Si scoprirà che il cammino minimo è pari a tre volte la lunghezza dello spigolo e che di questi cammini ce ne sono in tutto sei, si veda la Figura 2.1.

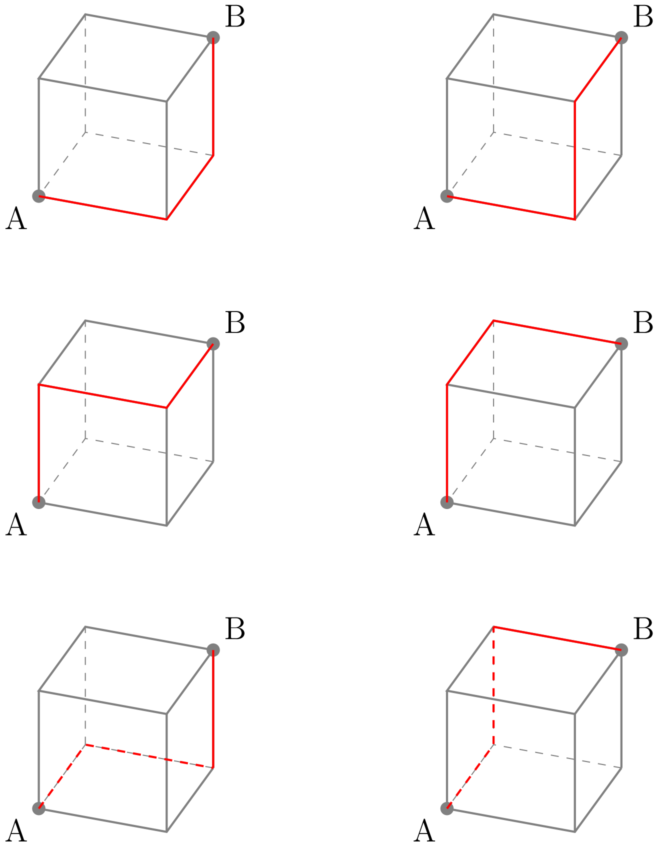


Figura 2.1: I sei possibili cammini minimi 1D da A a B.

Attività 2: la formica su un percorso 2D

La seconda attività proposta vuole fare riflettere i gruppi di studenti su qual è il cammino minimo da percorrere sulla superficie del cubo per andare da un vertice al suo opposto. Individuare il cammino richiesto può risultare poco intuitivo; probabilmente gli alunni saranno tentati, sbagliando, di rispondere che il percorso minimo è quello che segue la diagonale di una faccia più lo spigolo consecutivo che arriva fino al vertice opposto. Per non cadere in errore, può essere utile consigliare agli studenti di sfruttare il piano passando allo sviluppo del cubo. Questo passaggio può essere fatto tagliando un cubo, creando uno sviluppo o, viceversa, progettando uno sviluppo del cubo che poi sarà richiuso, o ancora facendolo solamente come gioco di immagine mentale, ossia cercando di "vedere" dove vanno a finire i vertici del cubo nel suo sviluppo e quindi individuando di conseguenza il segmento che rappresenta il cammino minimo. Aiutandosi con il piano è ora semplice segnare il cammino minimo, senza dimenticare che un vertice del cubo può corrispondere a due punti nel suo sviluppo piano. Si evidenziano, di seguito due percorsi possibili.

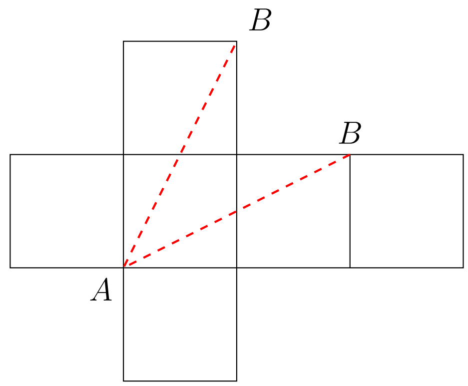


Figura 2.2: I due possibili cammini minimi 2D fra A e B.

Di questi cammini è possibile chiederne anche la lunghezza richiamando applicazioni collegate al teorema di Pitagora (se già è stato svolto) ed inoltre è possibile trasferire l'attività ad altri solidi: parallelepipedi rettangoli, ottaedri..., aiutandosi sempre con il passaggio dallo spazio al piano e viceversa.

Attività 3: la formica su un percorso 3D

Nella terza attività si chiede di ragionare sul cammino minimo percorso dalla formica, che può muoversi anche all'interno del cubo. Lo scopo di quest'ultimo quesito è far comprendere agli studenti che il cammino minimo fra due punti nello spazio è il segmento che li congiunge. In particolare, nella situazione proposta il cammino minimo è la diagonale del cubo che passa per A e B, si veda la Figura 2.3.

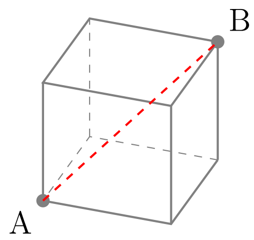


Figura 2.3: Il cammino minimo 3D da A a B.

2.6 Questionario finale

A conclusione del percorso didattico proposto, come anticipato, si sottopone agli allievi un questionario d'uscita riportato in Appendice A.2.

- Le domande 1 e 2 sono centrate sugli sviluppi piani dei solidi. In particolare, la difficoltà della prima è legata alla necessità di riconoscere come si corrispondono gli elementi 2D (poligoni, segmenti) e quelli 3D (facce, spigoli), mentre quella della seconda dipende probablimente fatto che l'ottaedro non è stato manipolato in precedenza. I due quesiti coinvolgono l'*abilità visiva ricostruttiva* e testano la capacità degli studenti di collegare, tramite le competenze di astrazione e visualizzazione spaziale, un solido al suo sviluppo piano, e viceversa, escludendo quelle figure che non possono essere sviluppo di nessun solido. Questa capacità è essenziale per testare l'acquisizione di competenze di passaggio tra il bidimensionale ed il tridimensionale, a tal proposito si veda [15].

Domanda 1

La situazione proposta nella prima domanda è stata elaborata prendendo spunto da una ricerca, riguardante le capacità degli studenti coinvolti in situazioni che concernono la visualizzazione spaziale, svolta da Diezmann e Lowrie in [4]. Essi sostengono che il processo di visualizzazione è particolarmente importante per riuscire a interpretare e leggere una situazione che richiede il passaggio tra diverse rappresentazioni dello stesso oggetto e hanno utilizzato la situazione proposta in questo quesito per valutare in modo qualitativo questo aspetto. All'allievo è richiesto di riconoscere lo stesso oggetto matematico, rappresentato in modi diversi, passando dallo sviluppo del cubo all'immagine grafica del cubo 3D rappresentata sul piano. Attraverso la motivazione fornita dall'allievo, è interessante osservare quali processi sono stati messi in atto per trovare la soluzione del problema.

Domanda 2

Nella prima parte della domanda viene mostrato un solido, un ottaedro, e si chiede di riconoscere quali tra le quattro figure proposte non può esserne lo sviluppo. Per rispondere correttamente alla domanda è sufficiente osservare che, nel disegno 1 e 4, un vertice dello sviluppo è comune a cinque triangoli, si veda la Figura 2.4.

Pertanto, nessuna delle due rappresentazioni può essere lo sviluppo di un ottaedro.
Al contrario le opzioni restanti rappresentano entrambe lo sviluppo di un ottaedro; nella Figura 2.5 sono stati contrassegnati con lo stesso colore gli spigoli che devono essere "incollati" per richiudere lo sviluppo.

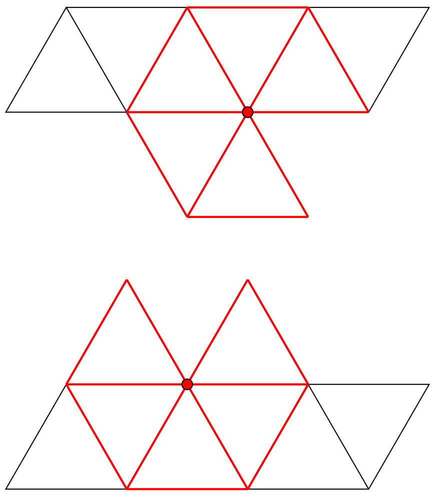


Figura 2.4: Le figure 1 e 4 della prima parte della Domanda 2a non possono essere sviluppi dell'ottaedro perché un vertice dello sviluppo è comune a cinque triangoli.

Nella seconda parte della domanda si chiede se le due immagini proposte possono rappresentare lo sviluppo di una piramide a base esagonale. Si riporta una giustificazione grafica del fatto che entrambe le figure sono sviluppi del solido in questione; in particolare, in Figura 2.6, sono evidenziati con lo stesso colore i lati che devono essere identificati per richiudere lo sviluppo.

- la terza e la quarta domanda mettono alla prova i ragazzi sulle capacità di visualizzazione rispetto a diversi punti di vista in un contesto leggermente più complesso rispetto alle situazioni presentate nel questionario iniziale e all'inizio della prima lezione.

Domanda 3

La traccia mostra la figura di un parallelepipedo sormontato da un prisma a base triangolare. La consegna richiede allo studente un lavoro inverso rispetto a quello necessario per rispondere al quesito proposto

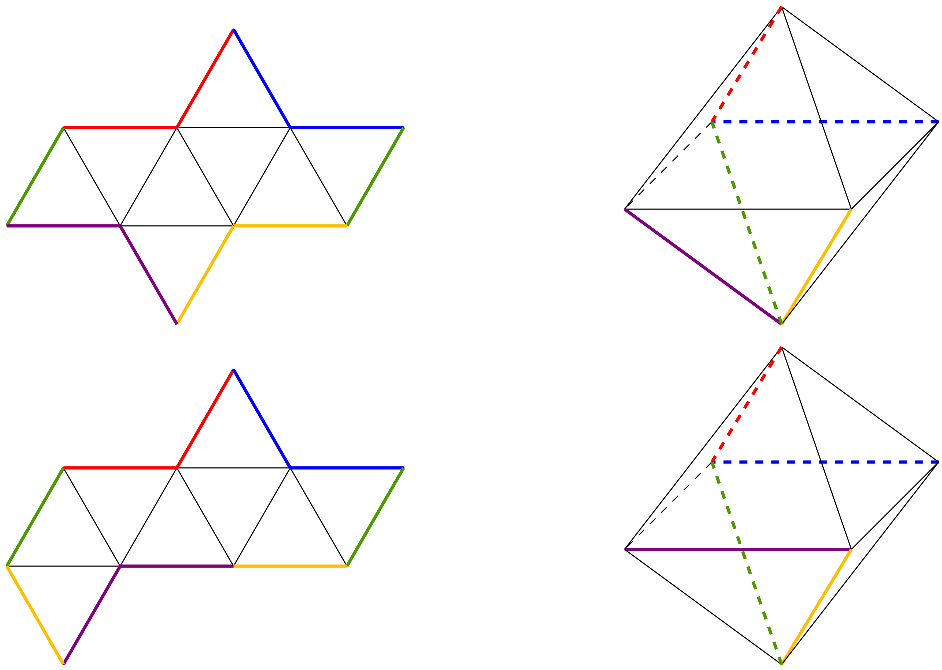


Figura 2.5: Le figure 2 e 3 della Domanda 2a sono sviluppi dell'ottaedro.

all'apertura della prima lezione. Mentre in quest'ultima si richiedeva il passaggio da un osservazione bidimensionale ad una tridimensionale, al contrario, nel nuovo quesito l'alunno deve associare, partendo da un oggetto 3D, le proiezioni corrispondenti. Si può osservare inoltre che, in questo caso, lo studente deve visualizzare un solido composto e non un oggetto presente nella vita quotidiana come un armadio. Ci si aspetta che gli alunni possano trovare difficoltà ad individuare le figure 1 e 3 come risposte corrette mentre dovrebbero individuare con più facilità la figura 5 come corretta.

Domanda 4

Il quarto quesito testa le competenze di visualizzazione per quanto riguarda le configurazioni di un solido nello spazio, in particolare coin-

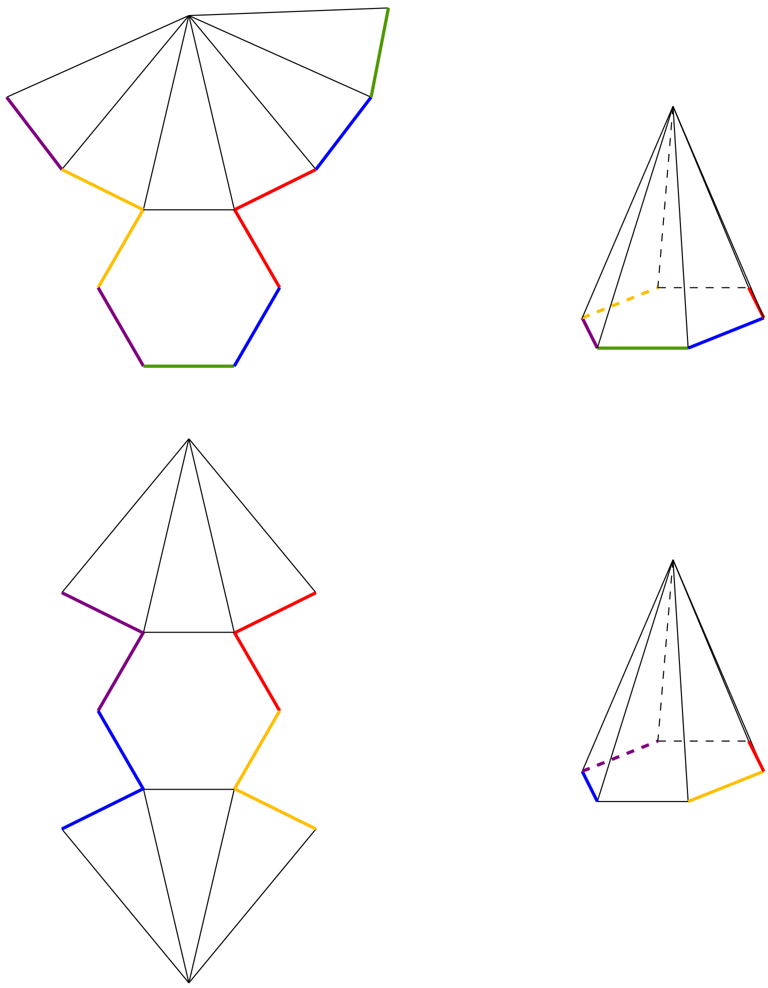


Figura 2.6: Entrambe le figure riportate nella Domanda 2b sono sviluppi della piramide a base esagonale.

volge la *memoria a breve termine spaziale sequenziale*. Si ipotizza che gli studenti possano trovare difficoltà ad individuare la risposta corretta in quanto per individuarla è necessario avere grandi abilità di visualizzazione.

Se gli studenti si trovassero in difficoltà, è possibile suggerire loro di provare a immaginare di sovrapporre pollice e indice della mano destra agli spigoli che delimitano la regione di colore più scuro e il medio della mano destra ad un altro spigolo del solido. Nella Figura 2.7, la freccia verde corrisponde al pollice, la freccia rossa all'indice e la freccia blu al medio. Quindi possono provare a ruotare la mano destra cercando di ottenere le alternative proposte. Le Figure 2.8, 2.9, 2.10 mostrano che è possibile ottenere le alternative A, B, C. La Figura 2.11 mostra che, invece, non è possibile ottenere l'alternativa D. Infatti, se si sovrappongono il pollice e l'indice agli spigoli che delimitano le facce di colore più scuro, si nota che il dito medio non si sovrappone ad uno spigolo del solido.

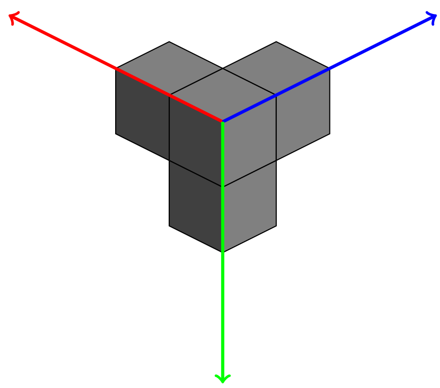


Figura 2.7: Solido assegnato nella Domanda 4.

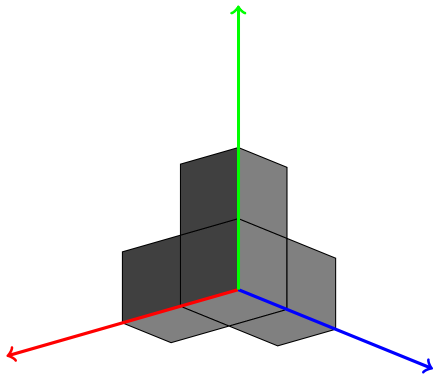


Figura 2.8: Domanda 4 figura A.

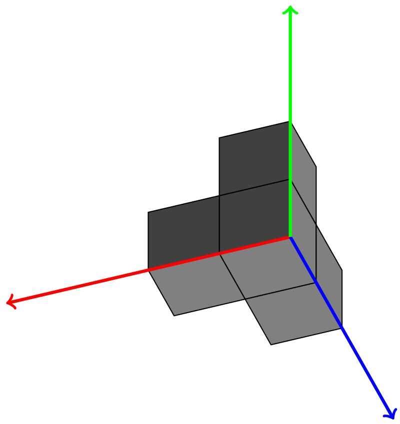


Figura 2.9: Domanda 4 figura B.

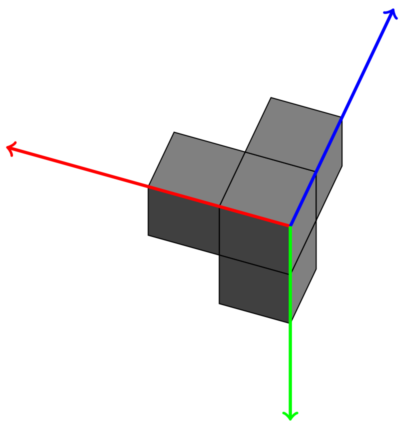


Figura 2.10: Domanda 4 figura C.

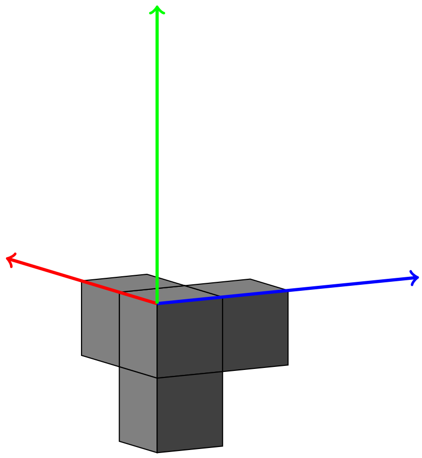


Figura 2.11: Domanda 4 figura D.

Capitolo 3

L'analisi del percorso didattico

Il Capitolo 3 presenta l'attività didattica, progettata nel capitolo precedente, così come realizzta in una scuola secondaria di primo grado. Oltre alla descrizione del contesto e della "modalità di attuazione e raccolta dati", si analizzano le risposte date dagli studenti ai due questionari e ci si concentra sui lavori individuali e di gruppo che hanno scandito le lezioni.

3.1 Contesto

Il percorso didattico, descritto nel secondo capitolo, è stato realizzato nella classe II B della scuola secondaria di primo grado "Marvasi-Vizzone" di San Ferdinando (RC), composta da 20 studenti di cui 11 femmine e 9 maschi. L'attività è stata svolta tra il 28 maggio e 19 giugno 2019 all'interno del progetto PON pomeridiano "COMPETENZE PER LO SVILUPPO" durante il quale, gli alunni sono stati coinvolti in attività didattico-laboratoriali e in lezioni frontali. Il progetto PON è stato elaborato per promuovere lo sviluppo di un atteggiamento positivo e corretto verso la matematica e per favorire l'acquisizione di una modalità di lavoro che, una volta acquisita, potrà essere utilizzata per affrontare problemi significativi di vita quotidiana. In particolare, vuole concorrere al raggiungimento degli obiettivi seguenti:

- risolvere situazioni problematiche complesse;
- sviluppare le capacità di osservare, analizzare sintetizzare e astrarre;
- consolidare le conoscenze logico-matematiche;
- sollecitare l'apprendimento di contenuti e linguaggi specifici della disciplina.

Nella classe in questione, l'insegnante ha scelto di seguire un'impostazione tradizionale che comporta l'iniziale trattazione esclusiva della geometria piana, seguita solo al terzo anno da quella dello spazio. In particolare come ultimo argomento del programma per l'anno scolastico 2018/2019 è stato affrontato il teorema di Pitagora. Gli studenti, da quanto riferito dall'insegnante, sono abituati a lavorare in piccoli gruppi ma trovano difficoltà nell'affrontare discussioni collettive.

3.2 Modalità di attuazione e raccolta dati

Gli incontri con la classe sono stati complessivamente quattro e, a causa del tempo limitato, oltre allo svolgimento dei questionari iniziale e finale, svolti rispettivamente nel primo e ultimo incontro, è stato scelto di concentrarsi sulle attività descritte nelle prime due lezioni del capitolo precedente. Queste ultime sono state svolte durante il secondo e il terzo incontro, ognuno dei quali è stato articolato in 3 ore.
Al fine di ottenere dei risultati significativi, come suggerisce D'Amore in [6], è importante considerare a priori le dinamiche del contratto didattico che

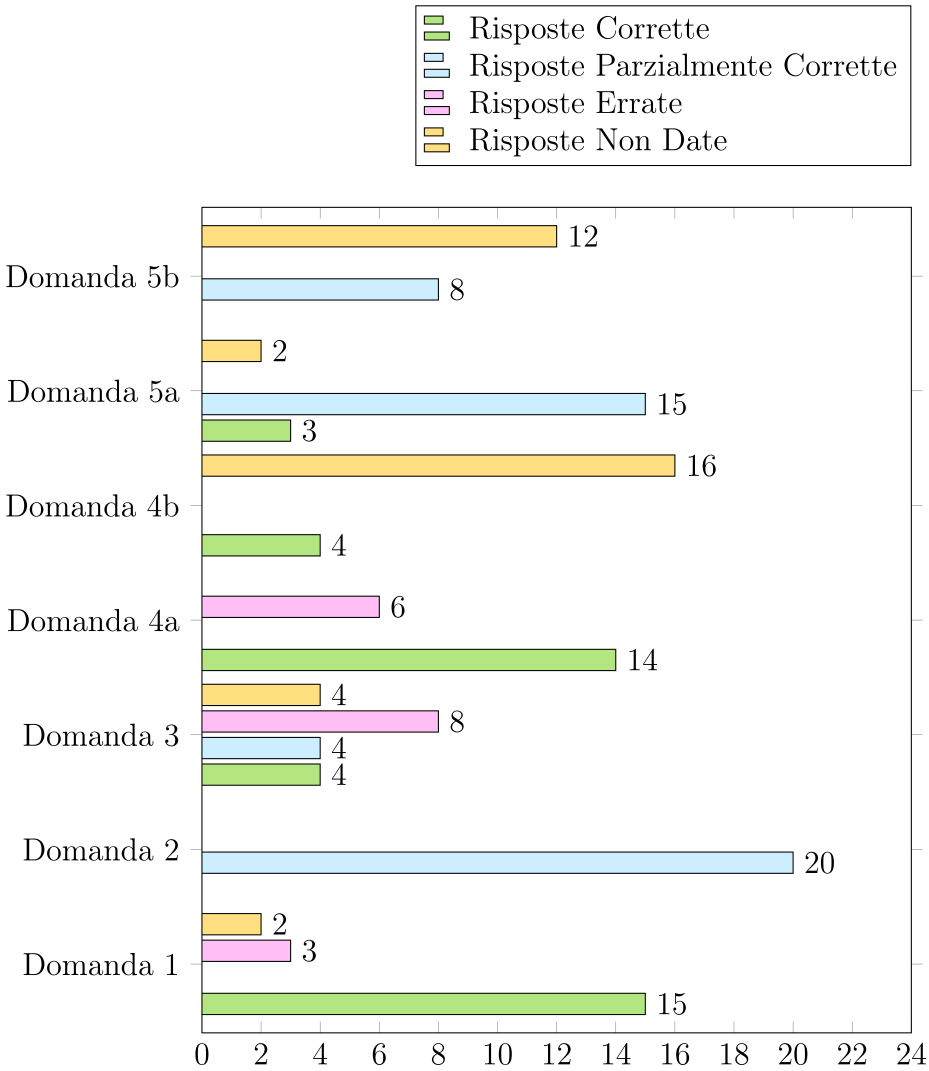
potrebbero entrare in gioco. A questo proposito, si è scelto di esplicitare, prima della somministrazione dei questionario iniziale e finale, quale fosse il loro scopo. Per il questionario iniziare si è chiarito che si trattava di una serie di domande introduttive per sondare le loro conoscenze e che non sarebbe stata data alcuna valutazione delle loro risposte, ma che i dati sarebbero serviti per una ricerca extra-scolastica, invitando così gli alunni a rispondere in modo sincero e senza il timore di essere valutati. Per quello finale agli allievi è stato spiegato il collegamento con il questionario sottoposto in precedenza invitando loro a rispondere con massimo impegno. Ad ogni allievo è stato assegnato un numero casuale. Entrambi i questionari sono stati sottoposti a scuola durante le lezioni pomeridiane e gli alunni hanno avuto a disposizione un tempo massimo di 45 minuti per completarli individualmente. Il tempo a disposizione è stato per tutti sufficiente.

Oltre ai questionari, i dati raccolti ed analizzati in questo capitolo derivano: dalle schede individuali e di gruppo utilizzate durante le attività proposte nelle due lezioni e dalla trascrizione delle registrazioni audio delle lezioni. Durante i momenti di gruppo gli studenti sono stati sollecitati ad esplicitare il loro pensiero ad alta voce in modo da poter registrare in maniera più accurata il processo risolutivo. Inoltre, durante la somministrazione dei questionari ad alcuni studenti è stato chiesto in che modo stavano procedendo invitandoli a dare una motivazione ed è stata data la possibilità di chiedere eventuali chiarimenti sulle domande.

Attraverso il confronto dei dati in entrata e in uscita e il percorso svolto si è tentato di valutare qualitativamente l'intervento effettuato e analizzare i cambiamenti, l'evoluzione e gli sviluppi delle competenze degli allievi nella visualizzazione e concettualizzazione di alcune attività che concernono il passaggio tra spazio e piano e viceversa.

3.3 Analisi del questionario iniziale

Tutti i 20 studenti della classe erano presenti alla somministrazione del questionario; di seguito si riporta un diagramma riassuntivo dei dati emersi e quindi si analizza il dettaglio delle singole domande.

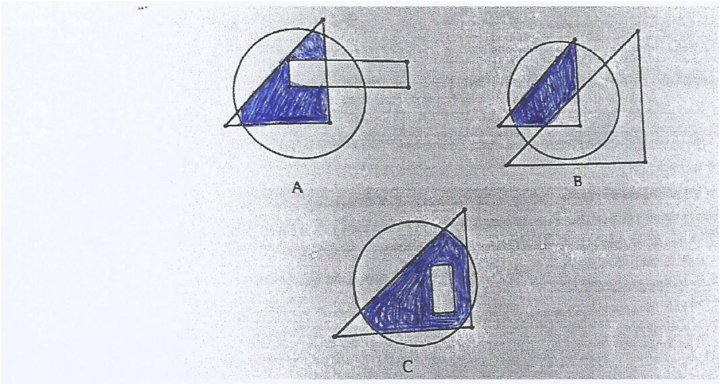


Domanda 1

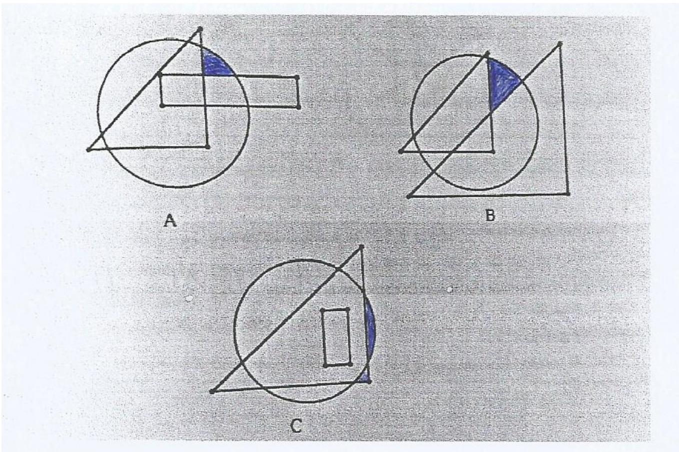
Si può osservare che su 20 studenti, 15 colorano correttamente la parte comu-

ne confermando l'ipotesi che vi sia familiarità con questo tipo di domande. Tuttavia due alunni non rispondono e i restanti tre alunni forniscono una risposta scorretta.
In particolare :

- l'alunno 15 colora, in tutti e tre i disegni, soltanto la parte comune tra il cerchio e un triangolo. Sembrerebbe che non riesca a visualizzare l'intersezione tra tre figure limitandosi sempre a considerare soltanto due poligoni alla volta.



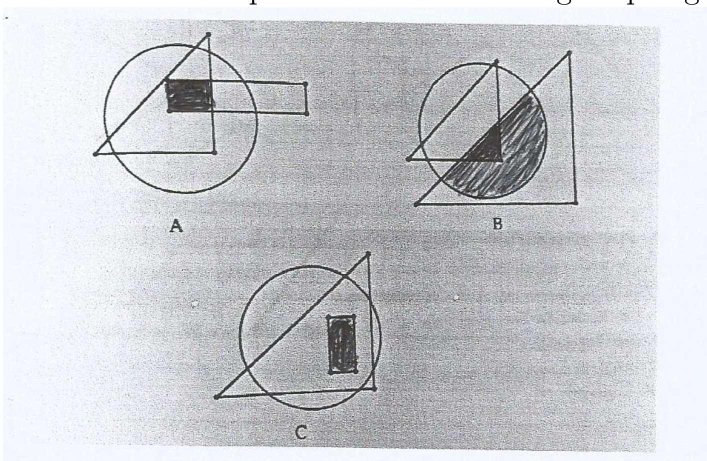
- l'alunno 16 produce la seguente soluzione:



Dopo aver chiesto spiegazioni sulla strategia adottata, l'allievo riferisce di aver interpretato l'intersezione tra le figure come la parte di piano confinante con esse, come si nota esplicitamente dalle figure A e B.

Facendogli notare che, in C, non si riesce ad individuare una regione di piano che confina sia con il cerchio che con il rettangolo e il triangolo, tenta di elaborare un'altro metodo per fornire la risposta, ma senza risultato. In questo caso non c'è familiarità col concetto di intersezione.

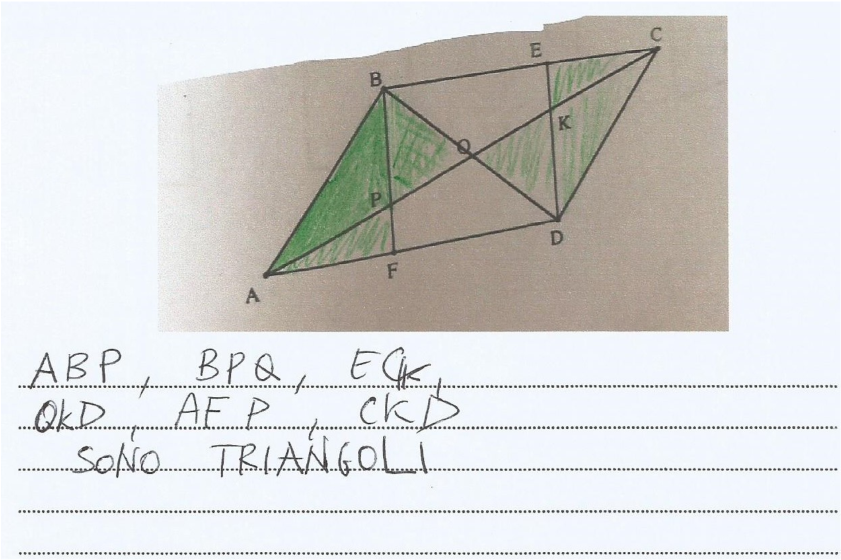
- l'alunno 22 riesce ad individuare correttamente l'intersezione nelle figure A e C in cui compaiono un triangolo, un rettangolo e un cerchio, mentre nella figura B che presenta due triangoli e un cerchio evidenzia solo la parte comune al triangolo più grande e al cerchio.



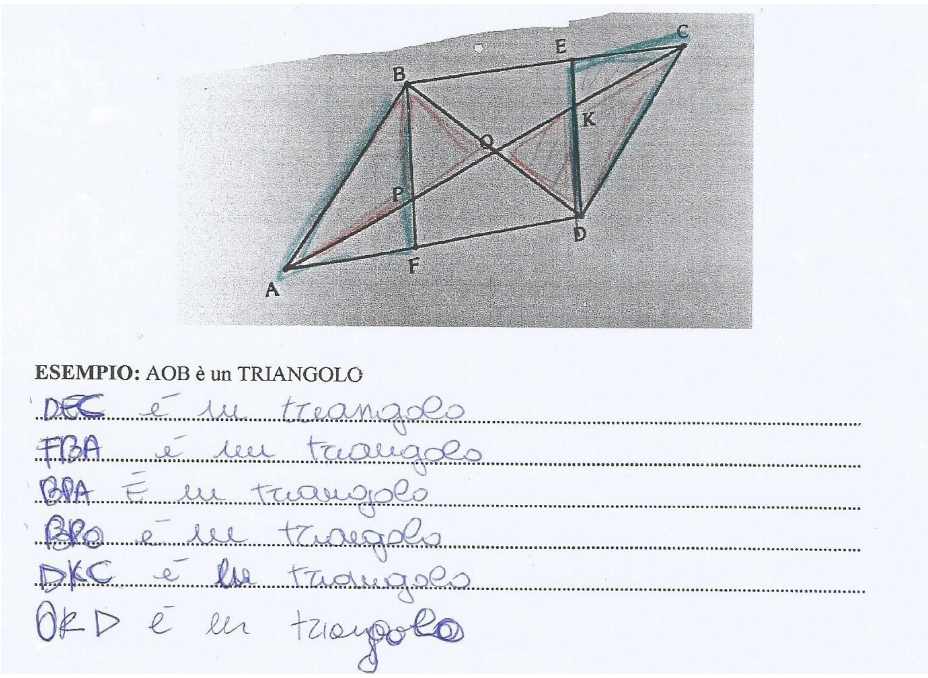
Domanda 2

La domanda si è rivelata abbastanza complessa per i ragazzi. Gli studenti riescono, infatti, a fornire delle risposte solo parzialmente corrette. In particolare:

- cinque allievi riescono ad individuare soltanto triangoli. Di questi, 4 individuano solo triangoli che non sono attraversati da altri segmenti. Un esempio di protocollo è il seguente:

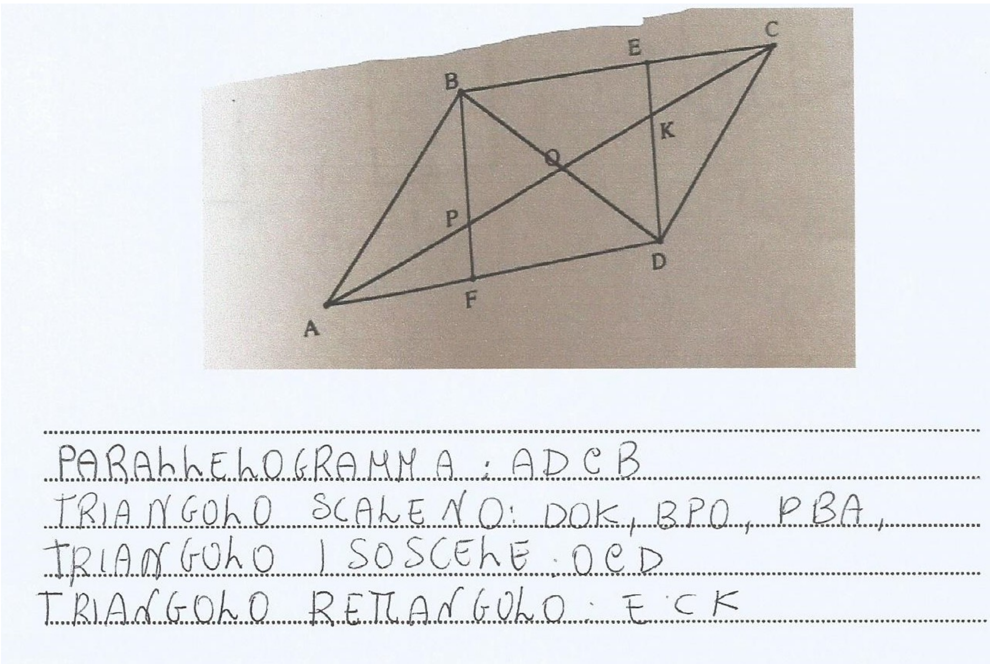


L'alunno 17, che individua anche triangoli attraversati da segmenti, sembra seguire un criterio, anche se non lo esplicita, per elencarli.

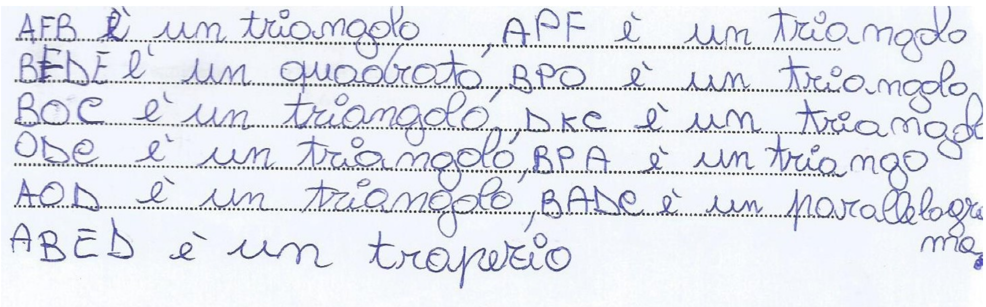


Come si osserva l'allievo parte da un certo triangolo all'estremità sinistra del disegno e individua due triangoli che sono contenuti in esso; si sposta quindi nel rispettivo triangolo all'estremità destra della figura effettuando un procedimento analogo. Procede poi spostandosi nella parte più "interna" indivuando però soltanto un altro triangolo.

- Soltanto l'alunno 15 tenta di rispondere conferendo un ordine alla risposta distinguendo diversi tipi di poligoni e specificando quanti di ogni tipo, secondo lui, se ne possono individuare.



- I restanti studenti forniscono una lista più o meno ordinata di poligoni anche se solo pochi ne forniscono un buon numero e nessuno esprime una strategia efficace. Si riporta, di seguito un esempio:


AFB è un triangolo, APF è un triangolo
BFDE è un quadrato, BPO è un triangolo,
BOC è un triangolo, DKC è un triangolo
ODE è un triangolo, BPA è un triangolo
AOD è un triangolo, BADC è un parallelogramma
ABED è un trapezio

Domanda 3

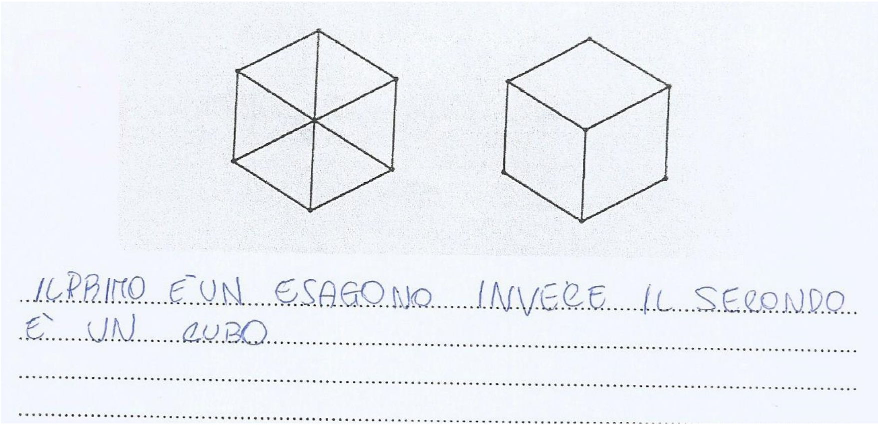
Nell'analisi sono state considerate parzialmente corrette le risposte in cui il confronto non è del tutto esplicito ma lo studente riesce a dare una doppia lettura, 2D-3D, della figura e corrette quelle in cui lo studente confronta le due figure esplicitando le differenze che rileva. In base a tali criteri si hanno i seguenti risultati.

- Quattro alunni non rispondono.

Su 20 studenti, 8 rispondono in modo scorretto, in particolare:

- Tre si soffermano soltanto sul primo disegno oppure sul secondo non soddisfando la richiesta.

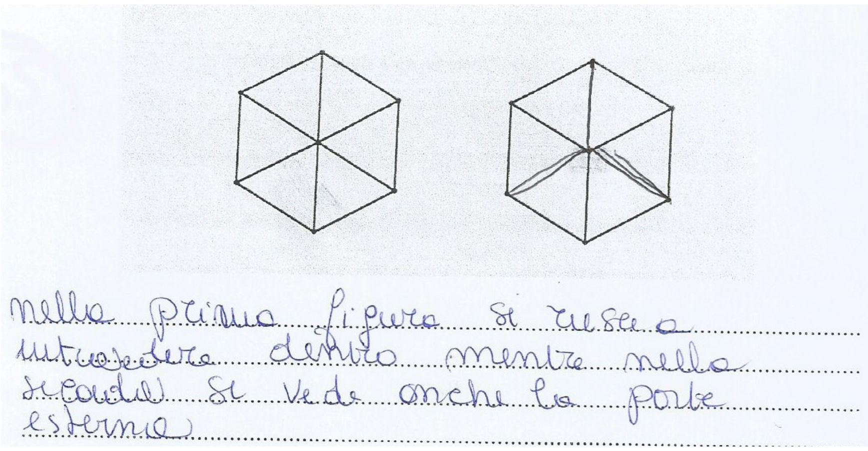
- Cinque alunni non riescono a decodificare le due immagini sia come rappresentazioni bidimensionali che tridimensionali ma si limitano a mettere in evidenza soltanto che i due disegni sono completamente diversi. Si può osservare il caso seguente:



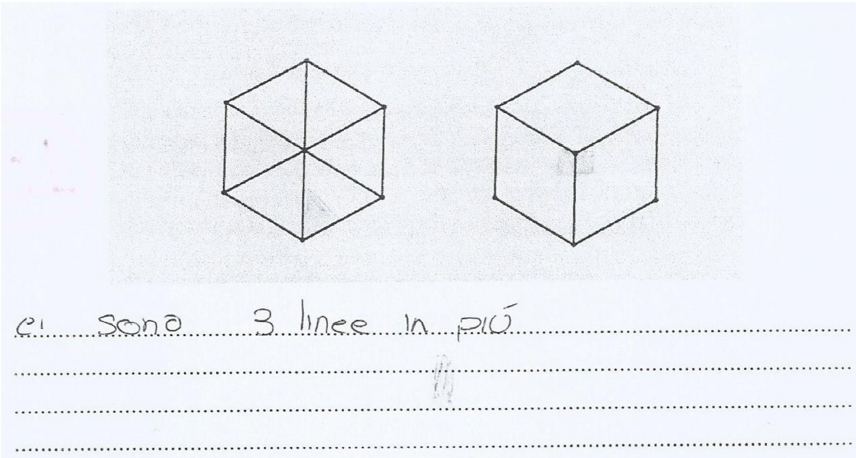
Quattro alunni rispondono in modo parzialmente corretto notando che la prima immagine può rappresentare sia una figura piana che una solida mentre sostengono che la seconda possa rappresentare soltanto un cubo.

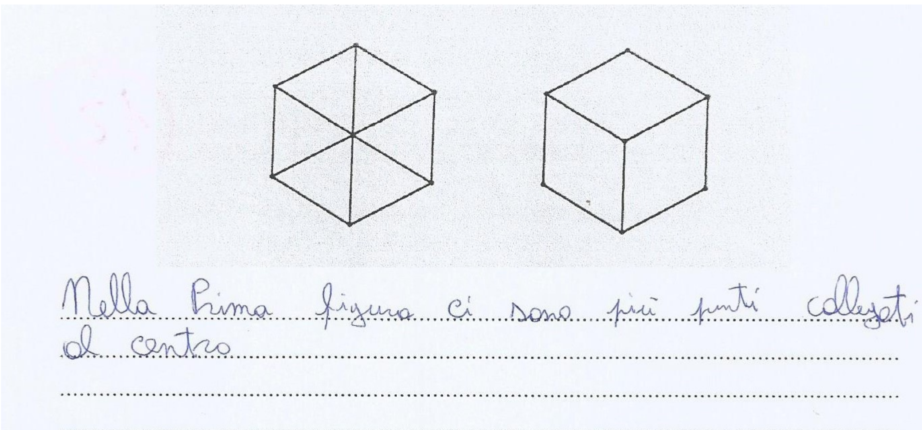
Si possono considerare corrette le seguenti quattro risposte.

- L'alunno 17 nel rispondere si sofferma ad osservare la composizione delle figure riscontrando delle differenze senza preoccuparsi di classificarle con un "nome".

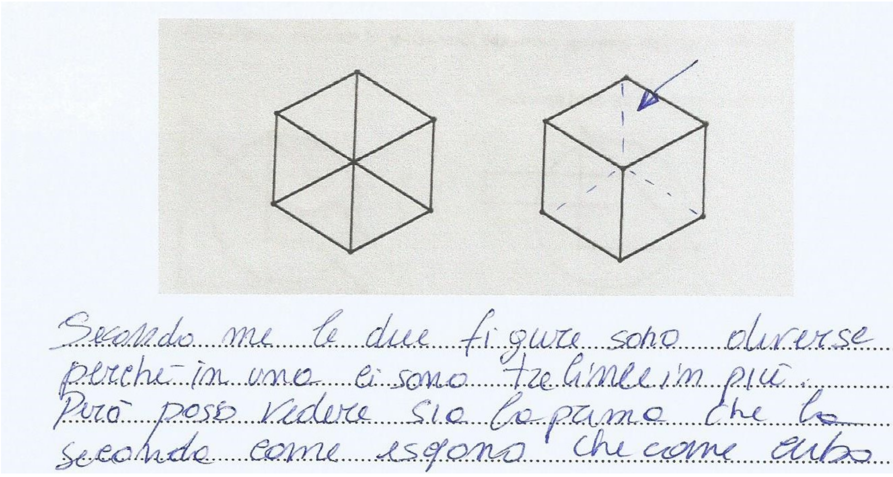


- Gli alunni 10 e 12 riescono ad individuare la differenza effettiva tra i due disegni senza però esplicitare il significato del codice.





- L'alunno 3 è l'unico che, non solo individua la differenza tra le immagini, ma riesce anche a ad interpretare il codice di rappresentazione tridimensionale:



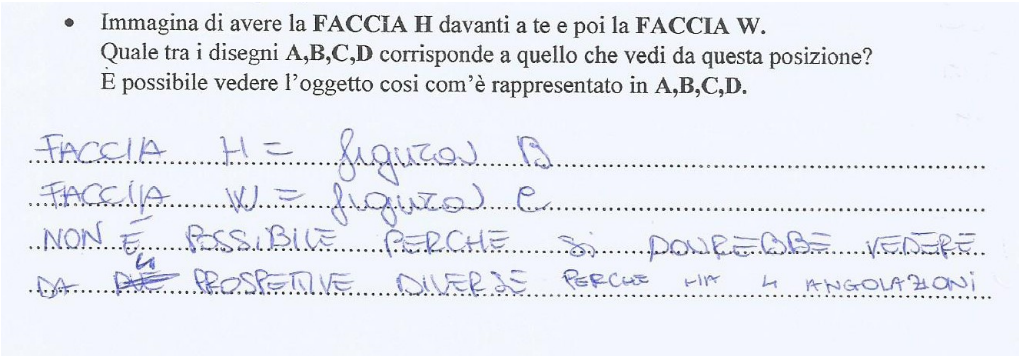
Domanda 4 Per quanto riguarda la prima parte della domanda, che richiede il riconoscimento della proiezione corretta, si può osservare che:

- 14 alunni su 20 rispondono correttamente considerando il disegno A come proiezione corretta.
- Gli allievi rimanenti danno come risposta sia A che C. Considerando che l'opzione C è una proiezione dall'alto del solido in esame, è possibile che tali studenti abbiano frainteso la domanda oppure non compreso il punto di vista richiesto dalla consegna.

La seconda parte della domanda risulta essere, come osservato da diversi studenti che hanno chiesto chiarimenti durante lo svolgimento del questionario, più lunga e più complessa. Infatti, oltre a chiedere di individuare determinate proiezioni corrette richiede che gli alunni riflettano sul fatto che non è possibile ottendere la proiezione D. Dai risultati si evince che la domanda abbia confuso i ragazzi; si può pensare che la consegna non fosse chiara, pertanto solo chi è riuscito ad interpretarla abbia risposto correttamente. Infatti:

- 16 studenti su 20 non forniscono nessuna risposta relativamente alla proiezione che non è possibile ottenere.

- Gli unici quattro studenti che riportano una risposta danno effettivamente quella corretta. Interessante notare che l'alunno 17, oltre a dare la risposta corretta, è l'unico che sente il bisogno di dare una giustificazione anche se non è stato richiesto esplicitamente:



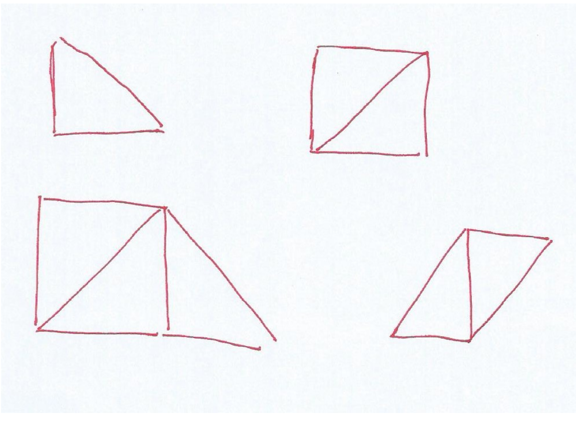
- Immagina di avere la **FACCIA H** davanti a te e poi la **FACCIA W.**
Quale tra i disegni **A,B,C,D** corrisponde a quello che vedi da questa posizione?
È possibile vedere l'oggetto cosi com'è rappresentato in **A,B,C,D.**

FACCIA H = figura B
FACCIA W = figura C
NON È POSSIBILE PERCHE si dovrebbe VEDERE
DA ~~DE~~ 4 PROSPETTIVE DIVERSE PERCHE HA 4 ANGOLAZIONI

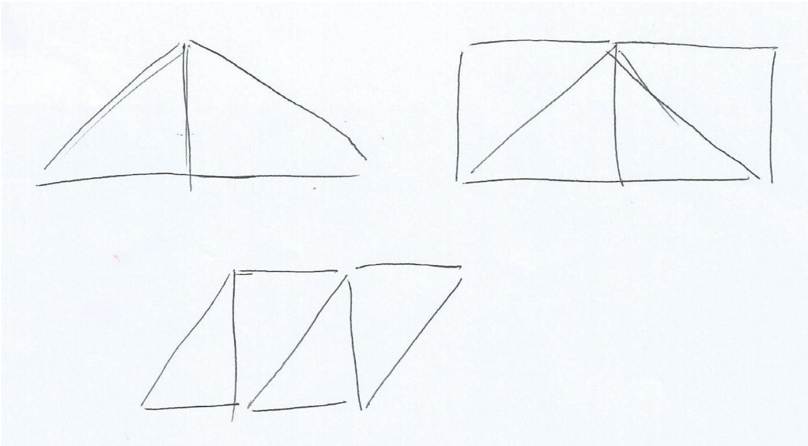
Domanda 5

Riguardo il primo quesito della domanda si può osservare che:

- Su 20 studenti, 3 riescono a dare una risposta completa; si riporta, come esempio, la seguente soluzione.



- 15 alunni forniscono una risposta parzialmente corretta riuscendo ad individuare solo alcuni dei poligoni richiesti.

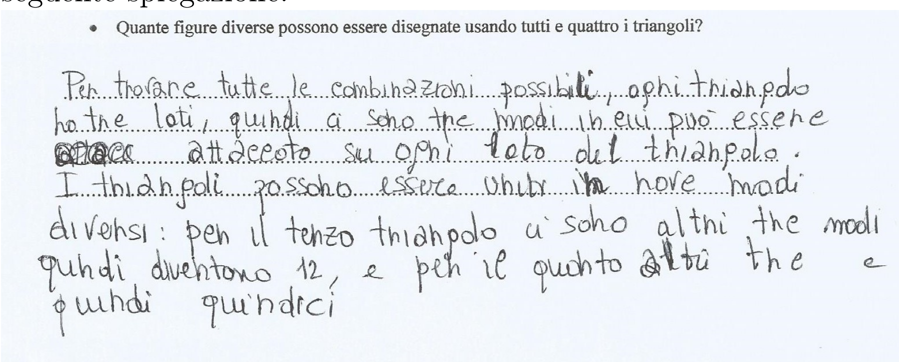


- 2 studenti non rispondono.

Solo 8 studenti su 20 forniscono una risposta al secondo quesito della domanda. Dall'analisi delle risposte date si evince che nessuno studente giunge alla conclusione che le configurazioni possibili sono infinite. In particolare:

- 7 alunni su 20 effettuano altri disegni e tentano di abbozzare una strategia più che altro procedurale attraverso la quale viene spiegato come hanno li hanno costruiti.

- Solamente un alunno, il numero 15, riesce ad andare oltre dando la seguente spiegazione:

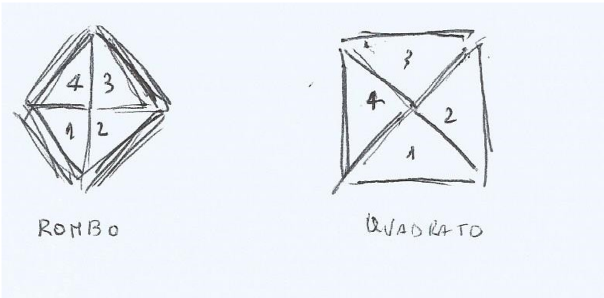


- Quante figure diverse possono essere disegnate usando tutti e quattro i triangoli?

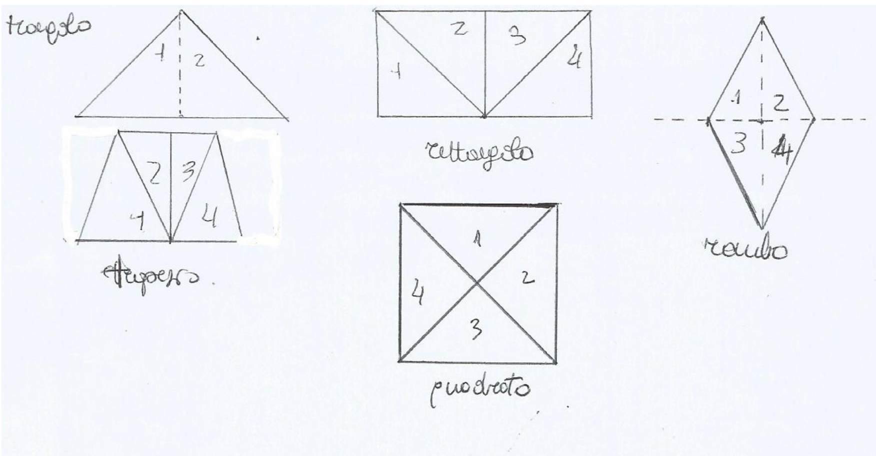
Per trovare tutte le combinazioni possibili, ogni triangolo ha tre lati, quindi ci sono tre modi in cui può essere attaccato su ogni lato del triangolo. I triangoli possono essere uniti in nove modi diversi: per il terzo triangolo ci sono altri tre modi quindi diventano 12, e per il quarto altri tre e quindi quindici

Questo ragionamento non tiene conto del fatto che alcune combinazioni non sono "diverse", tuttavia la strategia utilizzata mostra una dominanza dell'aspetto concettuale, coerentemente con il fatto che l'alunno non fornisce nessun altro disegno oltre a quelli per rispondere alla prima domanda.

In alcuni protocolli si presenta la misconcezione, nota in letteratura, che nomina un quadrilatero rombo oppure quadrato a seconda della disposizione sul foglio.



Alcuni alunni, tentando di trovare le configurazioni possibili, riportano disegni di un rombo che non è un quadrato realizzato utilizzando triangoli diversi da quelli proposti come ad esempio nel seguente protocollo.



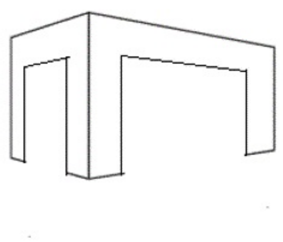
Un certo grado di deformazione poteva essere non solo prevedibile, dato che gli studenti non erano aiutati dalla presenza dei quadretti, ma anche ammissibile visto che nel testo non veniva esplicitamente detto che i triangoli fossero isosceli. Tuttavia, è chiaro che, nel protocollo precedente, i triangoli che compongono il quadrato sono diversi da quelli che compongono il rombo, quindi sembra esserci piuttosto un mancato controllo concettuale sui quadrilateri o un errata interpretazione del termine “uguale” riportato nel testo della domanda.

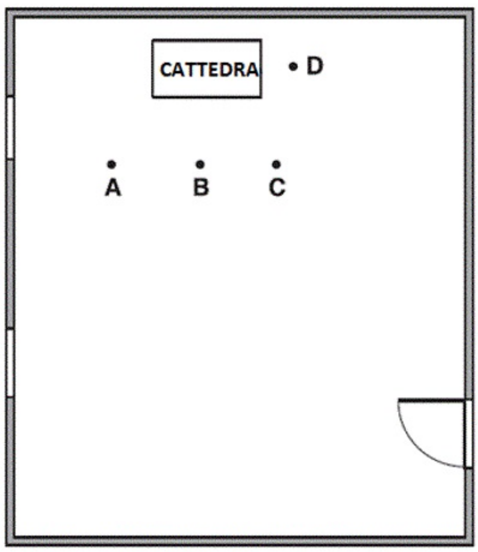
3.4 Prima lezione

3.4.1 Fase 1: punti di vista

Ho modificato leggermente la consegna rispetto al quesito riportato a pagina 24 in modo da renderla più esplicita e meno formale. Originariamente la domanda conteneva la rappresentazione di un armadio ma, poiché quest’ultimo non era presente nell’aula, è stato sostituito con la raffigurazione di una cattedra.

Immagina di essere una formica; ti trovi dentro la classe e dalla tua posizione vedrai la cattedra come rappresentata nel disegno. Da quale posizione la stai guardando?





Dopo aver letto la consegna, proiettata sulla LIM, alcuni alunni danno subito una risposta. Rosso1 (Gruppo 1)[1] afferma sicuro: «la risposta è la A» ma dopo un breve silenzio alcuni allievi iniziano a sostenere che la risposta corretta potrebbe essere la C. A questo punto inizia una discussione collettiva durante la quale il gruppo classe si divide tra coloro che pensano che la posizione corretta sia la A e coloro che credono sia C. Per spingere questi ultimi a rivedere la loro convinzione ho invitato alcuni di loro ad alzarsi dal posto e ad abbassarsi come se fossero una formica in modo da simulare quanto esplicitato dalla consegna. Dopo questa operazione sono sembrati essere quasi tutti d'accordo sulla risposta corretta; interessante l'intervento di Verde1 (Gruppo 2) che, ricredendosi sulla riposta data inizialmente (la C) prende consapevolezza di quale risulta essere la posizione corretta ed in particolare afferma: «la risposta corretta è la A ma da C si potrebbe vedere una prospettiva simile». Tuttavia un solo alunno, Verde4 (Gruppo 2), esprime delle perplessità completamente differenti al resto della classe; afferma infatti: «se guardo dalla posizione A vedrei soltanto l'angolo mentre se mi trovo nella posizione B avrei gurdato solo la parte davati, come faccio a vedere il disegno a sinistra? Impossibile». Quest'ultimo alunno sembra soffermarsi soltanto sulla rappresentazione della cattedra come rettangolo, pertanto è evidente la difficoltà nel passaggio tra rappresentazione bidimensionale e tridimensionale. Subito dopo è stato chiesto a tre alunni differenti di disegnare indicativamente alla lavagna come si vedrebbe la cattedra dalla posizione B, C e D. Tutti e tre gli alunni coinvolti non hanno avuto difficoltà ad effettuare una rappresentazione corretta.

[1] In riferimento alla divisione in gruppi effettuata durante le attività di gruppo e riportata a pagina 62.

3.4.2 Fase 2: discussione del questionario iniziale

Data la confusione iniziale della classe di fronte al quesito precedente, ho scelto di concentrare la discussione soltanto sul terzo e sul quarto quesito del questionario iniziale, al fine di indagare ulteriormente le abilità visuo spaziali degli allievi. Alcuni riceratori ([26]) mettono in evidenza il fatto che, a differenza di quanto sembra accadere per i matematici, gli allievi solo raramente ricorrono a supporti visivi e sfruttano le grandi potenzialità che tali supporti possono offrire per svolgere un ragionamento, per risolvere un problema. Alla luce di ciò ho deciso di partire dal quarto quesito e di commentarlo facendo uso di un modellino di cartone (si veda Figura 3.1).

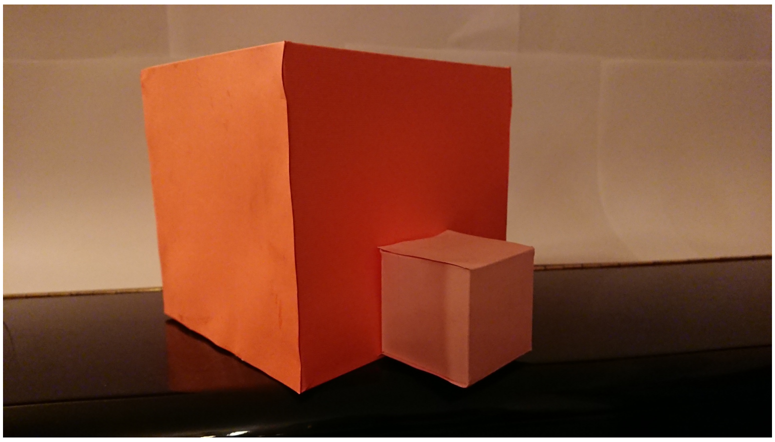


Figura 3.1

A differenza della risposte fornite nel questionario iniziale che evidenziavano alcuni problemi soprattutto relativamente alla seconda parte della domanda, con l'aiuto del modellino tutto il gruppo classe è arrivato alla risposta corretta. In particolare gli alunni sono divenuti, con facilità, consapevoli di quale fosse l'immagine che è impossibile vedere tra le quattro opzioni. Tra di loro qualcuno cerca anche di motivare il proprio pensiero; ad esempio Blu3 (Gruppo 4) afferma: «la D è sbagliata perchè il cubo piccolo dovrebbe essere al centro del cubo grande quando le vedo in 3D, di persona». Si passa poi alla discussione sulla terza domanda durante la quale inizialmente riemergono le varie opinioni evidenziate dall'analisi del questionario iniziale. Rosa1 (Gruppo 5) dice: «il primo può essere, guardato da una prospettiva, un esagono e da un'altra un cubo mentre il secondo è semplicemente un cubo». Dopo aver chiesto se tutti sono d'accordo con l'opinione di Rosa1, interviene Rosso2 (Gruppo 1) che sostiene la seguente idea: «sono entrambi cubi ma nella prima figura si vede la parte interna mentre nel secondo no» e ancora Rosso3 (Gruppo 1), sostiene che: «effettivamente il primo disegno confonde, è come se si vedesse l'angolo interno». In quest'ultima affermazione si osserva il tentativo di applicare la terminologia della geometria piana (angolo) a quella tridimensionale. Poi ancora Rosa4 (Gruppo 5) afferma: «vedo, nel primo disegno, sei quadrati che formano un cubo». Per riuscire a vedere i sei quadrati, che sono le sei facce del cubo, è fondamntale il coinvolgimento dell'*organizzazione visiva* e della *scanzione visiva* ed è necessario far prevalere l'aspetto concettuale su quello figurale, in quanto occorre entrare nel contesto tridimensionale e conoscere le caratteristiche concettuali dell' "oggetto cubo", dato che l'immagine, se pensata nel piano, può essere interpretata in modo diverso. L'intervento decisivo che conduce al punto di arrivo è quello di Giallo2 (Gruppo 3), il quale pensa che «la prima immagine può essere sia un cubo che un esagono mentre il secondo potrebbe essere, oltre che un cubo, anche un esagono ma siccome mancano tre linee non può essere». L'ultima osservazione di Giallo2 aiuta la classe ad riflettere sul fatto che «non è necessario disegnare le altre tre linee» per ottenere un esagono. Si giunge, infine, alla conclusione che entrambe le immagini possono rappresentare sia un cubo che un esagono.

3.4.3 Fase 3: introduzione alla terminologia 3D

Come descritto nel capitolo precedente, ho mostrato alla classe un modellino di cartone (si veda Figura 3.2) e tutti sono stati concordi sul fatto che si trattasse di un cubo.

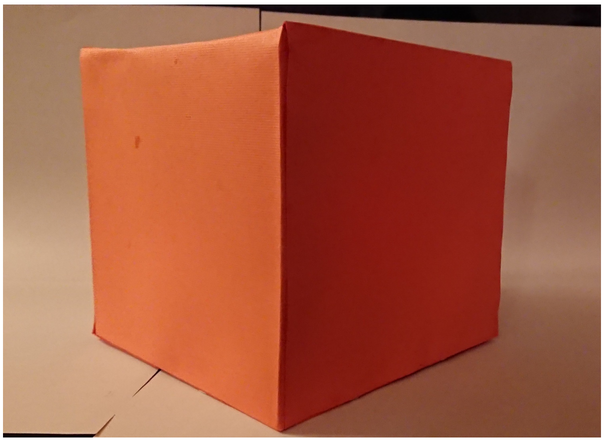


Figura 3.2

Dopo una breve discussione questo è stato caratterizzato dagli alunni come un "solido (oggetto tridimensionale), costituito da sei poligoni uguali e uniti tra loro, ognuno dei quali è un quadrato". Sono passata poi ad introdurre i termini di vertice, spigolo e faccia servendomi del modello di cartone.

3.4.4 Fase 4: lavoro di gruppo sulla classificazione dei solidi

Ho scelto di suddividere gli alunni in gruppi omogenei, in termini di rendimento scolastico, di soli 4 elementi ad ognuno dei quali è stato attribuito un ruolo tra il "tieni tempo", il "moderatore", il "verbalizzatore" e il "portavoce". Ho operato tale scelta per cercare di avere un'alta possibilità di interazione e un basso livello di conflittualità tra i membri. Ho deciso di creare gruppi composti da pochi elementi in quanto mi aspetto che, oltre a produrre risultati più accurati, ci siano meno possibilità che gli studenti non contribuiscano attivamente con la loro parte di lavoro.

Gruppo	**Componenti**
Gruppo 1	Rosso1 (portavoce), Rosso2 (verbalizzatore), Rosso3 (moderatore), Rosso4 (tieni tempo).
Gruppo 2	Verde1 (portavoce), Verde2 (verbalizzatore), Verde3 (moderatore), Verde4 (tieni tempo).
Gruppo 3	Giallo1 (portavoce), Giallo2 (verbalizzatore), Giallo3 (moderatore), Giallo4 (tieni tempo).
Gruppo 4	Blu1 (portavoce), Blu2 (verbalizzatore), Blu3 (moderatore), Blu4 (tieni tempo).
Gruppo 5	Rosa1 (portavoce), Rosa2 (verbalizzatore), Rosa3 (moderatore), Rosa4 (tieni tempo).

Il tempo assegnato per effettuare il lavoro è stato di 30 minuti durante i quali ogni gruppo aveva, per una sola volta, la possibilità di avvicinarsi alla cattedra e manipolare i solidi considerati. Questi ultimi sono stati contrassegnati con delle lettere (si veda Figura 3.3).

- prisma a base quadrata: lettera A
- prisma a base pentagonale: lettera B
- prisma a base esagonale: lettera C
- piramide a base triangolare: lettera D
- piramide a base pentagonale: lettera E

- piramide a base esagonale: lettera F.

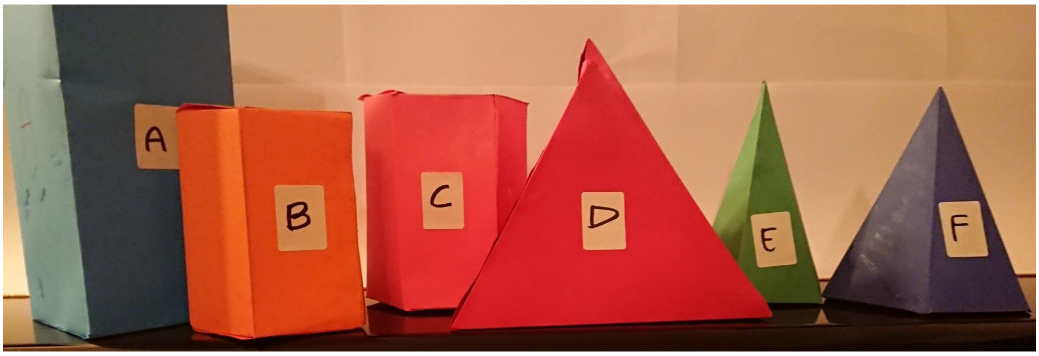


Figura 3.3

In generale, osservando lavorare i 5 gruppi ho potuto notare un'armoniosa collaborazione. Non si confermano, in questo caso, gli svantaggi che ci si potrebbe aspettare suddividendo gli studenti in gruppi omogenei. In particolare non si verifica l'ipotizzata frattura tra gruppi dei "più bravi" e dei "meno bravi", anzi i gruppi formati dagli studenti più deboli sembrano essere molto più propensi ad elaborare nuove idee e ad esprimere liberamente la propria opinione al contrario di quelli composti da "più bravi" che sembrano essere sempre preoccupati di uno possibile giudizio. Il comportamente di questi ultimi allievi è coerente con il **contratto didattico** infatti: «l'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa; quindi anche se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere liberamente quel che pensa, l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile rigoroso perché suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo; non scriverà affatto "liberamente" ma cercherà invece di dare la definizione che ritiene essere quella "corretta" , cioè quella che ritiene essere attesa dall'insegnante» (si veda [8], p.19).

Risultati

Terminati i trenta minuti assegnati, ogni gruppo ha avuto la possibilità di esporre il proprio lavoro; i risultati sono i seguenti:

- I primi quattro gruppi suddividono i solidi presenti nella stessa maniera, in base alla forma delle lore facce. In particolare classificano i solidi ripartendoli in 4 gruppi. Riporto di seguito un esempio:

NOME GRUPPO : ESAGONI

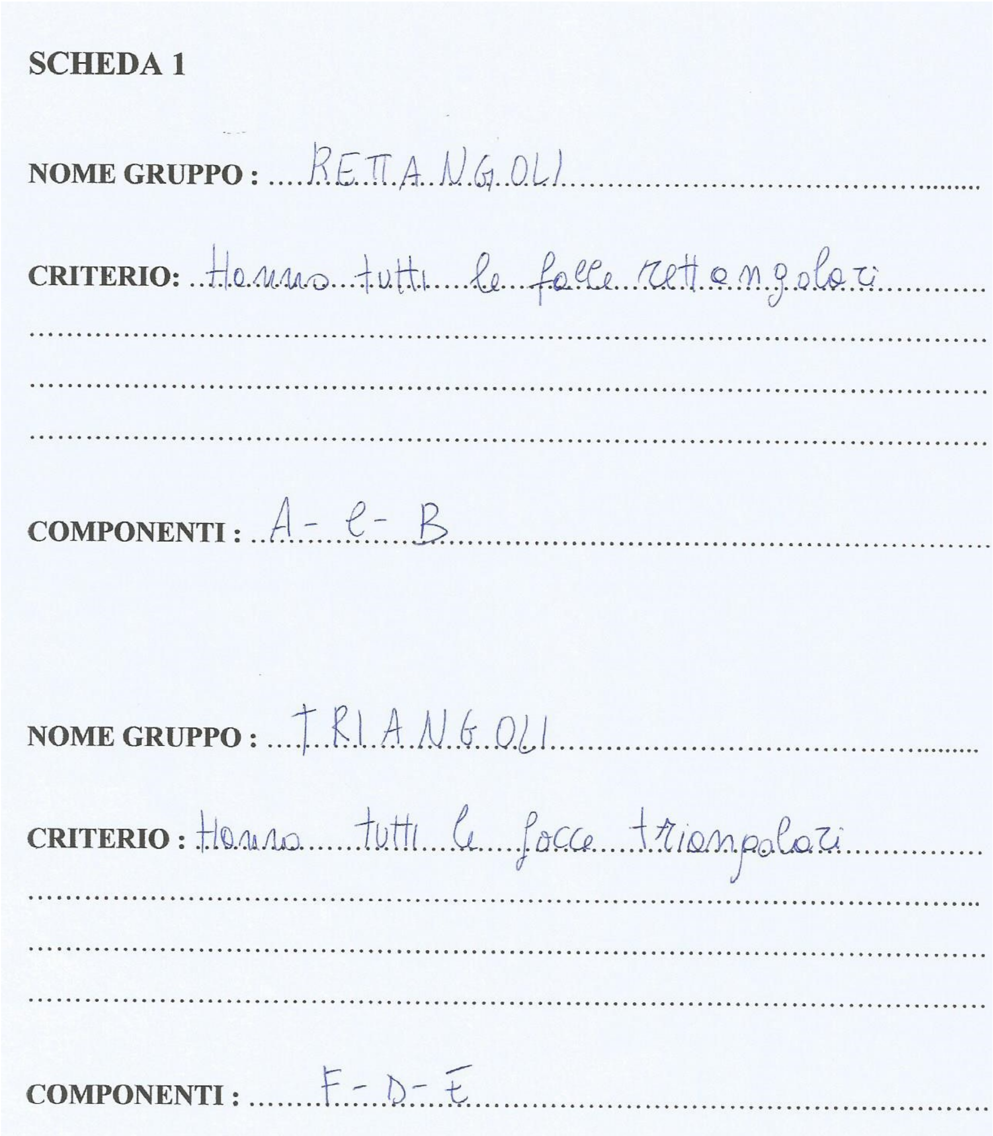
CRITERIO: Hanno tutti e due 6 facce e la base esagonale

COMPONENTI : E - B

NOME GRUPPO : PENTAGONI

CRITERIO : Hanno tutti e due 5 facce e la base pentagonale

COMPONENTI : F - C



SCHEDA 1

NOME GRUPPO : RETTANGOLI

CRITERIO: Hanno tutti le facce rettangolari

COMPONENTI : A - C - B

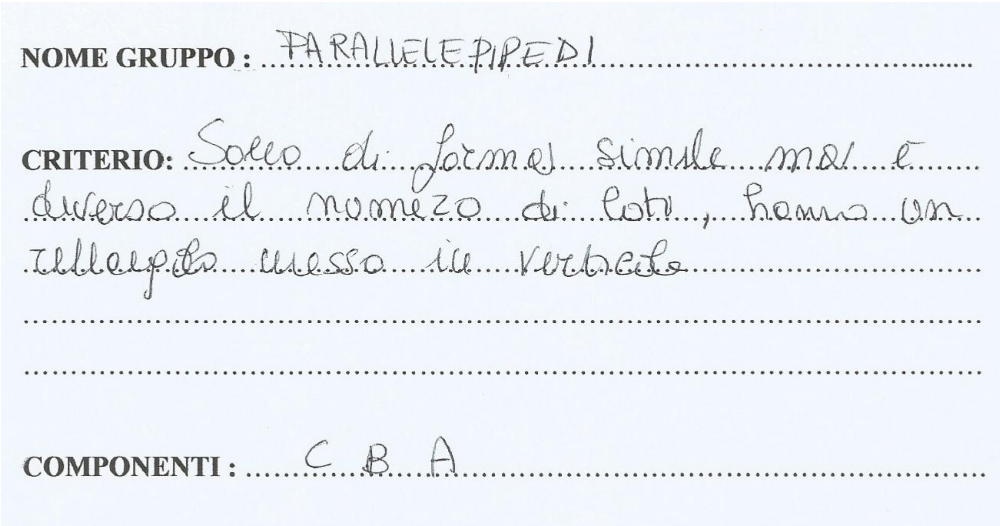
NOME GRUPPO : TRIANGOLI

CRITERIO : Hanno tutti le facce triangolari

COMPONENTI : F - D - E

È interessante notare come gli studenti di tali gruppi tentino di estendere le loro conoscenze pregresse sulle geometria piana alla geometria in tre dimensioni.

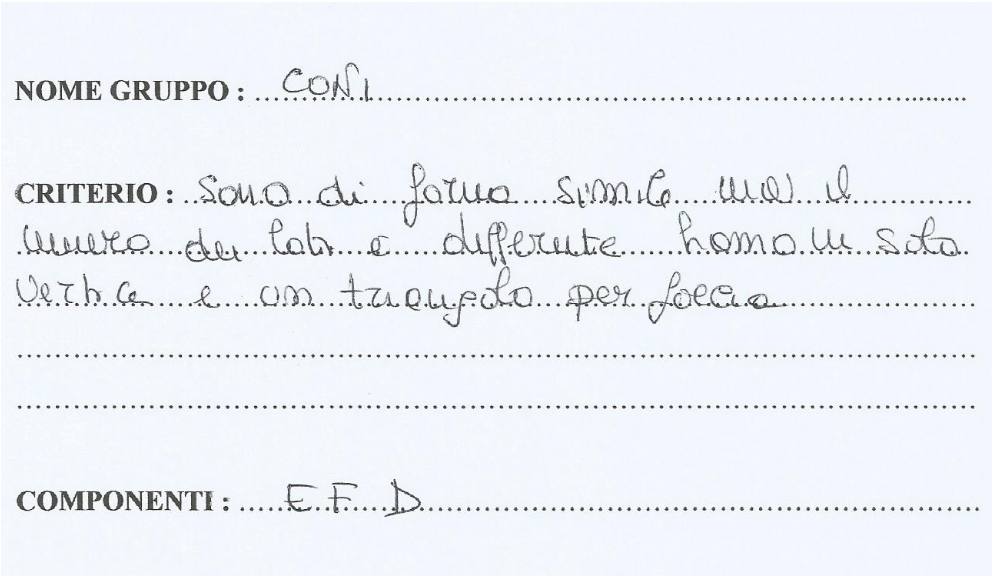
- Il gruppo 5 mette in discussione le convinzioni della maggior parte del gruppo classe elaborando una classificazione che suddivide i solidi considerati in due gruppi. Il primo è quello dei "parallelepipedi", dove sono stati inseriti i prismi. In particolare, il portavoce del gruppo ricorda di aver studiato i parallelepipedi alla scuola primaria e che la scelta di quella denominazione era dovuta la fatto che: «i solidi del gruppo hanno le stesse facce laterali del parallelepipedo». È interessante osservare che tale gruppo, nel criterio elaborato, parla di "rettangolo in verticale"; anche se la terminologia non è intrinseca si potrebbe pensare che abbiano voluto esprimere il fatto che i solidi che appartengono a tale gruppo abbiano le basi perpendicolari alle facce laterali, caratteristica legata ai prismi retti. Il secondo gruppo è quello dei "coni", composto dalle piramidi.



NOME GRUPPO : PARALLELEPIPEDI

CRITERIO: Sono di forma simile ma è diverso il numero di lati, hanno un rettangolo messo in verticale

COMPONENTI : C B A


NOME GRUPPO : CONI

CRITERIO : Sono di forma simile ma il numero dei lati e differente hanno un solo vertice e un triangolo per faccia

COMPONENTI : E.F.D.

Il gruppo 5 è composto dagli alunni "più deboli" all'interno della classe. In particolare uno di loro, da quanto mi è stato riferito dall'insegnante di matematica e scienze, al termine dell'anno scolastico non ha raggiunto la sufficienza in matematica.

Discussione collettiva e istituzionalizzazione dei risultati

Dopo l'esposizione del lavoro effettuato dai singoli gruppi ho guidato la classe all'interno di una discussione che aveva come obiettivo quello di giungere alla definizione di prisma e di piramide. Tale fase richiede simultaneamente l'intervento del livello figurale (osservando l'oggetto come appare) e il livello concettuale (che mette in relazione le proprietà che caratterizzano la figura geometrica rappresentata dall'oggetto).

Verso la definzione di Prisma

Concentro l'attenzione sulla suddivisione effettuata dal gruppo 5 e in particolare sul primo gruppo di solidi, quello dei "parallelepipedi". Voglio dunque condurre la classe, a partire dal parallelepipedo, ad una generalizzazione fino alla definzione di prisma. Domando alla classe se qualcuno sa cos'è un parallelepipedo e quali sono le sue caratteristiche. Blu1 (Gruppo 4) afferma: «un parallelepipedo (indica il prisma a base quadrata sulla cattedra) può avere solo una base rettangolare o quadrata» dunque una prevalenza dell'aspetto figurale porta Blu1 a distinguere tra rettangoli e quadrati anzichè includere i quadrati tra i rettangoli. Dopo aver chiesto se notano qualche altra caratteristica, Rosa3 (Gruppo 5) risponde: «si, perchè parallelepipedo significa che ha i lati dei lati paralleli, perchè ha facce parallele», (all'inizio usa il termine lati per poi correggersi). A questo punto c'è uno spostamento dell'attenzione: finora ci si era concentrati sulle differenze nella forma delle facce, ora si punta l'attenzione sulla proprietà di parallelismo tra loro. Rosa1 (Gruppo 5) segue la concettualizzazione di Rosa3 e la rende più precisa: «le facce devono essere parallele a due». Passa poi ad un controllo figurale di questa proprietà sul prisma esagonale presente sulla cattedra; si rende conto che anche questo verifica le proprietà di parallelismo sebbene il nuovo solido preso in considerazione non sia un parallelepipedo. A questo punto Blu3 (Gruppo 4) afferma: «allora la differenza tra questo (indica il prisma a base pentagonale) e quest'altro (indica il prisma a base quadrata) è che hanno basi diverse, una ha il pentagono e l'altra ha il quadrato». Questa rappresenta una prima concettualizzazione anche se è ancora insufficiente. Per ottenere la giusta concettualizzazione, le differenze dovrebbero essere superate a favore delle analogie. A tal fine invito gli alunni a non soffermarsi sulle facce dei solidi che stiamo prendendo in considerazione ma di osservarli nella loro totalità cercando di individuarne i punti in comune. Nella fase che segue si procede verso un generalizzazione. L'intervento decisivo è quello di Blu1 che osserva: «allora, in pratica, sono entrambi solidi che hanno facce laterali a due a due uguali e possono avere come base le figure che voglio e anche loro sono parallele» e ancora Rosa1: «quindi la parte superiore e inferiore sono uguali e parallele, per alcuni sono triangoli, per altri sono altre figura» e ancora dopo Blu3 interviene dicendo: «quindi posso dire che tutti quelli (indica i prismi) sono simili e li posso mettere in un gruppo solo». Al termine di questa prima fase della discussione viene chiarito che i solidi che hanno individuato come "simili" in base a determinate caratteristiche si possono classificare come Prismi.

Verso la definizione di Piramide

Si procede verso la definizione di piramide, alla quale gli studenti arrivano con più facilità dopo la discussione precedente che ha rappresentato qualcosa di nuovo per gli alunni coinvolti, non molto abituati alle discussioni collettive. Come primo passo chiedo agli allievi di osservare i solidi rimasti e di esplicitarne le caratteristiche. Il portavoce del gruppo 5 (Rosso3) afferma, coerentemente con la loro classificazione, che i solidi sono accumunati dalla presenza di una "punta". Segue l'intervento di Blu3, che asserisce: «possiamo dire che è un prisma con una sola base» ma Giallo3 (gruppo 3) ribatte dicendo : «ma non è vero che che quella (indicando una piramide sulla cattedra) ha una sola base, perchè puoi metterla in una posizione diversa». Invito Alice ad avvicinarsi alla cattedra per farmi vedere cosa intende e lei procede posizionando la piramide poggiata su una delle facce laterali. Si può notare dunque che l'alunna si riferisce ad una diversa concezione della base intesa come la faccia su cui si trova il solido. Viene data, infine, la parola a Rosso3

(Gruppo 1) il quale riferisce che: «un prisma per essere un prisma deve avere due basi uguali che sono parallele l'una all'altra mentre i solidi rimasti hanno tutti una sola base e un vertice». Chiarisco, infine, che i solidi rimasti da classificare possono essere inseriti in un unico gruppo: le Piramidi.

3.5 Seconda lezione

3.5.1 Fase 1: primo approccio al concetto di sviluppo

Dopo aver appurato che gli studenti non avevano mai sentito parlare di sviluppo di un solido, ho chiesto loro di provare ad immaginare quale potrebbe essere il suo significato, invitandoli a condividere il proprio pensiero con il resto della classe. Diversi sono gli allievi che hanno partecipato alla discussione fornendo diverse defizioni personali di sviluppo.
Rosa1 (Gruppo 5) risponde: «lo sviluppo è un evoluzione», per qualcun'altro lo sviluppo è una "trasformazione" o ancora, per Giallo4 (Gruppo 3), una "divisione" e per Rosso2 (Gruppo 1) è "qualcosa che cambia". Blu2 (Gruppo 4), porta la discussione verso una nuova direzione affermando: «lo sviluppo di un solido è quando lo disegnamo». A questo punto interviene nuovamente Rosa1 (Gruppo 5) dicendo: «forse lo sviluppo è come si forma un solido» e dopo averlo invitato a spiegarsi meglio, riformula la sua idea: «lo sviluppo è come si forma un solido unendo più figure piane. È come se scompongo la figura, per esempio se prendo un cubo è formato da sei quadrati». Dopo questa breve discussione ho chiarito in modo informale cos'è lo sviluppo di un solido "aprendo" il modellino di cartone del cubo che avevo mostrato alla classe in precedenza. Successivamente, dietro mia richiesta, gli studenti hanno affermato di pensare che lo sviluppo di un solido sia unico e, per

sfatare tale idea, ho proceduto a mostrare delle animazioni GeoGebra che mostravano diversi sviluppi di un cubo, (si vedano Figure 3.4-3.9)

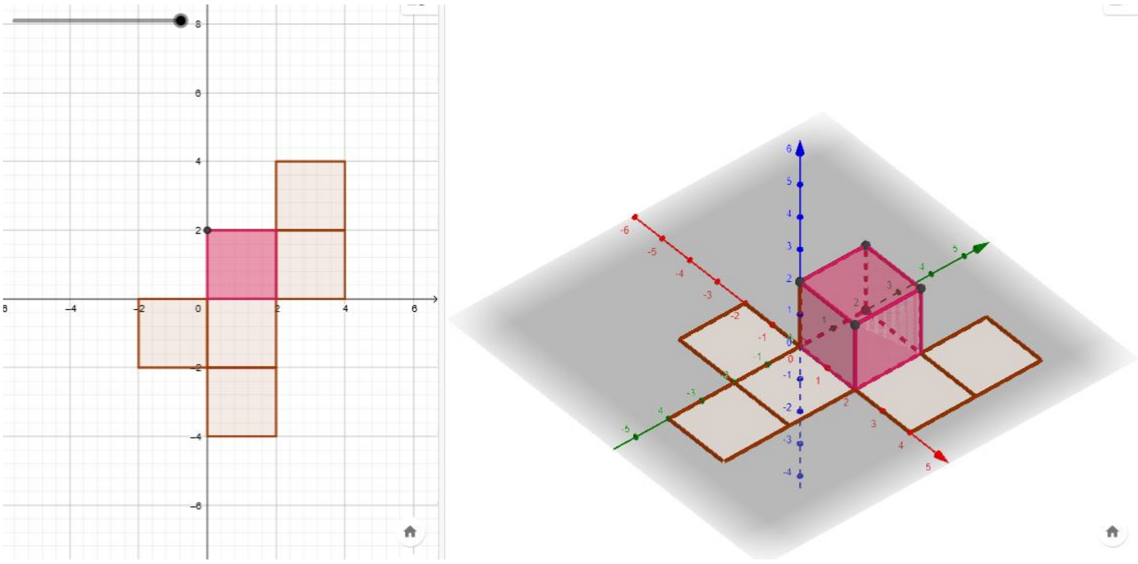


Figura 3.4

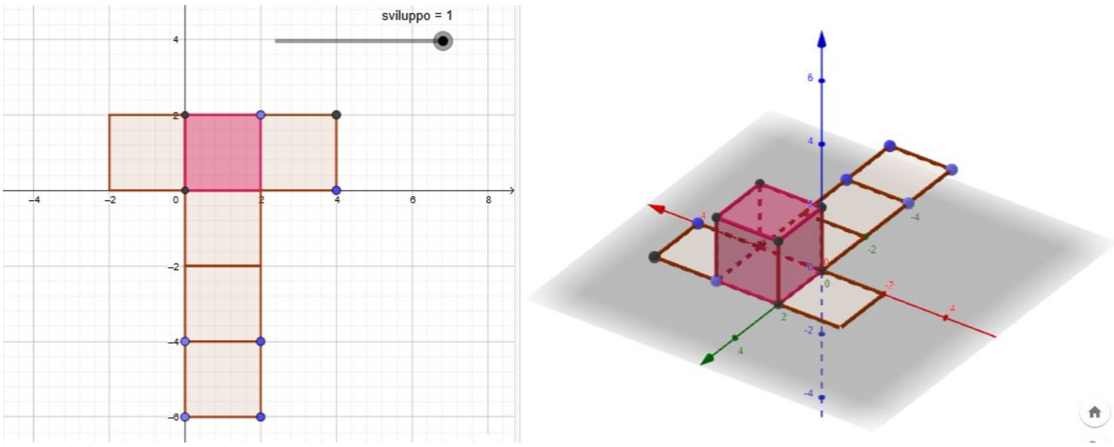


Figura 3.5

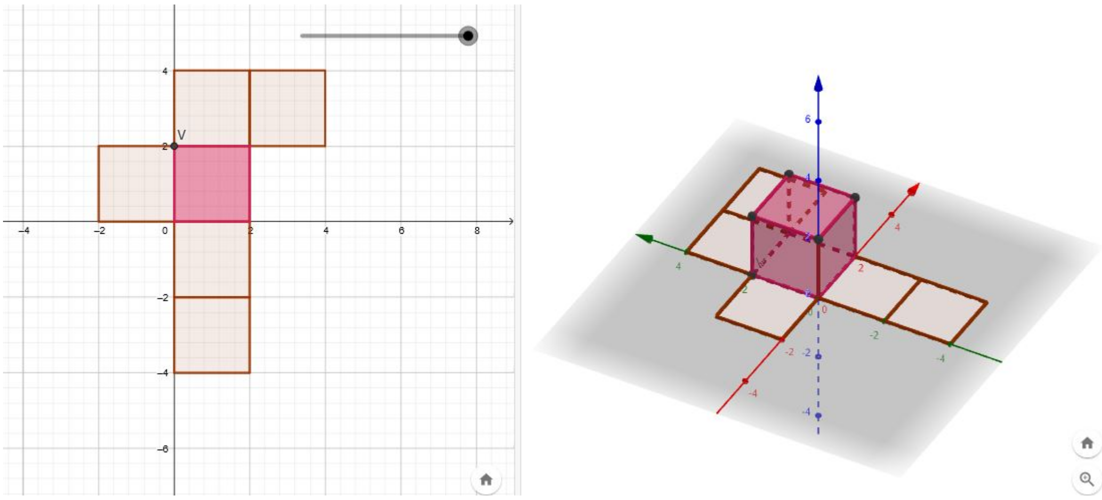


Figura 3.6

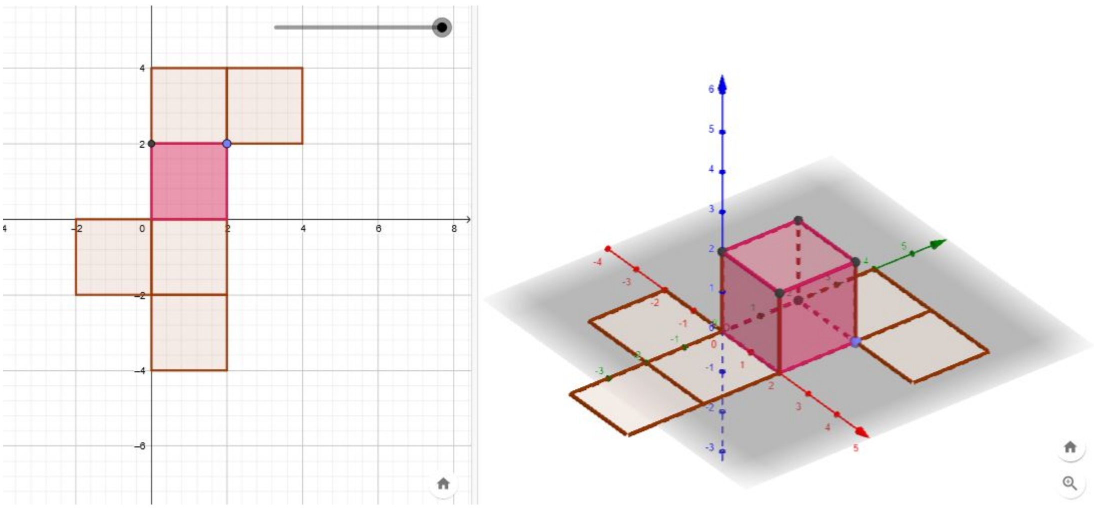


Figura 3.7

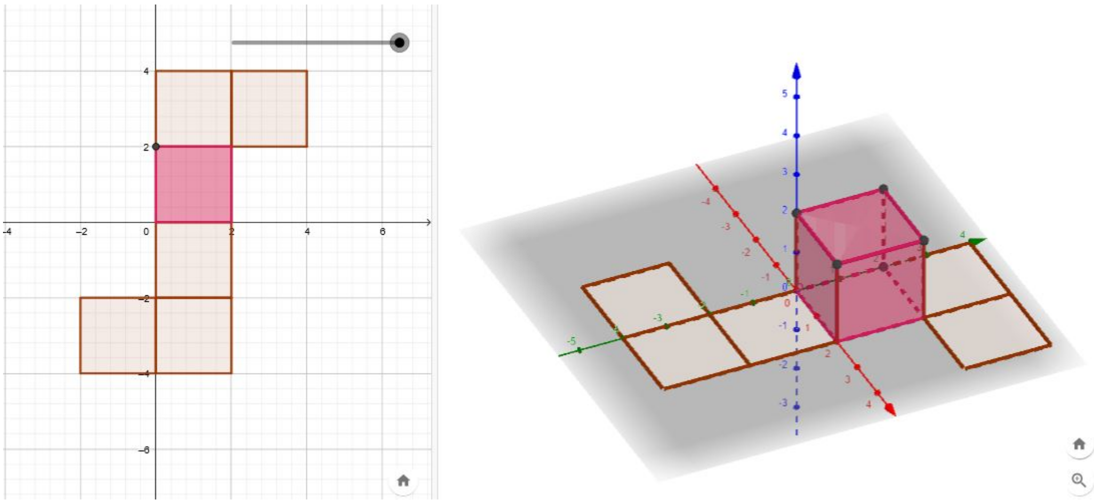


Figura 3.8

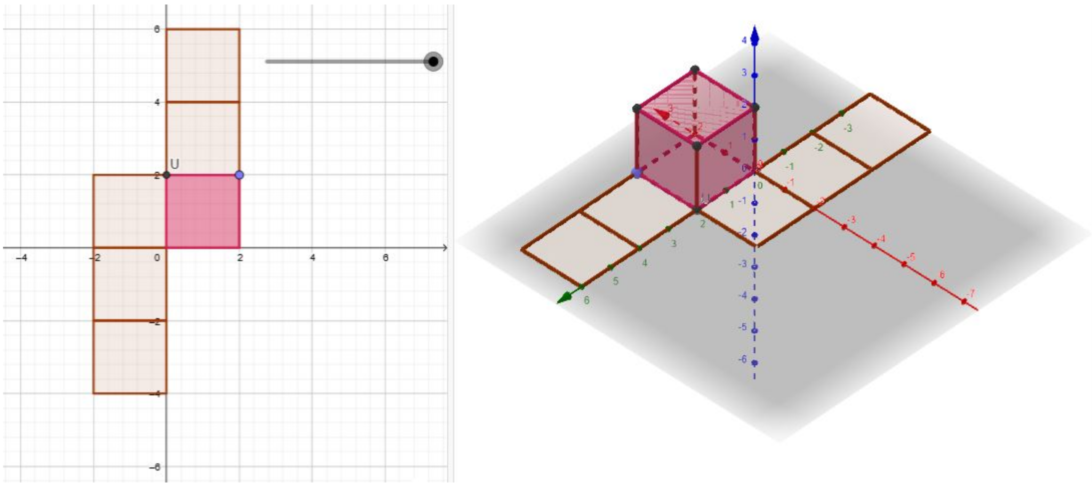


Figura 3.9

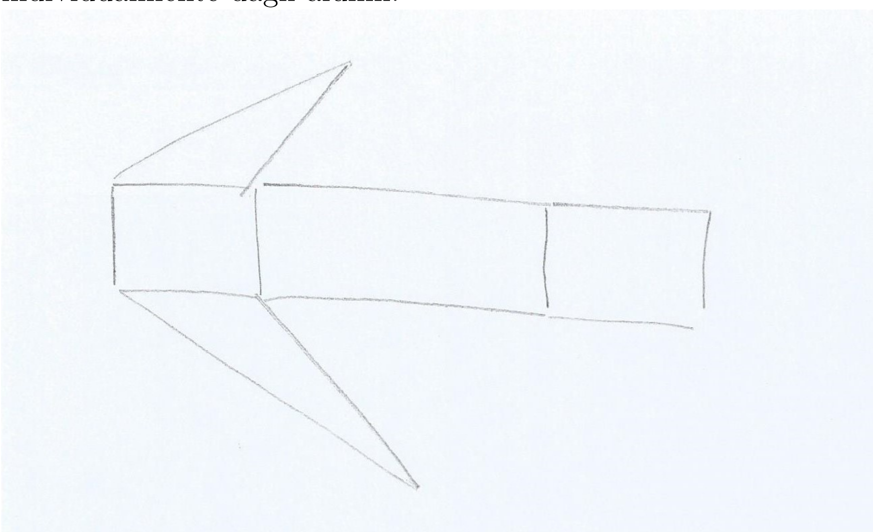
3.5.2 Fase 2: disegnare lo sviluppo di un solido, lavoro individuale

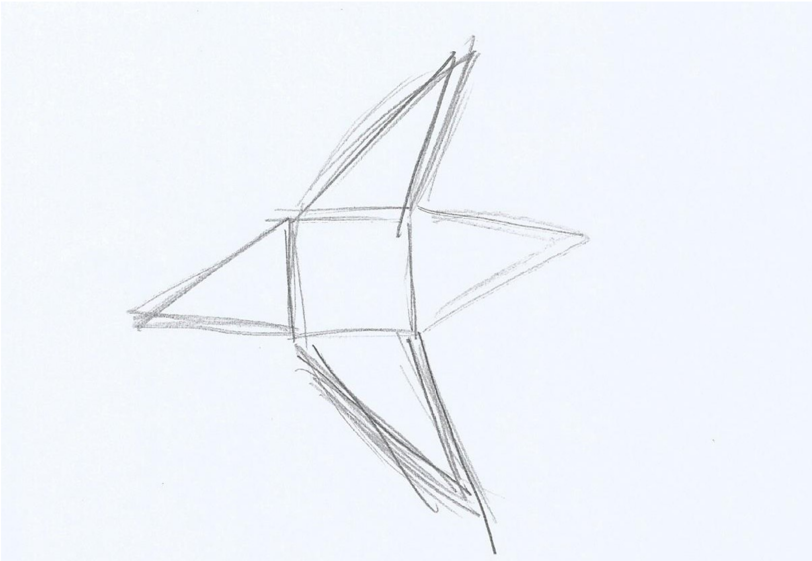
Durante la seconda lezione ho lasciato invariata la struttuta dei gruppi della lezione precedente. Ho consegnato, ai Gruppi 2, 3, 4 un modellino di prisma a base triangolare e ai restanti due, Gruppo 1 e Gruppo 5, una piramide a base quadrata invitando loro a manipolarli e ad osservarli con attenzione;

subito dopo ha avuto inizio il lavoro individuale con la consegna della scheda riportata in Appendice B.2. Tutti gli studenti hanno risposto che il solido assegnatogli si sviluppa ed ognuno di loro ha proposto uno o più possibili sviluppi. Da un'attenta analisi degli elaborati sono emersi i seguenti punti critici.

- **Conflitto tra caratteristiche percettive di un oggetto e regole dello sviluppo.**

  Sviluppare un solido significa pensare di trasformarlo: tale trasformazione, se realmente attuata, determina dei cambiamenti fondamentalli a livello percettivo, «le caratteristiche percettive di un oggetto entrano in conflitto con gli invarianti della trasformazione di sviluppo» ([19], p.46). Si possono osservare, ad esempio, i seguenti sviluppi elaborati individualmente dagli alunni:

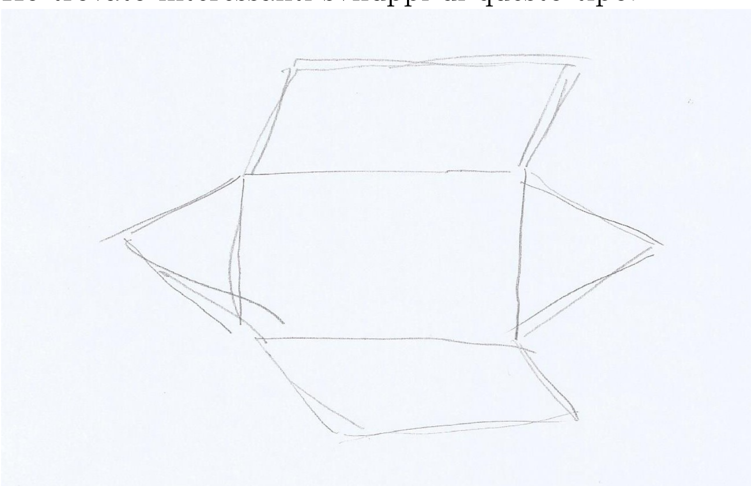




La caratteristica saliente del solido, che i ragazzi esprimono dicendo che le facce sono "oblique" è trasferita nel disegno attraverso una deformazione delle facce triangolari.

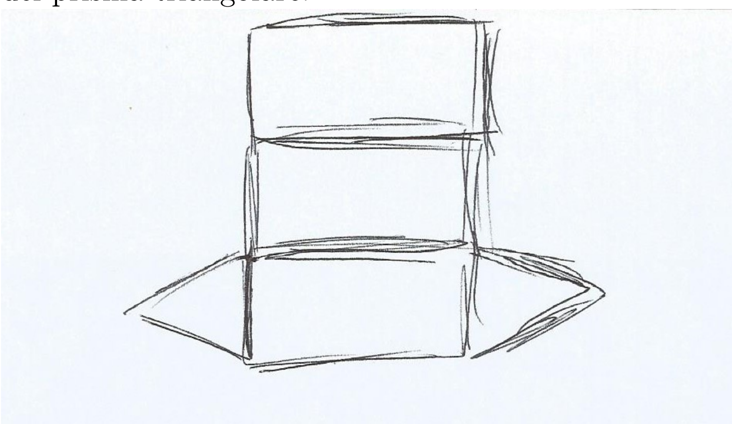
- **Coordinamento tra processo di trasformazione e risultato di tale processo.**

  Ho trovato interessanti sviluppi di questo tipo:

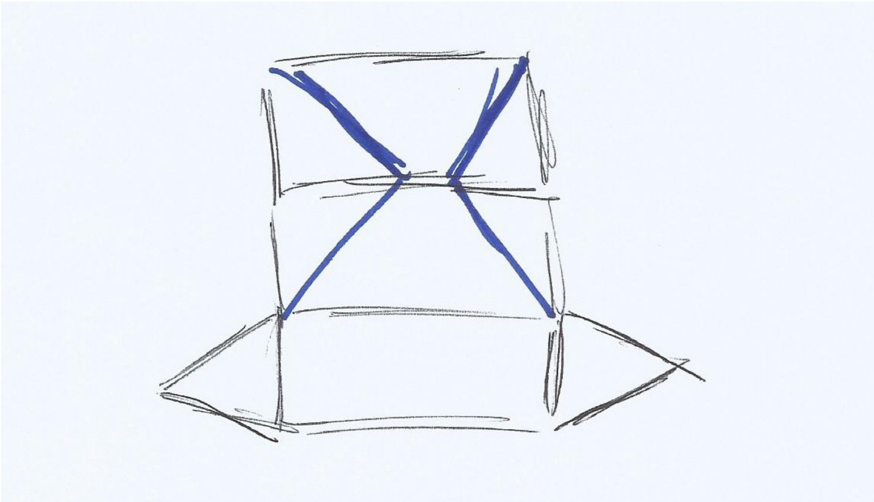


Disegnare lo sviluppo di un solido rimanda alla interpretazione fisica della trasformazione, di conseguenza la soluzione mantiene traccia della trasformazione stessa, di come se ne immagina la realizzazione. Il disegno precedente presentano chiari elementi prospettici e fornisce la rappresentazione di uno stato intermendio del processo di sviluppo, piuttosto che il risultato finale.

- **Conflitto tra la componente figurale e quella concettuale.** Osserviamo l'esempio di Verde1, che ha disegnato il seguente sviluppo del prisma triangolare.

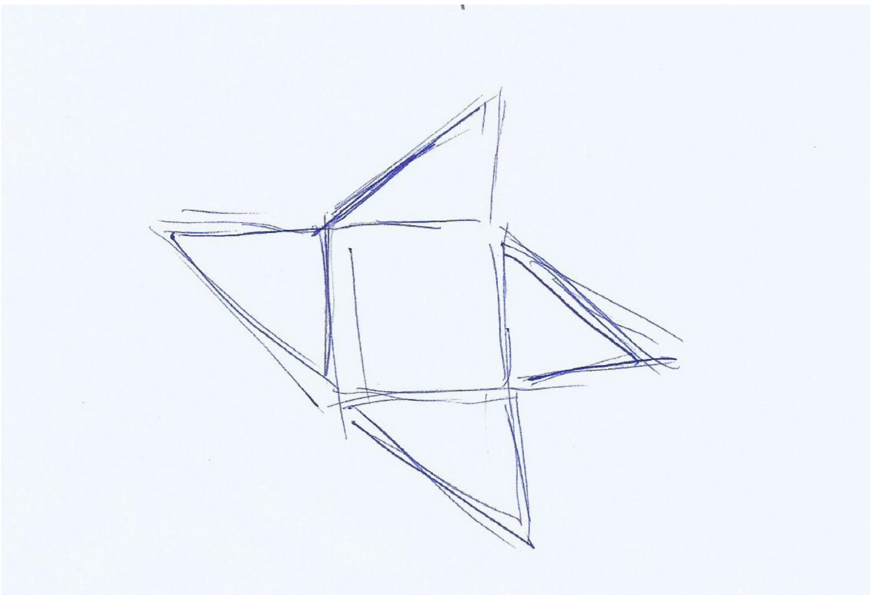


L'alunna osserva il suo disegno (l'oggetto è ancora nascosto) e afferma: «forse il disegno è sbagliato, non sono sicura, la base è un rettangolo sicuramente ma questi sui lati non so se sono rettangoli o trapezi». Riprova a disegnare lo sviluppo.



In questo caso è stato sufficiente mostrare l'oggetto per ottenere la soluzione corretta, ma talvolta l'influenza dei tratti caratteristici è così forte che la presenza dell'oggetto non ottiene alcun effetto. A tal proposito si può considerare il prossimo esempio.

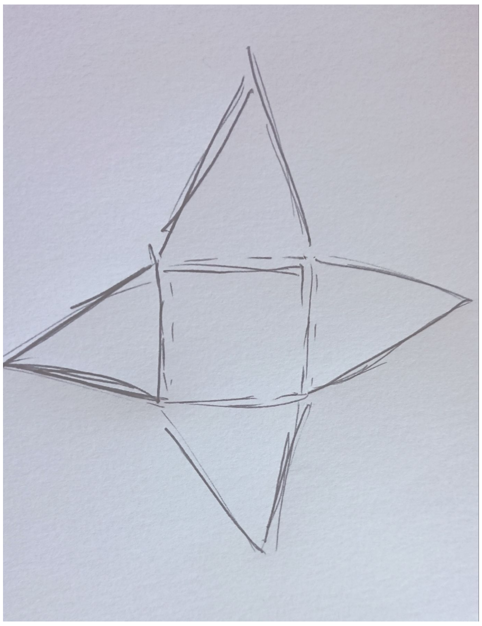
- **Il ruolo dell'oggetto concreto.**
  Durante il lavoro individuale, Rosso1 mi ha espresso i suoi dubbi relativamente allo sviluppo della piramide. L'alunno ha disegnato lo sviluppo di una piramide a base quadrata, nel quale le facce triangolari sono deformate.



È incerto sula forma dei triangoli, infatti afferma: «forse sono isosceli, forse hanno un angolo retto». Dopo avergli consegnato nuovamente il modellino, tenta di modificare il suo sviluppo senza successo ed infine gli presento lo sviluppo corretto. A questo punto l'alunno afferma: «ma a guardarlo sembra che non funzioni». Rosso1 non riesce ad accettare il fatto che le facce che si trovano su piani obliqui possano essere rappresentati come mostratogli. Questo fenomeno è molto interessante e per certi aspetti sorprendente: la presenza e la disponibilità dell'oggetto concreto non influenza in modo evidente le risposte.

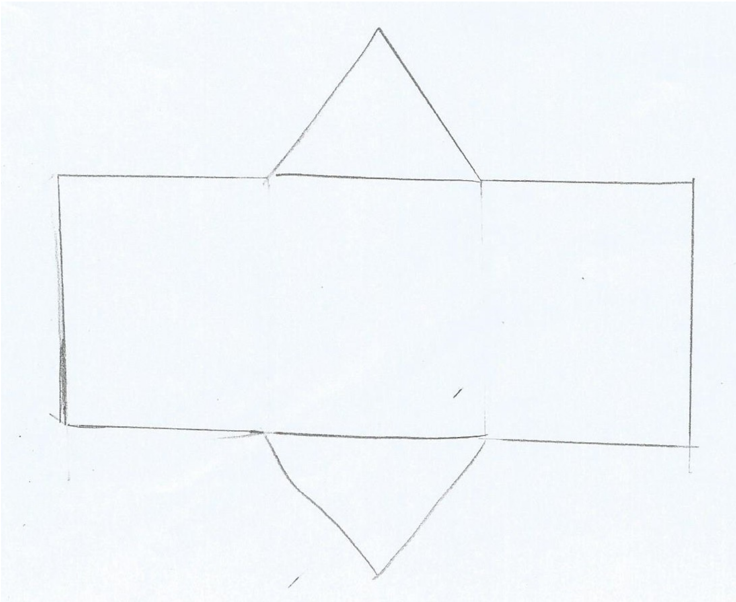
- **Il fenomeno dei prototipi.**

  La teoria del prototipo, elaborata durante gli anni settanta da Elenor Rosch e da altri studiosi nell'ambito delle scienze cogntive, è un sistema di categorizzazione in base al quale alcuni membri di una categoria semantica occupano una posizione più centrale rispetto ad altri. La capacità di categorizzazione consiste nel suddividere il continuum dell'esperienza in unità discrete (classi o categorie), individuando somiglianze e differenze. Le classi o categorie sono definite isolando alcune caratteristiche o tratti pertinenti in modo che è possibile distinguere un oggetto da un altro (si veda [28]). In questo caso specifico, l'aspetto a punta del prisma triangolare porta ad assimilare il prisma ad un particolare oggetto che può essere considerato il prototipo degli oggetti a punta: la piramide. È il caso di Rosa4 (Gruppo 5) che chiama il prisma triangolare "piramide"; la confusione tra i nomi corrisponde forse ad una confusione tra le immagini e di conseguenza il disegno dello sviluppo del prisma si risolve nel disegno dello sviluppo di una piramide.



- **La "fusione" di facce dello sviluppo**

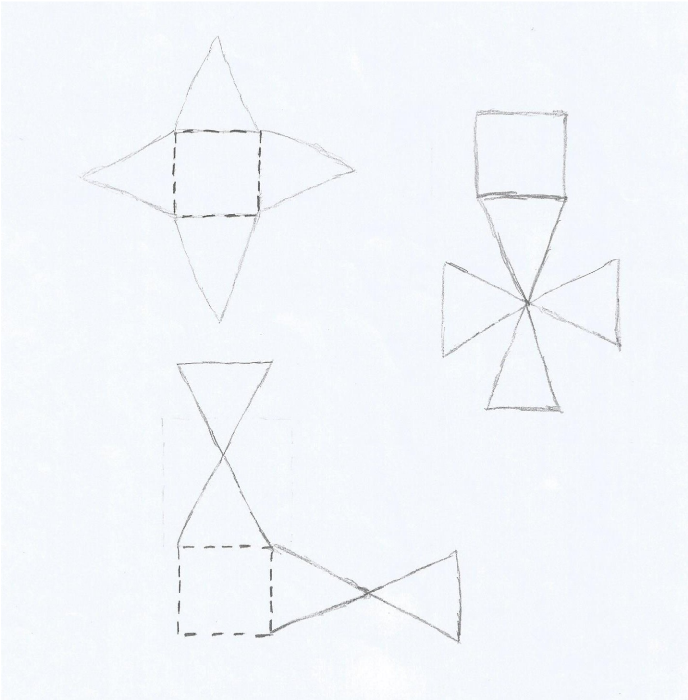
  Dall'analisi di un elaborato, che si può comunque considerare corretto, si osserva la "fusione" di alcune facce dello sviluppo, in particolare le facce laterali sono state disegnate attaccate tra loro, come se fossero "blocco" immutabile e si muovessero insieme nella trasformazione di sviluppo.



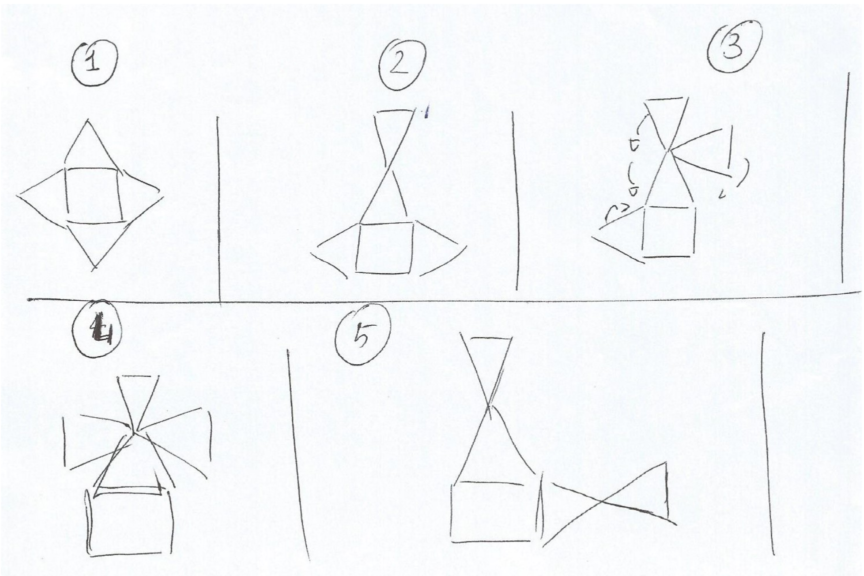
3.5.3 Fase 3: disegnare lo sviluppo di un solido, lavoro di gruppo

I gruppi che hanno lavorato con la piramide a base quadrata sono riusciti ad individuare diversi possibili sviluppi.

Gruppo 1

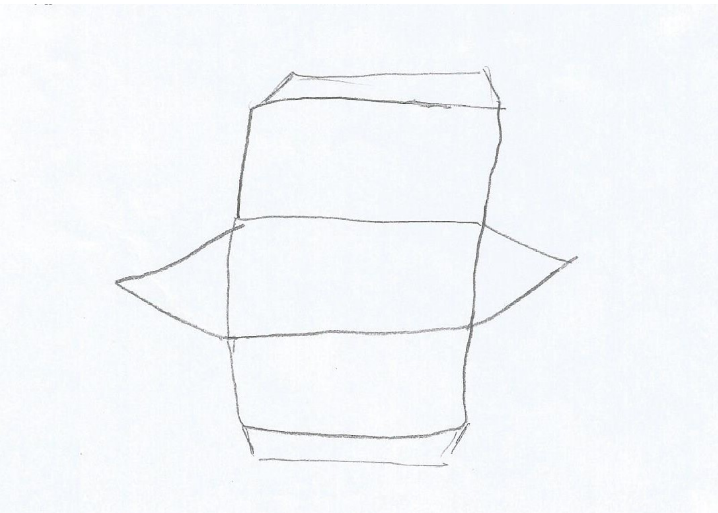


Gruppo 5

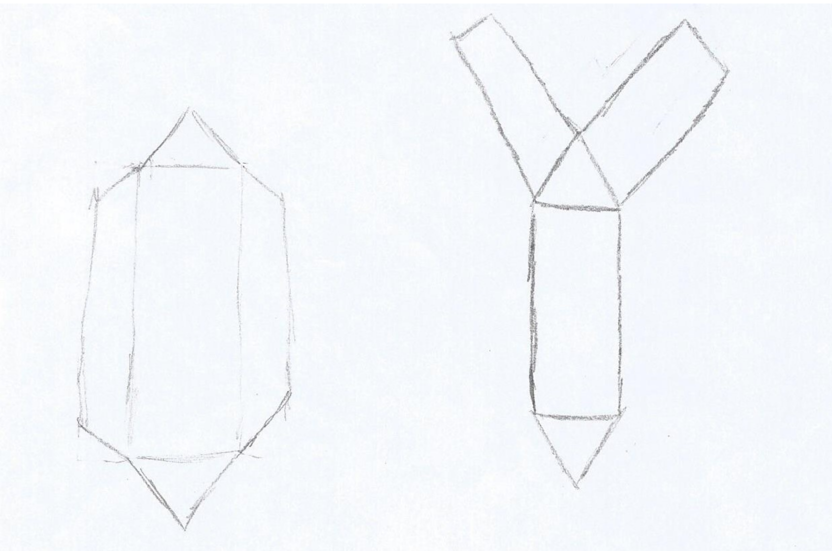


I gruppi a cui era stato assegnato il prisma a base triangolare incontrano più difficoltà. Disegnano, infatti, al massimo due sviluppi.

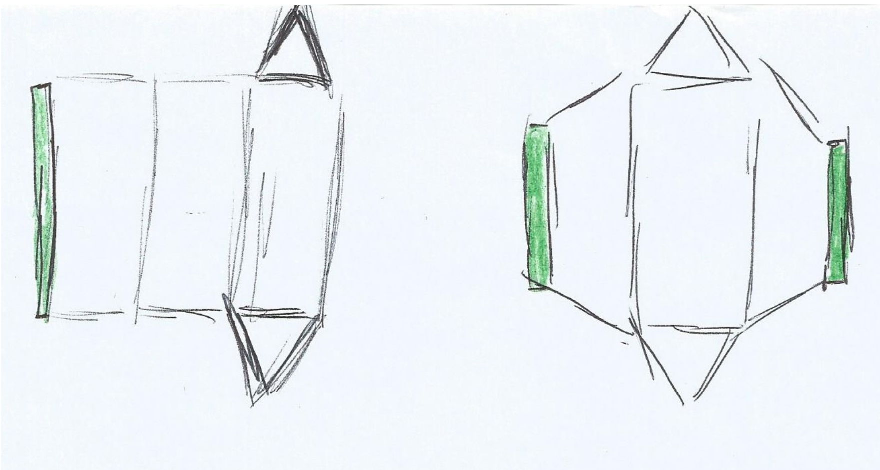
Gruppo 2



Gruppo 3



Gruppo 4



Il problema della linguette

Dagli elaborati del Gruppo 2 e del Gruppo 4 si può evidenziare un altro elemento critico che non era stato ancora affrontato: l'uso delle linguette, che sono elementi importanti dal punto di vista concreto ma non concettuale. Decido, a questo punto, di puntare l'attenzione su questo problema e invito gli alunni ad esporre le proprie idee al riguardo, al fine di ragionare sulla relazione tra l'operazione concreta e la nozione ideale di sviluppo. Dalla discussione si capisce quanto sia complicato raggiungere l'idea di sviluppo come rappresentazione bidimensionale di un solido. Dopo i primi interventi, diventa chiaro che le linguette sono necessarie solo se bisogna costruire un modello di solido con il cartone. Inserisco, di seguito, un estratto di registrazione della discussione collettiva che mostra la difficoltà nel superare i vincoli pratici che non hanno corrispondenza nel modello geometrico.

Io: *Perchè, secondo voi, alcuni gruppi hanno disegnato le linguette? È importante chiarire questo punto.*

Rosa2 *(Gruppo 5): Secondo me non dovrebbero essere lì; se apriamo un solido qualsiasi nella realtà non ci sono le linguette. Ci sono soltanto se vogliamo costruire un solido di cartone.*
Rosa1 *(Gruppo 5): sono d'accordo.*
Io: *vuoi dirlo con parole tue?*
Rosa1: *sì, in una figura geometrica non ci dovrebbero essere le linguette, al contrario, se vogliamo costruirlo, abbiamo bisogno di incollare i lati.*
Giallo4 *(Gruppo 3): anche io sono d'accordo, perche questa è la prima cosa che ho pensato; voglio dire, se è un disegno non hanno bisogno di essere lì dove noi immaginiamo solo la figura. Invece per una costruzione che davvero facciamo devono essere lì altrimenti non si chiude.*
Blu2 *(Gruppo 4): io penso invece che debbano essere inserite perchè lo sviluppo è una figura solida distaccata praticamente e se non mettiamo le lingiette come facciamo a ricostruirla?*
Rosa1: *non sono d'accordo, perchè quando penso ad una figura geometrica, ad esempio ad un cubo, io penso immediatamente ad un cubo, non penso che si deve incollare.*
Blu4 *(Gruppo 4): sono d'accordo con Rosa1, perchè le linguette sono necessarie per costruire oggetti di cartone, ma per esempio (indica la cattedra vista dall' alto) è una figura geometria e non ha i lembi.*
Blu2: *concordo sul fatto che in una figura geometrica non dovrebbero esserci le linguette ma per lo sviluppo sono necessarie, è come se avessimo aperto una figura solida.*
(...La discussione continua alternando argomenti "contro" e "a favore" della necessità delle linguette).
Rosa1: *perchè, quando immaginiamo, quando disegniamo una figura solida, sulla lavagna, nel disegno i lembi non sono richiesti, ma anche se lo pieghia-*

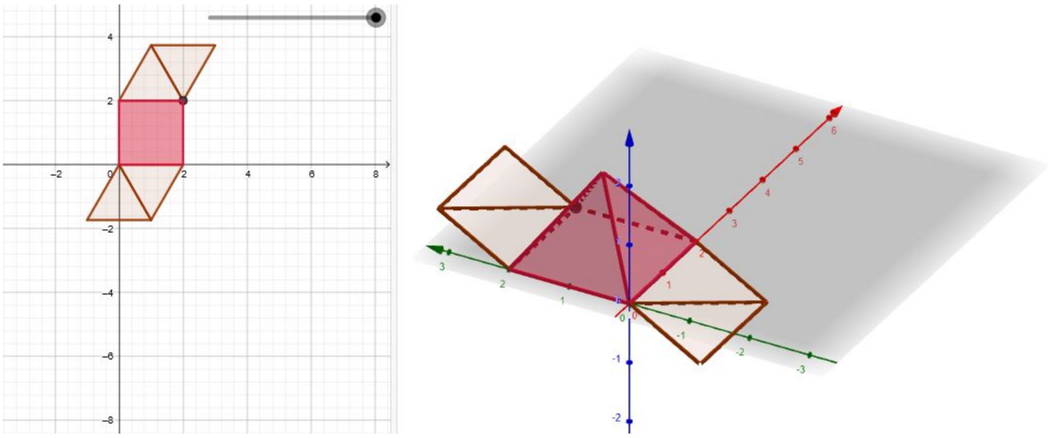


Figura 3.10: Sviluppo di una piramide a base quadrata.

mo, non credo che qualcuno pensi ci siano le linguette.
***Blu2**: ok, beh, se la figura geometrica è un'idea, allora non ha spessore, ma prima ho pensato che, poichè era un solido, aveva uno spessore e un volume.*

Al termine della discussione la classe appare abbastanza convinta del fatto che le linguette non debbano essere presenti nel disegno dello sviluppo. Si può osservare che, il dialogo collettivo, aiuta anche Blu4 (componente del gruppo 4, che aveva utilizzato le linguette nell'elaborato) a divenire consapevole che, nel descrivere lo sviluppo di un solido, le linguette non sono necessarie.

Questa fase termina proiettando sulla LIM alcune animazioni GeoGebra che mostrano diversi sviluppi della piramide a base quadrata (si vedano Figure 3.10- 3.14) e del prisma a base triangolare (si vedano Figure 3.15 e 3.16).

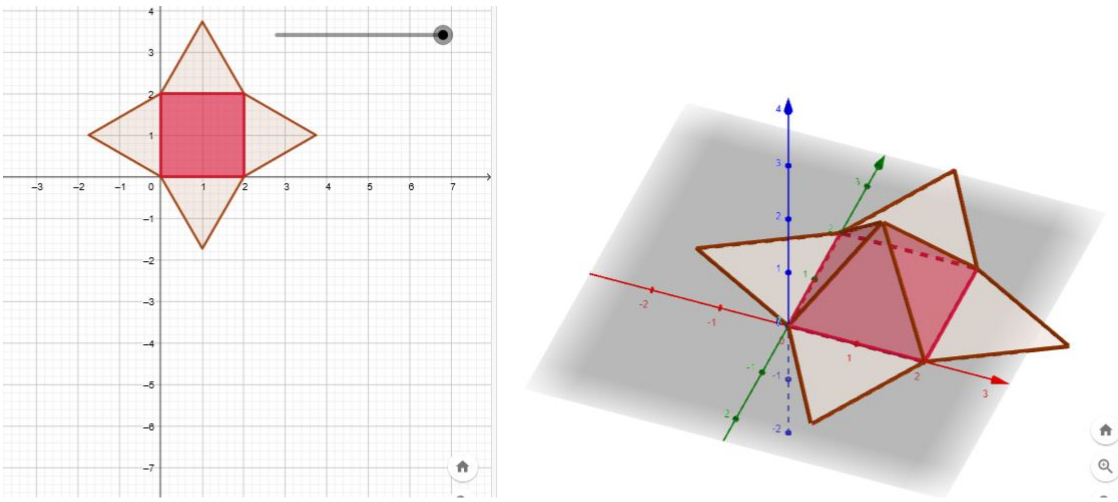


Figura 3.11: Sviluppo di una piramide a base quadrata.

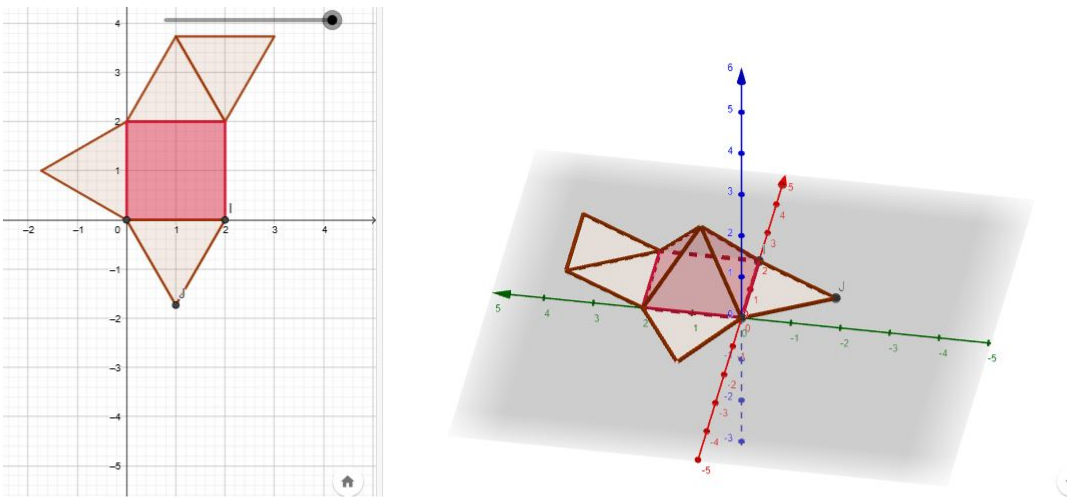


Figura 3.12: Sviluppo di una piramide a base quadrata.

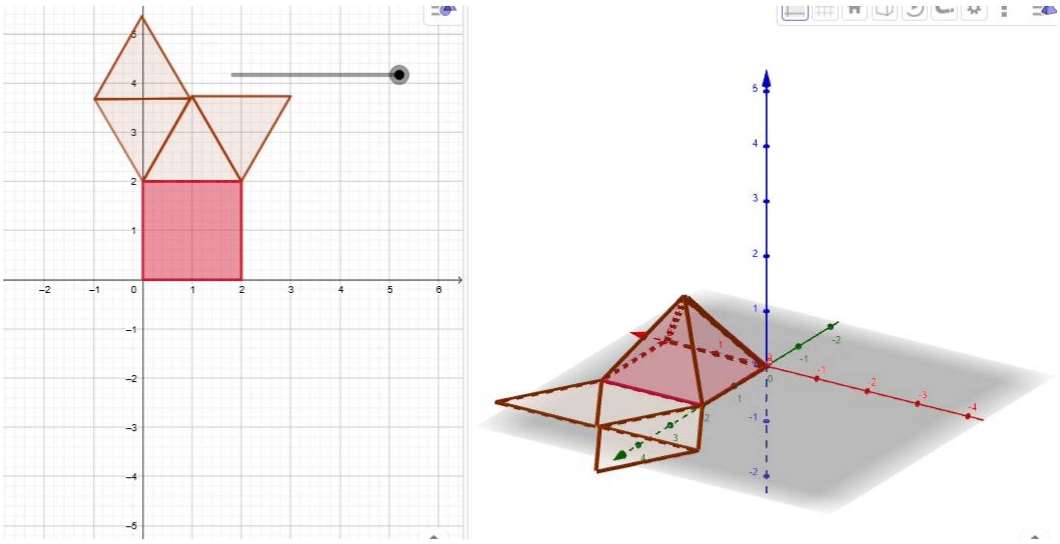


Figura 3.13: Sviluppo di una piramide a base quadrata.

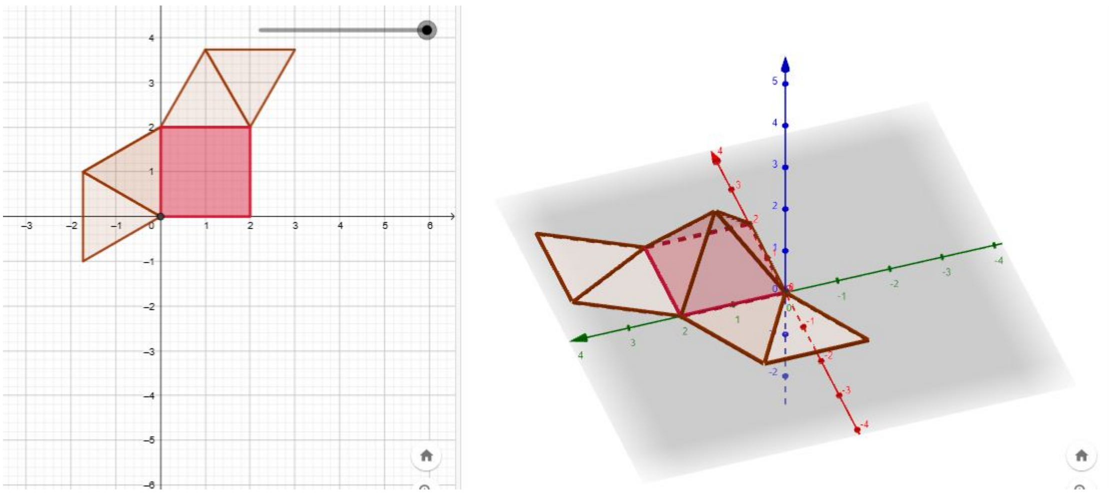


Figura 3.14: Sviluppo di una piramide a base quadrata.

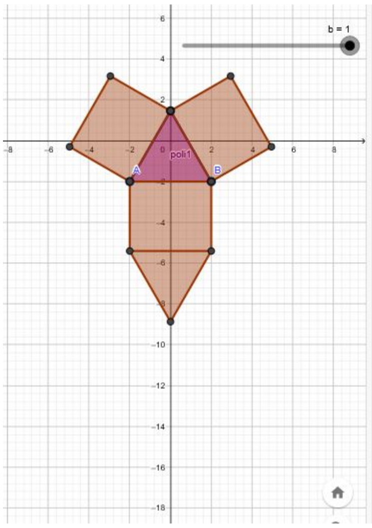
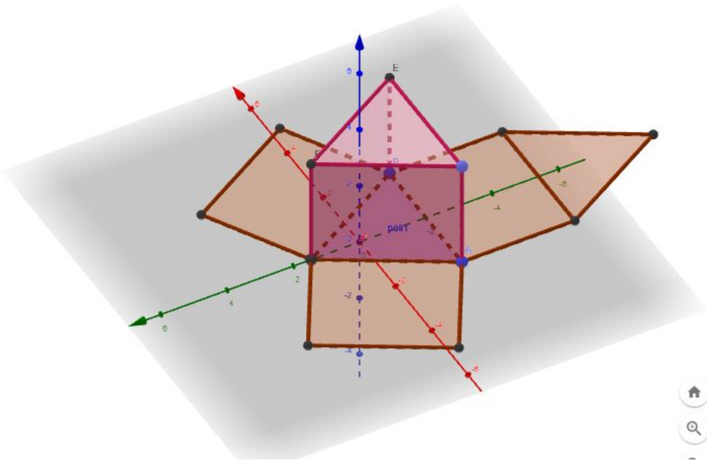
 

Figura 3.15: Sviluppo di una prisma a base triangolare.

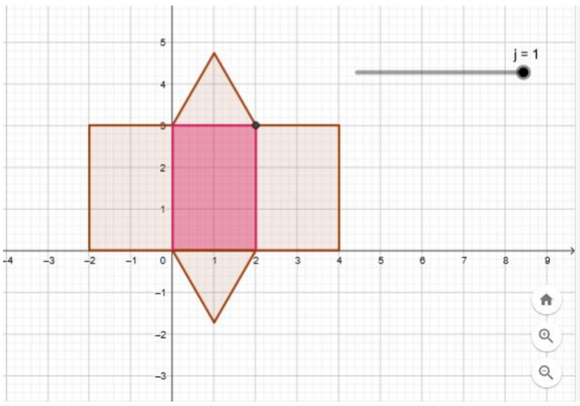
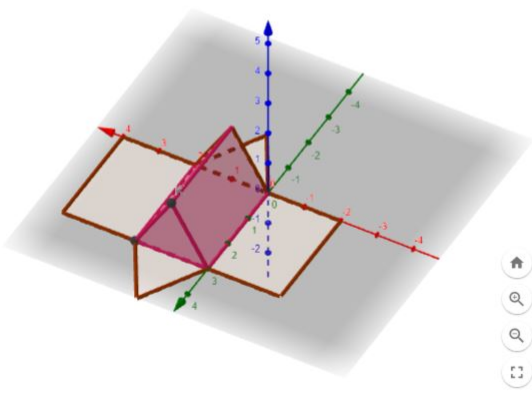
 

Figura 3.16: Sviluppo di un prisma a base triangolare.

3.5.4 Fase 4: verso la definizione di sviluppo

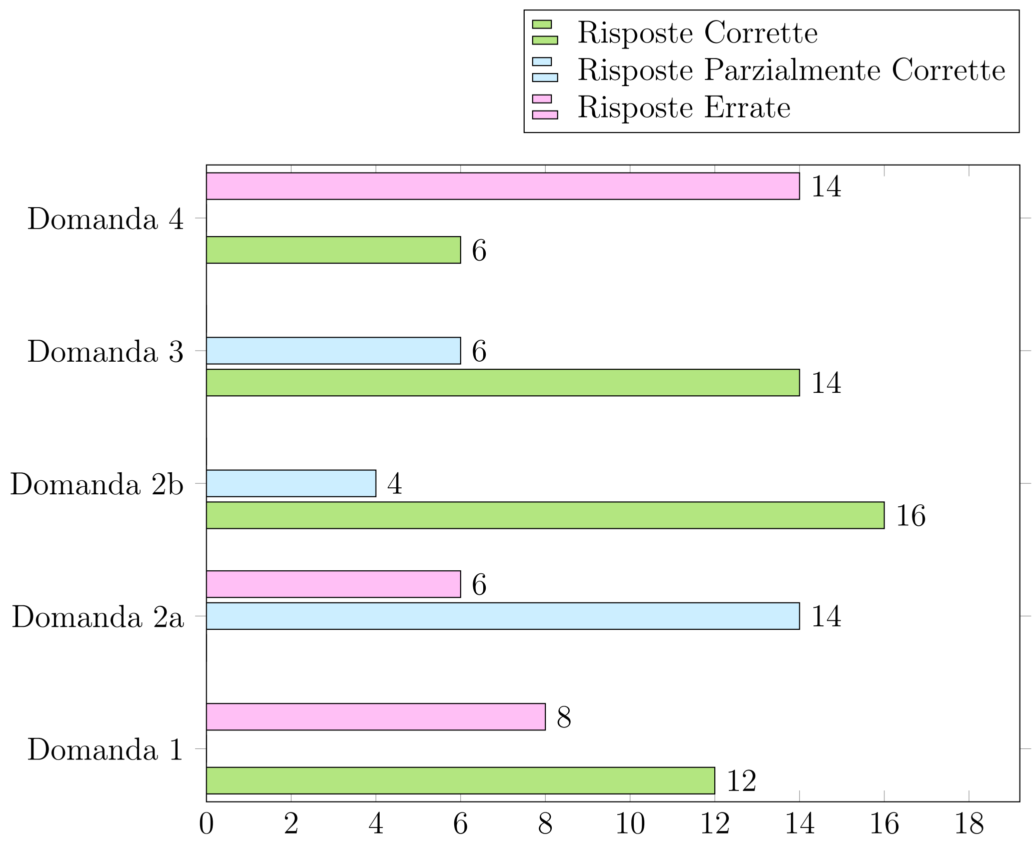
L'obiettivo finale delle discussioni che seguono l'attività individuale e collettiva è quello di giungere alla definzione di sviluppo. Analizziamo, dunque, come l'idea di sviluppo prende forma lentamente, armonizzando la componente figurale (radicata nell'operazione concreta di "aprire" il solido) e quella concettuale (che definisce le proprietà che devono essere conservate).
Gli alunni illustrano le loro strategie descrivendo delle operazioni concrete anche attraverso metafore come ad esempio "fiori che sbocciano". In particolare Rosa1 (Gruppo 5) dice: «noi avevamo la piramide a base quadrata, abbiamo immaginato di poggiarla sul banco, in piedi sulla base quadrata, e di aprirla come si aprono i petali di un fiore»; invece Giallo4 (Gruppo 3) afferma: «avevamo un prisma triangolare, non immaginavamo di staccarlo ma di tagliarlo. Tagliavamo le basi e nel fare questo veniva fuori un rettangolo».

Il confronto tra le diverse strategie applicate ai diversi solidi e l'analisi dei diversi risultati per lo stesso solido sono il primo approccio alla generalizzaione del problema di sviluppo.
Riporto un breve stralcio di una discussione collettiva.
Io: *se volessimo definire questi sviluppi elaborati da voi, cosa potremmo dire?*
Rosa3 *(Gruppo 5): sono figure piane, formate da molte figure.*
Io: *qual è la relazione tra queste figure e il solido?*
Rosa3 *(Gruppo 5): queste figure sono le facce del solido.*
Io: *quindi dato uno sviluppo possiamo capire che solido stiamo considerando?*
Classe: *si si, possiamo!*
Io: *se, per esempio guardo questo sviluppo (mostro lo sviluppo di un tetraedro) posso dire che non è un prisma?*
Giallo4 *(Gruppo 3): si, certo. Sono tutti triangoli.*

Si giunge, dunque, alla defінzione generale di sviluppo come la superficie che si ottiene riportando su un piano le facce che lo compongono.

3.6 Analisi del questionario finale

Gli alunni, come per il questionario iniziale, hanno avuto a disposizione 45 minuti per rispondere ai quesiti. Tutti e venti gli alunni hanno svolto il questionario finale. Si riporta di seguito un istogramma che mostra la distribuzione delle risposte date dagli studenti alle domande del questionario finale.



Domanda 1

Nel grafico di Figura 3.17 è rappresentata la distribuzione delle risposte date dagli studenti.

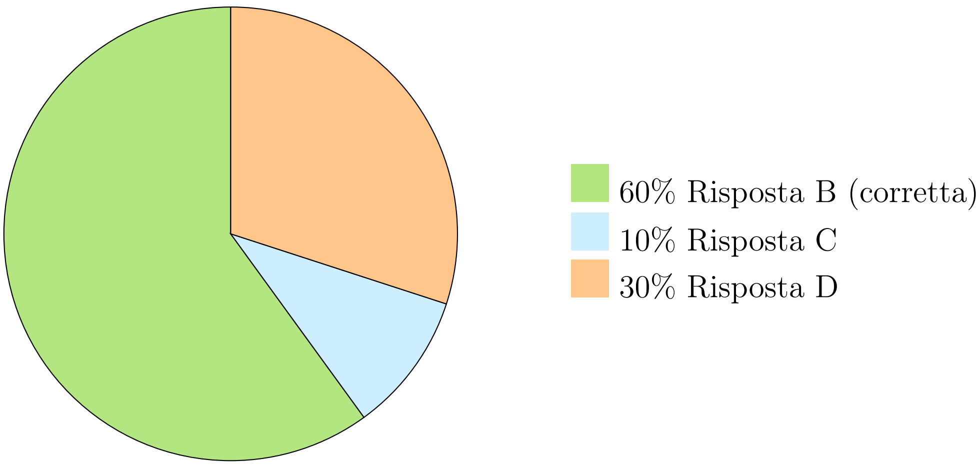
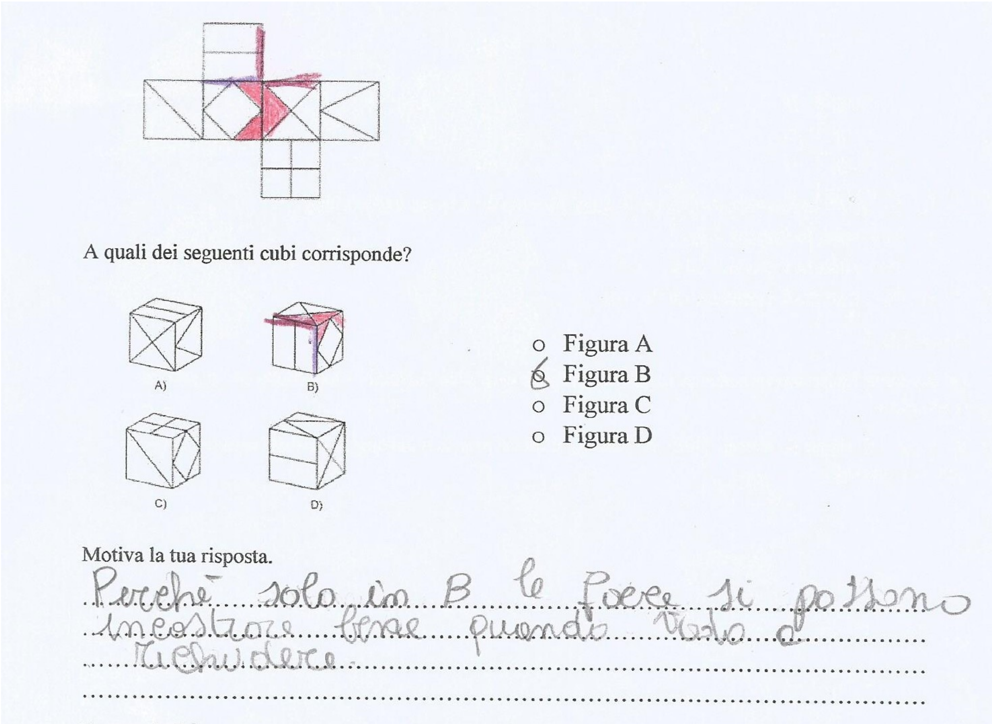


Figura 3.17

Su 20 alunni, 12 rispondono correttamente, in particolare:

- 4 allievi motivano la propria risposta spiegando la trasformazione mentale che ha permesso loro di arrivare alla soluzione e facendo riferimento all'immagine a loro disposizione con dei colori o dei segni per indicare le facce o gli spigoli. Si può considerare l'esempio sottostante.


A quali dei seguenti cubi corrisponde?

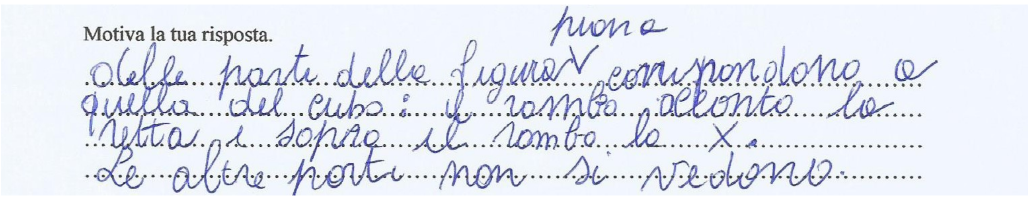
A) B) C) D)

- Figura A
- Figura B
- Figura C
- Figura D

Motiva la tua risposta.

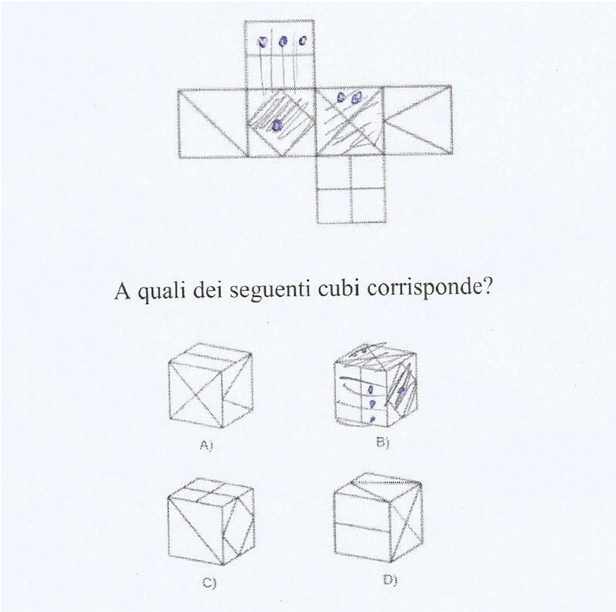
Perchè solo in B le facce si possono incastrare bene quando tutto o richiudere

- 6 alunni rispondono facendo riferimento alla corrispondenza delle figure vicine tra loro rappresentate sulle due diverse rappresentazioni del cubo, come nel seguente esempio.


Motiva la tua risposta.

delle parti delle figure piana corrispondono a quella del cubo: il rombo accanto la retta e sopra il rombo la X. Le altre parti non si vedono.

Uno di questi allievi ha anche utilizzato l'immagine per riuscire a spiegare al meglio la sua risposta:

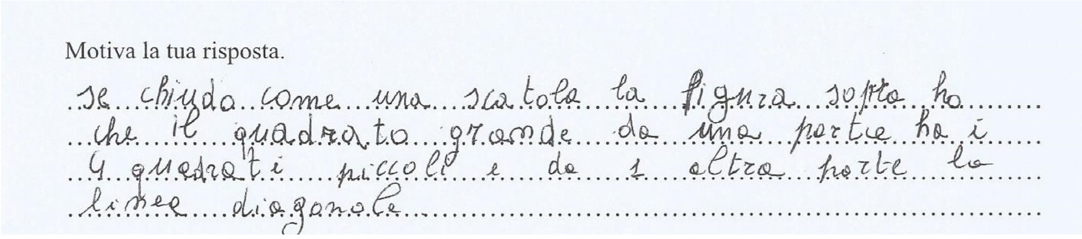


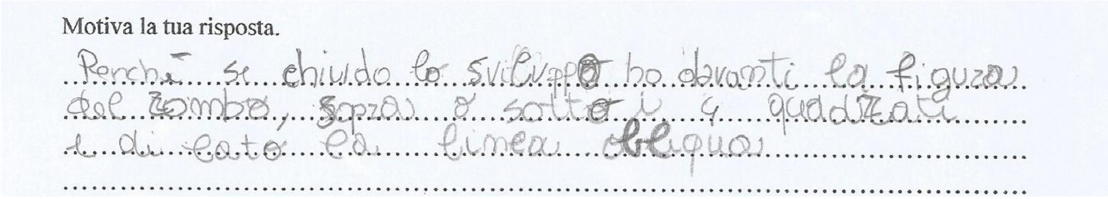
- due alunni forniscono una risposta senza motivazione.

I restanti 8 alunni rispondono in modo scorretto, in particolare:

- 6 allievi rispondono D. In questo caso gli allievi non hanno notato che il triangolo rappresentato su una delle facce del cubo, per essere corretto, doveva essere ruotato di 180 gradi. Le loro spiegazioni fanno riferimento alla trasformazione eseguita mentalmente e alla corrispondenza delle figure rappresentate sulle facce delle due diverse rappresentazioni del cubo.

- 2 allievi rispondono C. Il cubo rappresentato in questa risposta poteva ingannare, perché la faccia con rappresentata una delle sue diagonali e quella con rappresentata un quadrato con i vertici nei suoi punti medi sono posizionate in modo da poter ottenere lo sviluppo proposto, ma per essere corretto la terza faccia visibile dovrebbe essere, in questo caso, posta sotto, quindi sulla faccia ad essa parallela. Gli allievi che hanno scelto questa risposta molto probabilmente non hanno preso in considerazione questo aspetto. Anche questi allievi motivano la loro risposta spiegando l'operazione eseguita mentalmente (piegare o chiudere lo sviluppo) e richiamando la corrispondenza delle figure rappresentate sulle facce delle diverse rappresentazioni del cubo. Possiamo considerare i seguenti esempi:


Motiva la tua risposta.
se chiudo come una scatola la figura sopra ho che il quadrato grande da una parte ha i 4 quadrati piccoli e da 1 altra parte la linee diagonale


Motiva la tua risposta.
Perché se chiudo lo sviluppo ho davanti la figura del rombo, sopra o sotto i 4 quadrati e di lato la linea obliqua

In generale si osserva che gran parte degli studenti elabora una motivazione spiegando in modo esplicito l'operazione eseguita mentalmente che permette, a partire dallo sviluppo, di ottenere il cubo. I termini più utilizzati fanno riferimento a "piegare le facce", "chiudere lo sviluppo" e "tirare su le facce": si tratta delle operazioni mentali che permettono di visualizzare la trasformazione necessaria per passare dal 2D al 3D.

Domanda 2a

Nessun allievo fornisce la risposta corretta come si può osservare dal grafico in Figura 3.18.

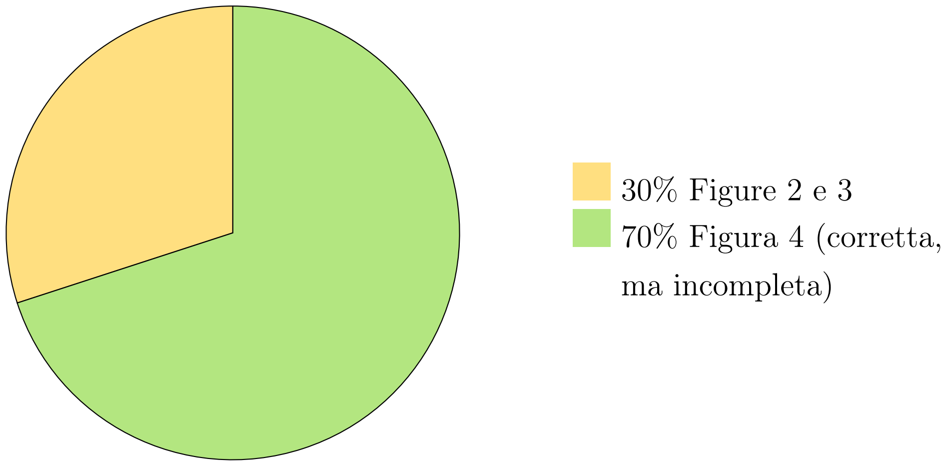


Figura 3.18

- Su 20 studenti, 6 danno come risposta figura 2 e figura 3. Dopo lo svolgimento alcuni di loro hanno riferito che, non avendo letto bene la richiesta, avevano tralasciato il “NON” indicando, al contrario, le figure che potevano rappresentare lo sviluppo del solido considerato.

- I restanti allievi danno come risposta figura 4. Da quanto ho potuto appurare durante lo svolgimento del questionario, questi alunni sono riusciti mentalmente ad “incollare” i lati dello sviluppo evidenziati nella Figura 3.19. Uno di loro ha affermato: «se richiudo questa parte dello sviluppo ottengo cinque faccie attaccate al vertice e questo non è uguale al disegno. Qui ne vedo 4».

Nessuno si accorge che neanche la figura 1 può rappresentare lo sviluppo del solido. L’operazione mentale effettuata nella quarta figura, esplicitata da alcuni alunni, potrebbe risulare per loro più complicata da applicare alla prima figura. Infatti mentre cinque triangoli della figura 4 sono disposti in modo da essere simmetrici rispetto ad una retta verticale, nella figura

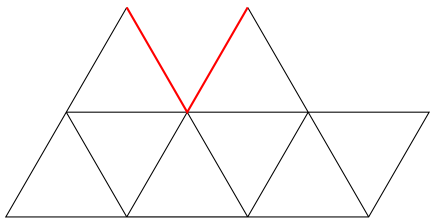


Figura 3.19: Incollando i lati evidenziati si nota che 5 triangoli sono adiacenti allo stesso vertice.

1 i cinque triangoli risultano simmetrici rispetto ad una retta obliqua, si veda la Figura 3.20. In generale, può risultare più facile visualizzare oggetti simmetrici rispetto a rette verticali e orizzontali in accordo a quanto visto nella Sezione 2.1. Alcuni ragazzi hanno dichiarato, invece, di non essersi accorti che la figura 1 era una delle risposte corrette in quanto due triangoli dello sviluppo presentano dei lati sbiaditi.

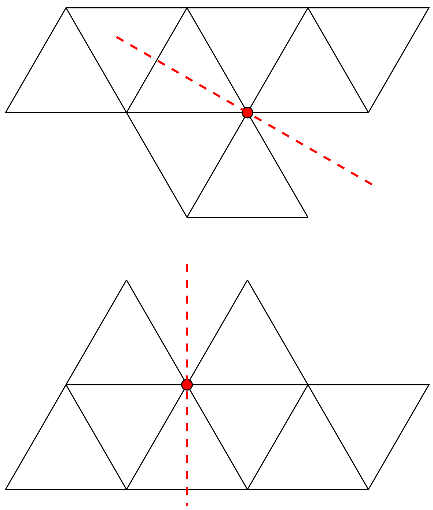


Figura 3.20: La figura 4 può risultare più semplice da richiudere a causa della sua parziale simmetria rispetto ad una retta verticale.

Domanda 2b

Si osserva un miglioramento dell'interazione tra aspetti concettuali e figurali e dell'*abilità visiva ricostruttiva*, in particolare si evince che molti studenti riescono a superare l'idea iniziale dell'esistenza di un unico sviluppo. Il grafico in Figura 3.21 riporta la distribuzione delle risposte date.

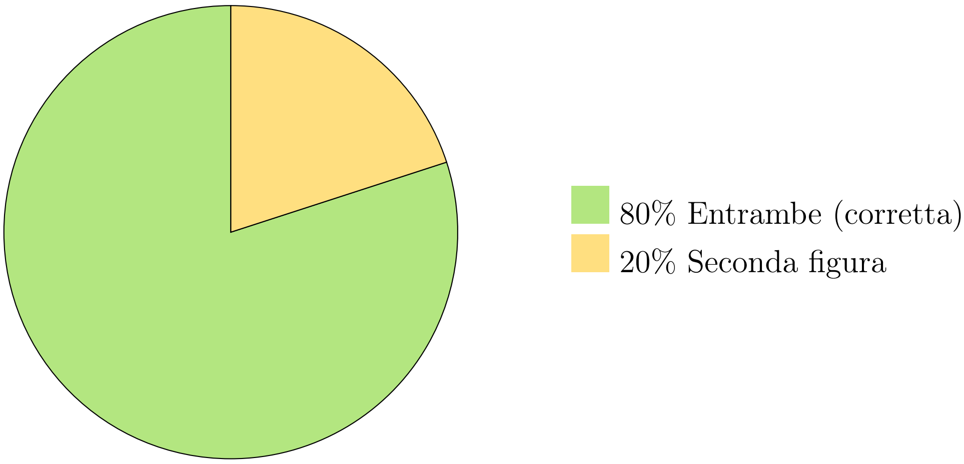


Figura 3.21

- 16 studenti su 20 rispondono correttamente che entrambi le immagini rappresentano lo sviluppo a base esagonale.

- I restanti 4 studenti sostengono che solo la seconda figura rappresenta lo sviluppo della piramide considerata. Probabilmente è più semplice visualizzare mentalmente il procedimento di chiusura della seconda figura rispetto a quello della prima che richiede più passaggi. Nella prima figura viene mostrato lo sviluppo che si ottiene tagliando tutti gli spigoli della base tranne uno, dunque solo un triangolo ha in comune un lato con la base del solido. Nella seconda immagine invece due lati opposti della base risultano essere in comune con i lati di due triangoli; ciascuno di questi ultimi ha i lati rimanenti in comune con altri due triangoli. Si formano dunque due insiemi composti da tre triangoli e la figura risulta essere simmetrica rispetto ad una retta orizzontale. Accade, dunque, qualcosa di analogo alla Domanda 2a: simmetrie orizzontali e verticali facilitano la capacità di visualizzazione.

Domanda 3

La maggioranza degli studenti non presenta difficoltà in tale domanda come si può notare dal grafico in Figura 3.22.

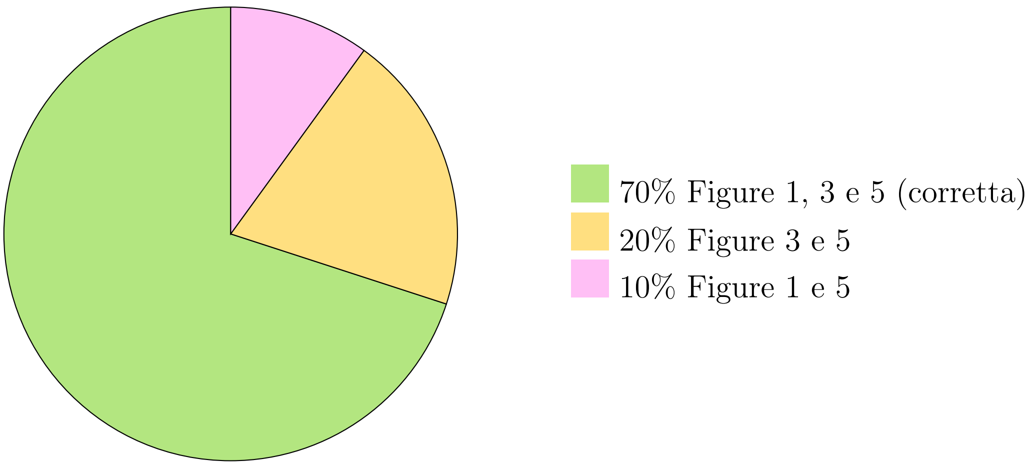


Figura 3.22

- 14 studenti su 20 rispondono correttamente contrassegnando le tre proiezioni corrette (figura 1, 3 e 5).

In generale, i restanti sette alunni individuano tutti la figura 5 come proiezioni corretta tuttavia:

- 4 non riconoscono la figura 1 come corretta.

- 2 non riconoscono la figura 3 come corretta.

Si conferma dunque l'ipotesi secondo cui le opzioni 1 e 3 risulterebbero più difficili da visualizzare. Lo studente può essere fuorviato dal fatto che, in queste due figure, non è presente un triangolo ed un'altra criticità può essere legata alla difficoltà nel visualizzare la proiezione di una faccia obliqua rispetto all'osservatore. In particolare più di uno studente, durante lo svolgimento del questionario, sostiene: «la figura 3 non credo vada bene perchè avrei dovuto avere sopra non il prisma con la base triangolare ma con base un rettangolo».

Domanda 4

La domanda si è rivelata, come previsto, abbastanza complicata per gli studenti; molti di loro, nel tentativo di rispondere, mi hanno riferito di pensare che tutte le figure fossero corrette, non riuscendo quindi a trovare un criterio per escluderne una piuttosto che un'altra. Analizzando i dati rappresentati nel diagramma della Figura 3.23 si osserva che non vi è la netta prevalenza di una risposta rispetto alle altre.

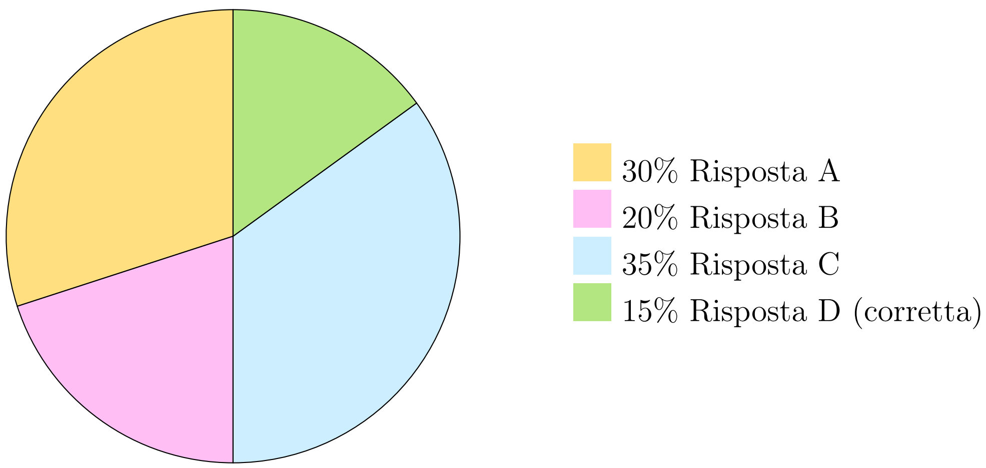


Figura 3.23

Capitolo 4

Conclusioni

Il percorso didattico effettuato ha fornito interessanti informazioni sui processi di sviluppo di alcune competenze in ambito geometrico in un campione di studenti di una seconda classe della scuola secondaria di primo grado. Nel lavoro svolto si è dapprima cercato di raccogliere informazioni sulle competenze iniziali degli allievi e su quali fossero le principali difficoltà incontrate nella visualizzazione e concettualizzazione di alcune attività concernenti figure 3D e 2D. Successivamente sono state effettuate due lezioni incentrate sul processo di definizione e sullo sviluppo dei solidi; infine è stato somministrato un questionario conclusivo per verificare gli sviluppi rispetto alla fase di partenza. Analizzando i dati raccolti dal questionario iniziale, si può osservare che la maggior parte degli studenti dimostra di avere **familiarità con il concetto di intersezione**, rispondendo correttamente alla prima domanda, tuttavia si riscontrano evidenti **difficoltà nell'elaborare strategie**. Esemplificative sono: la seconda domanda alla quale soltanto uno studente, seppur non esplicitandolo, sembra utilizzare un criterio per individuare i poligoni, e il quesito 5b. Per quest'ultimo addirittura 12 studenti non fanno accenno neanche ad un tentativo utile per individuare quante figure diverse possono

essere disegnate usando tutti e quattro i triangoli. Un'altra problematica riguarda la capacità di **motivare le proprie affermazioni e di concettualizzare le figure geometriche**. In particolare, pochi riescono a dare una risposta soddisfacente alla terza domanda, la quale richiedeva se ci fossero o meno differenze tra due immagini (che potevano essere interpretare sia come rappresentazioni di una figura bidimensionali che di una tridimensionale), dandone una motivazione. Infatti, anche tra coloro che riescono ad individuare la differenza effettiva tra i due disegni soltanto uno studente riesce ad esplicitare la duplice interpretazione per entrambe le figure.
Durante il percorso didattico gli alunni sono stati divisi in piccoli gruppi per avere l'opportunità di confrontarsi con diversi modi di ragionare e le discussioni collettive sono state orchestrate con l'obiettivo specifico di condividere opinioni, strategie, ragionamenti e punti di vista. In generale, al termine del percorso, si osserva una **maggiore capacità di concettualizzare le situazioni geometriche proposte** e un **miglioramento nella formulazione delle giustificazioni e della capacità argomentative**, che emerge non solo dall'analisi delle riflessioni collettive ma anche dal questionario conclusivo. In quest'ultimo alla prima domanda, unica a risposta aperta, tutti riescono a formulare una giustificazione coerente con l'opzione scelta, sia essa corretta o meno. Si può osservare che la maggior parte degli studenti risponde correttamente sia alla quarta domanda del questionario iniziale che alla terza di quello finale, (analoghe tra di loro), dimostrado di non avere difficoltà nell'individuare le proiezioni sul piano di un oggetto tridimensionale. Dalla risposte alla domanda 2a del quesionario finale si evince, inoltre, che gli studenti hanno difficoltà nell'individuare lo sviluppo di un solido su cui non avevano lavorato in precedenza (ottaedro) ma non hanno avuto problemi, nel quesito 2b, ad affermare che esiste più di uno sviluppo della piramide

a base esagonale. Si ricorda, invece, che durante la discussione introduttiva sul concetto di sviluppo la maggior parte della classe aveva sostenuto che ci fosse solo uno sviluppo del cubo.

Dall'analisi complessiva del percorso si può osservare che attività didattiche specifiche possono contribuire positivamente all'evoluzione del ragionamento geometrico e delle abilità visuo spaziali; tuttavia permangono delle difficoltà ed, in particolare, uno dei limiti principali di questo percorso è stato il tempo, limitato a un totale di 8 ore distribuite in quattro incontri, che non hanno consentito l'opportuno approfondimento dell'attività svolta. Lo sviluppo del ragionamento corretto richiede di vivere molte esperienze distribuite in un largo arco di tempo. Un'altra debolezza della ricerca, riguarda la formulazione di alcuni quesiti del questionario. In particolare, durante la fase di somministrazione, sono emerse delle imprecisioni nella formulazione della seconda parte della quarta domanda del questionario iniziale e nella quarta domanda del questionario finale. Tali problematiche potrebbero aver inciso sulla riuscita degli allievi, non permettendo dunque di trarre delle valide conclusioni in tali attività. Per quanto riguarda invece le conclusioni generali, date le dimensioni ridotte del campione analizzato, i risultati non permettono di fare delle generalizzazioni. Un possibile sviluppo di questa ricerca potrebbe essere quello di elaborare delle attività analoghe che comprendano anche i solidi di rotazione.

Questo lavoro di tesi è stato, per me, molto costruttivo in quanto mi ha permesso di approfondire alcuni aspetti legati alla concettualizzazione e alla visualizzazione in ambito geometrico e, in particolare, mi ha permesso di verificare quanto sia importante conoscere quali possono essere le difficoltà degli allievi in modo da poter proporre delle attività didattiche efficaci per il loro apprendimento.

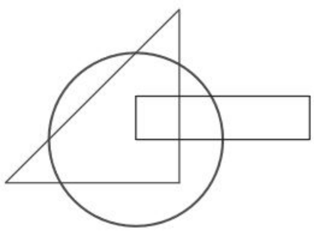
Appendice A

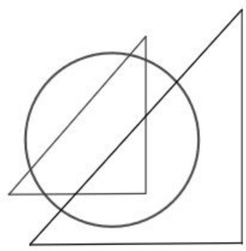
Questionari

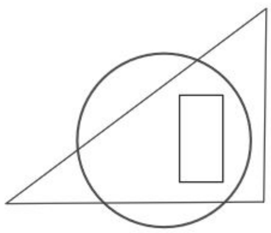
A.1 Questionario iniziale

Domanda 1

Osserva attentamente i disegni: **colora l'intersezione delle tre figure**.

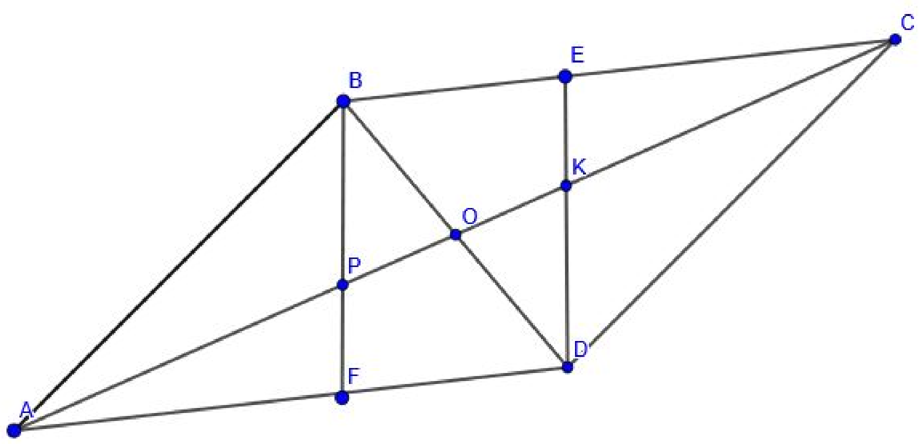






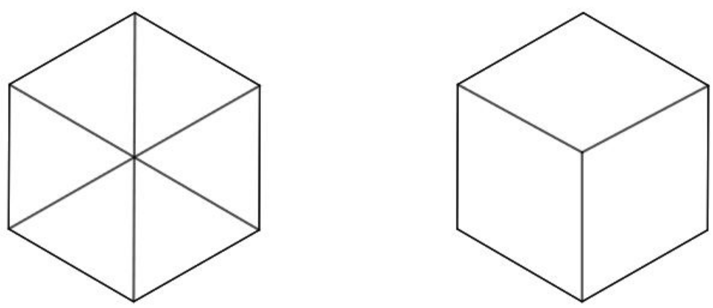
Domanda 2

Guarda la figura e vedi quanti tipi di poligoni puoi identificare e quanti di ogni tipo. È possibile ottenere diversi poligoni combinando i diversi elementi della figura. Usa le lettere dei vertici per segnare i poligoni che trovi.



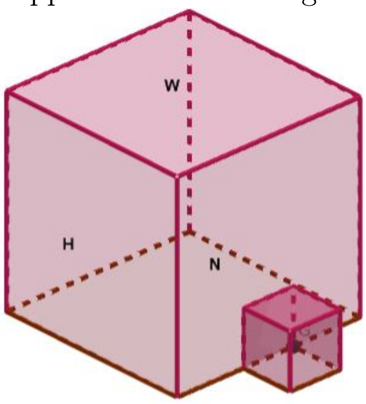
Domanda 3

Guarda la figura e prova a decidere se ci sono differenze tra il primo e il secondo disegno. Se vedi qualche differenza, prova a scriverla.

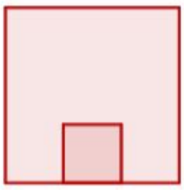


Domanda 4

L'oggetto rappresentato nel disegno è la combinazione di due cubi.

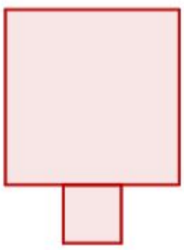


Immagina di girare intorno all'oggetto, in modo da avere la FACCIA N esattamente di fronte a te. Quali tra i disegni A, B, C, D corrisponde a quello che vedi?

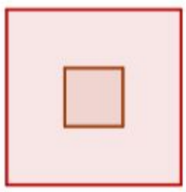


A

B



C

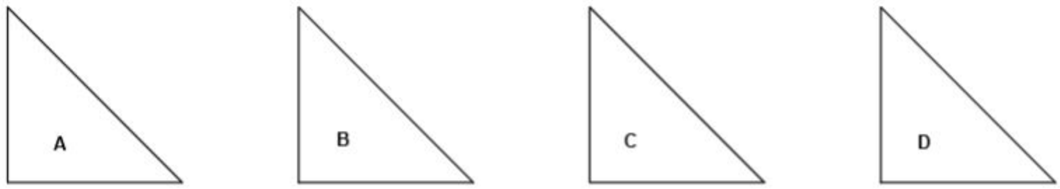


D

È sempre possibile vedere l'oggetto cosi com'è rappresentato in A, B, C, D?

Domanda 5

Di seguito sono disegnati quattro triangoli tutti uguali tra loro.

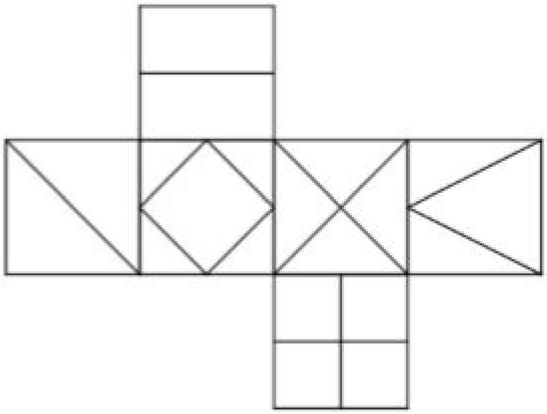


- Usandoli cerca di costruire un triangolo, un rettangolo, un trapezio e un parallelogramma che non sia né un rombo né un rettangolo. Disegna le tue soluzioni.
- Quante figure diverse possono essere disegnate usando tutti e quattro i triangoli?

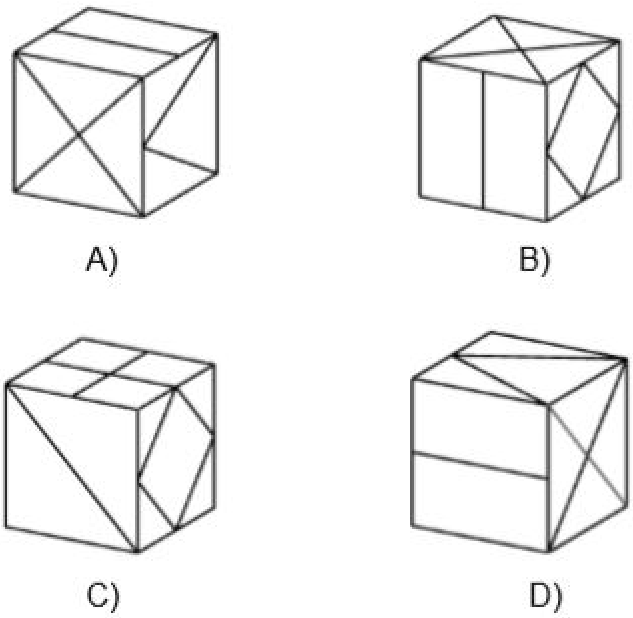
A.2 Questionario finale

Domanda 1

La figura seguente mostra lo sviluppo di un cubo.



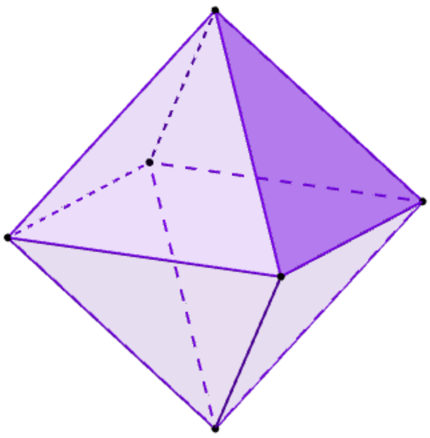
A quali dei seguenti cubi corrisponde?



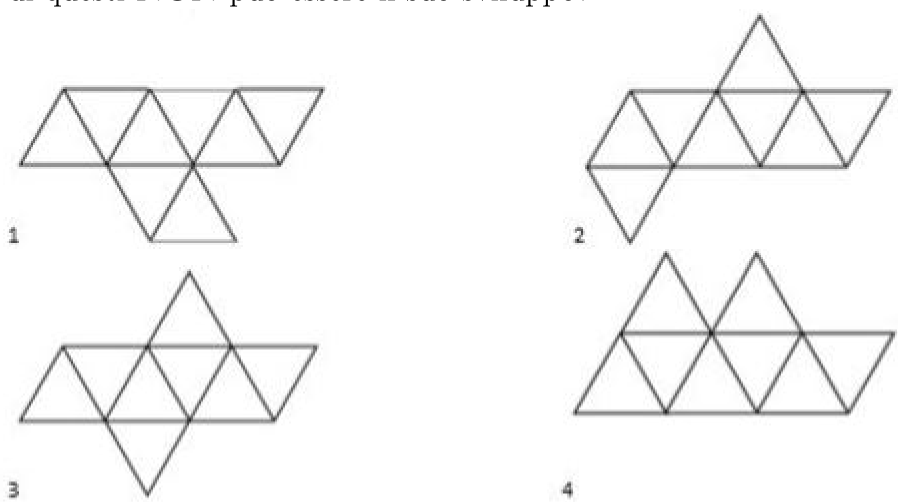
Motiva la risposta.

Domanda 2

a. La figura seguente mostra lo sviluppo di un ottaedro.

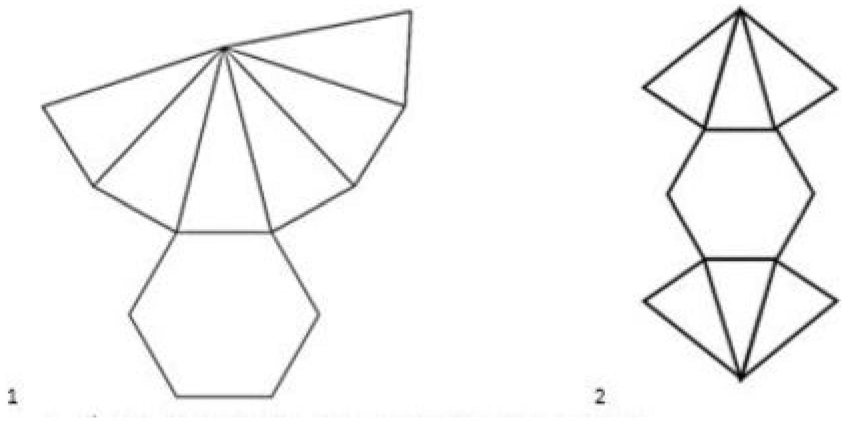


Quali di questi **NON** può essere il suo sviluppo?



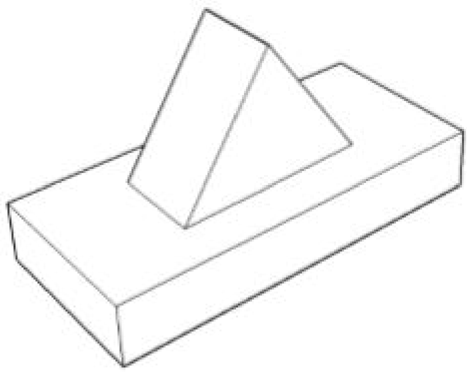
b. Le due immagini qui sotto sono entrambe lo sviluppo di una piramide a base esagonale?

Se no, una delle due lo è? Quale?

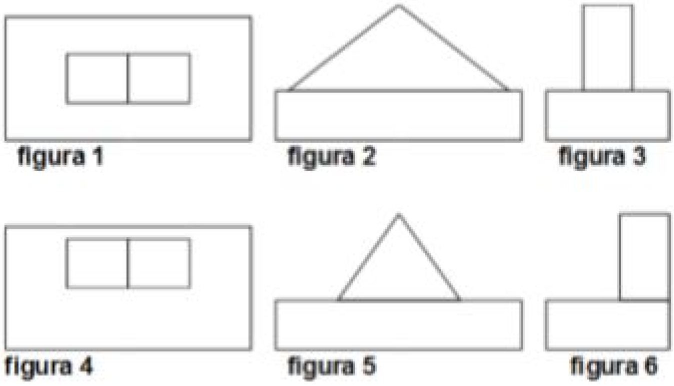


Domanda 3

La seguente figura rappresenta un solido formato da un parallelepipedo sormontato da un prisma triangolare.

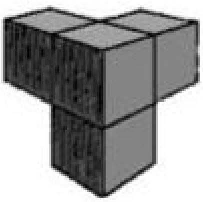


Se osservi il solido da diversi punti di vista, quali immagini potresti vedere tra le seguenti?

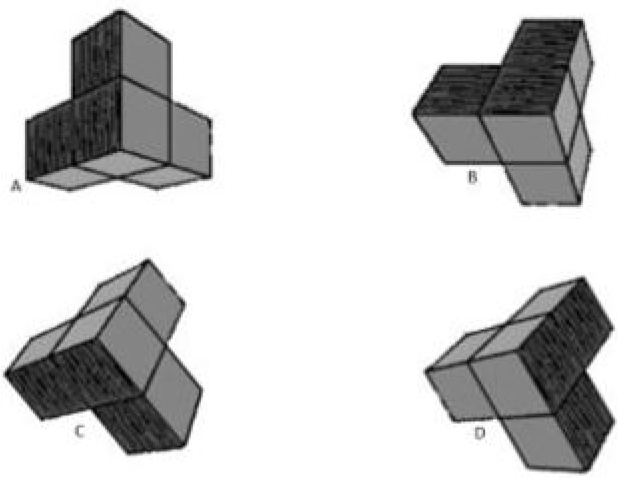


Domanda 4

Considera il solido seguente.



Quali di queste configurazioni **NON** può assumere?



Appendice B

Schede

B.1 Prima lezione: lavoro di gruppo

NOME GRUPPO:

CRITERIO:

COMPONENTI:

NOME GRUPPO:

CRITERIO:

COMPONENTI:

B.2 Seconda lezione: lavoro individuale

Il solido si sviluppa?

Se si, prova a disegnare lo sviluppo.

Se no, prova a spiegare il perchè.

B.3 Seconda lezione: lavoro di gruppo

- A quale gruppo appartiene il solido considerato?

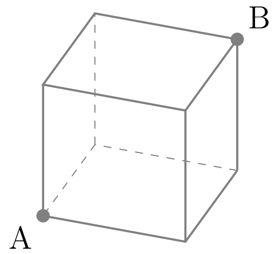
Sulla base delle risposte date singolarmente, date una risposta comune.

- Se pensate che il solido **non si sviluppi allora spiegate il perchè dando anche più motivazioni.**

- Se pensate che il solido **si sviluppi** allora disegnate gli sviluppi che vi sembrano corretti.

B.4 Terza lezione: lavoro di gruppo sui cammini minimi

1. Consideriamo il seguente cubo e due dei suoi vertici opposti, A e B, come in figura.



Una formichina vuole andare da un vertice all'altro percorrendo il cammino minimo e muovendosi solo lungo gli spigoli.
a. Disegna un percorso che potrebbe essere seguito dalla formica.
b. Quanto è lungo questo percorso?
c. Quanti di questi percorsi esistono?

2. La formica vuole camminare sulla superficie del cubo, quindi si può spostare sia sugli spigoli che sulle facce del cubo.
a. Qual è il cammino più breve che unisce A con B?
b. Quanti di questi percorsi minimi esistono?

3. La formica ora può camminare nel cubo pieno, quindi si può spostare sia sugli spigoli, sia sulle facce, sia all'interno del cubo.
a. Qual è il cammino più breve che unisce A con B?
b. Quanti di questi percorsi minimi esistono?

Appendice C

Indicazioni Nazionali per la scuola dell'infanzia e del primo ciclo

Di seguito si riporta un estratto delle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione del 2012.[1] In particolare si riporta la parte che compete al percorso didattico sviluppato nella tesi. Tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria, sono riportati in neretto quelli che sono prerequisito allo svolgimento del percorso, e tra quelli al termine della classe terza della secondaria di primo grado si riportano in neretto quelli al cui raggiungimento concorre il percorso proposto.

C.1 Matematica

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rap-

[1] Sono reperibili in modo integrale al seguente indirizzo web `http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf`

porto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall'uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. Nella scuola primaria si potrà utilizzare il gioco, che ha un ruolo cruciale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto di regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi. La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico. Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s'intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive. Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, ...) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti. L'uso consapevole e motivato di calcolatrici e del computer deve essere incoraggiato opportunamente fin dai primi anni della scuola primaria, ad esempio per verificare la correttezza di calcoli mentali e scritti e per esplorare il mondo dei numeri e delle forme. Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.

C.1.1 Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.
Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.
Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.

Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...).
Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici).
Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici.
Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza.
Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.
Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri. Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione...).
Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà.

C.1.2 Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Spazio e figure

- Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri.

- Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni (carta a quadretti, riga e compasso, squadre, software di geometria).

- Utilizzare il piano cartesiano per localizzare punti.
- **Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.**
- Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.
- Confrontare e misurare angoli utilizzando proprietà e strumenti.
- Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità.
- Riprodurre in scala una figura assegnata (utilizzando, ad esempio, la carta a quadretti).
- Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti.
- Determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule.
- **Riconoscere rappresentazioni piane di oggetti tridimensionali, identificare punti di vista diversi di uno stesso oggetto (dall'alto, di fronte, ecc.).**

C.1.3 Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado

L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, ne padroneggia le diverse rappresentazioni e stima la grandezza di un numero e

il risultato di operazioni.
Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.
Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.
Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.
Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta. Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.
Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, . . .) si orienta con valutazioni di probabilità. Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

C.1.4 Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Spazio e figure

- **Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).**
- Rappresentare punti, segmenti e figure sul piano cartesiano
- Conoscere definizioni e proprietà (angoli, assi di simmetria, diagonali, ...) delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchio).
- Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.
- Riprodurre figure e disegni geometrici in base a una descrizione e codificazione fatta da altri.
- Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata.
- Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete.
- Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli, o utilizzando le più comuni formule.
- Stimare per difetto e per eccesso l'area di una figura delimitata anche da linee curve.
- Conoscere il numero π, e alcuni modi per approssimarlo.

- Calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza, conoscendo il raggio, e viceversa.
- Conoscere e utilizzare le principali trasformazioni geometriche e i loro invarianti.
- **Rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano.**
- **Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali.**
- Calcolare l'area e il volume delle figure solide più comuni e darne stime di oggetti della vita quotidiana.

Bibliografia

[1] G. Arrigo e S. Sbaragli. Salviamo la geometria solida! In B. D'Amore e S. Sbaragli, editori, *Il grande gioco della matematica 2.* Atti del convegno di Lucca, pagine 3-17, (2004).

[2] M. T. Battista. The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, editore, *Second Handbook of Research on Mathematics,* pagine 843-908, (2007).

[3] M. A. Cardoso e M. Comoglio. *Insegnare a apprendere in gruppo. Il cooperative learning.* Ed. LAS, Roma, (1996).

[4] M. Carmel, D. Diezman e T. Louvrie. Primary students spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Aristotele University of Thessaloniki, Greece (2009).

[5] D. H. Clements e M. T. Battista. Geometry and spatial reasoning. In Grouws, editore, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pagine 420-464, (1992).

[6] B. D'Amore. *Elementi di didattica della matematica.* Pitagora, Bologna, (2000).

[7] B. D'Amore. *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica.* Pitagora, Bologna, (2003).

[8] B. D'Amore. La didattica della matematica, oggi. *La matematica e la sua didattica*, 27, pagine 18-24, (2007).

[9] B. D'Amore e R. Duval. L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. *La matematica e la sua didattica,* 27, pagine 47-67, (2019).

[10] B. D'Amore e S. Sbaragli. Analisi Semantica dell'idea di misconcezione. *La matematica e la sua didattica*, 2, pagine 139-163, (2005).

[11] M. Dedò. *Alla ricerca della geometria perduta 1.* Egea Editore, Milano, (2016).

[12] R. Duval. *Geometrical pictures: kinds of representation and specific processings. Exploiting mental imagery with computers in mathematics education.* Springer-Verlag, Berlino, (1995).

[13] R. Duval. Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt and M. Santos, editori, *Proceedings od the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, pagine 3-26, (1999).

[14] F. Enriques. *Problemi della scienza.* Zanichelli, Bologna, (1906).

[15] E. Fischbein. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, pagine 139-162, (1993).

[16] E. Fischbein e M. A. Mariotti. Defining classroom activities. *Educational studies in mathematics,* 34, pagine 217-248, (1997).

[17] R. Hershkowitz, B. Parzysz e J. Van Dormolen. Space and Shape. In A. J. Bishop et al., editori, *International Handbook of Mathematics Education*, 1, pagine 161-204, (1996).

[18] D. W. Johnson e R. Johnson. *Apprendimento cooperativo in classe. Migliorare il clima emotivo e il rendimento.* Erikson, Trento, (2016).

[19] M. A. Mariotti. *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria.* Pitagora, Bologna, (2005).

[20] M. A. Mariotti. Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico. *La matematica nella società e nella cultura,* VIII, pagine 109-142, (2015).

[21] A. L. Mesquita. The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural Topology,* 18, pagine 19-30, (1992).

[22] E. Miragliotta, A. Baccaglini-Frank e L. Tomasi. Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica (prima parte). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 40B, pagine 343-345, (2017).

[23] B. Parzysz. 'Knowing' vs 'seeing'. Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics.* 19, pagine 79-92, (1988).

[24] B. Parzysz. 'Representation of space and students' conception at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pagine 575-593, (1991).

[25] H. Poincaré. *La science et l'hypothèse.* Flammarion, Parigi, (1902).

[26] N. C. Presmeg. Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6, pagine 42-46, (1986).

[27] R. Revlin. *Psicologia cognitiva. Teoria e pratica.* Zanichelli, Bologna, (2014).

[28] E. H. Rosch. Natural Categories. *Cognitive Psychology,* 4, pagine 328-350, (1973).

[29] S. Sbaragli. Un percorso in verticale: lo spazio e le figure In *Il curricolo di Matematica dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Un'esperienza di ricerca-azione promossa dal CSA di Bologna, in collaborazione con il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, realizzata da insegnanti di scuola dell'infanzia, elementare, media e superiore,* pagine 73-120, Pitagora, Bologna, (2003).

Ringraziamenti

Quando sono arrivata a Bologna per affrontare il percorso di laurea magistrale mi ero inizialmento sentita persa, dovevo ricreare la mia vita in un luogo totalmente nuovo. Inaspettatamente, però, con grande naturalezza questo posto è diventato la mia seconda casa. Il percorso non è stato sicuramente in discesa, ci sono stati momenti in cui credevo di non farcela, di non essere all'altezza ma le persone che mi hanno circondato mi hanno dato, in modi diversi, la forza per raggiungere questa meta.

Ringrazio innanzitutto la mia relatrice, la **prof.ssa Alessia Cattabriga**, un insegnante eccezionale che ho avuto la fortuna di incontrare e che è divenuta fondamentale nel mio cammino. Mi ha seguita, per la stesura dell'elaborato, con pazienza, precisione, comprensione e disponibilità, trasmettendomi una grande passione e non facendomi mai sentire sola.

Ringrazio la **prof.ssa Ida Lanzo** che mi ha seguita durante l'attività di tirocinio a scuola e mi ha permesso di attuare, in una delle sue classi, l'attività didattica che costituisce il cuore del mio elaborato.

Ringrazio i **miei genitori**. Mamma, Papà, senza di voi non saremmo qui a festeggiare la mia laurea. Mi avete sostenuto nei momenti più difficili, avete pianto e gioito con me, mi avete dato la forza di continuare e avete creduto in me quando forse non ci credevo nemmeno io. A voi, dedico questo grande traguardo.

Grazie a mia fratello, **Giuseppe**. Mi sopporti da sempre e, anche se con poche parole, dietro le quinte, so che ci sei sempre stato.
Ringrazio i miei **amici**. Quelli vecchi e nuovi, che hanno reso questi anni indimenticabili e rimarranno sempre parte della mia vita.
Grazie a **Matira**. Volersi bene è stato subito naturale, abbiamo condiviso e stiamo condividendo, gioie e dolori. Ci siamo raccontate, confidate, riuscendo ad essere sempre l'una accanto all'altra, anche a chilometri di distanza.
Grazie ad **Irene**, **Gaia**, **Marina**, **Arianna** e **Agata**. Posso ritenermi fortunata di essere stata circondata da persone come voi. Grazie per le risate, per i pranzi, per le cene condivise e per essere state ad ascoltarmi quando ne avevo più bisogno. Grazie per essere diventate la mia seconda famiglia.
Grazie a tutti voi. A chi c'è stato ma ha preferito andare via, perchè mi ha resa più forte e consapevole di cosa voglio veramente. Grazie a chi ho incontrato per caso e a chi continua a starmi accanto, sempre.