

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

Un modello di profili recettori  
di cellule della corteccia visiva  
espresso attraverso filtri di Gabor

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
GIOVANNA CITTI

Presentata da:  
TERESA ANGELI

II Sessione  
Anno Accademico 2018-19

*A mio nonno Urbano.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>II</b>
<b>1 La corteccia visiva e i profili recettori</b>	<b>1</b>
1.1 La corteccia visiva . . . . .	1
1.2 Campo recettore e profilo recettore di una cellula . . . . .	3
1.3 Alcuni esempi di profili recettori e loro caratteristiche . . . . .	4
1.3.1 Le cellule gangliari . . . . .	4
1.3.2 Le cellule semplici . . . . .	5
1.3.3 I filtri di Gabor . . . . .	6
<b>2 Frame di uno spazio di Hilbert</b>	<b>9</b>
2.1 Prerequisiti . . . . .	9
2.2 Teoria delle frame . . . . .	10
2.3 Frame di Gabor . . . . .	15
2.3.1 Condizioni necessarie e sufficienti per una frame di Gabor	18
2.3.2 Funzione window Gaussiana . . . . .	21
<b>3 La ricostruzione dell'immagine operata dalle cellule semplici</b>	<b>22</b>
<b>Conclusioni</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>

# Introduzione

Il mio lavoro di tesi si basa sullo studio di un modello per i profili recettori di cellule semplici della corteccia visiva primaria (V1) espresso attraverso filtri di Gabor. Dopo una prima breve descrizione della struttura della corteccia visiva e del meccanismo della visione, mi sono soffermata, seguendo la presentazione di [2], sui concetti di campo recettore e profilo recettore di una cellula, che risultano centrali per la comprensione delle risposte neuronali allo stimolo visivo. Indicativamente si può pensare il campo recettore come la regione del campo visivo in cui deve presentarsi lo stimolo per eccitare o inibire il neurone; il profilo recettore è invece una funzione in grado di approssimare l'intensità dell'attività della cellula.

Mi sono quindi concentrata sull'analisi dei filtri di Gabor, particolari funzioni che ben approssimano i profili recettori di interesse. Dopo aver compreso la costruzione del modello, mi sono interrogata sulle ragioni della sua pertinenza. Il problema principale che si pone a questo punto, infatti, è quello dell'eventuale perdita di informazioni nel processo di elaborazione dell'immagine svolto dalla corteccia visiva a partire dal segnale ricevuto. Il meccanismo messo in atto dalle cellule della V1 garantisce che ciò non avvenga, in quanto, intuitivamente, si tratta di una operazione di trasformazione del segnale a cui può seguire un'anti-trasformazione in grado di ricostruire l'immagine.

Questo risultato positivo è giustificato dalla struttura matematica dei filtri di Gabor, che ho studiato nel dettaglio nel seguito, sviluppando la parte di teoria legata a questo modello, in gran parte tratta da [1]. Il concetto fondamentale in questo ambito è quello di *frame* di uno spazio di Hilbert, che risulta essere una generalizzazione del concetto di base. Se si dispone di una frame di uno spazio di Hilbert è possibile rappresentare gli elementi dello spazio come combinazione di quelli della frame con opportuni coefficienti e, in questo modo, una funzione (o un'intera immagine) può essere ricostruita a partire da tali coefficienti. Ho quindi esaminato alcune proprietà delle frame, derivando una formula di ricostruzione e concentrandomi poi in particolare sulle frame di Gabor e sulle condizioni necessarie e sufficienti che riguardano tale caso. Infine ho esplicitato la struttura della frame data dai filtri di

Gabor di interesse, mettendo in luce in modo più dettagliato il processo di ricostruzione dell'immagine che avviene in corteccia e dandone anche un esempio tratto da [4].

# Capitolo 1

## La corteccia visiva e i profili recettori

In questo primo capitolo si troverà una breve descrizione dell'apparato visivo e della corteccia visiva. Si introdurrà poi il concetto di profilo recettore, illustrandone alcuni esempi e le relative caratteristiche. Si descriveranno più nel dettaglio i filtri di Gabor, in modo da comprendere le ragioni per cui ha senso modellizzare i profili recettori di cellule semplici tramite queste particolari funzioni (si veda [2],[3] per una presentazione più dettagliata).

### 1.1 La corteccia visiva

La corteccia cerebrale è costituita da tre parti: sensitiva, motoria e associativa. Le aree sensitive sono quelle che ricevono input dai nostri cinque sensi, in particolare la corteccia visiva è l'area adibita al senso della vista e riceve informazioni dal canale visivo.

In Figura 1.1 è illustrato il sistema visivo, il cui funzionamento può essere descritto a grandi linee come segue. La luce entra nell'occhio e raggiunge la retina, la quale è formata da fotorecettori (coni e bastoncelli) che convertono la luce in segnali elettrici. Il segnale viene poi trasmesso ai neuroni retinici che ne effettuano una prima elaborazione. Tali neuroni si dispongono in diversi strati, l'ultimo dei quali coinvolge le cellule gangliari che trasmettono il messaggio nervoso al cervello attraverso gli assoni. Questi ultimi formano il nervo ottico, adibito alla trasmissione dei segnali visivi al nucleo genicolato laterale (NGL), una struttura al centro del cervello che conduce le informazioni alla corteccia visiva, sul retro della testa, dove si effettua la maggior parte del processo visivo.

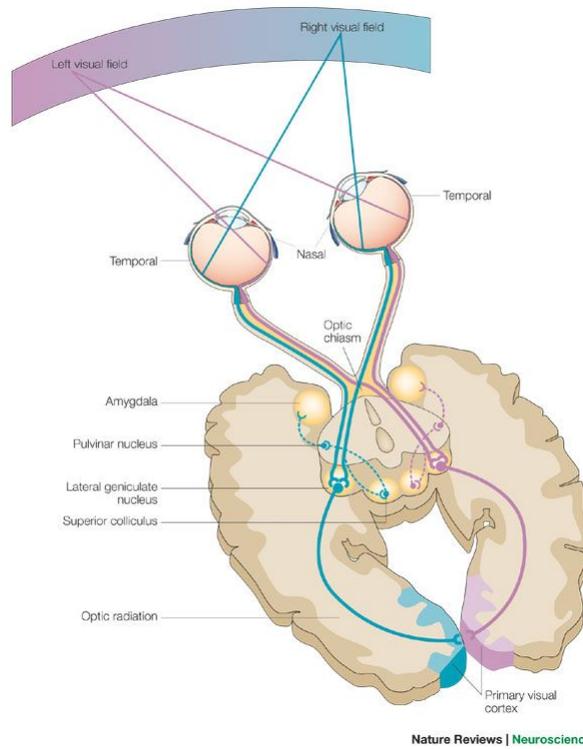


Figura 1.1: Apparato visivo

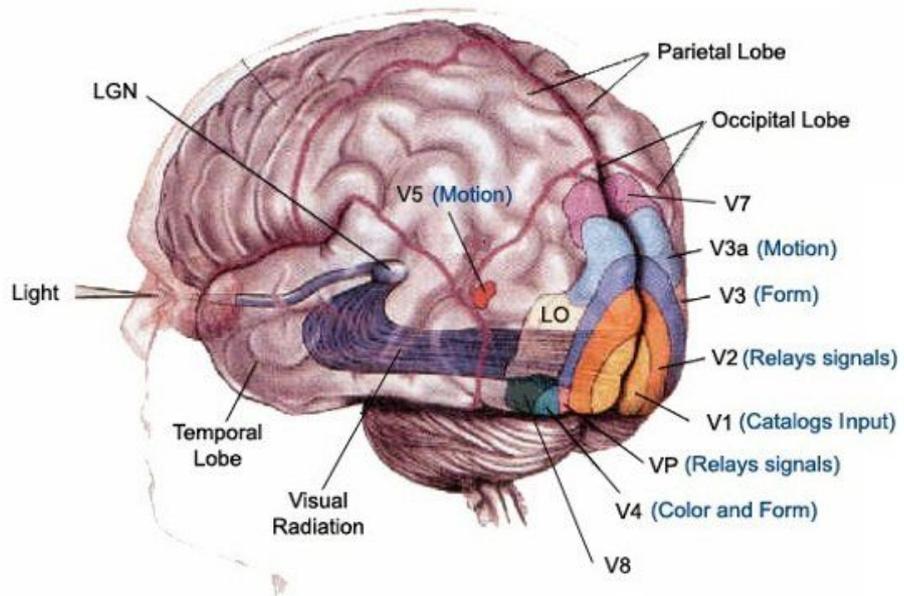


Figura 1.2: Corteccia visiva

La corteccia visiva occupa circa un quinto della corteccia ed è formata da diverse aree. La corteccia visiva primaria (V1) è la prima area a cui arriva l'output prodotto dalla retina; essa svolge un'importante funzione di elaborazione dell'immagine e presenta la capacità specifica di riconoscere bordi.

## 1.2 Campo recettore e profilo recettore di una cellula

Il campo recettore è una caratteristica comune a tutte le cellule nervose sensoriali e in particolare, nel caso dei neuroni visivi, indica quella regione del campo visivo in cui deve presentarsi lo stimolo per eccitare o inibire il neurone. Immaginando il campo visivo riflesso sulla retina, si può definire il campo recettore come l'area della retina in cui la luce provoca una risposta del neurone. Generalmente il campo recettore non è omogeneo, ma è caratterizzato da sottoregioni, chiamate aree ON e aree OFF, che rispondono in maniera opposta quando ricevono uno stimolo. La stimolazione luminosa di un'area ON provoca un aumento dell'attività elettrica della cellula, mentre uno stimolo scuro la inibisce. A seguito della stimolazione di un'area OFF, invece, si ottiene un comportamento complementare del neurone: l'assenza di luce fa aumentare la sua attività, mentre un fascio luminoso inibisce la sua risposta.

Il profilo recettore di un neurone può essere pensato come una funzione bidimensionale  $\varphi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  che assume valori positivi in corrispondenza delle aree ON e negativi in corrispondenza di quelle OFF. Si ha quindi  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ , dove il dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è il campo recettore e il vettore  $x$  rappresenta le coordinate sulla retina.

Dunque il profilo recettore agisce come un filtro sull'immagine, fornendo informazioni sulla risposta della cellula. In particolare è possibile calcolare l'output attraverso l'integrale del segnale ricevuto dal neurone in input modulato dal suo profilo recettore.

Sia  $I(x)$  il segnale ottico definito sulla retina e sia  $\varphi(x)$  il profilo recettore di un neurone definito in un dominio  $D$  centrato in 0. Il profilo centrato su ogni altro punto  $x_0$  si ottiene per traslazione:

$$\varphi_{x_0}(x) = \varphi(x - x_0). \quad (1.1)$$

La risposta  $I_\varphi(x_0)$  del neurone con profilo  $\varphi_{x_0}$ , può essere interpretata come la misura, pesata da  $\varphi_{x_0}$ , del segnale  $I$  nel punto  $x_0$ :

$$I_\varphi(x_0) = \int_D I(x') \varphi_{x_0}(x') dx' \quad (1.2)$$

Nel capitolo seguente si approfondirà l'importanza di questa operazione matematica, mostrandone il ruolo nell'ambito della elaborazione dell'immagine da parte della corteccia visiva.

## 1.3 Alcuni esempi di profili recettori e loro caratteristiche

### 1.3.1 Le cellule gangliari

Un primo semplice esempio di profilo recettore è dato dalle cellule gangliari della retina, precedentemente citate. Uno stimolo luminoso provoca effetti diametralmente opposti a seconda che si trovi al centro o alla periferia del campo recettore. Per le cellule gangliari di tipo "centro-ON" lo stimolo più efficace è rappresentato da un alone luminoso circondato da una corona circolare scura, mentre per quelle di tipo "centro-OFF" accade il contrario. Quanto appena descritto è riassunto nella tabella seguente.

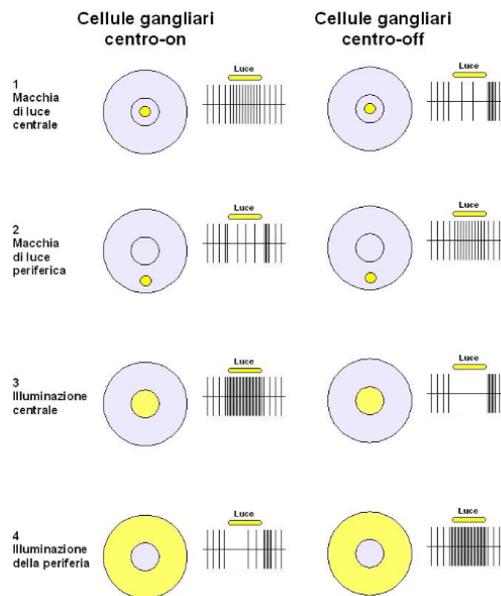


Figura 1.3: Profili recettori di cellule gangliari (l'immagine è presa da [5]).

Nel LGN i profili recettori sono molto simili a quelli appena descritti, essendo anch'essi di forma circolare con struttura concentrica delle sottoregioni ON e OFF.

### 1.3.2 Le cellule semplici

Per quanto riguarda le cellule semplici della corteccia visiva, invece, i profili recettori assumono una forma più allungata ed emerge anche l'importanza dell'orientazione spaziale dello stimolo luminoso. Ciò significa che lo stimolo migliore per attivare tali cellule sarà una linea o una barra luminosa che abbia una determinata orientazione rispetto al campo visivo. In base alle caratteristiche dei loro profili recettori, le cellule della V1 sono state suddivise in due categorie: cellule semplici e cellule complesse.

I profili recettori di cellule semplici presentano alcune zone parallele ON e OFF ben definite. Inoltre essi possono avere simmetria pari o dispari al variare della fase e sono sensibili alla frequenza spaziale dello stimolo e alla orientazione. La risposta di una cellula con profilo recettore dispari è massima quando l'asse di simmetria del profilo recettore si trova su un bordo, mentre per un profilo pari la risposta è massima quando l'asse di simmetria si trova al centro, come emerge in Figura 1.4. Infine, filtri a frequenza più alta danno risposta massima in presenza di pattern paralleli che si ripetono, come è schematicamente illustrato in Figura 1.7.

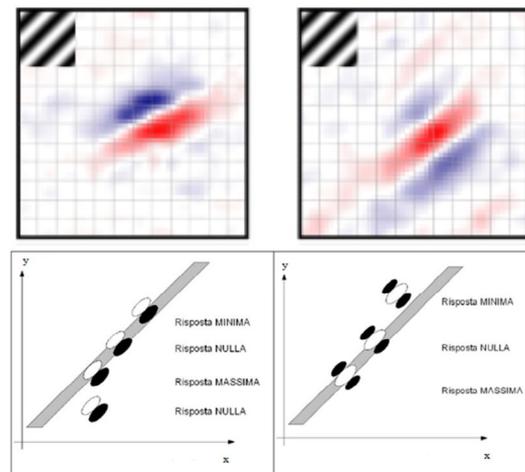


Figura 1.4: Sopra una rappresentazione di profili recettori realmente misurati di cellule pari e dispari; nel disegno sotto viene evidenziata la risposta cellulare in base alla posizione di un contorno rispetto al profilo recettore. I profili recettori dispari sono rilevatori di bordi, mentre quelli pari sono in grado di intercettare barrette orientate.

### 1.3.3 I filtri di Gabor

I profili recettori di cellule semplici della corteccia visiva primaria sono ben approssimabili con filtri di Gabor. Ciò accade perché questi ultimi presentano una forma molto simile a quella dei profili recettori e sono caratterizzati anch'essi dalla selettività all'orientazione (si veda la Figura 1.5).

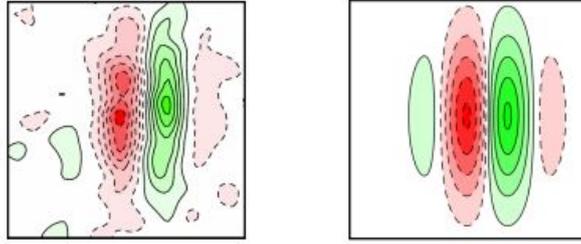


Figura 1.5: Il profilo recettore di una cellula semplice della V1. In rosso sono evidenziate le aree ON e in verde le OFF. A sinistra un vero e proprio profilo recettore appartenente a un gatto e a destra la parte immaginaria di un filtro di Gabor (le immagini sono prese da [2]).

Un filtro di Gabor è un filtro lineare ottenuto dal prodotto tra una gaussiana (qui normalizzata in norma  $L^1$ ) e un'onda piana sinusoidale. Una funzione di Gabor bidimensionale nel dominio spaziale  $x \in \mathbb{R}^2$  può essere scritta nel modo seguente:

$$G_{\sigma,\omega,\theta}(x) = e^{ir \cdot x} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$$

dove l'angolo  $\theta \in S^1$  è l'orientazione dell'asse di simmetria del filtro,  $r = (-\omega \sin \theta, \omega \cos \theta)$ ,  $\omega$  è la frequenza spaziale,  $\sigma$  è la scala. In generale questi filtri possono essere creati per infinite combinazioni di dilatazioni e rotazioni. Essendo  $G_{\sigma,\omega,\theta}$  una funzione complessa, è possibile individuarne parte reale e parte immaginaria:

$$\varphi_1(x) = \text{Re}(G_{\sigma,\omega,\theta}) = \cos(r \cdot x) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$$

$$\varphi_2(x) = \text{Im}(G_{\sigma,\omega,\theta}) = \sin(r \cdot x) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$$

Si osservi che parte reale ed immaginaria sono rispettivamente funzioni pari e dispari, dunque risultano adatte a descrivere i profili recettori di cellule semplici con simmetria pari o dispari.

Tralasciando l'aspetto della dilatazione data dalla scala, ci concentriamo su filtri di Gabor dati dalla modulazione e dalla successiva traslazione di una

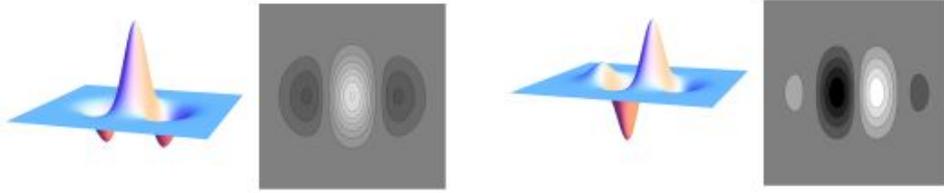


Figura 1.6: A sinistra il grafico e le curve di livello della parte reale (pari) di un filtro di Gabor; a destra invece la parte immaginaria (dispari).

funzione gaussiana, così come vengono presentati in [4]. Questi sono adatti a modellizzare i profili recettori di quelle cellule della V1 che presentano selettività alla frequenza spaziale  $\omega$ . La maggior parte dei neuroni della corteccia, infatti, risponde in modo preferenziale a un reticolo sinusoidale di particolare frequenza spaziale, posizionato in una parte appropriata del campo visivo. Possiamo quindi esprimere il filtro nella seguente forma:

$$G_{\omega,\theta}(x) = e^{-ir \cdot x} e^{-|x|^2}$$

Ricordiamo infine che, da (1.1), ogni altro filtro si ottiene da questo per traslazione:

$$G_{\omega,\theta,x_0}(x) = e^{-ir \cdot (x-x_0)} e^{-|x-x_0|^2} \quad (1.3)$$

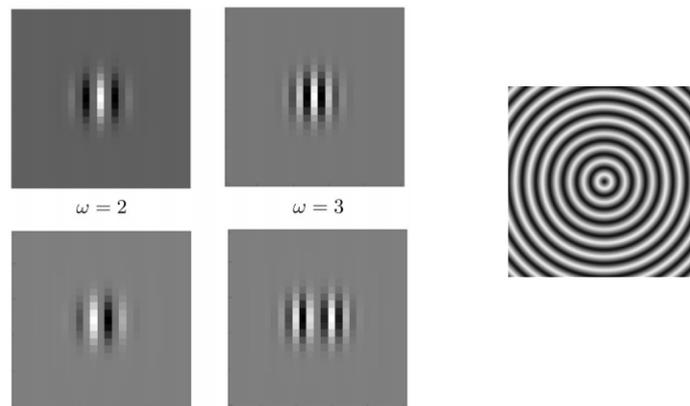


Figura 1.7: A sinistra parte reale e parte immaginaria di profili recettori a diverse frequenze  $\omega$  (l'immagine è presa da [4]). Cellule sensibili a stimoli con frequenza più alta (si veda immagine di sinistra) danno risposta massima in presenza di immagini come quella a destra.

Come sarà affrontato nel capitolo successivo, i filtri di Gabor costituiscono un buon modello per i profili recettori di cellule semplici della corteccia visiva grazie alla loro particolare struttura matematica. Il punto cruciale sarà comprendere perché tale struttura sia adatta all'elaborazione di immagini, evidenziando quali proprietà fanno sì che, a partire dal segnale, non avvenga una perdita di informazioni. Intuitivamente, dopo aver elaborato il segnale nel modo descritto e aver quindi individuato opportuni coefficienti, risulterà possibile effettuare un'operazione di anti-trasformazione che consenta di ricostruire l'immagine. Proprio grazie a questo meccanismo, all'interno della corteccia, l'elaborazione dello stimolo visivo attraverso i vari strati non dà luogo a perdita di informazioni.

# Capitolo 2

## Frame di uno spazio di Hilbert

In questo capitolo si tratteranno gli argomenti teorici legati al modello di interesse. In particolare, dopo aver introdotto alcune nozioni preliminari, si studierà il concetto di frame di uno spazio di Hilbert e si approfondirà il caso di frame di Gabor, la cui struttura consente di giustificare il loro utilizzo nell'ambito dell'elaborazione di immagini. Per un approfondimento dei contenuti qui esposti si veda [1].

### 2.1 Prerequisiti

**Definizione 2.1.1** (Spazio di Hilbert). Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale  $H$  munito di un prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

Due spazi di Hilbert che risulteranno importanti nel seguito sono:

- Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty\}$  è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

- Sia  $I \subseteq \mathbb{N}$ .  $l^2(I) = \{(x_n)_{n \in I} : \sum_{n \in I} |x_n|^2 < \infty\}$  è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n \in I} x_n \overline{y_n}.$$

**Definizione 2.1.2** (Base ortonormale). Una base ortonormale di uno spazio di Hilbert  $H$  è un sistema  $\{e_i\}_{i \in I}$  tale che  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  e  $H = \overline{\text{span}\{e_i\}_{i \in I}}$ .

In tal caso, ogni  $f \in H$  può essere scritta come

$$f = \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle e_i.$$

Vediamo alcune proprietà di operatori lineari tra spazi di Hilbert.

**Definizione 2.1.3** (Norma operatoriale). Dati  $X, Y$  spazi di Hilbert,  $T \in L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y, T \text{ lineare continuo}\}$ , poiché per un operatore lineare la continuità è equivalente alla limitatezza, è ben definita la norma

$$\|T\| = \inf \{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \forall x \in X\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

**Definizione 2.1.4** (Operatore aggiunto). Se  $A$  è un operatore lineare tra spazi di Hilbert limitato, per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un unico elemento  $w'$  tale che  $\langle Av, w \rangle = \langle v, w' \rangle$ .

L'operatore aggiunto di  $A$  è l'unico operatore  $A^*$  tale che  $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle$ . Anche  $A^*$  è un operatore limitato e vale  $\|A^*\| = \|A\|$ .

Se  $A = A^*$  si dice che  $A$  è *autoaggiunto*.

**Definizione 2.1.5** (Operatore positivo). Un operatore lineare continuo  $A$  tra spazi di Hilbert è positivo se  $\forall x \in H$

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

Indicheremo  $A \geq 0$ . Inoltre porremo  $A \geq B$  se  $A - B \geq 0$ .

Infine menzioniamo uno spazio di funzioni che verrà citato nel seguito:

**Definizione 2.1.6** ( $L^\infty$  e sup essenziale). Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \text{supess}|f| < \infty\}$$

dove si considerano equivalenti due funzioni uguali quasi ovunque. Inoltre il sup essenziale di una funzione, che è anche la sua norma in  $L^\infty$ , è definito come

$$\text{supess}|f| = \inf \{M > 0 : |f| \leq M \text{ q.o.}\} =: \|f\|_{L^\infty}.$$

## 2.2 Teoria delle frame

**Definizione 2.2.1** (Frame). Sia  $J \subseteq \mathbb{N}$  una famiglia di indici. Una famiglia di elementi  $\{f_j : j \in J\}$  in uno spazio di Hilbert  $H$  si dice una frame se esistono due costanti  $A, B$  positive tali che per ogni  $f \in H$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Tali costanti  $A, B$  sono dette *frame bounds*.

Il concetto di frame generalizza quello di base ortonormale, nel senso che, come vedremo, un elemento dello spazio può essere espresso come combinazione di elementi della frame utilizzando opportuni coefficienti. Tuttavia gli elementi di una frame in generale non sono né ortogonali né indipendenti e quindi tale rappresentazione non sarà unica.

Per approfondire questo aspetto, introduciamo gli operatori associati a una frame.

**Definizione 2.2.2** (Operatore di analisi). Sia  $\{f_j : j \in J\}$  una frame di  $H$ . L'operatore di analisi  $C : H \rightarrow l^2(J)$  è dato da

$$Cf = \{\langle f, f_j \rangle : j \in J\}.$$

**Definizione 2.2.3** (Operatore di sintesi). L'operatore di sintesi  $D$  è definito per una successione finita  $c = (c_j)_{j \in J}$  da

$$Dc = \sum_{j \in J} c_j f_j \in H.$$

**Definizione 2.2.4** (Operatore di frame). L'operatore di frame è definito su  $H$  da

$$Sf = \sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle f_j.$$

Notiamo in particolare che vale

$$\langle Sf, f \rangle = \sum_{j \in J} |\langle f, f_j \rangle|^2 \quad (2.1)$$

Esponiamo ora alcune proprietà elementari di tali operatori.

**Proposizione 2.2.1.** Sia  $\{f_j : j \in J\}$  una frame di uno spazio di Hilbert  $H$ .

1.  $C$  è un operatore limitato da  $H$  a  $l^2(J)$ .
2.  $D$  è l'operatore aggiunto di  $C$ . Di conseguenza  $D$  si estende ad un operatore limitato da  $l^2(J)$  a  $H$  e soddisfa

$$\left\| \sum_{j \in J} c_j f_j \right\| \leq B^{1/2} \|c\|_2.$$

3. L'operatore di frame  $S : H \rightarrow H$  è dato da  $S = DC = C^*C$  ed è un operatore positivo, invertibile e autoaggiunto che soddisfa

$$AI_H \leq S \leq BI_H \quad B^{-1}I_H \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_H$$

4. I frame bounds ottimali sono  $B_{opt} = \|S\|$  e  $A_{opt} = \|S^{-1}\|^{-1}$ , dove  $\|\cdot\|$  è la norma operatoriale definita in precedenza.

*Dimostrazione.* 1. Tale affermazione segue dalla definizione di frame.

2. Sia  $c = (c_j)_{j \in J}$  una successione finita. Allora vale

$$\langle C^*c, f \rangle = \langle c, Cf \rangle = \sum_{j \in J} c_j \overline{\langle f, f_j \rangle} = \left\langle \sum_{j \in J} c_j f_j, f \right\rangle = \langle Dc, f \rangle$$

Poiché  $C$  è limitato su  $H$  e ha norma  $\|C\| \leq B^{1/2}$  (dalla definizione di frame), segue che anche  $D : l^2 \rightarrow H$  è limitato con la stessa norma.

3. Si ottiene che l'operatore di frame è  $S = C^*C$  e di conseguenza autoaggiunto e positivo. Inoltre per la (2.1), la disuguaglianza  $AI_H \leq S \leq BI_H$  è semplicemente una riscrittura della disuguaglianza nella definizione di frame. Infine  $S$  è invertibile su  $H$  perché  $A$  è positiva. Le disuguaglianze vengono conservate dalla moltiplicazione con costanti positive e quindi si ha anche  $B^{-1}I_H \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_H$ .
4. Tale affermazione segue dalla disuguaglianza nella definizione di frame e dal fatto che la norma di un operatore positivo è definita da  $\|S\| = \sup \{\langle Sf, f \rangle : \|f\| \leq 1\}$ .

□

Osserviamo che dalla Proposizione 2.2.1 segue il fatto che  $\sum_{j \in J} c_j f_j$  è ben definita per un'arbitraria successione di  $l^2(J)$ , anche se gli elementi della frame non sono ortogonali in generale.

Enunciamo ora un Corollario della Proposizione precedente che permette di definire la nozione di convergenza incondizionata per una serie non ortogonale.

**Corollario 2.2.1.** *Sia  $\{f_j : j \in J\}$  una frame di  $H$ . Se  $f = \sum_{j \in J} c_j f_j$  per qualche  $c \in l_2(J)$ , allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una famiglia finita di indici  $F_0 = F_0(\varepsilon) \subseteq J$  tale che per ogni famiglia finita  $F \supseteq F_0$*

$$\|f - \sum_{j \in F} c_j f_j\| < \varepsilon.$$

*Diciamo che la serie  $\sum_{j \in J} c_j f_j$  converge incondizionatamente a  $f \in H$ .*

Come conseguenza dei risultati appena visti, otteniamo una prima formula di ricostruzione per  $f$  a partire dai coefficienti di frame  $\langle f, f_j \rangle$ . In questo contesto emerge l'importante concetto di frame duale (o coframe).

**Proposizione 2.2.2.** *Se  $\{f_j : j \in J\}$  è una frame con frame bounds  $A, B > 0$ , allora  $\{S^{-1}f_j : j \in J\}$  è una frame con frame bounds  $B^{-1}, A^{-1} > 0$ , detta **frame duale**.*

Ogni  $f \in H$  ha i seguenti sviluppi non ortogonali:

- $f = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1}f_j \rangle f_j$
- $f = \sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle S^{-1}f_j$

dove entrambe le serie convergono incondizionatamente in  $H$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto osserviamo che, poichè  $S$  è autoaggiunto e usando la (2.1),

$$\sum_{j \in J} |\langle f, S^{-1}f_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} |\langle S^{-1}f, f_j \rangle|^2 = \langle S(S^{-1}f), S^{-1}f \rangle = \langle S^{-1}f, f \rangle.$$

Segue quindi dalla Proposizione 2.2.1 che

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f \rangle = \sum_{j \in J} |\langle f, S^{-1}f_j \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2.$$

Dunque l'insieme  $\{S^{-1}f_j : j \in J\}$  è una frame con frame bounds  $B^{-1}$  e  $A^{-1}$ . Usando la fattorizzazione  $I_H = S^{-1}S = SS^{-1}$ , otteniamo lo sviluppo

$$f = S(S^{-1}f) = \sum_{j \in J} \langle S^{-1}f, f_j \rangle f_j = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1}f_j \rangle f_j$$

e

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{j \in J} \langle f, f_j \rangle S^{-1}f_j.$$

Infine, poiché  $\{\langle f, f_j \rangle\}$  e  $\{\langle f, S^{-1}f_j \rangle\}$  appartengono a  $l^2(J)$ , entrambe le serie convergono incondizionatamente per il Corollario 2.2.1.  $\square$

Vediamo alcune osservazioni riguardanti gli sviluppi in serie appena costruiti: la prima serie fornisce un'espressione di  $f$  rispetto ai vettori della frame  $f_j$  con coefficienti dati dal prodotto interno tra  $f$  e gli elementi della frame duale; mentre la seconda è una ricostruzione di  $f$  a partire dai coefficienti di frame rispetto ai vettori della frame duale. Nel caso di una base ortonormale i due sviluppi coinciderebbero, proprio perché ogni elemento dello spazio ha un'unica scrittura come combinazione di vettori della base. Invece per quanto riguarda una frame i coefficienti della prima serie  $\langle f, S^{-1}f_j \rangle$  non sono unici in generale. Essi sono però canonici nel senso seguente.

**Proposizione 2.2.3.** Se  $\{f_j : j \in J\}$  è una frame per uno spazio di Hilbert  $H$  e  $f = \sum_{j \in J} c_j f_j$  per qualche  $c = (c_j)_{j \in J} \in l^2(J)$ , allora

$$\sum_{j \in J} |c_j|^2 \geq \sum_{j \in J} |\langle f, S^{-1} f_j \rangle|^2$$

dove vale l'uguaglianza solo se  $c_j = \langle f, S^{-1} f_j \rangle$  per ogni  $j \in J$ .

*Dimostrazione.* Ponendo  $a_j = \langle f, S^{-1} f_j \rangle$  si ha  $f = \sum_{j \in J} a_j f_j$ . Allora

$$\langle f, S^{-1} f \rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle f_j, S^{-1} f \rangle = \sum_{j \in J} |a_j|^2.$$

D'altra parte

$$\langle f, S^{-1} f \rangle = \sum_{j \in J} c_j \langle f_j, S^{-1} f \rangle = \sum_{j \in J} c_j \bar{a}_j = \langle c, a \rangle.$$

Quindi  $\|a\|_2^2 = \langle c, a \rangle$  e si può concludere che

$$\begin{aligned} \|c\|_2^2 &= \|c - a + a\|_2^2 = \|c - a\|_2^2 + \|a\|_2^2 + \langle c - a, a \rangle + \langle a, c - a \rangle = \\ &= \|c - a\|_2^2 + \|a\|_2^2 \geq \|a\|_2^2 \end{aligned}$$

con uguaglianza solo se  $c = a$ . □

Notiamo che gli sviluppi visti nella Proposizione 2.2.2 richiedono che si calcoli esplicitamente la frame duale. Questo non sempre è conveniente e risulta più efficiente implementare un metodo iterativo di ricostruzione, chiamato algoritmo di frame, che qui non approfondiamo.

**Osservazione 2.2.1.** Se  $\{f_j\}$  è una frame, allora l'inverso dell'operatore di frame  $S^{-1}$  è dato da

$$S^{-1} f = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1} f_j \rangle S^{-1} f_j.$$

$S^{-1}$  è proprio l'operatore di frame rispetto alla frame duale  $\{S^{-1} f_j : j \in J\}$ .

Ciò segue dal fatto che

$$S^{-1} f = S^{-1} S (S^{-1} f) = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1} f_j \rangle S^{-1} f_j.$$

## 2.3 Frame di Gabor

In questo paragrafo ci occuperemo nello specifico di filtri di Gabor, che come abbiamo visto nel capitolo precedente, sono adatti ad approssimare la struttura di profili recettori di cellule della corteccia visiva primaria. Studieremo alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché un sistema di Gabor sia effettivamente una frame.

Esaminiamo anzitutto il concetto di trasformata di Gabor.

**Definizione 2.3.1** (Trasformata di Gabor). La trasformata di Gabor (STFT) di una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  rispetto ad una data funzione  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  (detta *window function*) è definita da

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt$$

con  $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ .

Indicando con  $T_x$  e  $M_\omega$  gli operatori rispettivamente di traslazione e modulazione così definiti:

$$T_x f(t) = f(t-x)$$

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t)$$

possiamo scrivere

$$V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle.$$

Invece di considerare tutta la STFT ci concentriamo sul caso discreto, prendendone solo un campionamento su un reticolo  $\alpha\mathbb{Z}^d \times \beta\mathbb{Z}^d$  di parametri  $\alpha, \beta > 0$ , che indicano il passo di campionamento in traslazione e modulazione. Dunque  $T_{\alpha k}$  indicherà una traslazione di vettore  $\alpha k$  con  $\alpha > 0$  e  $k \in \mathbb{Z}^d$ , mentre  $M_{\beta n}$  una modulazione di vettore  $\beta n$  con  $\beta > 0$  e  $n \in \mathbb{Z}^d$ . In questo caso avremo quindi

$$V_g f(\alpha k, \beta n) = \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle = e^{-2\pi i \alpha \beta k \cdot n} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle. \quad (2.2)$$

Definiamo allora la struttura fondamentale di cui studieremo le proprietà:

**Definizione 2.3.2** (Sistema di Gabor). Data una funzione window  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  e due parametri di reticolo  $\alpha, \beta > 0$ , un sistema di Gabor è un insieme

$$G(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g : k, n \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Nel nostro caso, come esposto nel capitolo precedente, la funzione  $g$  è una gaussiana.

Se il sistema  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per  $L^2(\mathbb{R}^d)$  (la chiameremo *frame di Gabor*), l'operatore di frame associato è

$$\begin{aligned} Sf &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g = \\ &= \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g. \end{aligned}$$

Scriviamo  $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$  o  $S_{g,g}$  quando è necessario sottolineare la dipendenza dell'operatore di frame da  $g, \alpha, \beta$ .

Osserviamo che nella definizione di operatore di frame nel caso di frame di Gabor, l'ordine di traslazione e modulazione non è importante, in quanto nell'espressione sopra il fattore  $T_{\alpha k} M_{\beta n} = e^{-2\pi i \alpha k \cdot \beta n} M_{\beta n} T_{\alpha k}$  compare sia coniugato che non coniugato e quindi si cancella.

Dunque ci interessa capire se è possibile ricostruire una funzione  $f$  a partire dai coefficienti  $\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle$ . In base ai risultati riportati precedentemente, ciò risulta fattibile se il sistema di Gabor costituisce una frame per  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , perché è in questo caso che si ottiene una formula di ricostruzione per  $f$ , grazie all'esistenza della frame duale.

Vediamo quindi un risultato che riguarda la struttura della frame duale di una frame di Gabor.

**Proposizione 2.3.1.** *Se  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora esiste una funzione window duale  $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$  tale che la frame duale di  $G(g, \alpha, \beta)$  è  $G(\gamma, \alpha, \beta)$ . Di conseguenza, ogni  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ha gli sviluppi*

$$f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g$$

con convergenza incondizionata in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Inoltre valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} A \|f\|_2^2 &\leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B \|f\|_2^2 \\ B^{-1} \|f\|_2^2 &\leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Innanzitutto mostriamo che l'operatore di frame  $S = S_{g,g}^{\alpha,\beta}$  commuta con  $T_{\alpha k}M_{\beta n}$ . Dati  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  e  $r, s \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1}ST_{\alpha r}M_{\beta s}f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha r}M_{\beta s}f, T_{\alpha k}M_{\beta n}g \rangle (T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1}T_{\alpha k}M_{\beta n}g.$$

Sapendo che  $(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1}(T_{\alpha r}M_{\beta s}) = e^{-2\pi i \alpha \beta (k-r) \cdot s} T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}$ , il fattore di fase  $e^{2\pi i \alpha \beta (k-r) \cdot s}$  si elimina dall'espressione precedente e si ottiene rinominando gli indici

$$(T_{\alpha r}M_{\beta s})^{-1}ST_{\alpha r}M_{\beta s}f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g \rangle T_{\alpha(k-r)}M_{\beta(n-s)}g = Sf.$$

Di conseguenza anche  $S^{-1}$  commuta con  $T_{\alpha k}M_{\beta n}$  e la frame duale sarà data dalle funzioni

$$S^{-1}(T_{\alpha k}M_{\beta n}g) = T_{\alpha k}M_{\beta n}S^{-1}g.$$

Dunque possiamo considerare  $\gamma = S^{-1}g$  come funzione window duale.

Gli altri risultati seguono dal Corollario 2.2.1 e dalla Proposizione 2.2.2.  $\square$

**Corollario 2.3.1.** *Se  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per  $L^2(\mathbb{R}^d)$  con window duale  $\gamma = S^{-1}g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora l'inverso dell'operatore di frame è dato da*

$$S_{g,g}^{-1}f = S_{\gamma,\gamma}f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma \rangle T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma.$$

*Dimostrazione.* La tesi segue direttamente dall'Osservazione 2.2.1 e dalla Proposizione 2.3.1.  $\square$

La Proposizione 2.3.1 fornisce quindi uno sviluppo di  $f$  a partire dai coefficienti canonici dati da  $c_{kn} = \langle f, T_{\alpha k}M_{\beta n}\gamma \rangle$ . Inoltre scrivendo la prima serie come

$$f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} \gamma$$

si ottiene una ricostruzione esplicita di  $f$ , da intendersi come una formula di inversione per la trasformata di Gabor discreta.

La funzione window duale  $\gamma$  in questo caso determina completamente l'inverso dell'operatore di frame, essendo che  $S_{g,g}^{-1} = S_{\gamma,\gamma}$  dal Corollario 2.3.1. Notiamo che una particolare window duale si ottiene risolvendo l'equazione lineare  $S\gamma^* = g$  e ci si può riferire alla sua soluzione  $\gamma^*$  parlando di *window duale canonica*.  $\gamma^*$  non è in generale l'unica window duale, così come non sono unici i coefficienti di frame.

### 2.3.1 Condizioni necessarie e sufficienti per una frame di Gabor

In questo paragrafo ci occupiamo di individuare i casi in cui  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame. Pertanto ci interessa trovare condizioni su  $g, \alpha, \beta$  per cui valga la relazione

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B\|f\|_2^2.$$

Iniziamo definendo uno spazio che rappresenta un'adeguata classe di funzioni window.

**Definizione 2.3.3** (Spazio di Wiener). Una funzione  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  appartiene allo spazio di Wiener  $W = W(\mathbb{R}^d)$  se

$$\|g\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sup_{x \in [0,1]^d} |g(x+n)| < \infty.$$

**Osservazione 2.3.1.** Lo spazio di Wiener contiene tutte le funzioni limitate a supporto compatto ed è denso in ogni  $L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Nell'ottica di dimostrare una condizione sufficiente per avere frame di Gabor, è necessario assicurarsi che gli operatori associati a  $G(g, \alpha, \beta)$  siano ben definiti. Si può provare che ciò avviene se si sceglie una funzione window  $g \in W(\mathbb{R}^d)$ ; in questo caso infatti gli operatori risultano limitati. Omettiamo qui la dimostrazione di questo risultato, che diamo per buono, e ci concentriamo sull'analisi dell'operatore di frame  $S_{g,g}$ .

Se  $g$  è la funzione window e  $\gamma$  la sua window duale, con un leggero abuso di linguaggio ci riferiamo all'operatore

$$S_{g,\gamma} f = D_\gamma C_g f = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma$$

sempre con il nome di operatore di frame. Vediamo come si può rappresentare tale operatore in un'altra forma che tornerà utile nel seguito, nota come *Rappresentazione di Walnut*.

**Definizione 2.3.4** (Funzioni di correlazione). Date  $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$  e  $\alpha, \beta > 0$ , le funzioni di correlazione della coppia  $(g, \gamma)$  sono definite

$$G_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \bar{g}\left(x - \frac{n}{\beta} - \alpha k\right) \gamma(x - \alpha k)$$

per  $n \in \mathbb{Z}^d$ .

Da questa definizione si può notare che le  $G_n$  sono periodizzazioni di  $T_{\frac{n}{\beta}} \bar{g} \gamma$

con periodo  $\alpha\mathbb{Z}^d$ .

La dipendenza da  $\alpha, \beta$  è fondamentale e viene espressa esplicitamente con la notazione  $G_n^{(\alpha, \beta)}$ .

Siano quindi  $g, \gamma \in W(\mathbb{R}^d)$  e  $\alpha, \beta > 0$ . L'operatore  $S_{g, \gamma}$  si può scrivere nella rappresentazione di Walnut come

$$S_{g, \gamma} f = \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f.$$

Dunque, abbiamo gli strumenti per esprimere una condizione sufficiente affinché  $G(g, \alpha, \beta)$  sia una frame. Una formulazione approssimativa del risultato che ci interessa può essere la seguente: "Se  $g \in W(\mathbb{R}^d)$  e  $\alpha, \beta > 0$  sono sufficientemente piccoli, allora  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ".

L'idea è che le costanti di reticolo debbano essere sufficientemente piccole da poter campionare informazioni significative sul piano tempo-frequenza. Dovremo quindi specificare quale sia il range adeguato per tali parametri affinché l'operatore di frame sia invertibile in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Ciò avviene in termini di funzioni di correlazione nella seguente Proposizione.

**Proposizione 2.3.2** (Teorema di Walnut). *Siano  $g \in W(\mathbb{R}^d)$  e  $\alpha > 0$  scelto in modo che per certe costanti  $a, b > 0$  valga*

$$a \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 \leq b < \infty \quad q.o.$$

Allora esiste un valore  $\beta_0 = \beta_0(\alpha) > 0$  tale che  $G(g, \alpha, \beta)$  sia una frame di Gabor per ogni  $\beta \leq \beta_0$ .

In particolare, se  $\beta_0 > 0$  è scelto in modo che

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha, \beta_0)}\|_\infty < \inf_{x \in \mathbb{R}^d} |G_0(x)|,$$

allora  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per ogni  $\beta \leq \beta_0$  con frame bounds

$$A = \beta^{-d} (a - \sum_{n \neq 0} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty), \quad B = \beta^{-d} \sum_{n \neq 0} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty.$$

*Dimostrazione.* Enunciamo innanzitutto un Lemma che non dimostriamo:

**Lemma 2.3.1.** *Siano  $g \in W(\mathbb{R}^d)$  e  $\alpha > 0$ . Allora*

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^d \\ n \neq 0}} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty = 0.$$

Dal Lemma segue che esiste  $\beta_0 > 0$  tale che

$$\sum_{n \neq 0} \|G_n^{(\alpha, \beta)}\|_\infty < \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(x - \alpha k)|^2 = a$$

per  $\beta \leq \beta_0$ . Usando la rappresentazione di Walnut per  $S_{g,g}$ , si ottiene per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\langle Sf, f \rangle = \beta^{-d} \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f \right\rangle = \beta^{-d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} G_0(x) |f(x)|^2 dx + \sum_{n \neq 0} \left\langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f \right\rangle \right)$$

(lo scambio tra serie e integrale è permesso dalla convergenza assoluta della serie in  $L^2$ ).

Notando che  $G_0(x) \geq a$  e  $|\langle G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f, f \rangle| \leq \|G_n\|_\infty \|T_{\frac{n}{\beta}} f\|_2 \|f\|_2 = \|G_n\|_\infty \|f\|_2^2$ , si possono stimare i frame bounds nel modo seguente: per quanto riguarda  $A$

$$\langle Sf, f \rangle \geq \beta^{-d} (a \|f\|_2^2 - \sum_{n \neq 0} \|G_n\|_\infty \|f\|_2^2) = \beta^{-d} (a - \sum_{n \neq 0} \|G_n\|_\infty) \|f\|_2^2.$$

Per costruzione  $A$  è positivo per ogni  $\beta \leq \beta_0$ . La stima di  $B$  segue invece da

$$\|Sf\|_2 \leq \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n \cdot T_{\frac{n}{\beta}} f\|_2 \leq \beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty \|T_{\frac{n}{\beta}} f\|_2 = (\beta^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \|G_n\|_\infty) \|f\|_2$$

e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.  $\square$

Analizziamo ora alcune condizioni che riguardano i parametri di reticolo  $\alpha, \beta$ . Per avere una buona localizzazione temporale e frequenziale sarà necessario che  $\alpha\beta \leq 1$ , come emerge dalla Proposizione 2.3.3 qui sotto. Infatti, si può dimostrare che, nel caso in cui  $\alpha\beta > 1$  (ossia in una situazione di *sottocampionamento*),  $G(g, \alpha, \beta)$  non può essere una frame, in quanto la funzione  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  ortogonale a tutte le funzioni di  $G(g, \alpha, \beta)$  non è la funzione nulla e quindi i coefficienti dati dai prodotti interni  $\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle$  non risultano sufficienti a determinare tale  $f$ .

Enunciamo quindi la condizione necessaria appena citata.

**Proposizione 2.3.3.** *Se  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , allora  $\alpha\beta \leq 1$ .*

*Dimostrazione.* Se  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame si può dimostrare che la funzione window duale canonica  $\gamma^*$  soddisfa  $(\alpha\beta)^{-d} \langle \gamma^*, g \rangle = 1$ .

La stessa funzione window  $g$  ha due sviluppi naturali rispetto alla frame  $G(g, \alpha, \beta)$ :

$$g = \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} \delta_{k0} \delta_{n0} T_{\alpha k} M_{\beta n} g$$

$$g = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} \langle g, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma^* \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g.$$

Dalla Proposizione 2.2.3 segue che i coefficienti  $\langle g, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma^* \rangle$  hanno norma minima in  $l^2$  tra tutti gli sviluppi di  $g$ . Quindi si ha

$$(\alpha\beta)^{2d} = |\langle g, \gamma^* \rangle|^2 \leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |\langle g, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma^* \rangle|^2 \leq \sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} (\delta_{k0} \delta_{n0})^2 = 1$$

da cui segue  $\alpha\beta \leq 1$ . □

### 2.3.2 Funzione window Gaussiana

Come appena dimostrato, la condizione  $\alpha\beta \leq 1$  è necessaria per avere una frame di Gabor. Escludendo anche il caso critico  $\alpha\beta = 1$  (che ammette l'esistenza di frame ma non sempre garantisce una buona localizzazione tempo-frequenziale), otteniamo una importante caratterizzazione nel caso in cui la funzione window sia una gaussiana in dimensione  $d = 2$ . Questo risultato è interessante per la nostra trattazione perché i filtri di Gabor descritti nel Capitolo 1 presentano proprio tale struttura: sono infatti traslazioni (in base al centro del profilo recettore) e modulazioni (date dalla moltiplicazione per l'onda sinusoidale) di una gaussiana.

**Proposizione 2.3.4.** *Sia  $g(x) = \sqrt{2}e^{-\pi|x|^2}$  una funzione window gaussiana, qui normalizzata in  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .  $G(g, \alpha, \beta)$  è una frame per  $L^2(\mathbb{R}^2)$  se e solo se  $\alpha\beta < 1$ .*

La dimostrazione di questa Proposizione, che si basa sostanzialmente sulla costruzione della opportuna window duale  $\gamma \in L^2$ , richiede conoscenze più approfondite. Si rimanda dunque a [1] per i dettagli.

## Capitolo 3

# La ricostruzione dell'immagine operata dalle cellule semplici

In quest'ultimo capitolo viene descritta esplicitamente la struttura di una frame di Gabor legata ai filtri precedentemente definiti. Viene quindi approfondito l'aspetto dell'elaborazione di una immagine da parte delle cellule semplici della corteccia visiva.

Ricordiamo l'espressione dei filtri di Gabor definiti nel Capitolo 1 (1.3) nel caso di selettività alla frequenza.

$$G_{\omega,\theta,x_0}(x) = e^{-ir \cdot (x-x_0)} e^{-|x-x_0|^2}$$

con  $r = (-\omega \sin \theta, \omega \cos \theta)$  dove  $\omega$  è la frequenza spaziale.

La gaussiana in questa espressione assume la forma della funzione window della Proposizione 2.3.4 (se normalizzata) e si può dunque ottenere una frame operando una modulazione e una traslazione e facendo un'opportuna scelta di  $\alpha, \beta$  tali che  $\alpha\beta < 1$ . Esplicitiamo la struttura di tale frame.

Notiamo anzitutto che

$$G_{\omega,\theta,x_0}(x) = T_{x_0} M_r e^{-|x|^2} = T_{x_0} M_r g(x)$$

Inoltre, come spiegato nel Capitolo 1, l'elaborazione del segnale  $I(x)$  può essere rappresentata come l'integrale tra il segnale e il filtro, espresso nella (1.2). Questo integrale corrisponde in questo caso al prodotto scalare in  $L^2$  tra il segnale e il filtro e assume quindi il ruolo di coefficiente nello sviluppo in serie. Si ha infatti:

$$I_{G_{\omega,\theta,x_0}} = \int_{\mathbb{R}^2} I(x) \overline{T_{x_0} M_r g(x)} dx$$

Possiamo ora discretizzare il modello. Ricordiamo che le notazioni  $T_{\alpha k}$  e  $M_{\beta n}$  indicano una traslazione e una modulazione nel reticolo discreto  $\alpha\mathbb{Z}^d \times \beta\mathbb{Z}^d$  su cui è campionata la trasformata di Gabor. Utilizziamo ora l'equazione (2.2), ottenendo

$$I_{G_{\omega, \theta, x_0}} = \int_{\mathbb{R}^2} I(x) \overline{T_{\alpha k} M_{\beta n} g(x)} dx = V_g I(\alpha k, \beta n) e^{2\pi i \beta n \cdot \alpha k}.$$

Come si evince dall'ultima uguaglianza, l'output corticale può essere identificato anche come la trasformata Gabor di  $I$ , a meno del fattore  $e^{2\pi i \beta n \cdot \alpha k}$ , dovuto all'ordine di modulazione e traslazione. Lo sviluppo in serie, dato dall'applicazione dell'operatore di frame allo stimolo  $I$ , risulta allora:

$$\begin{aligned} SI &= \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^2} I(x) \overline{g(x - \alpha k)} e^{-2\pi i \beta n \cdot (x - \alpha k)} dx \right) T_{\alpha k} M_{\beta n} g(x) = \\ &= \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^2} I(x) e^{-|x - \alpha k|^2} e^{-2\pi i \beta n \cdot (x - \alpha k)} dx \right) e^{2\pi i \beta n \cdot (x - \alpha k)} e^{-|x - \alpha k|^2}. \end{aligned}$$

Per  $\alpha, \beta$  tali che  $\alpha\beta < 1$  è possibile infine costruire una frame duale e ricostruire l'input  $I$  nel modo già esposto.

Nell'esempio seguente, tratto da [4], possiamo vedere un'immagine elaborata al computer attraverso filtri di Gabor. L'analisi di una immagine avviene solitamente con un banco di filtri di diverse frequenze e orientazioni per ottenere una ricostruzione completa del segnale, essendo ogni filtro specifico per un determinato valore di questi parametri.

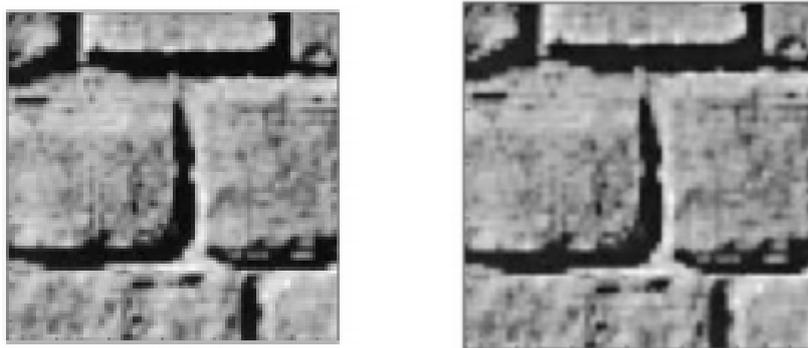


Figura 3.1: Esempio di ricostruzione di una immagine mediante filtri di Gabor. A sinistra l'immagine originale, a destra quella ricostruita (si veda [4]).

# Conclusioni

A conclusione di questo lavoro di tesi possiamo dire di aver raggiunto l'obiettivo prefissato, in quanto, attraverso l'approfondimento teorico del Capitolo 2, è stato mostrato come i filtri di Gabor possano costituire una frame in determinati casi e come sia possibile quindi elaborare il segnale senza perdita di informazioni. Grazie al concetto di frame duale, infatti, è stata costruita una formula di ricostruzione che permette, a partire dal segnale in input, una sua rappresentazione in termini di elementi della frame con opportuni coefficienti.

In effetti le cellule semplici della corteccia visiva effettuano proprio tale procedimento, il quale fa sì che a partire dal segnale visivo si possa ricostruire l'immagine dopo averla elaborata. Chiaramente questo processo in corteccia risulta più sofisticato, in quanto esistono molte diverse cellule selettive per differenti parametri, quali il colore, il movimento, l'orientazione, la frequenza, e solo alcune di queste sono state prese in esame in questo elaborato.

Pertanto, la scelta di modellizzare i profili recettori di cellule della corteccia visiva attraverso filtri di Gabor risulta adeguata, non solo per la particolare forma di queste funzioni, ma anche perché in presenza di una frame è possibile giustificare l'operazione di ricostruzione che già avviene in corteccia.

# Bibliografia

- [1] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser Boston 2001
- [2] G. Sanguinetti, *Invariant models of vision between phenomenology, image statistics and neurosciences*
- [3] J. Petitot, *Neurogéométrie de la vision*, Éditions de l'École Polytechnique, 2008
- [4] E. Baspinar, *Minimal Surfaces in Sub-Riemannian Structures and Functional Geometry of the Visual Cortex*, 2017
- [5] Wikipedia, *Apparato visivo* [https://it.wikipedia.org/wiki/Apparato\\_visivo](https://it.wikipedia.org/wiki/Apparato_visivo)