

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Un esempio di metodo diretto nel calcolo delle variazioni

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Alessandro Sforza

III Sessione
Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

Il calcolo delle variazioni si occupa della ricerca dei valori massimi e minimi e dei corrispondenti punti di massimo e di minimo di particolari applicazioni dette *funzionali*, ovvero funzioni a valori reali il cui dominio è a sua volta un insieme di funzioni, le *funzioni ammissibili*; si interessa, in particolare, di quei funzionali espressi in forma integrale dove l'integranda, detta *lagrangiana*, coinvolge una funzione incognita e le sue derivate. La ricerca di massimi e minimi è legata in maniera abbastanza immediata alle equazioni differenziali alle derivate parziali: i punti critici di un funzionale integrale risolvono (in un senso che verrà precisato di volta in volta) l'equazione non lineare di *Eulero-Lagrange*; viceversa, trovando soluzioni dell'equazione possiamo sperare di trovare massimi o minimi del funzionale. Nella trattazione ci limitiamo al problema per i minimi, seguendo una scelta abbastanza usuale senza grande perdita di generalità.

Il principale riferimento bibliografico della trattazione è [1, Cap. 8]. La trattazione è divisa in tre capitoli.

Nel primo capitolo esponiamo, nell'ambiente delle funzioni lisce a valori reali, le idee di base del calcolo delle variazioni: variazione prima, equazione di Eulero-Lagrange, variazione seconda. Elenchiamo, poi, molti interessanti problemi matematici ai quali si può dare una formulazione variazionale, alcuni noti dall'antichità, altri più recenti: quello isoperimetrico, quello della brachistocrona, quello della superficie minima e altri.

Nel secondo capitolo mostriamo dei risultati di esistenza e unicità del minimo sotto opportune (e ragionevoli) condizioni sufficienti sulla lagrangiana e

sul funzionale: la condizione di convessità nella variabile p della lagrangiana e quella di coercività servono per dimostrare la sequenziale inferiore semicontinuità del funzionale; quest'ultima sarà la proprietà decisiva che permetterà di dimostrare l'esistenza del minimo. Questa procedura è, anche storicamente, chiamata *metodo diretto* del calcolo delle variazioni; il *metodo classico*, invece, è quello che prova a risolvere l'equazione di Eulero-Lagrange. Il metodo classico tuttavia non rende possibile una teoria generale: l'equazione di Eulero-Lagrange può essere risolta solamente nei singoli casi di singoli funzionali. Per arrivare a risultati di esistenza abbiamo bisogno di "allargare" l'insieme delle funzioni ammissibili: lo spazio naturale sarà quello di Sobolev $W^{1,q}$ (con $1 < q < \infty$) munito della topologia debole.

Nel terzo capitolo si considera il caso di funzionali definiti su spazi di funzioni a valori vettoriali, ai quali corrispondono sistemi di equazioni differenziali. Lo studio delle lagrangiane nulle, ovvero di quelle che definiscono sistemi risolti da qualsiasi funzione liscia, risulta sorprendentemente di interesse; l'esempio che presentiamo di lagrangiana nulla, infatti, è l'usuale determinante di matrici quadrate e questo permette una dimostrazione analitica di un risultato topologico, il teorema del punto fisso di Brouwer: una funzione continua dalla palla unitaria in sè ha un punto fisso.

Indice

Introduzione	i
1 Idee di base e problemi variazionali	1
1.1 Variazione prima	1
1.2 Variazione seconda	3
1.3 Problemi variazionali	4
2 Esistenza dei minimi	9
2.1 Ipotesi sulla lagrangiana	9
2.2 Risultati di esistenza e unicità	14
2.3 Controesempi	16
2.4 Soluzioni deboli dell'equazione di Eulero-Lagrange	19
3 Sistemi di equazioni	23
3.1 Generalità	23
3.2 Lagrangiane nulle	24
3.3 Teorema di Brouwer	27
A Appendice	29
A.1 Topologia debole e spazi di Sobolev	29
A.2 Funzioni convesse	30
A.3 Regolarizzazione di funzioni	31
A.4 Teoria della misura	32
Bibliografia	33

Capitolo 1

Idee di base e problemi variazionali

1.1 Variazione prima

Supponiamo che U sia un aperto regolare di \mathbb{R}^n con bordo ∂U di classe C^∞ e sia $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *liscia* (infinitamente differenziabile con continuità) data. Chiamiamo la funzione L *lagrangiana*.

Scriviamo $L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n)$ con $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$ e $x \in \bar{U}$ e poniamo

$$\begin{cases} D_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}) \\ D_z L = L_z \\ D_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}). \end{cases}$$

Definiamo, poi, il funzionale

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x) dx,$$

per funzioni lisce $w : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano la condizione al bordo $w = g$ su ∂U . A volte chiamiamo questo funzionale *energia* o *funzionale energia* e le funzioni per le quali è definito *funzioni ammissibili*.

Supponiamo adesso che una particolare funzione liscia u , che soddisfa la condizione al bordo, sia un minimo di $I[\cdot]$ tra tutte le funzioni ammissibili.

Facciamo vedere che u è automaticamente la soluzione di una certa equazione differenziale alle derivate parziali.

Consideriamo una qualsiasi funzione $v \in C_c^\infty(U)$ e consideriamo la funzione a valori reali

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R}.$$

La $i(\cdot)$ è ben definita perchè $u + \tau v = u = g$ sul bordo e ha un minimo per $\tau = 0$; si ha, quindi, $i'(0) = 0$.

Calcoliamo esplicitamente la derivata di i , chiamata *variazione prima*, derivando sotto segno di integrale

$$i'(\tau) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) v_{x_i} + L_z(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) v \, dx.$$

Per $\tau = 0$

$$0 = i'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x) v_{x_i} + L_z(Du, u, x) v \, dx.$$

Integrando per parti, poiché v ha supporto compatto in U , otteniamo

$$0 = \int_U \left[- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) \right] v \, dx.$$

L'uguaglianza è valida per qualsiasi funzione test v , quindi deduciamo che u risolve

$$- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0. \quad (1.1)$$

Questa PDE non lineare è l'equazione di *Eulero-Lagrange* associata al funzionale $I[\cdot]$. L'equazione è del secondo ordine in forma di divergenza.

Abbiamo ottenuto che ogni minimo liscio di $I[\cdot]$ è soluzione di (1.1) e viceversa possiamo provare a trovare una soluzione di (1.1) cercando i minimi di $I[\cdot]$.

1.2 Variazione seconda

Calcoliamo la *variazione seconda* di $I[\cdot]$; se u è minimo di $I[\cdot]$, si ha $i''(0) \geq 0$. Per definizione di i

$$\begin{aligned} i''(\tau) &= \int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) v_{x_i} v_{x_j} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n L_{p_i z}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) v_{x_i} v \\ &\quad + L_{zz}(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) v^2 dx. \end{aligned}$$

Per $\tau = 0$, abbiamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} 0 \leq i''(0) &= \int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) v_{x_i} v_{x_j} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n L_{p_i z}(Du, u, x) v_{x_i} v + L_{zz}(Du, u, x) v^2 dx, \quad (1.2) \end{aligned}$$

per qualsiasi funzione test $v \in C_c^\infty(U)$. Con un argomento standard di approssimazione, poiché $C_c^\infty(U)$ è denso in $C(U)$, si ha che la disuguaglianza è valida per qualsiasi funzione Lipschitz uguale a 0 su ∂U . Fissiamo quindi $\xi \in \mathbb{R}^n$ e definiamo

$$v(x) := \epsilon \rho\left(\frac{x \cdot \xi}{\epsilon}\right) \zeta(x) \quad (x \in U),$$

dove $\zeta \in C_c^\infty(U)$ e $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione "zig-zag" definita su $[0, 1]$ così

$$\rho(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

e prolungata periodicamente su \mathbb{R} .

Vale $v_{x_i}(x) = \rho'\left(\frac{x \cdot \xi}{\epsilon}\right) \xi_i \zeta + O(\epsilon)$ per $\epsilon \rightarrow 0$ e sostituendo nella (1.2) otteniamo

$$0 \leq \int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) (\rho')^2 \xi_i \xi_j \zeta^2 dx + O(\epsilon);$$

ma $|\rho'| = 1$ quasi ovunque, quindi mandando ϵ a 0 si ottiene la disuguaglianza

$$0 \leq \int_U \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) \xi_i \xi_j \zeta^2 dx.$$

valida per tutte le ζ , per cui deduciamo

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in U). \quad (1.3)$$

Questa condizione necessaria contiene un suggerimento per l'ipotesi di convessità della L nella variabile p necessaria per i risultati di esistenza.

1.3 Problemi variazionali

In questa sezione presentiamo una serie di esempi di funzionali e di corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange (della forma (1.1)).

PRINCIPIO DI DIRICHLET Sia

$$L(p, x, x) = \frac{1}{2}|p|^2.$$

Si ha $L_{p_i} = p_i, L_z = 0$; otteniamo che l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale

$$I[w] := \frac{1}{2} \int_U |Dw|^2 dx$$

è l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } U.$$

Questo fatto è noto come *principio di Dirichlet*.

PRINCIPIO DI DIRICHLET GENERALIZZATO Sia

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) p_i p_j - z f(x),$$

dove $a^{ij} = a^{ji}$. Si ha $L_{p_i} = \sum_{j=1}^n p_j, L_z = -f(x)$; otteniamo che l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} w_{x_i} w_{x_j} - w f \, dx$$

è l'equazione lineare in forma di divergenza

$$- \sum_{i,j=1}^n (a^{ij} u_{x_j})_{x_i} = f \quad \text{in } U.$$

EQUAZIONE DI POISSON NON LINEARE Data una funzione liscia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $F(z) = \int_0^z f(y) \, dy$ una sua primitiva. L'equazione di Eulero-Lagrange associata al funzionale

$$I[w] := \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - F(w) \, dx$$

è l'equazione non lineare di Poisson

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } U.$$

Presentiamo adesso tre problemi classici che ammettono in maniera naturale una formulazione di tipo variazionale.

SUPERFICI MINIME CARTESIANE Sia

$$L(p, z, x) = (1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}},$$

in modo che

$$I[w] := \int_U (1 + |Dw|^2)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

sia l'area del grafico della funzione $w : U \rightarrow \mathbb{R}$. L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{u_{x_i}}{(1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_{x_i} = 0 \quad \text{in } U.$$

Questa PDE è l'equazione di *superficie minima*.

Il termine $\operatorname{div} \left(\frac{u_{x_i}}{(1 + |Du|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$ a sinistra è n volte la *curvatura media* del grafico di u , quindi una superficie minima ha curvatura media uguale a 0.

PROBLEMA DELLA BRACHISTOCRONA Formulato già da Galileo, proposto e risolto da Johann Bernoulli alla fine del XVII secolo, il problema della brachistocrona segna l'inizio della teoria analitica del calcolo delle variazioni. Si tratta di trovare la curva liscia a cui deve essere vincolato un punto materiale pesante affinché il tempo impiegato durante la caduta tra due posizioni assegnate risulti minimo.

Supponiamo che il punto materiale P di massa m parta con velocità nulla da $(0, 0)$ e debba raggiungere la posizione finale $B = (l, a)$ con $a > 0$, essendo l'asse y del sistema di riferimento discendente. Per la conservazione dell'energia, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

supponendo $y = y(x)$ la curva γ su cui si muove P . Il tempo per andare da $(0, 0)$ a B è quindi dato da

$$T = \int_{\gamma} \frac{ds}{v} = \int_0^l \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx.$$

Troviamo il problema di minimo per il funzionale

$$F(y) = \int_0^l \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx$$

dove la classe delle funzioni ammissibili è quella delle funzioni continue e derivabili in $[0, l]$ con $y(0) = 0$ e $y(l) = a$ dati agli estremi. La soluzione del problema si ottiene dalle equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti e si può far vedere che è un arco di cicloide. Per una dimostrazione completa, si veda [2][p. 8].

PROBLEMA ISOPERIMETRICO Si tratta di determinare la figura piana D in \mathbb{R}^2 con perimetro assegnato ed area massima. Per formulare analiticamente il problema supponiamo che la frontiera della figura sia una curva regolare chiusa di equazioni $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$. Sia L il

valore del perimetro assegnato, cioè imponiamo che per la lunghezza della curva valga:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (1.4)$$

Applicando la formula di Gauss-Green, otteniamo che

$$I(x, y) = \int_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt.$$

Si tratta quindi di determinare le funzioni (x, y) che massimizzano I tra le funzioni ammissibili, ovvero le coppie di funzioni C^1 che soddisfano (1.4) e tali che $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$ (la figura deve essere chiusa). La soluzione del problema è il disco, come intuitivamente si può aspettare, tuttavia le dimostrazioni rigorose (ne esistono in grande numero) non sono banali: si dimostra la disuguaglianza isoperimetrica

$$4\pi A \leq P^2 \quad (1.5)$$

(dove A è l'area della figura racchiusa e P il perimetro) e poi ovviamente si ha che il disco realizza l'uguaglianza. Per una dimostrazione della (1.5) si veda, ad esempio, [3, p. 97].

Capitolo 2

Esistenza dei minimi

2.1 Ipotesi sulla lagrangiana

Facciamo delle considerazioni di carattere euristico sulle condizioni che il funzionale

$$I[w] := \int_U L(Dw(x), w(x), x) dx,$$

definito per funzioni appropriate (dopo diamo i dettagli) $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano la condizione $w = g$ su ∂U , dovrebbe avere per ammettere un minimo.

Persino funzioni lisce da \mathbb{R} a \mathbb{R} limitate dal basso come e^x o $(1+x^2)^{-1}$ possono non ammettere minimo; questi esempi ci suggeriscono che dobbiamo poter controllare $I[\cdot]$ per "grandi" w : vogliamo che $I[w]$ vada "rapidamente" a ∞ quando $|w| \rightarrow \infty$.

Nello specifico, supponiamo che $1 < q < \infty$ sia fissato e che esistano $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ costanti tali che

$$L(p, z, x) \geq \alpha|p|^q - \beta \tag{2.1}$$

per ogni $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U$.

Si ha

$$I[w] \geq \alpha \|Dw\|_{L^q(U)}^q - \beta|U|, \tag{2.2}$$

dove

$$\|Dw\|_{L^q(U)}^q = \int_U |Dw|^q dx.$$

In questo modo, $I[w] \rightarrow \infty$ quando $\|Dw\|_{L^q(U)}^q \rightarrow \infty$.

Di solito si dice che (2.1) (o (2.2)) è una *condizione di coercività* su L (o su $I[\cdot]$).

Guardando la condizione (2.2), è ragionevole definire $I[\cdot]$ non solo per funzioni lisce, ma anche per funzioni in $W^{1,q}(U)$; del resto, più è larga la classe di funzioni sulla quale è definito il funzionale, più "candidate" ci sono per il minimo.

Indichiamo quindi con

$$\mathcal{A} := \{w \in W^{1,q}(U) | w = g \text{ su } \partial U \text{ nel senso della traccia} \}$$

la classe delle funzioni ammissibili.

Per una trattazione completa e generale degli spazi di Sobolev $W^{k,p}$, del problema della restrizione al bordo delle funzioni di $W^{k,p}$ e per la definizione di traccia, si fa riferimento a [1, cap. 5].

Anche se il funzionale soddisfa la condizione di coercività, in generale non segue che esso ammette minimo. Per capire dov'è problema poniamo

$$m := \inf\{I[w] | w \in \mathcal{A}\}$$

e scegliamo $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ successione di funzioni tale che $I[u_k] \rightarrow m$ per $k \rightarrow \infty$: $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ è una *successione minimizzante*.

Vorremmo adesso estrarre una sottosuccessione convergente a un effettivo minimo. Per fare ciò, però, abbiamo bisogno di una sorta di compattezza dello spazio infinito-dimensionale $W^{1,q}$. Usando la coercività possiamo solo concludere che la successione minimizzante è limitata in $W^{1,q}(U)$ e questo non basta per l'esistenza di una sottosuccessione convergente in $W^{1,q}(U)$.

Rivolgiamo allora la nostra attenzione alla *topologia debole* (si veda la Sezione A.1 nell'Appendice A).

Poiché $1 < q < \infty$ abbiamo che $W^{1,q}(U)$ è riflessivo e dato che la successione è limitata in $W^{1,q}$, per il Teorema A.1.1, esiste una sottosuccessione

$\{u_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ e una funzione $u \in \mathcal{A}$ tale che

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } L^q(U) \\ Du_{k_j} \rightharpoonup Du \text{ in } L^q(U, \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Abbreviamo dicendo che

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,q}(U).$$

Si fa vedere, inoltre, che si ha $u = g$ sul bordo nel senso della traccia.

Adesso sorge un'altra difficoltà: il funzionale $I[\cdot]$ non è continuo rispetto alla convergenza debole, ovvero non possiamo dedurre che

$$I[u] = \lim_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}]$$

e quindi che u è un minimo. Il problema è che $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ non implica $Du_{k_j} \rightarrow Du$ quasi dappertutto: è possibile che i gradienti Du_{k_j} , pur limitati in L^q , oscillino sempre più ampiamente quando $j \rightarrow \infty$. L'osservazione decisiva è che, tuttavia, non abbiamo bisogno dell'intera forza della continuità del funzionale, ma ci basta

$$I[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}]$$

per dire che $I[u] \leq m$, quindi $I[u] = m$ e ottenere che u è minimo.

Seguiamo questa linea di ragionamento per dimostrare il risultato di esistenza.

Definizione 2.1. Diciamo che il funzionale $I[\cdot]$ è (*sequenzialmente*) *debolmente inferiormente semicontinuo* in $W^{1,q}(U)$ se

$$I[u] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I[u_k]$$

ogni volta che

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,q}(U).$$

Cerchiamo quindi delle condizioni ragionevoli sulla lagrangiana che assicurino la sequenziale inferiore semicontinuità di $I[\cdot]$. Abbiamo visto nella Sezione 1.2, per la (1.3), che la disuguaglianza

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) \xi_i \xi_j \geq 0$$

è una condizione necessaria quando u è un minimo liscio. Questo fatto ci suggerisce che è ragionevole assumere che la lagrangiana sia convessa nella prima variabile.

Teorema 2.1.1 (Debole inferiore semicontinuità). *Sia L limitata dal basso e supponiamo che l'applicazione $p \mapsto L(p, z, x)$ sia convessa $\forall z \in \mathbb{R}, \forall x \in U$. Allora $I[\cdot]$ è debolmente inferiormente semicontinuo in $W^{1,q}(U)$.*

Dimostrazione. Sia $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ una qualsiasi successione tale che $u_k \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U)$ e sia $l := \liminf_{k \rightarrow \infty} I[u_k]$. Dobbiamo far vedere che $I[u] \leq l$. Poiché la successione è debolmente convergente, si ha che

$$\sup_k \|u_k\|_{W^{1,q}(U)} < \infty.$$

A meno di passare a una sottosuccessione, se necessario, possiamo anche supporre $l = \lim_{k \rightarrow \infty} I[u_k]$. Dal Teorema A.1.4, abbiamo che u_k converge fortemente a u in $L^q(U)$ e, quindi, a meno di passare a un'altra sottosuccessione abbiamo che $u_k \rightarrow u$ quasi ovunque in U .

Fissiamo $\epsilon > 0$. Per il Teorema A.4.3, $u_k \rightarrow u$ uniformemente su E_ϵ dove E_ϵ è un sottoinsieme misurabile di U tale che

$$|U - E_\epsilon| \leq \epsilon. \quad (2.3)$$

Adesso definiamo

$$F_\epsilon := \left\{ x \in U \mid |u(x)| + |Du(x)| \leq \frac{1}{\epsilon} \right\}.$$

Allora

$$|U - F_\epsilon| \rightarrow 0 \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Infine poniamo $G_\epsilon := E_\epsilon \cap F_\epsilon$ e da (2.3), (2.4) abbiamo che $|U - G_\epsilon| \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Osserviamo che, dal momento che L è limitata dal basso, possiamo anche supporre $L \geq 0$ (altrimenti possiamo applicare il ragionamento a $L + \beta \geq 0$).

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} I[u_k] &= \int_U L(Du_k, u_k, x) dx \geq \int_{G_\epsilon} L(Du_k, u_k, x) dx \\ &\geq \int_{G_\epsilon} L(Du, u_k, x) dx + \int_{G_\epsilon} D_p L(Du, u_k, x) \cdot (Du_k - Du) dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

in cui l'ultima disuguaglianza segue dalla convessità della L nella prima variabile (si veda la Sezione A.2).

Adesso, per come abbiamo definito G_ϵ si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G_\epsilon} L(Du, u_k, x) dx = \int_{G_\epsilon} L(Du, u, x) dx. \quad (2.6)$$

Inoltre, poiché $D_p L(Du, u_k, x) \rightarrow D_p L(Du, u, x)$ uniformemente su G_ϵ e $Du_k \rightharpoonup Du$ in $L^q(U, \mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G_\epsilon} D_p L(Du, u_k, x) \cdot (Du_k - Du) dx = 0 \quad (2.7)$$

Per (2.6) e (2.7), passando al limite in (2.5), segue che

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} I[u_k] \geq \int_{G_\epsilon} L(Du, u, x) dx.$$

Questa disuguaglianza è valida per ogni ϵ , quindi facendo tendere ϵ a 0 possiamo concludere per il Teorema (A.4.1):

$$l \geq \int_U L(Du, u, x) dx = I[u].$$

□

Osservazione 1. La dimostrazione si basa sul fatto che, per definizione, la convergenza debole $Du_k \rightharpoonup Du$ è compatibile con espressioni lineari, come il secondo integrale nell'ultimo membro della disuguaglianza (2.5). La convergenza delle u_k in L^q è più forte e quindi non abbiamo bisogno di richiedere la convessità per $z \mapsto L(p, z, x)$.

2.2 Risultati di esistenza e unicità

Possiamo finalmente far vedere che $I[\cdot]$ ammette minimo tra le funzioni di \mathcal{A} .

Teorema 2.2.1 (Esistenza del minimo). *Supponiamo che L soddisfi la condizione di coercività (2.1) e che sia convessa nella variabile p . Supponiamo inoltre che l'insieme delle funzioni ammissibili \mathcal{A} sia non vuoto. Allora esiste almeno una funzione $u \in \mathcal{A}$ che soddisfa*

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Dimostrazione. Poniamo $m := \inf_{w \in \mathcal{A}} I[w]$. Se $m := +\infty$ non abbiamo nulla da dimostrare, quindi supponiamo che m sia finito. Scegliamo una successione minimizzante $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ in modo che

$$I[u_k] \rightarrow m \tag{2.8}$$

Nella disuguaglianza (2.1) possiamo considerare $\beta = 0$, altrimenti basta ragionare su $L + \beta$. Quindi si ha $L \geq \alpha|p|^q$ e quindi

$$I[w] \geq \int_U |Dw|^q dx. \tag{2.9}$$

Poiché m è finito, da (2.8) e (2.9) segue che

$$\sup_k \|Du_k\|_{L^q(U)} < \infty. \tag{2.10}$$

Adesso sia w una qualsiasi funzione di \mathcal{A} . Dal momento che u_k e w sono uguali a g sul bordo nel senso della traccia, abbiamo $u_k - w \in W_0^{1,q}(U)$. Usiamo quindi la disuguaglianza di Poincaré (Teorema A.1.3):

$$\|u_k\|_{L^q(U)} \leq \|u_k - w\|_{L^q(U)} + \|w\|_{L^q(U)} \leq C\|Du_k - Dw\|_{L^q(U)} + C \leq C$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta a (2.10). Segue che $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ è limitata in $W^{1,q}(U)$.

Per il Teorema A.1.1, esiste una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ e una funzione

$u \in \mathcal{A}$ tale che $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,q}(U)$. Facciamo vedere che $u \in \mathcal{A}$: per $w \in \mathcal{A}$ come sopra, $u_k - w \in W_0^{1,q}(U)$ e quest'ultimo è un sottospazio chiuso di $W^{1,q}(U)$, quindi per il Teorema A.1.2 è debolmente chiuso. Abbiamo allora $u - w \in W_0^{1,q}(U)$ e quindi la traccia di u sul bordo ∂U è g .

Concludiamo: per il Teorema 2.1.1 abbiamo $I[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}] = m$, ma poiché $u \in \mathcal{A}$ segue la tesi

$$I[u] = m = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

□

Adesso ci rivolgiamo al problema dell'unicità. In generale possono esserci molti minimi, quindi abbiamo bisogno di ulteriori ipotesi per assicurare l'unicità. Supponiamo

$$L = L(p, x) \text{ non dipende da } z, \quad (2.11)$$

e che esista $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(Du, u, x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (2.12)$$

per $p, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in U$.

Teorema 2.2.2 (Unicità del minimo). *Supponiamo che L soddisfi (2.11), (2.12).*

Allora un minimo $u \in \mathcal{A}$ di $I[\cdot]$ è unico.

Dimostrazione. Siano $u, \tilde{u} \in \mathcal{A}$ entrambi minimi di $I[\cdot]$ in \mathcal{A} . Abbiamo $v := \frac{u + \tilde{u}}{2} \in \mathcal{A}$. Dall'uniforme convessità (2.12), abbiamo (si veda la Sezione A.2)

$$L(p, x) \geq L(q, x) + D_p L(q, x) \cdot (p - q) + \frac{\theta}{2} |p - q|^2 \quad (2.13)$$

per $x \in U, p, q \in \mathbb{R}^n$.

Poniamo $q = \frac{Du + D\tilde{u}}{2}, p = Du$ in (2.13) e integriamo su U :

$$\begin{aligned} I[v] + \int_U D_p L\left(\frac{Du + D\tilde{u}}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{Du - D\tilde{u}}{2}\right) dx \\ + \frac{\theta}{8} \int_U |Du - D\tilde{u}|^2 dx \leq I[u]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Poniamo analogamente $q = \frac{Du + D\tilde{u}}{2}$, $p = D\tilde{u}$ in (2.13) e integriamo su U :

$$I[v] + \int_U D_p L\left(\frac{Du + D\tilde{u}}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{D\tilde{u} - Du}{2}\right) dx + \frac{\theta}{8} \int_U |Du - D\tilde{u}|^2 dx \leq I[\tilde{u}]. \quad (2.15)$$

Sommiamo (2.14) e (2.15) e dividiamo per 2, ottenendo:

$$I[v] + \frac{\theta}{8} \int_U |Du - D\tilde{u}|^2 dx \leq \frac{I[u] + I[\tilde{u}]}{2} = I[u] = I[\tilde{u}] \quad (2.16)$$

Dal momento che $I[u] = I[\tilde{u}] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w] \leq I[v]$, da (2.16) segue $Du = D\tilde{u}$ quasi ovunque in U . Ma $u = \tilde{u} = g$ in ∂U , quindi $u = \tilde{u}$ quasi ovunque in U . \square

2.3 Controesempi

Riportiamo alcuni esempi, o meglio controesempi, tratti da [4]; essi ci segnalano la necessità delle ipotesi viste in precedenza per arrivare al risultato di esistenza.

Tutti gli esempi riportati si basano sul fatto altamente non banale che lo spazio $W^{1,1}(0,1)$ coincide con $AC(0,1)$, dove AC indica l'insieme delle funzioni assolutamente continue.

Nel Capitolo 2 avevamo assunto principalmente tre ipotesi:

1. $1 < q < \infty$,
2. coercività della lagrangiana,
3. convessità della lagrangiana nella variabile p .

Esempio 2.1. Sia $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,1}(0,1) \mid u(0) = 0, u(1) = 1\}$ e sia

$$I[u] = \int_0^1 \sqrt{u^2 + u'^2} dx.$$

Sono verificate le ipotesi 2 e 3, ma non la 1 perché qui $q = 1$. Verifichiamo che l'estremo inferiore $\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u]$ non è raggiunto.

Se $u \in \mathcal{A}$ allora

$$I[u] \geq \int_0^1 |u'| dx \geq \int_0^1 u' dx = u(1) - u(0) = 1 \quad (2.17)$$

dove la penultima uguaglianza è dovuta al fatto che u è assolutamente continua. Abbiamo, quindi, che $\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u] \geq 1$.

Consideriamo ora la successione $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ definita in questo modo:

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \\ nx - n + 1 & \text{se } 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Allora

$$I[u_n] = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{u^2 + u'^2} dx \leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{1 + n^2} dx \leq \frac{\sqrt{1 + n^2}}{n}$$

che tende a 1 per $n \rightarrow \infty$. Abbiamo quindi $\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u] = 1$.

Adesso, però, se $u \in \mathcal{A}$ dovremmo avere tutte uguaglianze in (2.17) e allora avremmo $u = 0$ quasi ovunque, contro le condizioni al bordo.

Esempio 2.2. Sia $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(0,1) | u(0) = 0, u(1) = 1\}$ e sia

$$I[u] = \int_0^1 x^2 u'(x)^2 dx.$$

Sono verificate le ipotesi 1 e 3, ma non la coercività 2. Facciamo vedere che l'estremo inferiore non viene raggiunto.

Ovviamente $\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u] \geq 0$. Consideriamo la successione $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ definita in questo modo:

$$u_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Otteniamo

$$I[u_n] = \int_0^{\frac{1}{n}} x^2 n^2 dx = \frac{1}{3n} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Abbiamo quindi $\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u] = 0$. Ma $I[u] = 0$ implica $u' = 0$ quasi ovunque e quindi $u = \text{costante}$ (perché $u \in AC$), che non è compatibile col dato al bordo.

Esempio 2.3. Sia $\mathcal{A} = \{u \in W^{1,2}(0,1) \mid u(0) = u(1) = 0\}$ e sia

$$I[u] = \int_0^1 |u'^2 - 1| + u^2 dx.$$

Sono verificate le ipotesi 1 e 2, ma non la 3, perché $p \mapsto |p^2 - 1|$ non è convessa. Facciamo vedere che l'estremo inferiore non viene raggiunto.

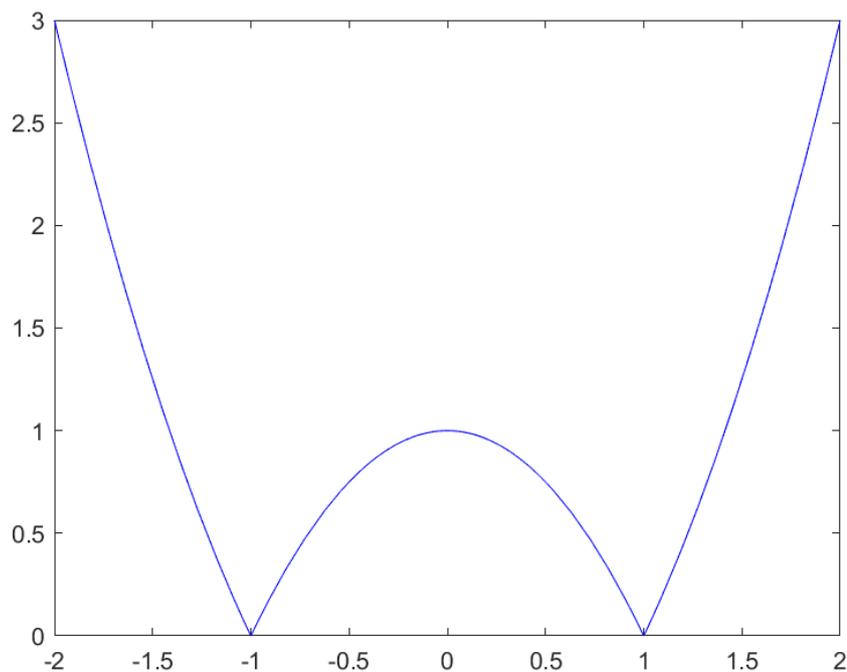


Figura 2.1: grafico di $|p^2 - 1|$

Consideriamo la successione $\{u_n\}_{n=2}^\infty \subset \mathcal{A}$ fatta in questo modo:

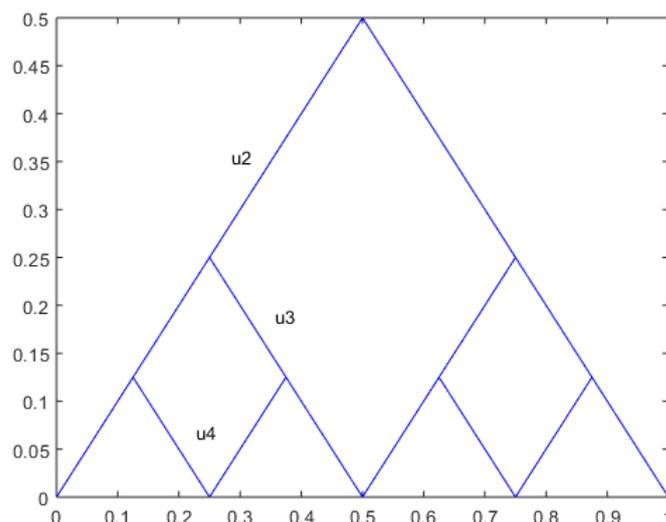


Figura 2.2: grafico della successione minimizzante per $n = 2, 3, 4$

Chiaramente $|u'_n| = 1$ quasi ovunque e $\sup_{(0,1)} |u_n| \leq \frac{1}{2n}$. Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} I[u_n] = 0$, si ha $\inf_{u \in \mathcal{A}} I[u] = 0$. Ma $I[u] = 0$ implica $|u'| = 1$ quasi ovunque e $u = 0$, che non sono compatibili.

2.4 Soluzioni deboli dell'equazione di Eulero-Lagrange

Vogliamo dimostrare che ogni minimo $u \in \mathcal{A}$ di $I[\cdot]$ risolve l'equazione di Eulero-Lagrange in un certo senso (*in senso debole*). Ciò non segue da quanto visto nella Sezione 1.1 dal momento che adesso non imponiamo che u sia liscio, ma solamente che appartenga a $W^{1,q}(U)$. Abbiamo infatti bisogno

delle seguenti condizioni di crescita su L e le sue derivate:

$$\begin{cases} |L(p, z, x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \\ |D_p L(p, z, x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1) \\ |D_z L(p, z, x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1). \end{cases} \quad (2.18)$$

Consideriamo adesso il problema con dato al bordo per l'equazione di Eulero-Lagrange associata alla L :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x)_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0 & \text{in } U \\ u = g & \text{su } \partial U \end{cases} \quad (2.19)$$

per un minimo liscio u . Moltiplicando per una funzione test $v \in C_c^\infty(U)$ e integrando per parti, come si vede ripercorrendo "all'indietro" la derivazione dell'equazione di Eulero-Lagrange nella Sezione 1.1, otteniamo

$$\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x)v_{x_i} + L_z(Du, u, x)v \, dx = 0. \quad (2.20)$$

Adesso supponiamo che u sia in $W^{1,q}(U)$. Usando (2.18), abbiamo che

$$\begin{cases} |D_p L(Du, u, x)| \leq C(|Du|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(U) \\ |D_z L(Du, u, x)| \leq C(|Du|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(U) \end{cases}$$

dove $q' = \frac{q}{q-1}, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Allora per un argomento di approssimazione standard l'identità (2.20) è valida per ogni $v \in W_0^{1,q}(U)$ e abbiamo motivato la seguente

Definizione 2.2. Diciamo che $u \in \mathcal{A}$ è *soluzione debole* del problema con dato al bordo (2.19) per l'Equazione di Eulero-Lagrange quando

$$\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x)v_{x_i} + L_z(Du, u, x)v \, dx = 0$$

per ogni $v \in W_0^{1,q}(U)$.

Teorema 2.4.1. *Supponiamo che L soddisfi le condizioni di crescita (2.18) e che $u \in \mathcal{A}$ sia minimo di $I[\cdot]$.*

Allora u è una soluzione debole di (2.19).

Dimostrazione. Procediamo come nella Sezione 1.1, facendo attenzione a differenziare sotto segno di integrale. Fissiamo una qualunque $v \in W_0^{1,q}(U)$ e poniamo

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Per la prima delle (2.18) $i(\tau)$ è finito per ogni τ . Sia $\tau \neq 0$ e scriviamo il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} &= \int_U \frac{1}{\tau} [L(Du + \tau Dv, u + \tau v, x) - L(Du, u, x)] dx \\ &= \int_U L^\tau dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

se poniamo

$$L^\tau(x) := \frac{1}{\tau} [L(Du(x) + \tau Dv(x), u(x) + \tau v(x), x) - L(Du(x), u(x), x)]$$

per quasi ogni $x \in U$. Chiaramente

$$L^\tau \rightarrow \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x)v_{x_i} + L_z(Du, u, x)v \quad \text{quasi ovunque} \quad (2.22)$$

per τ che tende a 0. Inoltre possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} L^\tau &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{ds} L(Du + sDv, u + sv, x) ds \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du + sDv, u + sv, x)v_{x_i} \\ &\quad + L_z(Du + sDv, u + sv, x)v ds. \end{aligned}$$

Adesso per la disuguaglianza di Young A.2.2 e per le condizioni di crescita (2.18), poiché $u, v \in W^{1,q}(U)$, abbiamo che

$$|L^\tau| \leq C(|Du|^q + |u|^q + |Dv|^q + |v|^q + 1)$$

per $\tau \neq 0$. Possiamo quindi usare il Teorema A.4.2 per dedurre da (2.21), (2.22) che $i'(0)$ esiste ed è uguale a

$$\int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x)v_{x_i} + L_z(Du, u, x)v \, dx.$$

Ma $i'(0) = 0$ perché c'è un minimo per $\tau = 0$, dunque u è una soluzione debole di (2.19). \square

Osservazione 2. In generale, (2.19) ha altre soluzioni che non sono minimi di $I[\cdot]$. Tuttavia, nel caso in cui la mappa $(p, z) \mapsto L(p, z, x)$ è convessa per ogni x allora ogni soluzione debole di (2.19) è in effetti un minimo.

Siano $u \in \mathcal{A}$ una soluzione debole e $w \in \mathcal{A}$ una funzione ammissibile qualsiasi. Per la convessità

$$L(p, z, x) + D_p L(p, z, x) \cdot (q - p) + D_z L(p, z, x) \cdot (w - z) \leq L(q, w, x).$$

Siano $p = Du(x), z = u(x), q = Dw(x), w = w(x)$ e integriamo su U :

$$I[u] + \int_U D_p L(Du, u, x) \cdot (Dw - Du) + D_z L(Du, u, x) \cdot (w - u) \, dx \leq I[w].$$

Poiché u è soluzione debole il secondo termine del primo membro è 0, quindi $I[u] \leq I[w]$ per ogni $w \in \mathcal{A}$.

Capitolo 3

Sistemi di equazioni

3.1 Generalità

Generalizziamo quanto mostrato nel Capitolo 1 al caso di funzioni lisce a valori vettoriali; le idee sono le stesse, le difficoltà sono in larga parte dovute alle notazioni.

Indichiamo con $\mathbb{M}^{m \times n}$ lo spazio delle matrici $m \times n$. Sia data una lagrangiana liscia

$$L : \mathbb{M}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Scriviamo

$$L = L(P, z, x) = L(p_1^1, \dots, p_n^1, z^1, \dots, z^m, x_1, \dots, x_n)$$

per $P \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $z \in \mathbb{R}^m$ e $x \in U$ dove

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_n^1 \\ & \ddots & \\ p_m^1 & \cdots & p_n^m \end{pmatrix}.$$

Come nella Sezione 1.1, associamo a L il funzionale

$$I[\mathbf{w}] = \int_U L(D\mathbf{w}(x), \mathbf{w}(x), x) dx$$

definito per funzioni lisce $\mathbf{w} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ che soddisfano la condizione al bordo $\mathbf{w} = \mathbf{g}$ per $\mathbf{g} : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^m$ data. Qui

$$D\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} w_{x_1}^1 & \cdots & w_{x_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{x_m}^1 & \cdots & w_{x_n}^m \end{pmatrix}$$

è la matrice jacobiana di \mathbf{w} in x . Mostriamo adesso che un qualsiasi minimo liscio di $I[\cdot]$ deve risolvere un certo sistema di PDE non lineari. Fissiamo quindi $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m) \in C_c^\infty(U; \mathbb{R}^m)$ e scriviamo

$$i(\tau) = I[\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}].$$

Come in precedenza $i'(0) = 0$ e quindi calcolando la derivata sotto segno di integrale

$$0 = i'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(D\mathbf{u}, \mathbf{u}, x) v_{x_i}^k + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(D\mathbf{u}, \mathbf{u}, x) v^k dx.$$

Poiché quest'ultima è valida per ogni scelta di v^1, \dots, v^m , integrando per parti concludiamo che

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i^k}(D\mathbf{u}, \mathbf{u}, x))_{x_i} + L_{z^k}(D\mathbf{u}, \mathbf{u}, x) = 0 \quad \text{in } U \quad (3.1)$$

per $k = 1, \dots, m$.

Osservazione 3. I risultati delle Sezioni 2.4,2.2 si generalizzano in maniera abbastanza immediata al caso dei sistemi.

3.2 Lagrangiane nulle

Abbastanza sorprendentemente, risulta interessante lo studio di alcuni sistemi di PDE non lineari, per i quali ogni funzione liscia è una soluzione.

Definizione 3.1. La funzione L è detta *lagrangiana nulla* se il sistema di equazioni (3.1) è automaticamente risolto da tutte le funzioni lisce $\mathbf{u} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

La peculiarità e di conseguenza l'importanza delle lagrangiane nulle sono dovute al fatto che il corrispondente funzionale energia dipende solo dalle condizioni al bordo.

Teorema 3.2.1 (Lagrangiane nulle e condizioni al bordo). *Siano L una lagrangiana nulla e $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}$ due funzioni lisce da \bar{U} a \mathbb{R}^m tali che*

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{su } \partial U.$$

Allora

$$I[\mathbf{u}] = I[\tilde{\mathbf{u}}].$$

Dimostrazione. Definiamo

$$i(\tau) := I[\tau\mathbf{u} + (1 - \tau)\tilde{\mathbf{u}}].$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} i'(\tau) &= \int_U \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m L_{p_i^k}(\tau D\mathbf{u} + (1 - \tau)D\tilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1 - \tau)\tilde{\mathbf{u}}, x)(u_{x_i}^k - \tilde{u}_{x_i}^k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\tau D\mathbf{u} + (1 - \tau)D\tilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1 - \tau)\tilde{\mathbf{u}}, x)(u^k - \tilde{u}^k) dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_U \left[- \sum_{i=1}^n (L_{p_i^k}(\tau D\mathbf{u} + (1 - \tau)D\tilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1 - \tau)\tilde{\mathbf{u}}, x))_{x_i} \right. \\ &\quad \left. + L_{z^k}(\tau D\mathbf{u} + (1 - \tau)D\tilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1 - \tau)\tilde{\mathbf{u}}, x) \right] (u^k - \tilde{u}^k) dx = 0. \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che L è una lagrangiana nulla e quindi $\tau\mathbf{u} + (1 - \tau)\tilde{\mathbf{u}}$ soddisfa il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange. Segue la tesi perché i è costante e allora $i(0) = i(1)$. \square

Nel caso scalare $m = 1$ gli unici esempi di lagrangiane nulle si hanno quando L è lineare nella variabile p ; nel caso $m > 1$ ci sono, invece, esempi non banali e ne mostriamo uno in particolare: il determinante.

Introduciamo la seguente notazione: se $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ indichiamo con

$$\text{cof}A$$

la *matrice dei cofattori*, il cui elemento di posto (k, i) è $(\text{cof}A)_i^k = (-1)^{i+k} \det(A)_i^k$ dove $\det(A)_i^k$ è il determinante del minore $(n-1) \times (n-1)$ ottenuto cancellando la k -esima riga e la i -esima colonna da A .

Lemma 3.2.2. *Sia $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione liscia. Allora*

$$\sum_{i=1}^n (\text{cof}D\mathbf{u})_{i,x_i}^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Dimostrazione. Richiamiamo dall'algebra lineare che

$$(\det P)I = P^T(\text{cof}P),$$

ovvero

$$(\det P)\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n p_i^k (\text{cof}P)_j^k \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

Quindi abbiamo

$$\frac{\partial \det P}{\partial p_m^k} = (\text{cof}P)_m^k \quad (3.3)$$

Adesso poniamo $P = Du$ in (3.2), deriviamo rispetto a x_j e sommiamo per $j = 1, \dots, n$ per ottenere

$$\sum_{j,k,m=1}^n \delta_{ij} (\text{cof}D\mathbf{u})_m^k u_{x_m x_j}^k = \sum_{k,j=1}^n u_{x_i x_j}^k (\text{cof}D\mathbf{u})_j^k + u_{x_i}^k (\text{cof}D\mathbf{u})_{j,x_j}^k$$

per $i = 1, \dots, n$. Semplificando per (3.3)

$$\sum_{k=1}^n u_{x_i}^k \left(\sum_{j=1}^n (\text{cof}D\mathbf{u})_{j,x_j}^k \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.4)$$

Adesso se $Du(x_0) \neq 0$, deduciamo da (3.4)

$$\sum_{j=1}^n (\text{cof}D\mathbf{u})_{j,x_j}^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

in x_0 . Se, invece, $Du(x_0) = 0$ scegliamo ϵ abbastanza piccolo da avere $\det(Du(x_0) + \epsilon I) \neq 0$, applichiamo gli argomenti precedenti a $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \epsilon x$ e mandiamo ϵ a 0. \square

Teorema 3.2.3 (Determinante come lagrangiana nulla). *La funzione determinante*

$$L(P) = \det P \quad (P \in \mathbb{M}^{n \times n})$$

è una lagrangiana nulla.

Dimostrazione. Per (3.3) abbiamo $L_{p_i^k}(P) = (\text{cof}P)_i^k$ per $i, k = 1, \dots, n$. Impiegando la notazione e la conclusione del Lemma 3.2.2 vediamo che

$$\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i^k}(D\mathbf{u}) \right)_{x_i} = \sum_{i=1}^n (\text{cof}D\mathbf{u})_{i,x_i}^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

□

3.3 Teorema di Brouwer

Un'applicazione di quanto visto fin qui è una veloce dimostrazione analitica di un teorema topologico di punto fisso.

Teorema 3.3.1 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Sia*

$$\mathbf{u} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$$

una funzione continua, dove $B(0, 1)$ è la palla unitaria di \mathbb{R}^n . Allora \mathbf{u} ha un punto fisso, cioè esiste $x \in B(0, 1)$ tale che

$$\mathbf{u}(x) = x.$$

Dimostrazione. Facciamo vedere, innanzitutto, che non esiste una funzione liscia

$$\mathbf{w} : B(0, 1) \rightarrow \partial B(0, 1) \tag{3.5}$$

tale che

$$\mathbf{w}(x) = x \quad \text{per ogni } x \in \partial U. \tag{3.6}$$

Supponiamo per assurdo che una tale funzione \mathbf{w} esista. Denotiamo con $\tilde{\mathbf{w}}$ l'identità su $B(0, 1)$. Per (3.6), si ha $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}$ su $\partial B(0, 1)$. Dal momento che il determinante è una lagrangiana nulla, il Teorema 3.2.1 implica

$$\int_{B(0,1)} \det D\mathbf{w} \, dx = \int_{B(0,1)} \det D\tilde{\mathbf{w}} \, dx = |B| \neq 0. \tag{3.7}$$

dato che $D\tilde{\mathbf{w}} = I$.

D'altra parte $|w|^2 = 1$ per (3.5) e differenziando si ha

$$(D\mathbf{w})^T \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Poiché $|w| = 1$, (3.8) dice che 0 è un autovalore di $D\mathbf{w}^T$ per ogni $x \in B(0, 1)$. Abbiamo allora $\det D\mathbf{w} = 0$ in $B(0, 1)$, ma questo contraddice (3.7) e ciò prova che non può esistere una funzione liscia che soddisfi (3.5), (3.6).

Adesso facciamo vedere che non può esistere una funzione continua che soddisfi (3.5), (3.6). Se per assurdo \mathbf{w} fosse una tale funzione, estendiamo con continuità \mathbf{w} ponendo $\mathbf{w}(x) = x$ se $x \in \mathbb{R}^n - B(0, 1)$. Osserviamo che si ha $\mathbf{w}(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Riferendoci alle Sezione A.3, fissiamo ϵ abbastanza piccolo da avere $\mathbf{w}_1 := \eta_\epsilon * \mathbf{w}$ tale che $\mathbf{w}_1 \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) e $\mathbf{w}_1 = x$ se $x \in \mathbb{R}^n - B(0, 2)$. Allora

$$\mathbf{w}_2 := \frac{2\mathbf{w}_1}{|\mathbf{w}_1|}$$

sarebbe una funzione liscia che soddisfa (3.5), (3.6) (con la palla $B(0, 2)$ al posto della palla $B(0, 1)$), in contraddizione con quanto visto prima.

Supponiamo per assurdo, infine, che $\mathbf{u} : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ sia continua ma non abbia punti fissi. Definiamo adesso $\mathbf{w} : B(0, 1) \rightarrow \partial B$ ponendo $\mathbf{w}(x)$ il punto su ∂B della semiretta con origine in $\mathbf{u}(x)$ e che passa per x . Questa funzione è ben definita perché $\mathbf{u}(x) \neq x$ per ogni $x \in B(0, 1)$, è continua e soddisfa (3.5), (3.6); ma ciò è in contraddizione con quanto visto prima. \square

Osservazione 4. A differenza del teorema del punto fisso per le contrazioni di Banach-Caccioppoli, nelle ipotesi del teorema di Brouwer non vi è alcuna possibilità di ottenere l'unicità del punto fisso: oltre all'identità, un semplice controesempio è

$$u : x \mapsto x^3, \quad x \in [-1, 1]$$

che ammette $\{-1, 0, 1\}$ come punti fissi.

Appendice A

Appendice

Presentiamo qui, senza dimostrazione, una serie di definizioni e teoremi che utilizziamo principalmente nel Capitolo 2.

A.1 Topologia debole e spazi di Sobolev

Qui X denota uno spazio di Banach reale.

Definizione A.1. Diciamo che una successione $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge debolmente a u e scriviamo

$$u_k \rightharpoonup u$$

se

$$u^*(u_k) \rightarrow u^*(u)$$

per ogni funzionale $u^* \in X^*$ duale di X .

Ogni successione debolmente convergente è limitata.

Teorema A.1.1 (Banach-Alaoglu). *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e supponiamo che la successione $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ sia limitata.*

Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $u \in X$ tali che

$$\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \rightharpoonup u.$$

Teorema A.1.2 (Mazur). *Un sottoinsieme convesso e chiuso di X è debolmente chiuso, ovvero i limiti delle successioni convergenti debolmente appartengono al sottospazio.*

Entrambi i risultati seguenti ammettono generalizzazioni; tuttavia nella trattazione ci bastano queste versioni particolari.

Teorema A.1.3 (Disuguaglianza di Poincaré). *Siano U un aperto limitato di \mathbb{R}^n , $1 \leq q < \infty$, $u \in W_0^{1,q}(U)$, dove quest'ultimo è lo spazio dato dalla chiusura di $C_c^\infty(U)$ in $W^{1,q}(U)$.*

Allora esiste $C > 0$ che dipende solo da U e q tale che

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)}.$$

Definizione A.2. Siano X, Y spazi di Banach, $X \subset Y$. Diciamo che X è immerso in modo compatto in Y se $\|x\|_X \leq C\|x\|_Y$ ($x \in X$) per qualche $C > 0$ e ogni successione limitata in X è precompatta in Y .

Teorema A.1.4 (Teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov). *Sia U aperto regolare di \mathbb{R}^n e sia $1 \leq q \leq \infty$.*

Allora $W^{1,q}(U)$ è immerso in modo compatto in $L^q(U)$.

A.2 Funzioni convesse

Definizione A.3. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$f(\tau x + (1 - \tau)y) \leq \tau f(x) + (1 - \tau)f(y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n, \tau \in [0, 1]$.

Proposizione A.2.1. *Supponiamo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora*

1. *per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste $r \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$f(y) \geq f(x) + r \cdot (y - x)$$

per ogni $y \in \mathbb{R}^n$; la mappa $y \mapsto f(x) + r \cdot (y - x)$ determina l'iperpiano di supporto di f in x : il grafico di f è sopra questo iperpiano.

2. se f è differenziabile, $r = Df(x)$.

3. se $f \in C^2$, f è convessa se e solo se $D^2f \geq 0$.

Definizione A.4. $f \in C^2$ è uniformemente convessa se $D^2f \geq \theta I$ per qualche costante $\theta > 0$. $D^2f \geq \theta I$ significa

$$\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

Proposizione A.2.2 (Disuguaglianza di Young). *Dalla convessità dell'esponenziale, segue che se $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ si ha*

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}.$$

A.3 Regolarizzazione di funzioni

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Con U_ϵ indichiamo il sottoinsieme $\{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \epsilon\}$.

Definizione A.5. Definiamo $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in questo modo

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

dove la costante C è scelta in modo che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

Definiamo per ogni $\epsilon > 0$

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Abbiamo che le η_ϵ sono in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e soddisfano

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1, \quad \text{supp} \eta_\epsilon \subset B(0, \epsilon).$$

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente integrabile definiamo

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad \text{in } U_\epsilon$$

regolarizzata di f . Per $x \in U_\epsilon$ si ha

$$f^\epsilon = \int_U \eta_\epsilon(x-y)f(y) dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y) dy.$$

Proposizione A.3.1. 1. $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.

2. $f \rightarrow f^\epsilon$ quasi ovunque per $\epsilon \rightarrow 0$.

3. se $f \in C(U)$, allora $f \rightarrow f^\epsilon$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di U .

4. se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$, allora $f^\epsilon \rightarrow f$ in $L^p_{loc}(U)$.

A.4 Teoria della misura

Teorema A.4.1 (Convergenza monotona). Sia $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ una successione di funzioni misurabili di \mathbb{R}^n e non negative tale che $f_k \leq f_{k+1} \forall k$.

Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dx.$$

Teorema A.4.2 (Convergenza dominata). Sia $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ una successione di funzioni integrabili di \mathbb{R}^n tale che $f_k \rightarrow f$ quasi ovunque e $|f_k| \leq g$ per qualche funzione g sommabile.

Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Teorema A.4.3 (Egoroff). Sia $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ una successione di funzioni misurabili e sia f misurabile tale che $f_k \rightarrow f$ quasi ovunque su A sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n .

Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste E_ϵ sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n tale che

1. $|A - E_\epsilon| \leq \epsilon$.

2. $f_k \rightarrow f$ uniformemente su E_ϵ .

Bibliografia

- [1] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, 1998
- [2] Giorgio Talenti, *Calcolo delle variazioni*, Pitagora, 1977
- [3] Richard Courant e David Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, 1937
- [4] Mariano Giaquinta e Stefan Hildebrandt, *Calculus of Variations I, The Lagrangian Formalism*, Springer, 1996
- [5] Elvira Mascolo, *Appunti di Calcolo delle Variazioni*, <http://web.math.unifi.it/users/mascolo/DIDATTICA-MATEMATICA/Analisi-Funzionale/Calcolo-Variazioni-08.pdf>, 2008