

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

DETERMINAZIONE DELLA MASSA IN ASTROFISICA

Elaborato scritto finale

Presentata da:
Mattia Pacicco

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dalla Casa**

Appello II
Anno Accademico 2018-2019

*La natura è piena d'infinite
ragioni che non furon mai in
isperienza*

Leonardo da Vinci

Sommario

In questo elaborato scritto si intende discutere, anche se brevemente e con le dovute approssimazioni, alcuni tra i metodi usati in astrofisica per determinare la massa degli oggetti astronomici. Si tratterà in particolare l'uso della terza legge di Keplero nei sistemi binari, la massa limite di Chandrasekhar e la relazione massa -luminosità per le stelle. Per le galassie le curve di rotazione e il teorema del viriale, in fine la recente relazione emersa tra Buchi neri super massicci e la dispersione di velocità stellare nei suoi dintorni.

Verrà introdotto anche il limite di Eddington come vincolo inferiore alla massa delle stelle e dei quasar, poichè nonostante non sia un metodo usato troppo spesso, e più che altro "l'ultima carta da giocare", in alcuni casi può dimostrarsi una valida alternativa.

Per alcuni argomenti verranno riportati esempi dimostrativi che evidenzino limiti e affidabilità del metodo in questione.

Contents

1	Metodi per misurare la massa	2
1.1	Leggi di Keplero	2
1.2	Sistemi binari	3
1.2.1	Binarie visuali	4
1.2.2	Binarie Spettroscopiche	5
1.2.3	Limite di Chandraseckar	6
1.3	Limite di Eddington	7
1.4	Sequenza principale e relazione M-L	9
1.5	Massa delle galassie	11
1.5.1	Curve di rotazione	11
1.5.2	Massa viriale per le galassie ellittiche	13

Introduzione

In astrofisica la conoscenza delle masse degli oggetti celesti rappresenta un obiettivo cruciale, spesso notevolmente difficile a raggiungere. L'importanza della massa è così rilevante poichè è una delle grandezze fondamentali che guidano le leggi della fisica ed è, nella pratica, onnipresente nelle equazioni che usiamo per descrivere la natura. La massa è una proprietà intrinseca della materia e può avere due nature apparentemente diverse: inerziale e gravitazionale. Entrambe queste definizioni sono dovute a Sir Isaac Newton, che con le tre leggi della dinamica e la legge della gravitazione universale costruì sostanzialmente le basi della fisica classica. La massa inerziale si definisce tramite la seconda legge di Newton, che mette in relazione forza ed accelerazione:

$$\sum \vec{F}_i = m_{in} \vec{a} \quad (1)$$

da cui:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{tot}}{m_{in}} \quad (2)$$

si nota come la massa rappresenti la resistenza che la particella oppone ad un cambiamento nel suo stato (di quiete o moto uniforme) dovuto alla forza, cioè quanto difficile sarà accelerarla.

La massa gravitazionale viene definita invece secondo la legge della gravitazione:

$$F_{g12}^{\vec{}} = -\frac{Gm_{1g}m_{2g}}{r^2} \vec{r} \quad (3)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m_{1g} e m_{2g} le masse gravitazionali ed r la distanza tra i due corpi.

Questa legge da secoli descrive egregiamente i fenomeni gravitazionali osservati, permettendo di fare precise previsioni nei moti di stelle e pianeti.

In questo caso si prendono in considerazione almeno due particelle distinte e se applichiamo la seconda legge di Newton per la particella 1 risulta che

$$\vec{a}_1 = -\frac{Gm_{2g}}{r^2} \vec{r} \quad (4)$$

In altre parole l'accelerazione subita non dipende più dalla massa del corpo in questione, bensì da quella del secondo.

Questo è in effetti il motivo per cui, come Galileo aveva intuito, gli oggetti cadono verso terra con la stessa accelerazione.

Un fatto di fondamentale importanza è che le due masse, come sperimentalmente dimostrato, effettivamente si equivalgono e sono a tutti gli effetti la stessa grandezza.

Chapter 1

Metodi per misurare la massa

Nell'ambito astrofisico è possibile utilizzare diversi metodi per stimare la massa di un oggetto, ovviamente tutti indiretti. Ci sono metodi esatti (le equazioni vengono rigorosamente ricavate dalle leggi fondamentali della fisica) il cui unico difetto sta nella precisione delle misure delle grandezze necessarie al calcolo, e metodi che si basano su leggi empiriche che quindi sono soggetti anche alla propagazione degli errori dovuta alla calibrazione. Tra i metodi esatti studieremo quelli che fanno uso delle leggi di Keplero, il limite di Chandrasekhar, il limite di Eddington, le curve di rotazione per le galassie spirali, l'uso del teorema del viriale per la determinazione della masse delle galassie ellittiche e gli ammassi di galassie e la relazione tra SMBH e dispersione di velocità. Tra le leggi empiriche vedremo invece la relazione massa-luminosità e la relazione tra massa dei SMBH e la dispersione di velocità. Nell'esposizione di questi metodi si faranno alcuni esempi di calcolo poi confrontati con i risultati più precisi, ottenuti con metodiche eventualmente più sofisticate.

1.1 Leggi di Keplero

Le leggi di Keplero permettono di ricavare la massa degli oggetti in interazione gravitazionale in diversi casi. Le elenchiamo di seguito:

- 1) Le orbite descritte dai pianeti attorno al Sole sono ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi.
- 2) il raggio vettore che unisce il sole al pianeta orbitante descrive aree uguali in tempi uguali.
- 3) il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti.

Sotto certe condizioni, ovvero che le masse siano approssimabili come puntiformi e le interazioni con altri corpi trascurabili possiamo scrivere così la terza legge di Keplero:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M + m)} \quad (1.1)$$

Dunque nel caso $M \gg m$ possiamo trascurare una delle due masse e, se T periodo ed a semiasse maggiore dell'orbita sono noti, quindi ricavare:

$$M \simeq \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \quad (1.2)$$

Questa relazione è estremamente utile quando ci si trova nel sistema solare o in condizioni simili.

Questo procedimento può essere utilizzato per calcolare con grande precisione le masse del sole o degli altri pianeti nel sistema solare:

Massa del sole

- semiasse maggiore: $a = 149,6 \times 10^9 m$
- periodo: $T = 365d = 3,15 \times 10^6 s$

E quindi la massa del sole:

$$M_{Sun} \approx 1,99 \times 10^{30} kg$$

che corrisponde praticamente alla massa comunemente accettata come esatta per il Sole.

Massa di Sagittarius A* Con questo metodo, sfruttando le osservazioni del moto della stella S2, si ottiene una buona approssimazione anche del buco nero al centro della Via Lattea:

- $m_{S2} \ll M_{BH}$
- $a \approx 970ua = 1.45 \times 10^{14} m$
- $T \approx 16yr = 4,91 \times 10^8 s$

si ottiene che:

$$M_{BH} \approx 7,48 \times 10^{36} kg = 3.76 \times 10^6 M_{Sun}$$

anche se le stime più recenti e precise per la massa del buco nero centrale sono di $M \approx 4 \times 10^6 M_{Sun}$, è comunque un risultato molto buono considerando la "banalità" del metodo ed il fatto che le prime misure effettuate (in un esperimento della durata di circa 16 anni) non sono assolutamente all'altezza delle più recenti in quanto a precisione.

1.2 Sistemi binari

I sistemi binari, o doppi, sono tutti quelli in cui due stelle interagiscono gravitazionalmente, condividendo un centro di massa comune. Gran parte dei sistemi stellari poi, risulta effettivamente essere multiplo, ed appunto nel caso in cui sia doppio è possibile fare diverse stime sulle masse.

Binary Star Orbit

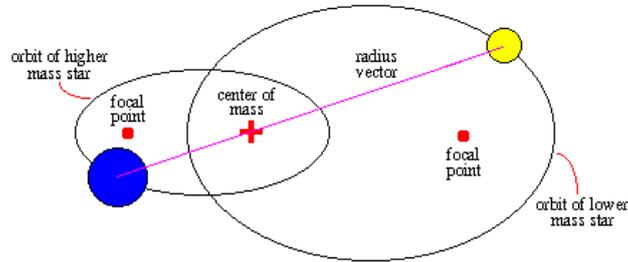


Figure 1.1: Riproduzione delle orbite ellittiche di due stelle facenti parte di un sistema binario.

1.2.1 Binarie visuali

Quando il sistema stellare è doppio e le due stelle sono entrambe risolvibili al telescopio, si parla di binarie visuali. In questo particolare caso, negli anni, è possibile notare dei cambiamenti nelle posizioni relative tra le due sorgenti. Quello che effettivamente si osserva ai fatti è la proiezione sul piano del cielo delle orbite, di cui non si conosce l'inclinazione reale.

Facendo uso della legge del baricentro si ricava che:

$$a_1 m_1 = a_2 m_2 \rightarrow m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2} \quad (1.3)$$

Dove $a_{1,2}$ sono i semiassi maggiori (osservabili) e $m_{1,2}$ le masse.

Se poi $a = a_1 + a_2$ è il semiasse dell'orbita relativa, sostituendo (1.3) nella terza legge di Keplero (1.1) ed assumendo il piano orbitale perpendicolare alla direzione dell'osservatore otteniamo la massa di una delle due stelle:

$$m_1 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{T^2 G(1 + \frac{a_1}{a_2})} \quad (1.4)$$

dalla (1.3) quindi si ricava la massa m_2 .

Bisogna per ricordare che i semiassi maggiori osservati potrebbero non coincidere con quelli reali, e anzi dipendere dall'inclinazione del piano orbitale. In questo caso bisognerà tener conto nel calcolo delle masse che in realtà se i è l'angolo d'inclinazione:

$$a_{obs,i} = a_{reale,i} \cos i \Rightarrow m \propto \cos^3 i \quad (1.5)$$

Raramente è possibile però che in entrambe le stelle non venga notata un'oscillazione tra redshift e blueshift, e quindi che queste stelle stiano effettivamente orbitando su un piano perpendicolare alla nostra linea di osservazione, con $i \approx 0$.

Sistema binario Sirius Calcolo della massa delle componenti di Sirius, un sistema binario visuale:

- $a_{SiriusA} = 6.43AU = 9,62 \times 10^{11}m$
- $a_{SiriusB} = 13.4AU = 2 \times 10^{12}m$
- $T = 50.1yr = 1.58 \times 10^9s$

inserendo i dati nella formula (1.4) e sfruttando poi la (1.3) si ottiene:

- $m_{SiriusA} \approx 4,16 \times 10^{30}kg = 2.08M_{Sun}$
- $m_{SiriusB} = 1,005M_{Sun}$

Risultati molto vicini a quelli ufficialmente accettati nonostante le approssimazioni:
 $m_{SiriusA,Reale} = 2.063 \pm 0.023M_{Sun}$, $SiriusB, Reale = 1.018 \pm 0.011M_{Sun}$

1.2.2 Binarie Spettroscopiche

Nella maggior parte dei casi comunque le binarie non sono, sfortunatamente, visuali. Un caso importante dunque rimane quello delle binarie spettroscopiche: a volte si osservano gli spettri delle stelle shiftati periodicamente verso il rosso e verso il blu, testimoniando un'oscillazione nel verso delle velocità radiali e dunque l'interazione gravitazionale con almeno un altro corpo massivo. Questo fenomeno viene causato dall'effetto doppler, che comporta uno spostamento dello spettro in emissione(o assorbimento) verso il blu se la sorgente si avvicina e verso il rosso se si sta allontanando.

In alcuni casi è possibile osservare entrambi gli spettri delle stelle, altrimenti non distinguibili al telescopio.

Sistemi ad un solo spettro

Ora supponiamo per semplicità che le orbite delle stelle siano circolari e poniamoci nel caso in cui si conosca lo spettro solamente di una delle stelle, quindi la velocità :

$$v_1 = v_{0_1} \sin i \quad (1.6)$$

Dove:

- $v_1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}c$ velocità osservata.
- v_{0_1} velocità totale.
- i angolo tra la linea di vista e la normale al piano orbitale del sistema.

Nel caso di orbite circolari sappiamo che $v_{0_1} = \omega a_1 = \frac{2\pi}{T}a_1$, con a_1 il raggio dell'orbita, e quindi possiamo scrivere $v_1 = \frac{2\pi}{T}a_1 \sin i$.

Ricordando le leggi del baricentro, la definizione di $a = a_1 + a_2$ e $a_2 = a_1 \frac{m_2}{m_1}$ otteniamo:

$$a = a_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow a_1 = a \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.7)$$

sostituendo nell'equazione per la velocità :

$$v_1 = \frac{2\pi m_2}{T(m_1 + m_2)} a \sin i \Rightarrow a = \frac{v_1 T (m_1 + m_2)}{2\pi m_2 \sin i} \quad (1.8)$$

Sostituendo la (1.8) nella terza legge di Keplero possiamo ottenere:

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^3} = \frac{v_1^3 T}{2\pi G} \quad (1.9)$$

Dove il primo membro viene detto **Funzione Massa**.

Sistemi a due spettri

Se entrambe le stelle mostrano uno spettro allora diventa possibile dare una stima effettiva della massa. Infatti possiamo conoscere entrambe le velocità radiali $v_i = \frac{2\pi a_i \sin \theta}{T}$, e facendo il rapporto tra v_1 e v_2 otteniamo:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow m_1 = m_2 \frac{v_2}{v_1} \quad (1.10)$$

Sostituendo quindi la (1.10) nell'equazione per la funzione di massa (1.9) ricaviamo le masse singole:

$$m_{1,2} \sin^3 \theta = \left(1 + \frac{v_{1,2}}{v_{2,1}}\right) \frac{v_1^3 T}{2\pi G} \quad (1.11)$$

In questo caso si vede come effettivamente possibile determinare, a meno di un $\sin^3 i$ la massa delle stelle, dandole quindi un valore massimo.

1.2.3 Limite di Chandraseckar

In sistemi binari molto stretti è possibile che si verifichi uno scambio di massa tra le due componenti del sistema. Questo avviene quando una delle due stelle, espandendosi, riempie il proprio lobo di Roche andando così ad accrescere la compagna cedendole il proprio gas. Spesso questo succede quando la stella più massiva si trova nella fase di gigante/supergigante, con una gravità superficiale inferiore a quella che la compagna applica sulla superficie della prima, di fatto quindi strappandole del materiale.

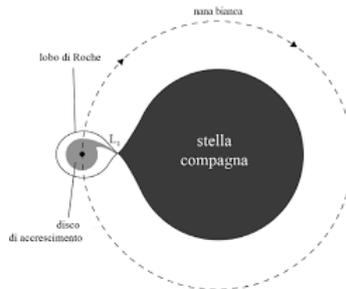


Figure 1.2: Schema di un sistema binario composto da una nana bianca in regime 'accrescimento ed una compagna che ha superato il proprio lobo di Roche.

Un caso estremamente particolare è quello in cui la stella in accrescimento sia una nana bianca: in queste situazioni si possono generare le supernove Ia, tra le più luminose e conosciute grazie al loro comportamento ripetitivo e ben studiato.

Le nane bianche sono estremamente dense e in queste condizioni spesso il gas si comporta in modo degenere: per il principio di esclusione di Pauli gli elettroni non potendo occupare lo stesso stato saranno costretti a distribuirsi in livelli energetici sempre più alti secondo la distribuzione di energie di Fermi-Dirac, di fatto generando pressione ed impedendo il collasso completo della struttura. Però se sufficiente materiale si deposita sulla superficie della stella la pressione generata dagli elettroni non contrasta più la gravità e si avviano processi di fusione del carbonio, portando la stella ad esplodere in una supernova Ia.

Il modo esatto in cui queste esplosioni avvengono non verrà affrontato in questa tesi, poichè richiede conoscenze matematiche e fisiche avanzate. Il punto fondamentale della questione è che l'astrofisico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar nel 1930, a soli vent'anni, derivò rigorosamente la massa oltre la quale questi oggetti non possono più rimanere stabili:

$$M_{Lim} = \frac{\omega_1^0 \sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{(\mu_e m_H)^2} \approx 1.44 M_{Sun} \quad (1.12)$$

- ω_1^0 costante ricavata dalle equazioni di Lane-Emden
- μ_e peso molecolare medio, circa due nel caso di materiale degenere
- m_H la massa dell'atomo di Idrogeno

Siccome appunto queste supernovae mostrano curve di luce ben note (tanto da essere delle candele standard) sono facilmente riconoscibili.

1.3 Limite di Eddington

Le stelle sono sistemi in equilibrio idrostatico e ciò equivale a dire che le forze di gravità e le forze scaturite dalla pressione di radiazione devono almeno eguagliarsi affinché la struttura non venga smembrata:

$$F_{TOT} = F_{rad}(r) - F_G(r) = 0 \quad (1.13)$$

Questo impone allora un limite alla luminosità che una sorgente può emettere ben definito, che difficilmente viene raggiunto nel caso delle stelle.

Supponiamo di osservare una sorgente dalla struttura sferica che irradia luminosità monocromatica in modo isotropo e che sia composta da gas ionizzato.

Se $L(\nu)$ è la luminosità, allora il flusso attraverso una superficie sferica sarà dato da $S(\nu) = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2}$. Dividendo per l'energia trasportata da un fotone di frequenza ν $E_\nu = h\nu$ e moltiplicando per la quantità di moto $p_\nu = \frac{h\nu}{c}$ otteniamo l'impulso trasportato per unità di tempo e superficie. A distanza r dalla sorgente allora avremo:

$$p(r)_\nu = \frac{L(\nu)p_\nu}{4\pi r^2 E_\nu} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2} \frac{h\nu}{h\nu} \frac{1}{c} = \frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c} \quad (1.14)$$

. Ora vogliamo trovare la "forza di radiazione" per particella. I fotoni vedranno gli elettroni come dischetti con sezione d'urto (Thomson) $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$, mentre quella dei protoni risulta trascurabile. Allora integrando su tutte le frequenze la forza di radiazione per unità di volume sarà :

$$F_{rad} = \frac{L}{4\pi r^2 c} n_e(r) \sigma_T \quad (1.15)$$

Inoltre sappiamo che la forza d'attrazione gravitazionale all'esterno di una sfera è notoriamente data da $F_{grav} = \frac{GMm}{r^2}$ ed in questo caso invece trascureremo la massa degli elettroni che è 1840 volte inferiore quella del protone:

$$\frac{L}{4\pi r^2 c} n_e(r) \sigma_T - \frac{GM}{r^2} n_p(r) m_p = 0 \quad (1.16)$$

e quindi siccome entrambe le forze dipendono da r^2 e $n_e(r) \approx n_p(r)$, isolando L possiamo definire la luminosità di Eddington, che è quella oltre la quale un oggetto inizierebbe a smembrarsi:

$$L = L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \quad (1.17)$$

$$L_{Edd} \approx 3,3 \times 10^4 \left(\frac{M}{M_{sun}} \right) L_{Sun} \quad (1.18)$$

A questo punto, siccome sappiamo che sicuramente $L \leq L_{Edd}$ allora:

$$M \geq \frac{L \sigma_T}{4\pi G m_p c} = M_{min} \quad (1.19)$$

$$M_{min} \approx 3 \times 10^{-5} \left(\frac{L}{L_{sun}} \right) M_{Sun} \quad (1.20)$$

Questa grandezza riveste grande importanza anche nello studio dei quasar: allo stesso modo se immaginiamo la materia in accrescimento distribuita sfericamente, questa smetterà di subire la forza gravitazionale quando $L = L_{Edd}$, bloccando l'accrescimento e l'emissione luminosa.

In realtà si osservano spesso oggetti in regime Super-Eddington tanto a causa delle approssimazioni quanto del fatto che non ha effetti immediati: le stelle perdono massa tramite il vento stellare, tendendo a stabilizzarsi e il materiale accrescente i buchi neri non ferma immediatamente la caduta.

L'utilità di questo metodo per vincolare le masse è quindi discutibile e va usata con attenzione: le stelle poco luminose sono molto lontane dal loro limite e quindi si ottengono risultati completamente fuori strada come nel caso del sole. Al contrario stelle molto luminose vi si possono avvicinare, e con i Quasar per lo meno, si ha un range di masse molto più ampio che con le stelle: nel caso del sole per esempio troviamo $M_{min} = 6.15 \times 10^{28} \text{g} = 3.08 \times 10^{-5} M_{Sun}$, eppure il limite inferiore di massa per le stelle è di circa $0.08 M_{Sun}$. Però tanto più la massa di una stella è grande più la sua luminosità si avvicina a quella limite e quindi risulta utile il vincolo. Di seguito alcuni esempi, con stelle di massa e luminosità nota in ordine crescente:

Nome	Luminosità [L_{Sun}]	M_{min} [M_{Sun}]	M_{Real} [M_{Sun}]	M_{min}/M_{Real}
Sirius A	25.4	0.0007	2.063	0.0003
Vega	37	0.0011	2.11	0.0005
Regolo	341	0.0102	4.15	0.0024
Bellatrix	9200	0.276	8	0.0345
Sadr	3.3×10^4	0.990	12	0.0825
Rigel	1.2×10^5	3.600	19	0.1894
Pismis 24-1	7.8×10^5	23.40	74	0.3162
AG Carinae ^{WR}	1.3×10^4	39	55	0.7090
V4650SAG	1.77×10^6	53	≈ 100	0.5310
Cygnus OB-12	$1.66 \times 10^{6*}$	49.80	110	0.4527
VFT5682 ^{WR}	3.2×10^6	96	150	0.6400
HD93162 ^{WR}	2.4×10^6	72.00	75	0.9600
R136a1 ^{WR}	$\approx 8.7 \times 10^6$	261	250	1.044

Table 1.1: Gran parte delle stelle fanno parte di sistemi binari, motivo per cui la massa si conosce con buonissima precisione. L'apice "WR" sta per "Stelle di Wolf-Rayet": ipergiganti blu che stanno perdendo grandi quantità di materiale a causa della pressione di radiazione, spesso molto vicine al limite di Eddington mostrano infatti rapporti vicini ad uno.

Essenzialmente tanto più la luminosità di un oggetto è grande, più è probabile che sia vicina al suo limite di Eddington e quindi il limite inferiore alla massa tenda al valore reale.

Nel caso dei Quasar il questo vincolo pare risultare ancora più utile poichè i limiti legati alla massa sono molto più ampi: 10^5 - $10^{10} M_{Sun}$.

Infatti considerando il primo quasar scoperto (3C273), assumendo una luminosità assoluta bolometrica $L = 10^{47} \text{ erg/s}$ si ottiene $M_{min} = 7.8 \times 10^8 M_{Sun}$ a fronte di una massa reale stimata $M \approx 8.86 \times 10^8 M_{Sun}$. Dunque il rapporto risulta $\frac{M_{min}}{M_{BH}} \approx 0.88$.

1.4 Sequenza principale e relazione M-L

Un caso più complicato in cui calcolare la massa è quello delle stelle singole: non è solitamente possibile fare uso di leggi fisiche rigorosamente e matematicamente derivate. Per le stelle singole infatti si fa spesso ricorso a metodi empirici, il più noto dei quali fa uso del diagramma H-R (dalle iniziali di Hertzsprung-Russell), nel quale le stelle di magnitudine (o luminosità) nota vengono poste in relazione alla loro temperatura (o colore), per essere calibrato.

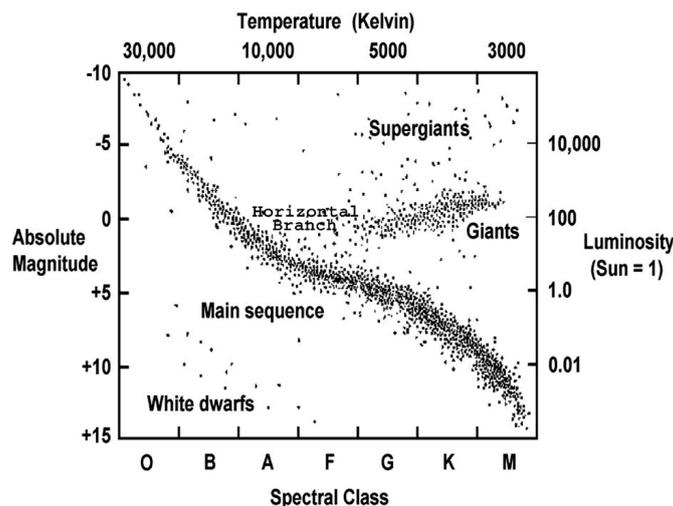


Figure 1.3: Diagramma H-R con lungo l'asse verticale luminosità /Magnitudine assoluta bolometrica in unità solari e lungo l'asse orizzontale la temperatura/classe spettrale(colore).

In questo diagramma vediamo come la luminosità delle stelle cresce con la temperatura $L \propto T^4$ (a sinistra) e con il raggio $L \propto F \propto R^2$ (in alto). Inoltre risulta evidente una marcata diagonale, o piuttosto una fascia , chiamata Main Sequence, dove si trovano tutte le stelle ancora nella fase stabile e duratura del buciamento dell'idrogeno. Grazie alle ricerche sulle binarie, di cui in alcuni casi come spiegato si conosce con buona precisione la massa, è stato possibile calibrare una relazione tra la massa della stella e la luminosità di questa. Quel che è emerso dagli studi è che effettivamente esiste una relazione tra le due grandezze fin tanto che le stelle in esame siano nella Main Sequence. In particolare la relazione Massa-Luminosità indica che tanto le stelle sono massive tanto più sono luminose. Tra l'altro poi si nota che mentre le luminosità delle stelle spaziano di diversi ordini di grandezza (10^{-3} - $10^6 L_{Sun}$), questo non vale per le masse che variano tra le 0.08 - $100 M_{Sun}$. Conseguenza di questo è la non linearità della relazione che si presenta invece come una legge di potenza: piccole differenze di massa implicano enormi cambiamenti nella luminosità . Dunque si ottiene che:

$$L \propto M^\alpha \tag{1.21}$$

L'esponente che compare nella relazione non è costante e varia lungo la sequenza principale e ed in base alla massa. Studiando attentamente la relazioni si possono attribuire per determinati intervalli i valori ad α :

Massa [M_{Sun}]	α
$M < 0.43 M_{Sun}$	2.3
$0.43 M_{Sun} < M < 2 M_{Sun}$	4
$2 M_{Sun} < M < 20 M_{Sun}$	3.5
$M > 20 M_{Sun}$	1

Table 1.2: Caption

L'esponente cambia sostanzialmente perchè nel nucleo della stella cambia, a seconda della massa, il metodo di produzione dell'energia -che può essere più o meno efficiente- ed il modo in cui questa viene trasportata (convezione o irraggiamento). Comunque questo metodo da buoni risultati solamente nel caso in cui le stelle siano nella sequenza principale, poichè giganti e nane bianche non seguono più questa relazione.

1.5 Massa delle galassie

Le galassie sono componenti fondamentali della struttura dell'universo su grande scala, per questo avere un metodo per determinarne la massa appare fondamentale. Esistono diversi tipi di galassie divise secondo la classificazione morfologica di Hubble: ellittiche, spirali normali e barrate (entrambi presentano un disco), irregolari, nane e peculiari. Ci concentreremo in particolare sulle prime due.

Galassie ellittiche : come lascia intendere il nome hanno forme ellissoidali più o meno eccentriche, sono essenzialmente prive di gas e l'unico presente è idrogeno ionizzato (HII) che perdura a causa dei lunghi tempi di raffreddamento e viene rifornito principalmente dal vento stellare. Le stelle presenti al loro interno sono giganti alla fine della loro vita o stelle di piccole dimensioni, ancora in sequenza principale. La formazione stellare appare del tutto assente probabilmente a causa dell'assenza di gas freddo e denso. Queste galassie non mostrano strutture interne di particolare interesse e sono essenzialmente tutte uguali, come fossero ogni volta riproduzioni in scala dello stesso sistema. Le dimensioni possono variare di moltissimo.

Galassie a spirale : sono caratterizzate da diverse strutture: presentano un bulge (nella pratica una galassia ellittica in miniatura), un disco composto di gas e stelle ed in fine la peculiarità che le definisce, ovvero i bracci. I bracci sembrano essere delle strutture totalmente indipendenti dal moto delle stelle e dell'ISM e pare non sia effettivamente sempre lo stesso gas quello di cui sono composti: non ci si spiegherebbe infatti perchè ci sia un grande tasso di formazione stellare al loro interno rispetto al disco. Quindi questi sarebbero piuttosto delle onde di densità quasi-stazionarie che ruotando comprimono le nubi di gas stimolandone il collasso. Un altro fatto interessante è che, diversamente da quanto ci si potrebbe aspettare, non sono soggette a rotazione differenziale (che ne comporterebbe l'attorcigliamento e quindi la sparizione della struttura in pochi miliardi di anni) bensì a quella di un corpo rigido. Le spirali presentano a differenza delle ellittiche grandi quantità di ISM in tutte le fasi, e sono genericamente più piccole delle prime.

1.5.1 Curve di rotazione

Per quel che riguarda le galassie a disco il metodo principale per derivarne la massa si basa sull'osservazione delle curve di rotazione, cioè quanto la velocità degli oggetti in orbita varia in funzione della distanza dal centro della galassia.

Il metodo principale per determinare le velocità sfrutta ancora una volta l'effetto

Doppler, infatti se le lunghezze d'onda osservate differiscono da quelle a riposo note sappiamo che:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad (1.22)$$

Queste osservazioni vengono fatte principalmente per $\lambda_0 \approx 21\text{cm}$, lunghezza alla quale corrisponde l'emissione di radiazione da parte dell'idrogeno neutro per l'inversione di spin dell'elettrone.

Dunque osservando le galassie spirali si notano a sinistra e destra del centro galattico shift doppler opposti, che permettono, se l'inclinazione della galassia è nota, di determinare la velocità di gas e stelle e quindi costruire le curve di rotazione.

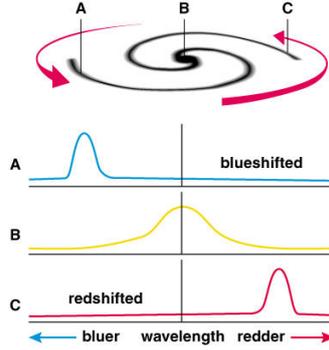


Figure 1.4: In questa immagine si vede come la rotazione della galassia influenza le lunghezze d'onda rispetto ad un osservatore.

Adesso immaginiamo che le galassie a disco, com'è lecito pensare, siano sistemi in cui vige l'equilibrio tra accelerazione centripeta e gravitazionale, con una distribuzione di velocità isotropa per cui $v_r \approx v_{tang}$ allora:

$$a_{cent} = \frac{v_r^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1.23)$$

ovvero, in generale:

$$v_r^2 = \frac{GM(r)}{r} \quad (1.24)$$

Ora supponendo la distribuzione di massa nel bulge sferica ed omogenea, con $\bar{\rho}$ la densità media:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}r^3 \quad (1.25)$$

cioè sostituendo nella (1.23)

$$v_r^2 = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}r^2 \Rightarrow v_r \propto r \quad (1.26)$$

Sostanzialmente cioè ci si aspetta una rotazione da corpo rigido, che è in buona approssimazione anche quella che si osserva.

Quando ci si allontana dal bulge e bisogna considerare le forze del disco la situazione diviene più complicata a livello matematico, quindi non verrà affrontato qui il calcolo esatto.

Ciò che conta è che, come per il sistema solare, ci si aspetta una decrescita nelle velocità simile a quella di tipo Kepleriano:

$$v_r \propto r^{-\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

Il problema nasce nelle osservazioni: mentre nel bulge la curva di rotazione sembra essere quella predetta, ciò non avviene per il disco nel quale le velocità di rotazione delle stelle sembrano rimanere costanti e sorprendentemente questo fenomeno si estende molto oltre i limiti visibili del disco galattico, complicando ancora il quadro generale. Questo fu scoperto osservando le nubi di idrogeno, che anche estremamente distanti dal centro galattico continuavano a mostrare velocità di rotazione simili a quelle del sole.

L'ipotesi più accreditata per spiegare questo fenomeno dunque è quella di massa mancante, che viene chiamata "materia oscura": materia che, semplicemente, si suppone non interagire con la radiazione né emetterne. Infatti i calcoli predittivi vengono fatti considerando il contributo in massa di stelle e gas, che quindi sono visibili. Questo crea enormi problemi soprattutto se si ritiene che la materia oscura debba essere tra l'80 – 95% della massa galattica. Di seguito la differenza tra una generica curva di rotazione osservata e quella attesa:

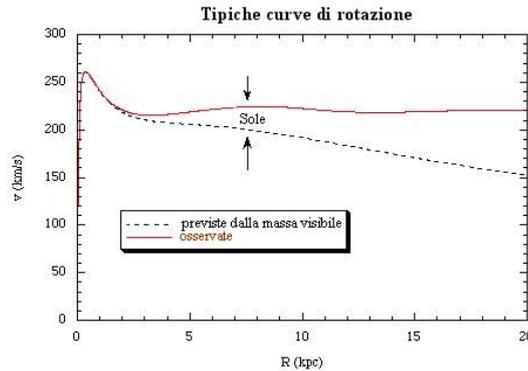


Figure 1.5: La differenza in area tra le due curve corrisponde alla massa "invisibile" che rende tale la curva di rotazione

1.5.2 Massa viriale per le galassie ellittiche

Nelle galassie ellittiche non è presente gas neutro per le osservazioni, per cui non è possibile costruire le curve di rotazione per stimare le masse delle galassie. Un fatto importante è però che le galassie ellittiche sono sistemi che si trovano all'equilibrio dinamico e dunque devono obbedire al Teorema del Viriale, che nella sua forma più semplice si presenta come:

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad (1.28)$$

Dove notiamo che essendo una galassia un sistema legato allora certamente avrà energia potenziale negativa. Poiché però le ellittiche ruotano molto lentamente rispetto alle spirali e le stelle seguono moti "caotici" non disposti su un unico piano ma con inclinazioni e forme diverse l'una dall'altra, la grandezza che stavolta prenderemo in considerazione per le galassie sarà la dispersione di velocità delle stelle σ_s . In effetti

le galassie ellittiche presentano grandi dispersioni che variano tra i 100-400 Km/s, mentre le spirali circa 20-50 Km/s.

L'energia cinetica in generale dovrebbe essere data da:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \quad (1.29)$$

Essendo però impossibile conoscere la velocità di tutte le stelle nelle galassie bisogna fare determinate assunzioni. Per esempio supponiamo che la velocità sia distribuita isotropicamente e che quindi sia in tutte le direzioni simile a quella misurata radialmente e tutte le stelle abbiano stessa massa:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \approx 3 \langle v_r^2 \rangle \quad (1.30)$$

quindi

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} M_{tot} \langle v_r^2 \rangle \quad (1.31)$$

Allora se sostituiamo v_r con la dispersione di velocità σ_s e inseriamo la (1.31) nella (1.28)

$$3M_{tot} \langle \sigma_s^2 \rangle = -U \quad (1.32)$$

se consideriamo la galassia come una sfera otteniamo che:

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (1.33)$$

da cui in fine

$$M_{tot} \langle \sigma_s^2 \rangle = \frac{GM_{tot}^2}{5R} \quad (1.34)$$

Dove R è il raggio medio della galassia, valore che da risultati più precisi nel caso di galassie di forme vicine a quella sferica.

In definitiva si può ricavare che:

$$M_{tot} = \frac{5R_{medio}}{G} \langle \sigma_s^2 \rangle \quad (1.35)$$

Se le galassie oggetto di studio non sono ragionevolmente approssimabili a sfere allora è preferibile usare il raggio effettivo R_e , che sarebbe il raggio entro il quale è contenuta metà della luminosità misurata della galassia. Questo metodo può essere utilizzato anche nel caso di ammassi di galassie.

Buchi neri super massicci e dispersione di velocità

Per le galassie ospitanti nel loro bulge un Supermassive Black Hole (SMBH) pare esistere una relazione logaritmica lineare tra la massa del SMBH e la dispersione di velocità stellare nella zona sferoidale:

$$M_{SMBH} \approx \beta \left(\frac{\sigma_e}{200 \text{ Km/s}} \right)^\alpha \times 10^9 M_{Sun} \quad (1.36)$$

Anche questa è una relazione empirica e di recente scoperta. Molti studi danno valori diversi di β ed α . Due tra i più accettati sono quelli calcolati su un campione di circa 50 galassie da Kormendy and Jo (2013) con $\beta \approx 0.3$, $\alpha \approx 4.38$.

Conclusioni

In questo breve scritto sono stati esaminati i più noti metodi per il calcolo delle masse. D'altro canto, come è emerso in modo evidente, nella stragrande maggioranza dei casi non è possibile ottenere risultati certi a causa di diversi fattori: nel caso dei sistemi binari c'è il continuo dubbio sull'inclinazione del sistema, con il limite di Chandrasekhar si conosce la massa di una nana bianca che però ha ormai cessato di esistere, il limite di Eddington fornisce un limite inferiore alle masse che è spesso poco realistico. Lo stesso vale anche per la relazione massa-luminosità : presenta grande dispersione ed il fatto che sia una legge di potenza, con esponente variabile, influisce negativamente sulla propagazione degli errori. Nel caso della relazione tra massa del SMBH e la dispersione di velocità purtroppo si hanno a seconda dello studio valori piuttosto diversi l'uno dall'altro, e gli astronomi spesso sono in discussione riguardo quale raggio considerare per determinare la dispersione di velocità : questo porta inevitabilmente a risultati diversi nella calibrazione della relazione. Per le galassie la situazione è ancora peggiore a causa delle difficoltà di studio di questi oggetti dovuta alle enormi distanze, non sempre conosciute con ottima precisione. Spesso quindi ci si trova con dubbi sulle masse di un oggetto maggiori del 50%, altre volte anche di 1-2 ordini di grandezza. Questo è dovuto purtroppo anche ai limiti tecnologici, poichè nonostante si abbiano a disposizione relazioni teoriche esatte, gli strumenti per misurare le grandezze necessarie ai calcoli hanno i loro limiti o le condizioni d'osservazione sono spesso proibitive.

Il punto è che nonostante da un secolo a questa parte l'astronomia si sia sviluppata moltissimo e sia particolarmente migliorata nella determinazione delle distanze, questo processo sembra evolversi più lentamente nel caso della massa, che allo stesso tempo è responsabile di una delle 4 interazioni fondamentali rivestendo quindi un ruolo di enorme importanza in fisica.

Bibliography

H. Karttunen P. Krger H. O. M. P. K. J. D., 2017, *Fundamental Astronomy*.
Springers

John Kormendy L. C. H., 2013, *The mass of the black hole in 3C 273*,
[doi:10.1146/annurev-astro-082708-101811](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082708-101811), 1, 55

Longair M., 2008, *galaxy formation*. Springers

S. Paltani M. T., 2004, *The mass of the black hole in 3C 273*,
[doi:10.1017/S1743921305004424](https://doi.org/10.1017/S1743921305004424), 1, 8

https://www.google.com/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwjGuI7n1LTkAhX0-aQKHwnjA34Qjhx6BAGBEAI&url=http%3A%2F%2Fchandra.harvard.edu%2Fedu%2Fformal%2Fvariable_stars%2Fbg_info.html&psig=A0vVaw3QFnoIDy4J_5d1nJ5cKvzY&ust=1567600421998796

<https://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/>

<http://ircamera.as.arizona.edu/NatSci102/NatSci102/lectures/darkmatter.htm>

<https://link.springer.com/content/pdf/bbm%3A978-88-470-1625-5%2F1.pdf>

<http://abyss.uoregon.edu/~js/ast122/lectures/lec10.html>

https://it.wikipedia.org/wiki/Stelle_pi%C3%B9_luminose_conosciute