

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**SUPERSIMMETRIA E SUPERGRAVITÀ  
IN  $0 + 1$  DIMENSIONI**

**Relatore:**  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

**Presentata da:**  
Lorenzo Salvi

Anno Accademico 2018/2019



# Abstract

In questa tesi si vuole studiare un modello supersimmetrico in  $0 + 1$  dimensioni contenente un campo bosonico e un campo fermionico. Questo viene descritto facendo uso delle variabili di Grassmann che sono quindi introdotte. Viene successivamente trattato, e utilizzato, il formalismo dei sistemi hamiltoniani vincolati alla Dirac, con particolare attenzione ai metodi di quantizzazione. Dunque si considera la teoria di gauge della supersimmetria in forma lagrangiana e hamiltoniana; essa risulta essere una teoria della gravità, detta supergravità. Viene infine costruita l'azione quantistica sfruttando il metodo BRST.

*Alla mia famiglia*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Preludio</b>	<b>3</b>
1.1 Numeri di Grassmann . . . . .	3
1.2 Formalismo hamiltoniano pseudoclassico . . . . .	5
1.3 Sistemi hamiltoniani vincolati . . . . .	7
1.3.1 Vincoli di seconda classe . . . . .	8
1.3.2 Vincoli di prima classe . . . . .	9
<b>2 Supersimmetria N=1 rigida</b>	<b>15</b>
<b>3 Supergravità</b>	<b>20</b>
3.1 Modello Classico . . . . .	20
3.2 Quantizzazione . . . . .	28



# Introduzione

Il concetto di simmetria ha guidato lo sviluppo della fisica delle alte energie negli ultimi 70 anni con grandi risultati, come il Modello Standard delle particelle elementari. Una particolare simmetria che ha suscitato particolare interesse è la supersimmetria; questa, fondamentalmente, è una simmetria di un sistema fisico per cui, ad ogni particella bosonica, viene associata una particella fermionica e viceversa, in modo tale che la fisica del sistema sia invariante per scambi tra queste coppie di particelle.

Introdotta verso l'inizio degli anni '70 con lo studio delle stringhe fermioniche, è attualmente sfruttata principalmente nella ricerca di teorie che superino il Modello Standard delle particelle elementari come le teorie di superstringa o il Minimal Supersymmetric Standard Model, anche se il suo utilizzo è decisamente più ampio della sola fisica delle alte energie.[1]

La caratteristica principale che ha reso questo principio così rilevante nel panorama della fisica teorica si osserva quando si trasforma la simmetria rigida in una simmetria di gauge: la richiesta dell'invarianza della teoria per trasformazioni di supersimmetria locali, cioè dipendenti dalla posizione, incorpora automaticamente l'invarianza per trasformazioni locali di coordinate, cioè la relatività generale di Einstein. In pratica dove precedentemente si considerava uno spaziotempo piatto ora se ne osserva uno dinamico e per questo motivo il modello è detto di supergravità; la sua quantizzazione dà origine alla particella detta gravitone ed alla sua controparte, il gravitino. Sfortunatamente per ora non è stato ancora individuato nessuno dei partner delle particelle che ci si aspetta di trovare in una teoria supersimmetrica, ma la ricerca continua. È comunque illuminante considerare che esiste una versione della supersimmetria che è stata sperimentalmente verificata già nel 1922 da Stern e Gerlach. Difatti, mentre solitamente la supersimmetria agisce sullo spaziotempo, è possibile richiedere che una particella relativistica sia supersimmetrica sulla linea di mondo. In questo modo si ottiene che la particella soddisfi l'equazione di Dirac e quindi deve possedere uno spin semintero e l'esistenza di particelle con spin semintero è già stata ampiamente verificata.

In questa tesi si vuole quindi analizzare un semplice modello supersimmetrico in una dimensione che contiene un campo bosonico  $\varphi(t)$  e un campo fermionico  $\lambda(t)$ . Per fare questo nel Capitolo 1 si introduce il concetto di numeri di Grassmann, i quali anticommutano tra loro e quindi possono rappresentare a livello classico dei gradi di libertà

fermionici; quindi si estende il formalismo hamiltoniano a sistemi fisici che contengono variabili di Grassmann e si presenta la teoria dei sistemi hamiltoniani vincolati e della loro quantizzazione. Nel Capitolo 2 si definiscono le trasformazioni supersimmetriche rigide del campo bosonico e del campo fermionico, si costruisce il modello sia nella sua formulazione lagrangiana che hamiltoniana e viene calcolato il generatore della trasformazioni SUSY. Infine nel Capitolo 3 si affronta la versione del modello con supersimmetria locale e si dimostra che compare una nuova simmetria, per trasformazioni generali di coordinate. Si vuole dunque costruire una lagrangiana e un hamiltoniana quantistica per la supergravità ma per fare questo è necessario prima fissare il gauge, cioè eliminare le configurazioni ridondanti dei campi scegliendone una. Ci sono vari modi per quantizzare una teoria di gauge e, per questo modello, è stato scelto il metodo BRST, uno dei più generali. In questo metodo lo spazio delle fasi classico viene esteso con nuovi gradi di libertà non fisici e, mentre si perde la simmetria di gauge originale, si ritrova una nuova simmetria globale detta di BRST che contiene le informazioni sulla simmetria iniziale.



# Capitolo 1

## Preludio

Il modello che si vuole studiare in questo elaborato non può essere formulato facendo solamente uso di funzioni, o campi, di numeri reali, ma è necessario introdurre una diversa algebra che abbia la proprietà di anticommutazione. In questo modo è possibile implementare a livello classico, o più correttamente pseudoclassico, gradi di libertà fermionici e quindi particelle con spin come fermioni di Majorana o di Dirac.

In questo capitolo dunque si vuole introdurre brevemente il concetto di numero di Grassmann, le sue principali proprietà e l'operazione di integrazione e differenziazione per queste variabili.

Verrà inoltre estesa l'usuale struttura hamiltoniana per tenere conto di queste nuove variabili anticommutanti con l'introduzione di parentesi di Poisson che rispettano delle proprietà graduate. Infine si definirà il concetto di sistema hamiltoniano vincolato, con la classificazione alla Dirac, e di come si possano risolvere questi vincoli per poterne studiare la dinamica e procedere alla quantizzazione del modello.

### 1.1 Numeri di Grassmann

Per descrivere correttamente una particella fermionica in un sistema classico è necessario introdurre un nuovo tipo di variabili attraverso cui si possano stabilire le corrette relazioni di anticommutazione. Queste variabili, dette numeri di Grassmann, saranno gli elementi di un'algebra di Grassmann  $n$ -dimensionale  $\mathcal{G}$ , generata da elementi di base  $\theta_i$  con  $i = 1, \dots, n$  tali che

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \quad (1.1)$$

Si possono definire variabili di Grassmann reali o complesse, a cui è associata quindi un'operazione di coniugazione complessa  $\bar{\theta}$ ; le variabili saranno reali se vale

$$\bar{\theta} = \theta \quad (1.2)$$

Per prodotti di variabili di Grassmann il complesso coniugato implica un'inversione dell'ordine del prodotto

$$\overline{\theta_1\theta_2} = \overline{\theta_2}\overline{\theta_1} \quad (1.3)$$

Quindi si ottiene l'interessante proprietà per cui il prodotto tra due variabili reali è un numero immaginario puro infatti

$$\overline{\theta_1\theta_2} = -\theta_1\theta_2 \quad (1.4)$$

mentre il prodotto reale di due numeri di Grassmann è dato da

$$\overline{i\theta_1\theta_2} = i\theta_1\theta_2 \quad (1.5)$$

Data la proprietà di anticommutazione si ottiene che

$$\theta_i^2 = 0 \quad (1.6)$$

e quindi le funzioni di variabili di Grassmann hanno tutte un'espansione di Taylor finita; ad esempio, per  $n = 2$ , si ha che

$$f(\theta_1, \theta_2) = f_0 + f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_3\theta_1\theta_2 \quad (1.7)$$

con  $f_0, f_1, f_2$  numeri reali o complessi.

I termini che contengono un numero pari di variabili di Grassmann sono detti bosonici, commutanti o pari mentre termini che ne contengono un numero dispari sono detti fermionici, anticommutanti o dispari.

Essendo ogni funzione al più lineare rispetto ad una variabile di Grassmann la derivazione è un'operazione molto semplice; è infatti sufficiente decidere se la variabile rispetto a cui si sta derivando viene tolta, nell'espansione di Taylor, dalla sinistra o dalla destra. Nel primo caso si avrà la derivata sinistra (quella più utilizzata)

$$\frac{\partial_L}{\partial\theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = f_1 + f_3\theta_2 \quad (1.8)$$

mentre per la derivata destra

$$\frac{\partial_R}{\partial\theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = f_1 - f_3\theta_2 \quad (1.9)$$

Allo stesso modo si possono definire gli incrementi da sinistra o da destra modificando la posizione di  $\delta\theta$ :

$$\delta f = \delta\theta \frac{\partial_L f}{\partial\theta} = \frac{\partial_R f}{\partial\theta} \delta\theta \quad (1.10)$$

L'integrazione è definita alla Berezin, in modo tale che sia identica alla differenziazione quindi

$$\int d\theta \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} \quad (1.11)$$

in questo modo si ottiene una misura invariante per traslazioni

$$\int d\theta f(\theta + \eta) = \int d\theta f(\theta) \quad (1.12)$$

## 1.2 Formalismo hamiltoniano pseudoclassico

Il formalismo hamiltoniano deve essere adattato per fornire le corrette equazioni differenziali del moto al primo ordine anche per gradi di libertà fermionici.

Per un sistema classico con coordinate dello spazio delle fasi  $(x, p)$  l'azione assume la forma

$$S[x, p] = \int [p\dot{x} - H(x, p)] dt \quad (1.13)$$

dove il primo termine  $\dot{x}p$  è detto termine simplettico e fissa la struttura dello spazio delle fasi dettata dalle parentesi di Poisson. Si può scrivere in maniera più simmetrica come

$$S[x, p] = \int \left[ \frac{1}{2} (p\dot{x} - x\dot{p}) - H(x, p) \right] dt = \int \left[ \frac{1}{2} z^a (\Omega^{-1})_{ab} \dot{z}^b - H(z) \right] dt \quad (1.14)$$

con  $z^a = (x, p)$ .

Il termine simplettico contiene la matrice costante e invertibile omonima

$$(\Omega^{-1})_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Omega^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Questa matrice viene quindi utilizzata per definire le parentesi di Poisson tra due funzioni  $F(x, p)$ , e  $G(x, p)$

$$\{F, G\}_P = \frac{\partial F}{\partial z^a} \Omega^{ab} \frac{\partial G}{\partial z^b} \quad (1.16)$$

Si ottengono le parentesi fondamentali, cioè quelle tra le coordinate

$$\{z^a, z^b\}_P = \Omega^{ab} \quad (1.17)$$

Le parentesi di Poisson hanno le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \{F, G\}_P &= -\{G, F\}_P \\ \{F, GH\}_P &= \{F, G\}_P H + G \{F, H\}_P \\ \{F, \{G, H\}_P\}_P + \{G, \{H, F\}_P\}_P + \{H, \{F, G\}_P\}_P &= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

È quindi possibile utilizzare il metodo della quantizzazione canonica sostituendo le variabili  $z^a$  con operatori lineari  $\hat{z}^a$  che agiscono su spazi di Hilbert i cui vettori rappresentano gli stati del sistema; le relazioni di commutazione sono fissate dalle parentesi di Poisson classiche con l'aggiunta di un termine  $i\hbar$

$$[\hat{z}^a, \hat{z}^b] = i\hbar \Omega^{ab} \quad (1.19)$$

Questa costruzione può essere estesa a sistemi che contengono variabili di Grassmann, sarà sufficiente tenere conto di eventuali cambiamenti di segno dovuti alle variabili anti-commutanti.

Dette  $Z^A = (x^i, p_i, \theta^\alpha)$  le coordinate dello spazio delle fasi esteso con le variabili di Grassmann  $\theta^\alpha$ , l'azione può essere scritta in modo formalmente identico come

$$S [Z^A] = \int dt \left( \frac{1}{2} Z^A (\Omega^{-1})_{AB} \dot{Z}^B - H(Z) \right) \quad (1.20)$$

Scrivendo il termine simplettico in modo più simmetrico si nota che la matrice  $\Omega^{AB}$  è in forma diagonale a blocchi e antisimmetrica per quanto riguarda le coordinate bosoniche, simmetrica per quanto riguarda le coordinate fermioniche e nulla per elementi fuori dalla diagonale. Quindi, indicando le variabili  $Z^A = (z^a, \theta^\alpha)$ , si ottiene

$$\Omega^{AB} = \begin{pmatrix} \Omega^{ab} & 0 \\ 0 & \Omega^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

con  $\Omega^{ab}$  antisimmetrica e  $\Omega^{\alpha\beta}$  simmetrica.

Possiamo usare  $\Omega^{AB}$  per definire le parentesi di Poisson

$$\begin{aligned} \{F, G\}_P &= \frac{\partial_R F}{\partial Z^A} \Omega^{AB} \frac{\partial_L G}{\partial Z^B} \\ \{Z^A, Z^B\}_P &= \Omega^{AB} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Date delle funzioni  $F, G$  con una parità di Grassmann definita, la si può indicare con il termine  $(-1)^{\epsilon_F}$  dove  $\epsilon_F = 0$  se  $F$  è pari e  $\epsilon_F = 1$  se  $F$  è dispari.

Quindi si ottiene che le parentesi di Poisson (1.22) rispettano delle versioni graduate delle proprietà (1.18)

$$\begin{aligned} \{F, G\}_P &= (-1)^{\epsilon_F \epsilon_G + 1} \{G, F\}_P \\ \{F, GH\}_P &= \{F, G\}_P H + (-1)^{\epsilon_F \epsilon_G} G \{F, H\}_P \\ \{F, \{G, H\}_P\}_P + (-1)^{\epsilon_F (\epsilon_G + \epsilon_H)} \{G, \{H, F\}_P\}_P + (-1)^{\epsilon_H (\epsilon_F + \epsilon_G)} \{H, \{F, G\}_P\}_P &= 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Le equazioni del moto sono del primo ordine e possono essere espresse, come ci si aspetta, tramite le parentesi di Poisson

$$\dot{Z}^A = \Omega^{AB} \frac{\partial_L H}{\partial Z^B} \quad \rightarrow \quad \dot{Z}^A = \{Z^A, H\}_P \quad (1.24)$$

Si può quantizzare il sistema il modo canonico utilizzando però relazioni di commutazione e anticommutazione

$$\left[ \hat{Z}^A, \hat{Z}^B \right] = i\hbar \Omega^{AB} \quad (1.25)$$

dove

$$[\cdot, \cdot] = \begin{cases} \{\cdot, \cdot\} & \text{anticommutatore se le due variabili sono fermioniche} \\ [\cdot, \cdot] & \text{commutatore negli altri casi} \end{cases} \quad (1.26)$$

è detto commutatore graduato. [2]

### 1.3 Sistemi hamiltoniani vincolati

I sistemi hamiltoniani vincolati emergono tipicamente quando si cerca di passare ad una formulazione hamiltoniana a partire da una lagrangiana singolare, cioè una lagrangiana  $L(q^i, \dot{q}^i)$  tale che

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = 0 \quad (1.27)$$

Quando si cerca la relazione tra momenti coniugati e velocità si trova che

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (1.28)$$

non è invertibile.

La relazione (1.28) induce dei vincoli tra le coordinate canoniche dello spazio delle fasi  $(q^i, p_i)$  e quindi definisce un'ipersuperficie dove ha luogo la dinamica.

I vincoli possono essere classificati in vincoli di prima classe o seconda classe. Quelli di prima classe sono legati a simmetrie di gauge e quindi generano trasformazioni di gauge sull'ipersuperficie tra punti che descrivono la stessa fisica; l'insieme di questi punti da origine ad un'orbita di gauge ed ogni orbita differente corrisponde a differenti configurazioni fisiche.

I vincoli di seconda classe invece non sono legati a simmetrie di gauge ma compaiono quando si cerca di portare in formulazione hamiltoniana un sistema che è già essenzialmente hamiltoniano; essi possono essere trattati usando le parentesi di Dirac, una modifica delle parentesi di Poisson valida sulla superficie del moto.

Le parentesi di Dirac permettono di risolvere i vincoli per un insieme di coordinate indipendenti sull'ipersuperficie che quindi può essere utilizzata come uno spazio delle fasi ridotto su cui si svolge la dinamica.

Si possono anche classificare i vincoli in primari e secondari: sono detti primari se valgono anche senza utilizzare le equazioni del moto, sono detti secondari altrimenti.[3]

In generale i vincoli di prima classe avranno la forma

$$\phi_a(q, p) \approx 0 \quad (1.29)$$

dove il simbolo  $\approx$  indica che l'equazione del vincolo si annulla solo sulla superficie del vincolo, non in tutto lo spazio delle fasi completo.

L'Hamiltoniana canonica  $H_0$  è definita allora come

$$H \equiv p_i \dot{q}^i - L \approx H_0 \quad (1.30)$$

cioè si possono usare i vincoli per semplificare la forma dell'hamiltoniana ed eliminare le eventuali dipendenze dalle velocità. Si definisce l'hamiltoniana estesa come

$$H_E = H_0 + l^\alpha \phi_\alpha \quad (1.31)$$

dove gli  $l^\alpha$  sono i moltiplicatori di Lagrange legati ai vincoli; questa Hamiltoniana è quella adatta per essere usata nell'intero spazio delle fasi e può quindi generare l'evoluzione temporale attraverso le parentesi di Poisson. La dinamica generata da  $H_E$  deve necessariamente non portare al di fuori dell'ipersuperficie e quindi deve valere

$$\dot{\phi}_a = \{\phi_a, H_E\}_P \approx 0 \quad (1.32)$$

Si può ottenere questo risultato o fissando i valori di alcuni moltiplicatori di Lagrange o ottenendo nuovi vincoli  $\xi_\alpha$ .

### 1.3.1 Vincoli di seconda classe

Dato uno spazio delle fasi con coordinate canoniche  $z^A$  e un insieme di vincoli  $D_a(z) \approx 0$  che identificano una certa ipersuperficie, essi sono detti di seconda classe se

$$\det \{D_a, D_b\}_P |_{D_a=0} \neq 0 \rightarrow \det \{D_a, D_b\}_P \not\approx 0 \quad (1.33)$$

cioè il determinante deve essere non nullo sulla superficie del vincolo.

Questa condizione implica che la struttura simplettica dello spazio delle fasi ridotta alla superficie del vincolo è ancora una struttura simplettica. È quindi possibile utilizzare una modifica delle parentesi di Poisson detta parentesi di Dirac per studiare la dinamica sull'ipersuperficie con le variabili dello spazio delle fasi completo

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_P - \{A, D_a\}_P (M^{-1})^{ab} \{D_b, B\}_P, \quad M_{ab} \equiv \{D_a, D_b\}_P \quad (1.34)$$

che risulta essere ben definito sulla superficie del vincolo.

Si può osservare che le parentesi di Dirac dei vincoli si annullano per ogni funzione  $A$

$$\{A, D_a\}_D = 0 \quad (1.35)$$

È quindi possibile utilizzare le equazioni dei vincoli per trovare un insieme di coordinate dello spazio delle fasi ridotto.

Ad esempio consideriamo un sistema nelle variabili  $(q, Q)$  con

$$L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q}) = Q\dot{q} - V(q, Q) \quad (1.36)$$

I momenti coniugati sono dati da

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = Q \quad P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = 0 \quad (1.37)$$

cioè sono stati ottenuti due vincoli

$$\Phi_1 = p - Q = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_2 = Q = 0 \quad (1.38)$$

che sono di seconda classe. Utilizzando le parentesi di Dirac, che in questo caso coincidono con le parentesi di Poisson su  $(q, p)$ , si risolvono i vincoli imponendo  $Q = p$  e  $P = 0$  ottenendo così lo spazio delle fasi ridotto  $(q, p)$ .

### 1.3.2 Vincoli di prima classe

I vincoli  $C_\alpha(z)$  sono detti di prima classe se

$$\{C_\alpha, C_\beta\}_P = f_{\alpha\beta}^\gamma C_\gamma \quad (1.39)$$

con  $f_{\alpha\beta}^\gamma$  dette funzioni di struttura. Questa definizione implica che

$$\{C_\alpha, C_\beta\}_P \approx 0 \quad (1.40)$$

La proprietà fondamentale dei vincoli di prima classe consiste nel fatto che generano trasformazioni di gauge agendo tramite le parentesi di Poisson; infatti, data una funzione  $A$  generica, la sua trasformazione di gauge infinitesima è definita da

$$\delta A = \{A, \epsilon^\alpha C_\alpha\}_P \quad (1.41)$$

con  $\epsilon^\alpha = \epsilon^\alpha(t)$  parametro infinitesimo locale. In particolare la trasformazione delle coordinate  $z^A$  è

$$\delta z^A = \{z^A, \epsilon^\alpha C_\alpha\}_P \quad (1.42)$$

Tutti i punti presenti sulla superficie del vincolo collegati da una trasformazione di gauge formano le orbite di gauge, classi di equivalenza di punti che descrivono le stesse configurazioni fisiche. Funzioni  $B$  tali che

$$\delta B \approx 0 \quad (1.43)$$

sono dette gauge invarianti e questo succede se

$$\{B, C_\alpha\}_P = b_\alpha^\beta C_\beta \quad (1.44)$$

per qualche funzione  $b_\alpha^\beta$ .

L'evoluzione temporale è generata da hamiltoniana che deve essere gauge invariante, quindi deve valere

$$\{H, C_\alpha\}_P = h_\alpha^\beta C_\beta \quad (1.45)$$

dove con  $H$  si intende  $H_0$ .

Tutte queste informazioni si possono ottenere da un principio di azione che fa uso delle variabili  $z^A$  e dei moltiplicatori di Lagrange  $\lambda^\alpha$

$$S[z^A, \lambda^\alpha] = \int dt \left( \frac{1}{2} z^A (\Omega^{-1})_{AB} \dot{z}^B - H(z) - \lambda^\alpha C_\alpha(z) \right) \quad (1.46)$$

Il primo termine è il termine simplettico che fissa le parentesi fondamentali

$$\{z^A, z^B\}_P = \Omega^{AB} \quad (1.47)$$

mentre le equazioni del moto dei moltiplicatori di Lagrange  $\lambda^\alpha$  riproducono le equazioni vincolari  $C_\alpha = 0$ .

Per verificare che i vincoli svolgano anche la funzione di generatori delle trasformazioni di gauge si controlla se l'azione è invariante per trasformazioni di gauge definite da

$$\delta z^A = \{z^A, \epsilon^\alpha C_\alpha\}_P \quad (1.48)$$

$$\delta \lambda^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha - \epsilon^\beta \lambda^\gamma f_{\gamma\beta}^\alpha - \epsilon^\beta h_\beta^\alpha \quad (1.49)$$

dove la trasformazione di gauge dei moltiplicatori dipende dalla derivata del parametro di gauge e inoltre contiene le funzioni di struttura dell'algebra e le funzioni  $h_\beta^\alpha$  legate a (1.45).

Si vuole ricordare che le parentesi di Poisson originali sono singolari sull'ipersuperficie e quindi le parentesi di Dirac non possono essere definite in questo caso. Esistono però tre metodi alternativi per costruire la quantizzazione canonica di sistemi con vincoli di prima classe: il metodo dello spazio delle fasi ridotto, il metodo di Dirac e il metodo BRST.

Il metodo dello spazio delle fasi ridotto si basa sulla ricerca di una funzione  $F^\alpha = 0$  di gauge fixing che sceglie un rappresentate da ogni orbita di gauge; il gauge è scelto correttamente se l'insieme  $(C_\alpha, F^\alpha)$  forma un sistema di vincoli di seconda classe che identificano uno spazio delle fasi ridotto, su cui sarà possibile definire delle parentesi di Dirac che permettono quindi di trovare un insieme di coordinate dello spazio ridotto. La quantizzazione canonica quindi procede in maniera abituale utilizzando le parentesi di Dirac.

Nel metodo di Dirac si preferisce usare lo spazio delle fasi intero per poter sfruttare la struttura simplettica canonica, anche se le configurazioni fisiche finali dovranno stare sulla superficie del vincolo.

Si utilizzano quindi le parentesi di Poisson per quantizzare in maniera canonica costruendo degli operatori lineari che agiscono su uno spazio di Hilbert per tutte le variabili dello spazio delle fasi, anche se non tutti gli stati saranno effettivamente fisici. Anche i vincoli classici diventano operatori  $\hat{C}_\alpha$  che generano trasformazioni di gauge a livello quantistico; questi operatori selezionano i vettori

$$|\psi_{ph}\rangle \quad (1.50)$$

dello spazio di Hilbert che rappresentano configurazioni gauge invarianti, cioè fisiche. Questo si ottiene richiedendo che

$$\hat{C}_\alpha |\psi_{ph}\rangle = 0 \quad (1.51)$$

per ogni  $\alpha$ . Sarà quindi necessario definire un prodotto scalare appropriato in modo da formare uno spazio di Hilbert con norma definita positiva.

Il metodo BRST è il più generale e concede una grande libertà nella scelta delle condizioni di gauge fixing; si basa su un allargamento dello spazio delle fasi che si ottiene



aggiungendo dei gradi di libertà in più detti di ghost. In questo spazio delle fasi esteso si trova una nuova simmetria, la BRST, che racchiude in se tutte le informazioni sull'algebra di gauge del vincolo di prima classe.

In primo luogo si assume che i vincoli  $C_\alpha$  siano indipendenti tra di loro e quindi si aggiungono allo spazio delle fasi originale delle variabili ghost  $c^\alpha$  e i loro momenti coniugati  $P_\alpha$  associati, una per ogni vincolo  $C_\alpha$  ma con opposta parità di Grassmann.

I ghost avranno delle parentesi fondamentali date da

$$\{P_\alpha, c^\beta\}_P = -\delta_\alpha^\beta \quad (1.52)$$

che corrispondono a termini nell'azione

$$S = \int dt (\dot{c}^\alpha P_\alpha + \dots) \quad (1.53)$$

A queste variabili si associa un numero di ghost pari a +1 per i ghost e -1 per i loro momenti coniugati.

Nello spazio delle fasi esteso, detto di BRST, si definisce la carica BRST  $Q$ : deve essere reale, anticommutante e di numero di ghost +1.

Quindi  $Q$  agisce sulle variabili di fase originali come una trasformazione di gauge con i ghost  $c^\alpha$  che sostituiscono i parametri di gauge;  $Q$  è nilpotente cioè

$$\{Q, Q\}_P = 0 \quad (1.54)$$

Queste condizioni sono sufficienti per identificare la carica in maniera univoca; essa prende la forma di

$$Q = c^\alpha C_\alpha + (-1)^{c_\beta} \frac{1}{2} c^\beta c^\alpha f_{\alpha\beta}^\gamma P_\gamma + \dots \quad (1.55)$$

dove  $(-1)^{c_\beta}$  indica la parità di Grassmann del ghost  $c_\beta$ ; in questo modo tale formula funziona per ogni vincolo. Termini di ordine maggiore in  $P_\alpha$  compaiono generalmente se le costanti di struttura non sono costanti.

Il fatto che la carica sia nilpotente permette di definire il concetto di coomologia, cioè di uno spazio vettoriale i cui elementi sono classi di equivalenza.

Si consideri uno spazio vettoriale  $V$  e un operatore lineare  $A : V \rightarrow V$  tale che  $A^2 = 0$ , cioè  $A$  sia nilpotente; il nucleo di  $A$  è definito come l'insieme di vettori che vengono mandati nel vettore nullo da  $A$  quindi

$$\text{Ker}(A) = \{v \in V \mid A(v) = 0\} \quad (1.56)$$

e questi vettori sono detti chiusi.

L'immagine di  $A$  invece è data dall'insieme di vettori che sono immagini di un vettore di  $V$  cioè

$$\text{Im}(A) = \{v \in V \mid \exists u \in V : v = A(u)\} \quad (1.57)$$

e sono detti esatti.

A causa della nilpotenza è chiaro che  $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$  cioè tutti i vettori esatti sono chiusi ma non vale il viceversa. La coomologia è quindi definita come l'insieme delle classi di equivalenza  $|v\rangle$  di vettori chiusi che differiscono per vettori esatti quindi

$$v \sim v' \quad \text{se} \quad v' = v + A(u) \quad (1.58)$$

Lo spazio formato da queste classi di equivalenza è detto gruppo di coomologia ed è indicato come

$$H(A) = \frac{\text{Ker}(A)}{\text{Im}(A)} \quad (1.59)$$

Quindi differenti classi di coomologia identificano diverse osservabili fisiche.

L'operatore

$$\{Q, \cdot\}_P \quad (1.60)$$

che agisce sulla funzione  $A$  dello spazio delle fasi BRST come  $\{Q, A\}$  è un operatore nilpotente e quindi le osservabili fisiche vengono definite dalle classi di coomologia di questo operatore, con numero di ghost nullo, in modo che le osservabili fisiche  $A$  siano funzioni dello spazio delle fasi BRST invarianti.

Si noti che se due osservabili  $A, A'$  sono tali che esiste una funzione  $B$  per cui

$$A' = A + \{Q, B\}_P \quad (1.61)$$

allora le due osservabili descrivono la stessa situazione fisica.

In particolare si può dimostrare che esiste hamiltoniana BRST invariante

$$\{Q, H\}_P = 0 \quad (1.62)$$

per cui possiamo definire una classe di hamiltoniane equivalenti

$$H' = H + \{Q, \Psi\}_P \quad (1.63)$$

con  $\Psi$  fermione di gauge. La scelta nella definizione di  $\Psi$  riflette la libertà di scegliere differenti gauge per fissare la dinamica dei gradi di libertà non fisici.

La struttura di coomologia definita dalla simmetria BRST si trasporta alla teoria quantistica che quindi contiene due operatori fondamentali  $\hat{Q}$  e  $\hat{H}$  tale che  $\hat{Q}$  è hermitiano con numero di ghost +1 e  $\hat{Q}^2 = 0$ .

Gli stati fisici, che devono avere numero di ghost nullo, sono quindi definiti dalla coomologia di  $\hat{Q}$  su tutto lo spazio di Hilbert cioè gli stati fisici sono dati da quei vettori tali che

$$\hat{Q} |\psi_{ph}\rangle = 0 \quad (1.64)$$

Anche in questo caso possiamo definire stati fisici equivalenti se

$$|\psi_{ph}\rangle = |\psi_{ph}\rangle + \hat{Q} |\chi\rangle \quad (1.65)$$

per qualche  $|\chi\rangle$ . Allo stesso modo un operatore è detto BRST invariante se

$$\left[ \hat{\phi}, \hat{A}_{ph} \right] = 0 \quad (1.66)$$

e due operatori sono detti equivalenti se

$$\hat{A}_{ph} \sim \hat{A}'_{ph} = \hat{A}_{ph} + \left[ \hat{Q}, \hat{B} \right] \quad (1.67)$$

con  $\hat{B}$  operatore.[4]

Per comprendere meglio questi tre metodi si può utilizzare un semplicissimo sistema con una simmetria di gauge:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \quad (1.68)$$

Chiaramente la variabile  $y(t)$  non è fisica, difatti la sua dinamica non è fissata da nessuna equazione del moto, ed il sistema è invariante per trasformazioni di gauge date da

$$\delta y(t) = \epsilon(t) \quad (1.69)$$

dove  $\epsilon(t)$  è il parametro della trasformazione.

Per passare alla forma hamiltoniana si definiscono i momenti coniugati

$$p_x = \dot{x}, \quad p_y = 0 \quad (1.70)$$

dove la seconda equazione fornisce un vincolo di prima classe  $\Phi = p_y = 0$ . L'hamiltoniana canonica è data da

$$H_0 = \frac{1}{2} p_x^2 \quad (1.71)$$

e si ottiene facilmente che  $\{H_0, \Phi\}_P = 0$  e non sono necessari altri vincoli.

L'azione assume la forma

$$S[x, y, p_x, p_y, \lambda] = \int dt \left( p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{1}{2} p_x^2 - \lambda p_y \right) \quad (1.72)$$

con  $\lambda$  moltiplicatore di Lagrange

Per utilizzare il metodo dello spazio delle fasi ridotto si deve scegliere una funzione per fissare il gauge come  $F = y = 0$  (condizione che può essere ottenuta se si sceglie  $y(t) = 0$ ); la coppia  $(C, F)$  forma dunque un insieme di vincoli di seconda classe che si possono usare per eliminare le variabili non fisiche  $y$  e  $p_y$  per ottenere lo spazio ridotto  $(x, p_x)$  sul quale le parentesi di Dirac assumono la forma solita delle parentesi di Poisson. A questo punto si può quantizzare il sistema in modo canonico.

Per il metodo di Dirac si consideri di aver già quantizzato l'intero spazio delle fasi,

ottenendo quindi quattro operatori  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{p}_x$  e  $\hat{p}_y$  i quali agiscono sullo spazio di Hilbert dato dalle funzioni  $\psi(x, y)$ . Gli stati fisici saranno solamente quelli per cui vale

$$\hat{p}_y \psi_{ph}(x, y) = 0 \quad (1.73)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi_{ph} = 0 \quad (1.74)$$

cioè solo le funzioni indipendenti da  $y$  sono quelle che rappresentano stati fisici, così come ci si aspetta.

Per correggere il prodotto scalare si può utilizzare una funzione delta di Dirac

$$\langle \psi_{ph,1} | \psi_{ph,2} \rangle = \int dx dy \delta(y) \psi_{ph,1}^*(x) \psi_{ph,2}(x) \quad (1.75)$$

Infine per il metodo BRST si aggiunga allo spazio delle fasi il ghost  $c$  e il suo momento coniugato  $P$ , entrambe variabili di Grassmann; si può quindi passare agli operatori ottenendo  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}_x$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{p}_y$ ,  $\hat{c}$  e  $\hat{P}$ . Questi operatori agiscono su uno spazio di Hilbert BRST formato dalle funzioni  $\psi(x, y, c) = \psi_0(x, y) + \psi_1(x, y)c$  ma solo le funzioni per cui vale

$$\hat{Q}|\psi\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} \psi_0(x, y) = 0 \quad (1.76)$$

con carica BRST  $\hat{Q} = \hat{c}\hat{p}_y = -ic\frac{\partial}{\partial y}$ .

Quindi la parte fisica della funzione d'onda  $\psi(x, y, c)$  è data dalla componente  $\psi_0(x)$  indipendente da  $y$  mentre  $\psi_1$  rimane libera ma, essendo BRST esatta, non influenza la fisica del sistema.

# Capitolo 2

## Supersimmetria N=1 rigida

Il modello più semplice e completo che contiene la supersimmetria è dato da uno spazio-tempo con 0 dimensioni spaziali e 1 temporale dove sono presenti due particelle puntiformi rappresentate da un campo bosonico reale  $\varphi(t)$  e un campo fermionico reale  $\lambda(t)$ ;  $\varphi(t)$  è una funzione liscia della variabile reale  $t$  mentre  $\lambda(t)$  è una funzione di  $t$  a valori nei numeri di Grassmann.

L'azione per questi campi è definita in modo abituale come  $S = \int L dt$  con

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} \quad (2.1)$$

Questa azione viene ricavata troncando l'azione di Klein-Gordon per un campo non massivo e l'azione di Dirac per uno spinore reale.

Si può osservare in modo immediato che questa Lagrangiana è singolare, infatti  $\det \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$ , dove  $p_i$  sono i momenti coniugati. Quindi l'hamiltoniana canonica per questo sistema risulta essere

$$H = \dot{q}_i p^i - L = \frac{1}{2}p_\varphi^2 \quad (2.2)$$

dove si nota l'assenza della coordinata fermionica e del suo momento coniugato.

Le trasformazioni di supersimmetria devono trasformare il campo bosonico in un campo fermionico e viceversa quindi il parametro della trasformazione deve essere una variabile anticommutante  $\epsilon$ ; le coppie di particelle che si trasformano l'una nell'altra sotto SUSY sono dette superpartner. Si può dimostrare sfruttando la dimensionalità dei campi che le trasformazioni sono date da

$$\delta\varphi = i\epsilon\lambda \quad \text{e} \quad \delta\lambda = -\dot{\varphi}\epsilon \quad (2.3)$$

Per provare se queste trasformazioni di simmetria sono corrette è necessario verificare se lasciano invariata l'azione; per comodità successiva si supponga che il parametro sia

locale, cioè dipendente dalla coordinata ( $\epsilon = \epsilon(t)$ ). Si può quindi calcolare la variazione

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \left[ \dot{\varphi} \delta \varphi + \frac{i}{2} \delta \lambda \dot{\lambda} + \frac{i}{2} \lambda \delta \dot{\lambda} \right] dt \\
&= \int \left[ \dot{\varphi} \frac{d}{dt} (i\epsilon \lambda) - \frac{i}{2} (\dot{\varphi} \epsilon) \dot{\lambda} - \frac{i}{2} \lambda \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \epsilon) \right] dt \\
&= \int \left[ \dot{\varphi} i \dot{\epsilon} \lambda + \dot{\varphi} i \epsilon \dot{\lambda} - \frac{i}{2} \dot{\varphi} \epsilon \dot{\lambda} - \frac{i}{2} \frac{d}{dt} (\lambda \dot{\varphi} \epsilon) + \frac{i}{2} \dot{\lambda} \dot{\varphi} \epsilon \right] dt \\
&= \int \left[ \dot{\epsilon} (i\dot{\varphi} \lambda) - \frac{i}{2} \frac{d}{dt} (\lambda \dot{\varphi} \epsilon) \right] dt
\end{aligned} \tag{2.4}$$

dove  $\delta \dot{q}_i = \frac{d(\delta q_i)}{dt}$ .

Si ottengono due termini, uno proporzionale alla derivata del parametro, che quindi si annulla se  $\epsilon$  è indipendente dal tempo, e uno di contorno che quindi si annulla se si assume che i campi, e le loro derivate, si annullino per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

L'azione risulta essere invariante per le trasformazioni rigide proposte.

Calcolando il commutatore di due trasformazioni di supersimmetria sui campi bosonici si ottiene

$$[\delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1)] \phi = \delta(\epsilon_2) i \epsilon_1 \lambda - \delta(\epsilon_1) i \epsilon_2 \lambda = i \epsilon_1 (-\dot{\varphi} \epsilon_2) - i \epsilon_2 (-\dot{\varphi} \epsilon_1) = (2i \epsilon_2 \epsilon_1) \dot{\varphi} = \xi \dot{\varphi} \tag{2.5}$$

che è una traslazione di un certo valore  $\xi$  del campo bosonico.

Equivalentemente, per un campo fermionico, si ottiene

$$\begin{aligned}
[\delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1)] \lambda &= -\delta(\epsilon_2) \dot{\varphi} \epsilon_1 + \delta(\epsilon_1) \dot{\varphi} \epsilon_2 = -\frac{d}{dt} (i \epsilon_2 \lambda) \epsilon_1 + \frac{d}{dt} (i \epsilon_1 \lambda) \epsilon_2 \\
&= (2i \epsilon_2 \epsilon_1) \dot{\lambda}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Per poter applicare il metodo della quantizzazione canonica a questo sistema sarà necessario passare alla formulazione hamiltoniana; avendo sia variabili bosoniche che fermioniche bisogna utilizzare le parentesi di Poisson modificate (1.22) che in questo modello assumono la forma

$$\{F(q, p), G(q, p)\}_P = (-1)^\sigma \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \tag{2.7}$$

dove  $\sigma = +1$  quando sia  $F$  che  $G$  sono fermionici e  $\sigma = 0$  altrimenti.

Il momento coniugato alla variabile  $\varphi$  è

$$p = \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$$

e a  $\lambda$

$$\pi = -\frac{i}{2} \lambda$$

Le parentesi fondamentali sono date da

$$\{p, q\}_P = -1 \quad \text{e} \quad \{\pi, \lambda\}_P = -1 \quad (2.8)$$

Come si può osservare la definizione di momento coniugato a  $\lambda$  risulta essere un vincolo tra la coordinata fermionica e il suo momento

$$\Phi = \pi + \frac{i}{2}\lambda \quad (2.9)$$

Questo è un vincolo primario, cioè vale senza bisogno di utilizzare le equazioni del moto. L'Hamiltoniana estesa sarà quindi data dalla somma tra l'hamiltoniana canonica e il prodotto tra un moltiplicatore di Lagrange e il vincolo, come visto in (1.31),

$$H_E = \frac{1}{2}p^2 + \alpha\left(\pi + \frac{i}{2}\lambda\right)$$

con  $\alpha(t)$  parametro anticommutante per rendere bosonica l'intera hamiltoniana; si ricorda che deve valere  $\{\Phi, H_E\}_P \approx 0$  in modo tale che la dinamica non esca dalla superficie del vincolo.

Per verificare a quale classe appartiene il vincolo si deve calcolare la parentesi di Poisson del vincolo con se stesso

$$\{\Phi, \Phi\}_P = -\frac{i}{2} - \frac{i}{2} = -i \quad (2.10)$$

quindi  $\Phi$  risulta essere un vincolo di seconda classe.

Ora è possibile porre la condizione di costanza del vincolo

$$\dot{\Phi} = \{H_E, \Phi\}_P = -i\alpha = 0 \quad (2.11)$$

che è verificata con la scelta del parametro  $\alpha = 0$  e di conseguenza non sono necessari vincoli aggiuntivi.

Considerando che

$$\{\Phi, \Phi\}_P^{-1} = \frac{1}{-i} = i \quad (2.12)$$

è possibile calcolare le parentesi di Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\}_P - i \left\{ A, \pi + \frac{i}{2}\lambda \right\} \left\{ \pi + \frac{i}{2}\lambda, B \right\} \quad (2.13)$$

che permettono di costruire le relazioni di commutazione e anticommutazione tra operatori in quantizzazione canonica.

In particolare le parentesi di Dirac fondamentali sono date da

$$\begin{aligned} \{\lambda(t), \lambda(t)\}_D &= -i \\ \{\pi(t), \lambda(t)\}_D &= -\frac{1}{2} \\ \{\pi(t), \pi(t)\}_D &= \frac{i}{4} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Queste relazioni risultano essere consistenti anche sostituendo il vincolo  $\pi = -\frac{i}{2}\lambda$ . Si procede alla quantizzazione di questo sistema secondo le regole della quantizzazione canonica: si promuovono le coordinate dello spazio delle fasi a operatori lineari e si sostituiscono le parentesi di Poisson e di Dirac con commutatori, per variabili bosoniche, e anticommutatori, per variabili fermioniche, aggiungendo quindi un fattore  $i\hbar$

$$\{\lambda(t), \lambda(t)\} = \hbar \quad \text{e} \quad [p(t), \varphi(t)] = \frac{\hbar}{i} \quad (2.15)$$

Essendo in un contesto di meccanica hamiltoniana si può calcolare il generatore delle trasformazioni di supersimmetria, detto anche carica SUSY  $Q$ , e lo si fa utilizzando il metodo variazionale.

L'azione in forma hamiltoniana è data da

$$S = \int \left[ \dot{\varphi}p + \dot{\lambda}\pi - \frac{1}{2}p^2 \right] \quad (2.16)$$

dove è stato fissato il vincolo tramite la condizione (2.11). Essa risulta essere invariante sotto le trasformazioni

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \epsilon \left( \frac{i}{2}\lambda - \pi \right) \\ \delta\lambda &= -p\epsilon \\ \delta p &= 0 \\ \delta\pi &= \frac{i}{2}p\epsilon \end{aligned} \quad (2.17)$$

Quindi la variazione dell'azione è data da

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[ p \frac{d}{dt} \epsilon \left( \frac{i}{2}\lambda - \pi \right) - \pi \frac{d}{dt} (-p\epsilon) + \dot{\lambda} \left( \frac{i}{2}p\epsilon \right) \right] dt \\ &= \int \left[ \frac{i}{2}p\dot{\epsilon}\lambda - p\dot{\epsilon}\pi + \frac{d}{dt}(\pi p\epsilon) \right] dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

e la carica da

$$Q = ip \left( \frac{1}{2}\lambda + i\pi \right) \quad (2.19)$$

Dato che la carica  $Q$  dovrebbe essere il generatore della trasformazione SUSY si può verificare se l'espressione (2.19) è corretta calcolando come agisce  $Q$  su un campo; ad esempio su  $\varphi$

$$\frac{1}{\hbar} [\varphi, \epsilon Q] = \frac{i}{2}\epsilon\lambda - \epsilon\pi = \delta\varphi$$



Quindi  $Q$  è chiaramente l'operatore che genera le trasformazioni di supersimmetria. Si noti che, se viene fatta valere l'equazione del vincolo, si trovano le trasformazioni (2.3). Ora è facile calcolare l'algebra di supersimmetria

$$\{Q, Q\} = \{\lambda p, \lambda p\} = \hbar p^2 = 2\hbar H \quad (2.20)$$

$$[H, Q] = 0 \quad (2.21)$$

quindi i generatori  $Q, H$  formano un'algebra chiusa di SUSY; la supersimmetria può essere vista come la radice quadrata del generatore delle traslazioni temporali, l'hamiltoniana.

# Capitolo 3

## Supergravità

### 3.1 Modello Classico

Avendo analizzato gli effetti della supersimmetria rigida su questo modello è ora possibile studiare la teoria di gauge della supersimmetria. Questo implica che la trasformazione viene resa locale e quindi il parametro  $\epsilon$  deve diventare dipendente dal tempo.

Questa modifica però dà origine ad un termine non nullo nella variazione dell'azione pari a

$$\delta S(\text{rigida}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\epsilon}(i\dot{\varphi}\lambda) dt \quad (3.1)$$

Quindi si ottiene che la lagrangiana precedentemente utilizzata non è più invariante per trasformazioni locali di supersimmetria ed è quindi necessario modificarla aggiungendo nuovi termini le cui variazioni rendano il modello nuovamente invariante.

Si consideri una lagrangiana  $L(q^A, \dot{q}^A)$  che dipende da un certo numero di campi, bosonici e fermionici, e le loro derivate prime; si supponga che l'azione

$$S = \int L dt \quad (3.2)$$

sia invariante per una qualche trasformazione di simmetria  $\delta q^A$  cioè la variazione dell'azione per quella trasformazione risulta essere nulla  $\delta S = 0$ .

Un metodo spesso utilizzato per calcolare la corrente di Noether associata alla simmetria è di rendere il parametro della trasformazione  $\epsilon$  dipendente dal tempo; in questo modo la corrente sarà data dall'espressione che moltiplica la derivata temporale del parametro locale

$$\delta S = \int \dot{\epsilon} Q \quad (3.3)$$

Alternativamente la corrente può essere calcolata come

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \delta q^A \quad (3.4)$$

e si ottiene che

$$\dot{Q} = \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} - \frac{\partial L}{\partial q^A} \right] \delta q^A \quad (3.5)$$

che è chiaramente nulla quando le equazioni del moto sono soddisfatte.

Il teorema di Noether permette di sviluppare sempre un metodo iterativo per la costruzione di azioni invarianti interagenti a partire da lagrangiane libere aggiungendo termini extra all'azione e alle leggi di trasformazione.[5]

In questo modello la corrente di Noether è equivalente alla carica, non essendoci dimensioni spaziali. Essa è quindi data da

$$Q = i\dot{\varphi}\lambda \quad (3.6)$$

che risulta essere uguale a (2.19) se si sostituisce l'equazione del vincolo.

L'unico modo per eliminare il termine (3.1) richiede l'introduzione di un nuovo campo  $\psi(t)$ : esso è il campo di gauge di SUSY detto gravitino, è anticommutante e deve trasformare con la derivata del parametro locale

$$\delta\psi = \dot{\epsilon} + \text{altri termini} \quad (3.7)$$

Per eliminare il termine  $\delta S(\text{rigida})$  il nuovo campo viene accoppiato con la corrente di Noether della lagrangiana rigida

$$S(\text{Noether}) = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\psi\dot{\varphi}\lambda) dt \quad (3.8)$$

La variazione totale di questa azione è data da

$$\begin{aligned} \delta S(\text{Noether}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -i\dot{\varphi}\lambda\dot{\epsilon} - i\psi \left( \frac{d}{dt}(i\epsilon\lambda) \right) \lambda + i\psi\epsilon\dot{\varphi}^2 \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -i\dot{\varphi}\lambda\dot{\epsilon} - i\psi\epsilon(\dot{\varphi}^2 + i\lambda\dot{\lambda}) \right] dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si osserva che il termine  $-i\dot{\varphi}\lambda\dot{\epsilon}$  cancella  $\delta S(\text{rigida})$  ma si ottengono due nuove variazioni. Il termine  $-i\psi\epsilon(i\lambda\dot{\lambda})$  può essere eliminato modificando la trasformazione di  $\lambda$ , mentre per eliminare il rimanente è necessario introdurre un nuovo campo bosonico  $h$  detto gravitone, superpartner di  $\psi$ , che si accoppi con  $\dot{\varphi}^2$ .

In generale sarà necessario accoppiare  $h$  anche con il campo fermionico ottenendo così

$$S(\text{stress}) = - \int_{-\infty}^{\infty} h \left[ \dot{\varphi}^2 - i\lambda\dot{\lambda} \right] \quad (3.10)$$

con

$$\delta h = -i\epsilon\psi \quad \text{e} \quad \delta\lambda = -\dot{\varphi}\epsilon + i(1+x)\psi\lambda\epsilon \quad (3.11)$$

dove  $x$  è un parametro reale, libero e costante.

Dato il nuovo termine dell'azione e le nuove leggi di trasformazione bisogna calcolare le relative variazioni. In  $S(\text{stress})$  sono pari a

$$\delta S(\text{stress}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -i\epsilon\psi\dot{\varphi}^2 - 2h\dot{\varphi}i\dot{\epsilon}\lambda - 2h\dot{\varphi}i\epsilon\dot{\lambda} - i\epsilon\psi \left( i\lambda\dot{\lambda}x \right) \right] \quad (3.12)$$

dove non è stata calcolata la variazione rispetto a  $\lambda$ .

Il primo termine di (3.12) cancella il primo termine di  $\delta S(\text{Noether})$ , la nuova variazione di  $\delta\lambda$  nell'azione iniziale (2.1) e il secondo termine di  $\delta S(\text{stress})$  cancellano il secondo termine di  $\delta S(\text{Noether})$ :

$$i\lambda \frac{d}{dt} [i(1+x)\psi\lambda\epsilon] - i\epsilon\psi(i\lambda\dot{\lambda}x) - \psi\lambda\dot{\lambda}\epsilon = (1+x)\lambda\tilde{\lambda}\psi\epsilon - \psi\epsilon\lambda\dot{\lambda}x - \psi\epsilon\lambda\dot{\lambda} = 0 \quad (3.13)$$

Quindi si considera inizialmente il caso in cui  $x = 0$  così che rimangano da eliminare solo i termini derivanti dalla variazione del campo  $\varphi$  per cui è necessario aggiungere un nuovo termine nella legge di trasformazione di  $\psi$ , che diventa

$$\delta\psi = \dot{\epsilon} - 2h\dot{\epsilon} \quad (3.14)$$

il quale, sostituito in (3.9), cancella il secondo termine di (3.12).

Il terzo termine, invece, può essere eliminato aggiungendo  $2h\dot{\varphi}\epsilon$  alla trasformazione di  $\lambda$ . Questa aggiunta da origine a una nuova variazione

$$\delta L(\text{Noether}) = -i\psi\dot{\varphi}(2h\dot{\varphi}\epsilon) \quad (3.15)$$

che, essendo proporzionale a  $\dot{\varphi}^2$ , viene cancellata aggiungendo un ultimo termine a

$$\delta h = 2ih\epsilon\psi \quad (3.16)$$

In questo modo tutti i termini di  $\delta S$  sono stati cancellati e si è ottenuta un'azione invariante per la supersimmetria locale:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} - i\psi\dot{\varphi}\lambda - h\dot{\varphi}^2 \quad (3.17)$$

$$\delta\varphi = i\epsilon\lambda, \quad \delta\lambda = -\dot{\varphi}\epsilon + i\psi\lambda\epsilon + 2h\dot{\varphi}\epsilon$$

$$\delta\psi = \dot{\epsilon} - 2h\dot{\epsilon}, \quad \delta h = -i\epsilon\psi + 2ih\epsilon\psi$$

Si può osservare che, nella lagrangiana, non appaiono termini di gauge della supergravità come

$$L = \frac{1}{2}\dot{h}\dot{h} + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} \quad (3.18)$$

dato che, pur essendo invarianti per trasformazioni di supersimmetria rigide, non lo sono per le trasformazioni locali che sono state ricavate a partire dall'accoppiamento

materia-gravità; non sono presenti nemmeno termini di azione della gravità, dato che lo spaziotempo è 0+1 dimensionale.

Inoltre, finché si tiene  $\lambda$  reale, accoppiamenti di Yukawa tra i campi di materia come  $\lambda\varphi\lambda$  si annullano, cosa che non succede se abbiamo campi fermionici complessi.

Si può alternativamente accoppiare l'azione hamiltoniana (2.16) alla supergravità; dato  $H$  il gravitone e  $\Psi$  il gravitino

$$L = \dot{\varphi}p + \dot{\lambda}\pi - \frac{1}{2}p^2 - i\Psi \left( \frac{1}{2}p\lambda + ip\pi \right) - Hp^2 \quad (3.19)$$

con le trasformazioni date da

$$\begin{aligned} \delta p &= 0 & \delta\pi &= \frac{i}{2}p\epsilon & \delta\lambda &= -p\epsilon \\ \delta\varphi &= \epsilon \left( \frac{i}{2}\lambda - \pi \right) & \delta\Psi &= \dot{\epsilon} & \delta H &= -i\epsilon\Psi \end{aligned} \quad (3.20)$$

Eliminando  $p$  e sostituendo  $\pi$  con  $-\frac{i}{2}\lambda$ , utilizzando cioè l'equazione del vincolo, si ottiene

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{1+2H} \dot{\varphi}^2 - \frac{i}{1+2H} \dot{\varphi}\Psi\lambda + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} \quad (3.21)$$

e confrontando con (3.17) si trovano le leggi di trasformazione da  $(H, \Psi)$  a  $(h, \psi)$

$$H = \frac{h}{1-2h} \quad \Psi = \frac{1}{1-2h}\psi \quad (3.22)$$

È infine necessario calcolare l'algebra di supersimmetria per verificare se si chiude; si ha che

$$\begin{aligned} [\delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1)]\varphi &= \\ &= i\epsilon_1(-\dot{\varphi}\epsilon_2 + i\psi\lambda\epsilon_2 + 2h\dot{\varphi}\epsilon_2) - i\epsilon_2(-\dot{\varphi}\epsilon_1 + i\psi\lambda\epsilon_1 + 2h\dot{\varphi}\epsilon_1) \\ &= [2i(1-2h)\epsilon_2\epsilon_1]\dot{\varphi} + i[-2i\epsilon_2\epsilon_1\psi]\lambda \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove si ottiene una trasformazione generale di coordinate

$$\delta\varphi = \hat{\xi}\dot{\varphi} + \dots \quad (3.24)$$

e una trasformazione di supersimmetria locale

$$\delta\varphi = \dots + i\hat{\epsilon}\lambda \quad (3.25)$$

I parametri di queste trasformazioni sono diventati dipendenti dai campi e quindi non sono più costanti.

Su  $\lambda$  si ottiene che

$$[\delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1)]\lambda = \hat{\xi}\dot{\lambda} - \dot{\varphi}\hat{\epsilon} + 2h\dot{\varphi}\hat{\epsilon} = \delta(\hat{\epsilon})\lambda + \text{traslazione} \quad (3.26)$$

Su  $\psi$  si ottiene

$$\begin{aligned}
[\delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1)]\psi &= -2(-i\epsilon_2\psi + 2ih\epsilon_2\psi)\dot{\epsilon}_1 + 2(-i\epsilon_1\psi + 2ih\epsilon_1\psi)\dot{\epsilon}_2 \\
&= -2i\left(\frac{d}{dt}(\epsilon_2\epsilon_1)\right)\psi + 4ih\left(\frac{d}{dt}(\epsilon_2\epsilon_1)\right)\psi \\
&= \frac{d}{dt}\hat{\epsilon} + 2i\epsilon_2\epsilon_1\dot{\psi} - 2h\frac{d}{dt}\hat{\epsilon} - 4ih\epsilon_2\epsilon_1\dot{\psi} \\
&= \dot{\hat{\epsilon}} - 2h\dot{\hat{\epsilon}} + \hat{\xi}\dot{\psi} \\
&= \delta(\hat{\epsilon})\psi + \text{traslazione}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

cioè si realizza la stessa algebra locale di  $\lambda$ .

Infine su  $h$  si ottiene

$$\begin{aligned}
[\delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1)]h &= -i\epsilon_1(\dot{\epsilon}_2 - 2h\dot{\epsilon}_2) - 2i[\delta(\epsilon_2)h\psi]\epsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= -i\epsilon_1(\dot{\epsilon}_2 - 2h\dot{\epsilon}_2) - 2i(-i\epsilon_2\psi + 2ih\epsilon_2\psi)\psi\epsilon_1 - 2ih(\dot{\epsilon}_2 - 2h\dot{\epsilon}_2)\epsilon_1 - (1 \leftrightarrow 2) \\
&= -i\hat{\epsilon}\psi + 2ih\hat{\epsilon}\psi + \hat{\xi}\dot{h} - \hat{\xi}h + \frac{1}{2}\dot{\hat{\xi}} \\
&= \delta(\hat{\epsilon})h + \text{traslazione}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Questi commutatori possono essere riassunti in

$$[\delta_s(\epsilon_2), \delta_s(\epsilon_1)] = \delta_s(-2i\epsilon_2\epsilon_1\psi) + \delta_g((1-2h)2i\epsilon_2\epsilon_1) \tag{3.29}$$

cioè il commutatore di due trasformazioni di supersimmetria locali è chiuso, è quindi proporzionale e se stesso ed a una trasformazione generale di coordinate.

Per studiare il caso con  $x \neq 0$  è sufficiente riscaldare i campi

$$\tilde{\lambda} = (1 + 2hx)^{-1/2}\lambda \tag{3.30}$$

e

$$\tilde{\psi} = (1 + 2hx)^{1/2}\psi \tag{3.31}$$

e sostituirli nella lagrangiana (3.17), ottenendo

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}(1 + 2hx)\tilde{\lambda}\frac{d}{dt}\tilde{\lambda} - i\tilde{\psi}\dot{\varphi}\tilde{\lambda} - h\dot{\varphi}^2 \tag{3.32}$$

Dato che è stata ottenuta con un riscaldamento dei campi anche questa lagrangiana ha supersimmetria locale. Avendo modificato i campi si dovranno modificare le loro leggi di trasformazione che saranno date da

$$\delta\tilde{\lambda} = -(1-2h)\dot{\varphi}\tilde{\epsilon} + i\left(\frac{1+x}{1+2hx}\right)\tilde{\psi}\tilde{\lambda}\tilde{\epsilon} \tag{3.33}$$

dove

$$\tilde{\epsilon} = (1 + 2hx)^{-1/2}\epsilon \quad (3.34)$$

Posto  $x = -1$  si ottengono leggi di trasformazioni polinomiali

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\lambda} &= -(1 - 2h)\dot{\varphi}\tilde{\epsilon}, & \delta\varphi &= i\tilde{\epsilon}(1 - 2h)\tilde{\lambda} \\ \delta\tilde{\psi} &= (1 - 2h)[(1 - 2h)\dot{\tilde{\epsilon}} - \dot{h}\tilde{\epsilon}], & \delta h &= -(1 - 2h)i\tilde{\epsilon}\tilde{\psi} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Per verificare se le trasformazioni legate al cambiamento di coordinate sono corrette si può applicare nuovamente il metodo di Noether, questa volta direttamente alla gravità. Partendo dalla

$$L(\text{rigida}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} \quad (3.36)$$

si trova che le trasformazioni di simmetria traslazionale sono date da

$$\delta\varphi = \xi\dot{\varphi} \quad \delta\lambda = \xi\dot{\lambda} \quad (3.37)$$

e, ponendo  $\xi = \xi(t)$ , si ottiene

$$\delta S(\text{rigida}) = \int \left[ \dot{\varphi} \frac{d}{dt}(\xi\dot{\varphi}) + \frac{i}{2}\lambda \frac{d}{dt}(\xi\dot{\lambda}) \right] dt \quad (3.38)$$

$$= \int \left[ \frac{1}{2}\dot{\xi}\dot{\varphi}^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}\xi\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\xi\lambda\dot{\lambda} \right) \right] dt = \int \left[ \frac{1}{2}\dot{\xi}\dot{\varphi}^2 \right] dt \quad (3.39)$$

La corrente di Noether per le traslazioni risulta essere

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \quad (3.40)$$

e quindi, introducendo il campo  $h$  di gauge della gravità si può costruire il termine

$$L(\text{Noether}) = -h\dot{\varphi}^2 \quad (3.41)$$

con  $\delta h = \frac{1}{2}\dot{\xi}$ .

Non è presente un accoppiamento con il fermione  $\lambda$  nella forma  $h\lambda\dot{\lambda}$  dato che può essere recuperato tramite una ridefinizione dei campi come in (3.30).

La variazione di  $\dot{\varphi}$  induce

$$\delta S(\text{Noether}) = - \int 2h\dot{\varphi} \frac{d}{dt}(\xi\dot{\varphi}) dt \quad (3.42)$$

che può essere cancellato se

$$\delta h = \xi\dot{h} - h\dot{\xi} \quad (3.43)$$

Si ha quindi che la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} - h\dot{\phi}^2 \quad (3.44)$$

è invariante per le trasformazioni generali di coordinate

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \xi\dot{\phi} \\ \delta\lambda &= \xi\dot{\lambda} \\ \delta h &= \frac{1}{2}\dot{\xi} + \xi\dot{h} - \dot{\xi}h \end{aligned} \quad (3.45)$$

Quindi è stato dimostrato che la trasformazione in (3.28) è effettivamente una traslazione. Se si aggiunge l'accoppiamento con il gravitino dato da

$$-i\psi\dot{\phi}\lambda \quad (3.46)$$

si ottiene l'invarianza sotto la trasformazione  $\hat{\xi}$ , se si sceglie  $\delta\psi$  tale che

$$\delta(-i\psi\dot{\phi}\lambda) = -i\delta\psi\dot{\phi}\lambda - i\psi\frac{d}{dt}(\xi\dot{\phi})\lambda - i\psi\dot{\phi}\xi\dot{\lambda} \quad (3.47)$$

che, dopo un'integrazione parziale, da

$$-i\delta\psi\dot{\phi}\lambda + i\psi\xi\dot{\phi}\lambda \quad (3.48)$$

Quindi  $\delta\psi$  deve essere

$$\delta\psi = \xi\dot{\psi} \quad (3.49)$$

Il modello quindi è invariante per trasformazioni generali di coordinate anche considerando la controparte fermionica del campo  $h$ .

Riscalando

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = (1 + 2hx)^{-1/2}\lambda \quad (3.50)$$

si ottiene la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{i}{2}\tilde{\lambda}\dot{\tilde{\lambda}} - h\left(\dot{\phi}^2 - ix\tilde{\lambda}\frac{d}{dt}\tilde{\lambda}\right) \quad (3.51)$$

con la trasformazione

$$\delta\tilde{\lambda} = \xi\frac{d}{dt}\tilde{\lambda} - \frac{1}{2}x\dot{\xi}\left(\frac{1-2h}{1+2hx}\right)\tilde{\lambda} \quad (3.52)$$

Allo stesso modo si riscalda

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = (1 + 2xh)^{1/2}\psi \quad (3.53)$$



e, posto  $x = -1$ , si ottiene che

$$\delta\tilde{\psi} = \xi \frac{d}{dt}\tilde{\psi} - \frac{1}{2}\dot{\xi}\tilde{\psi} \quad (3.54)$$

Imponendo la condizione  $x = -1$  per tutti i campi ed eliminando le tilde nella lagrangiana si ottiene

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} - h\left(\dot{\varphi}^2 + i\lambda\dot{\lambda}\right) - i\psi\dot{\varphi}\lambda \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2h)\left(\dot{\varphi}^2 + i\lambda\dot{\lambda}\right) - i\psi\dot{\varphi}\lambda \end{aligned} \quad (3.55)$$

che è invariante per trasformazioni generali di coordinate

$$\delta\varphi = \xi\dot{\varphi}, \quad \delta\lambda = \xi\dot{\lambda} + \frac{1}{2}\dot{\xi}\lambda, \quad \delta h = \frac{1}{2}\dot{\xi} + \xi\dot{h} - \dot{\xi}h, \quad \delta\psi = \xi\dot{\psi} - \frac{1}{2}\dot{\xi}\psi \quad (3.56)$$

e per trasformazioni di supersimmetria, date da (3.35).

Se si varia la corrente di Noether della supersimmetria rigida si trova che

$$\delta(\epsilon)\dot{\varphi}\lambda = \frac{d}{dt}(i\epsilon\lambda)\lambda - \dot{\varphi}^2\epsilon = -(\dot{\varphi}^2 + i\lambda\dot{\lambda})\epsilon \quad (3.57)$$

Questa è la corrente che si accoppia con  $h$  nel modello (3.55).

Sono state trovate quindi varie formulazioni equivalenti per lo stesso modello di supergravità.

In particolare si consideri

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} - i\psi\dot{\varphi}\lambda - h\dot{\varphi}^2$$

che è stata ottenuta tramite il metodo di Noether dalla lagrangiana supersimmetrica e non contiene l'accoppiamento  $h\dot{\lambda}\lambda$  e

$$L = \frac{1}{2}(1 - 2h)\left(\dot{\varphi}^2 + i\lambda\dot{\lambda}\right) - i\psi\dot{\varphi}\lambda$$

che contiene l'accoppiamento; esse sono legate tra loro tramite la ridefinizione dei campi data in (3.35) ma la prima può anche essere ottenuta dall'azione hamiltoniana in (3.19) con la trasformazione dei campi  $(H, \Psi)$  data in (3.22).

È stato inoltre dimostrato, utilizzando il metodo di Noether a partire dalle trasformazioni rigide di coordinate, che le espressioni che sono state ottenute calcolando i commutatori in (3.23) e seguenti rappresentano effettivamente delle trasformazioni generali di coordinate.

## 3.2 Quantizzazione

Classicamente questo modello di supergravità è quindi una teoria di gauge con due simmetrie locali: la supersimmetria e i diffeomorfismi.

Per quantizzarlo è necessario eliminare i gradi di libertà ridondanti fissando quindi il gauge. Per fare ciò vengono aggiunti due termini all'azione, uno per fissare il gauge detto di gauge fixing e uno di ghost. La simmetria locale è quindi rotta ma rimane una simmetria rigida detta di BRST (Becchi, Rouet, Stora, Tyutin) che è parametrizzata da un numero di Grassmann costante immaginario puro e che risulta essere nilpotente.

Ci sono due approcci per sfruttare il metodo BRST, uno lagrangiano e uno Hamiltoniano: nel primo caso le trasformazioni BRST infinitesimali sono scritte come  $\delta_B \Phi$  mentre nel secondo si usano operatori e parentesi di Poisson o Dirac, cioè le trasformazioni BRST saranno generate da un operatore  $Q$  (carica) tale che

$$\delta_B \Phi \sim \{\Phi, Q\} \quad (3.58)$$

La proprietà di nilpotenza si vede nelle relazioni

$$\delta_B \delta_B \Phi = 0 \quad (3.59)$$

o equivalentemente

$$\{Q, Q\} = 0 \quad (3.60)$$

In primo luogo si analizza l'approccio lagrangiano, a partire dall'azione (3.17).

Il gauge legato alle trasformazioni di coordinate viene fissato tramite la condizione  $h = 0$  mentre quello per la supersimmetria tramite  $\psi = 0$ .

Quindi i termini di gauge fixing sono dati da

$$L(\text{fix}) = dh + \Delta\psi \quad (3.61)$$

dove i campi  $d$  (reale),  $\Delta$  (immaginario puro) sono moltiplicatori di Lagrange necessari per fissare i gauge.

L'azione di ghost è quindi data da

$$L(\text{ghost})\Lambda = b\delta_B h + \beta\delta_B \psi \quad (3.62)$$

con  $\delta_B$  che indica le trasformazioni BRST e  $\Lambda$  il parametro costante, immaginario puro e anticommutante che parametrizza queste trasformazioni; i campi  $b$  e  $\beta$ , immaginari, sono detti antighost.

Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned} L &= L(\text{classica}) + L(\text{fix}) + L(\text{ghost}) = \\ &= \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} - h\dot{\varphi}^2 - i\psi\dot{\varphi}\lambda + dh + \Delta\psi + b\delta_B h + \beta\delta_B \psi \end{aligned} \quad (3.63)$$

Per i quattro campi classici le trasformazioni BRST sono date dalle trasformazioni di gauge già definite in cui però viene fatta una scelta particolare del parametro  $\xi = c\Lambda$  e  $\epsilon = -i\gamma\Lambda$  dove  $c, \gamma$  sono campi di ghost reali con il primo variabile di Grassmann mentre il secondo variabile reale.

Quindi le trasformazioni sono date da

$$\begin{aligned}\delta_B h &= \left[ (1 - 2h)\psi\gamma + \frac{1}{2}(1 - 2h)\dot{c} + \dot{h}c \right] \Lambda \\ \delta_B \psi &= \left[ -i(1 - 2h)\dot{\gamma} + \dot{\psi}c \right] \Lambda \\ \delta_B \varphi &= (-\lambda\gamma + \dot{\varphi}c) \Lambda \\ \delta_B \lambda &= \left[ i(1 - 2h)\dot{\varphi}\gamma + \psi\lambda\gamma + \dot{\lambda}c \right] \Lambda\end{aligned}\tag{3.64}$$

e l'azione di ghost assume la forma

$$L(\text{ghost}) = b\left[(1 - 2h)\psi\gamma + \frac{1}{2}(1 - 2h)\dot{c} + \dot{h}c\right] + \beta\left[-i(1 - 2h)\dot{\gamma} + \dot{\psi}c\right]\tag{3.65}$$

Invece per quanto riguarda i ghost le regole di trasformazione dipendono dalle costanti di struttura dell'algebra di gauge classica o, equivalentemente, possono essere ricavate dalla condizione di nilpotenza delle trasformazioni BRST.

Si ottiene che

$$\begin{aligned}\delta_B c &= -c\dot{c}\Lambda + i(1 - 2h)\gamma^2\Lambda \\ \delta_B \gamma &= c\dot{\gamma}\Lambda + \psi\gamma^2\Lambda\end{aligned}\tag{3.66}$$

Gli antighost si trasformano nei campi ausiliari  $b$  e  $\Delta$  mentre quest'ultimi sono invarianti per trasformazioni BRST

$$\delta_B b = \Lambda d, \quad \delta_B \beta = \Lambda \Delta, \quad \delta_B d = 0, \quad \delta_B \Delta = 0\tag{3.67}$$

Si può dimostrare che tutte le leggi di trasformazione BRST sono nilpotenti e lasciano invariata l'azione.

Per ottenere la carica BRST  $Q$  si utilizza il metodo già visto, cioè si rende locale il parametro  $\Lambda = \Lambda(t)$ , si calcola la variazione dell'azione e si raccolgono i termini proporzionali a  $\dot{\Lambda}$ . Le leggi di trasformazione dei campi non contengono termini in  $\dot{\Lambda}$  per definizione e l'azione classica fornisce

$$\delta S(\text{classica}) = \int \left[ L(\text{classica})c\dot{\Lambda} - (1 - 2h)\lambda\dot{\varphi}\gamma\dot{\Lambda} \right] dt\tag{3.68}$$

Il termine di gauge fixing non contiene  $\dot{\Lambda}$  mentre l'azione di ghost introduce

$$\begin{aligned}\delta S(\text{ghost}) &= b\left[\frac{1}{2}(1-2h)(-c\dot{c} + i(1-2h)\gamma^2)\dot{\Lambda}\right. \\ &\quad \left.+ c((1-2h)\psi\gamma + \frac{1}{2}(1-2h)\dot{c} + \dot{h}c)\dot{\Lambda}\right] \\ &\quad \left.+ \beta[(-i)(1-2h)(c\dot{\gamma} + \psi\gamma^2)\dot{\Lambda} + ic(1-2h)\dot{\gamma}\dot{\Lambda}]\right]\end{aligned}\quad (3.69)$$

Quindi la carica risulta essere

$$Q = cL(\text{classica}) - (1-2h)\lambda\dot{\varphi}\gamma + b\left[\frac{i}{2}(1-2h)^2\gamma^2 + (1-2h)c\psi\gamma\right] - i\beta(1-2h)\psi\gamma^2 \quad (3.70)$$

Per verificare se questi risultati sono corretti si può sfruttare la formulazione Hamiltoniana e controllare se si ritrova lo stesso modello e, in particolare, la stessa carica BRST. Si utilizza di nuovo l'azione classica di (3.17)

$$S = \int L ds = \int \left[ \frac{1}{2}(1-2h)\dot{\varphi}^2 + \frac{i}{2}\lambda\dot{\lambda} - i\psi\dot{\varphi}\lambda \right] dt \quad (3.71)$$

con vincoli primari

$$p_h = 0, \quad \pi_\psi = 0, \quad \Phi = \pi_\lambda + \frac{i}{2}\lambda = 0 \quad (3.72)$$

L'hamiltoniana estesa (1.31), utilizzando questi vincoli, assume la forma

$$H_E = \frac{1}{1-2h}\frac{1}{2}(p + i\psi\lambda)^2 + ap_h + \alpha\pi_\psi + \eta\left(\pi_\lambda + \frac{i}{2}\lambda\right) \quad (3.73)$$

dove  $a(t)$  (reale),  $\alpha(t)$  e  $\eta(t)$  (Grassmann) sono i moltiplicatori di Lagrange.

Per semplificare il calcolo successivo si utilizza l'arbitrarietà di  $\eta$  per sostituire il  $\lambda$  del primo termine con  $\frac{1}{2}\lambda + i\pi_\lambda$  che anticommute con il vincolo.

La richiesta della conservazione di questi tre vincoli durante l'evoluzione del sistema produce due ulteriori vincoli e fissa un moltiplicatore:

$$\frac{1}{2}p^2 = 0, \quad p(\pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda) = 0, \quad \eta(t) = 0 \quad (3.74)$$

Entrambi questi vincoli si conservano nel tempo senza bisogno di ulteriori condizioni.

L'Hamiltoniana quindi assume la forma

$$H_E = (1+2H)\frac{1}{2}p^2 + i\Psi\left(\frac{\lambda}{2} + i\pi_\lambda\right)p + ap_h + \alpha\pi_\psi \quad (3.75)$$

con

$$\frac{1}{1-2h} = 1+2H \quad \text{e} \quad \frac{\psi}{1-2h} = \Psi \quad (3.76)$$

detto  $G = 1 + 2H$  il campo gravitazionale e  $\Psi$  il gravitino.

Quindi  $H_E \approx 0$  cioè l'hamiltoniana si annulla sulla superficie del vincolo. Dei cinque vincoli totali, quattro sono di prima classe

$$p_h = \pi_\psi = \frac{1}{2}p^2 = p \left( \pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda \right) = 0 \quad (3.77)$$

e uno di seconda

$$\pi_\lambda + \frac{i}{2}\lambda = 0 \quad (3.78)$$

Il vincolo  $p^2 = 0$  genera i diffeomorfismi che sono dati dalle trasformazioni

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \hat{\xi}p, & \delta p &= 0, & \delta\lambda &= 0, & \delta\pi_\lambda &= 0 \\ \delta\Psi &= 0, & \delta(1 + 2H) &= \frac{d}{dt}\hat{\xi}, & \hat{\xi} &= (1 + 2H)\xi \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ora si considera il generatore della supersimmetria locale

$$\epsilon(t) \left( \pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda \right) p \quad (3.80)$$

con  $\epsilon(t)$  parametro della simmetria di gauge; utilizzando le parentesi di Dirac si ottengono le trasformazioni

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -\epsilon \left( \pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda \right), & \delta p &= 0, & \delta\lambda &= -p\epsilon, & \delta\pi_\lambda &= \frac{i}{2}p\epsilon \\ \delta\Psi &= \dot{\epsilon}, & \delta(1 + 2H) &= -2i\epsilon\Psi \end{aligned} \quad (3.81)$$

Con questo si è dimostrato che due vincoli di prima classe generano effettivamente le simmetrie locali dell'azione classica. Ora si vuole quindi calcolare la carica BRST  $Q_H$  e l'azione quantistica.

La carica, definita in (1.55), assume la forma

$$Q_H = \frac{1}{2}cp^2 - i\gamma p \left( \pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda \right) + p_b p_G + \pi_\beta \pi_\Psi - i\pi_c \gamma^2 \quad (3.82)$$

dove  $G = 1 + 2H$ , i momenti coniugati antihermitiani sono indicati da  $\pi_i$  mentre i momenti hermitiani da  $p_i$ . La carica risulta quindi essere reale e anticommutante.

I primi quattro termini contengono i vincoli di prima classe e l'ultimo deriva dall'ultimo termine di (1.55). La carica BRST induce quindi la trasformazione

$$\delta_B \Phi = -i \{ \Lambda Q_H, \Phi \}_P = -i \{ \Phi, Q_H \Lambda \}_P \quad (3.83)$$

per un campo generico  $\Phi$ ; si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\delta_B \varphi &= cp\Lambda - i(\pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda)\gamma\Lambda & \delta_B p &= 0 \\
\delta_B \lambda &= i\gamma p\Lambda & \delta_B \pi_\lambda &= \frac{1}{2}\gamma p\Lambda \\
\delta_B G &= p_b\Lambda & \delta_B \Psi &= -\pi_\beta\Lambda \\
\delta_B c &= i\gamma^2\Lambda & \delta_B \pi_c &= -\frac{1}{2}p^2\Lambda \\
\delta_B \gamma &= 0 & \delta_B p_\gamma &= 2i\pi_c\gamma\Lambda + ip(\pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda) \\
\delta_B b &= -\Lambda p_G & \delta_B \beta &= \pi_\Psi\Lambda \\
\delta_B p_G &= \delta_B \pi_\Psi = \delta_B p_b = \delta_B \pi_\beta = 0 & & 
\end{aligned} \tag{3.84}$$

dove tutte le trasformazioni sono nilpotenti. Sui campi classici queste leggi corrispondono a quelle classiche con i parametri dati da  $\xi = c\Lambda$  e  $\epsilon = -i\gamma\Lambda$ .

In teoria andrebbero usate le parentesi di Dirac per ottenere le trasformazioni ma dato che il vincolo di seconda classe (3.78), che viene usato per costruire le parentesi, commuta con i vincoli di prima classe allora si ottengono gli stessi risultati utilizzando le parentesi di Poisson.

Confrontando le trasformazioni di  $b, \beta$  in (3.84) e (3.67) si trova che i campi ausiliari BRST sono i momenti coniugati ai moltiplicatori di Lagrange

$$p_G = -d, \quad \pi_\Psi = -\Delta \tag{3.85}$$

È possibile quindi costruire l'azione quantistica in versione hamiltoniana:

$$L = \dot{q}^i p_i - H + \{Q_H, \psi_g\} \tag{3.86}$$

Per fissare il gauge si sceglie il fermione

$$\psi_g = -i[b(G-1) + G\pi_c] + (-i\beta\Psi - \Psi p_\gamma) \tag{3.87}$$

che deve essere hermitiano e anticommutante.

Dato che l'hamiltoniana estesa  $H_E \approx 0$  allora anche l'hamiltoniana quantistica  $H_H$  si annulla e quindi

$$L = \dot{\varphi}p + \dot{\lambda}\pi_\lambda + \dot{G}p_G + \dot{\Psi}\pi_\Psi + \dot{c}\pi_c + \dot{b}p_b + \dot{\gamma}p_\gamma + \dot{\beta}\pi_\beta + \{Q_H, \psi_g\} \tag{3.88}$$

Le parentesi fondamentali per ogni coppia di variabili coniugate sono date da

$$[p, q] = \frac{1}{i}, \quad \{\pi, q\} = \frac{1}{i} \tag{3.89}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\{Q_H, -i(b + \pi_c)G + (-i\beta - p_\gamma)\Psi\} = \\
-p_G(G - 1) - \frac{1}{2}Gp^2 + (b + \pi_c)p_b - \pi_\Psi\Psi \\
-p\left(\pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda\right)\Psi - 2\pi_c\gamma\Psi + \pi_\beta(-\beta + ip_\gamma)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Le leggi  $\delta_B H = p_b \Lambda$  e  $\delta_B \Psi = -\pi_\beta \Lambda$ , ottenute in (3.84), coincidono con le trasformazioni classiche  $\delta_B G = (\dot{c} + 2\gamma\Psi)\Lambda$  e  $\delta_B \Psi = -i\dot{\gamma}\Lambda$  solo se valgono

$$-p_b + \dot{c} + 2\gamma\Psi = 0, \quad i\pi_\beta + \dot{\gamma} = 0 \tag{3.91}$$

che sono le equazioni di campo di  $\pi_c$  e  $p_\gamma$ . Si possono infatti derivare a partire dai termini

$$L = (-p_b + \dot{c} + 2\gamma\Psi)\pi_c + (\dot{\gamma} + i\pi_\beta)p_\gamma \tag{3.92}$$

dell'azione quantistica.

I termini  $-p_G(G-1)$  e  $-\pi_\Psi\Psi$  sono i termini di gauge fixing; confrontando questo risultato con quello ottenuto tramite il metodo lagrangiano si vede che è necessario usare  $b(G-1) + \Delta\Psi$  in (3.63) come termine di gauge fixing.

Osservando meglio (3.87) si nota che non può essere del tutto corretto, dato che contiene termini con dimensionalità diverse.

Per risolvere questo problema si eliminano i termini che contengono  $b$  e  $\beta$  in (3.87) (quindi  $-p_G G - \pi_\Psi \Psi$ ) e in (3.90) (quindi  $bp_b$  e  $-\pi_\beta \beta$ ) ottenendo

$$\begin{aligned}
L = \dot{\varphi}p + \dot{\lambda}\pi_\lambda - \frac{1}{2}Gp^2 - p\left(\pi_\lambda - \frac{i}{2}\lambda\right)\Psi + \\
+ \dot{G}p_G + \dot{\Psi}\pi_\Psi + \\
+ \dot{b}(\dot{c} + 2\gamma\Psi) + \dot{\beta}(i\dot{\gamma})
\end{aligned} \tag{3.93}$$

dove la prima riga coincide con (3.19), la seconda contiene i termini di gauge fixing e la terza i ghost. Quindi l'azione (3.88) derivata nel formalismo hamiltoniano effettivamente coincide con quella derivata nel formalismo lagrangiano se si scelgono  $\dot{G}, \dot{\Psi}$  per fissare il gauge al posto che  $G, \Psi$ . [6]

# Bibliografia

- [1] J. H. Schwarz, “The Early History of String Theory and Supersymmetry” arXiv:1201.0981 [physics.hist-ph].
- [2] F. Bastianelli, “Path integrals for fermions and supersymmetric quantum mechanics”, Lecture notes for the course Fisica Teorica 2 - 2017/18, Università di Bologna.
- [3] P. A. M. Dirac, “Lectures on quantum mechanics”, Dover Publications (2011).
- [4] F. Bastianelli, “Constrained hamiltonian systems and relativistic particles”, Lecture notes for the course Fisica Teorica 2 - 2017/18, Università di Bologna.
- [5] T. Hurth and K. Skenderis, “Quantum Noether method,” Nucl. Phys. B **541** (1999) 566 [hep-th/9803030].
- [6] P. van Nieuwenhuizen, “Supersymmetry, supergravity, superspace and BRST symmetry in a simple model,” Proc. Symp. Pure Math. **73** (2005) 381 [hep-th/0408179].