

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Fisica

**APPROCCIO GEOMETRICO
ALLE TASSELLAZIONI
E AI QUASICRISTALLI**

Relatore:
Prof.ssa
ELISA ERCOLESSI

Presentata da:
ANTONIO SAMPAOLI

**II Sessione
2018/2019**

Indice

1	Strumenti matematici e tassellature	11
1.1	Reticoli e celle di Voronoi	11
1.2	Gruppi e simmetrie	15
1.3	Tassellature	19
2	Strutture aperiodiche e quasiperiodiche	25
2.1	Sostituzione	26
2.2	Multigriglie	28
2.3	Proiezioni canoniche	32
2.4	Tassellatura di Penrose	33
2.4.1	Costruzione con pentagriglie	34
2.4.2	Costruzione con metodo proiettivo	36
3	Cristallografia e storia dei quasicristalli	41
3.1	Introduzione alla cristallografia	41
3.2	Storia e proprietà fisiche dei quasicristalli	45

Abstract

La tesi si pone l'obiettivo di descrivere matematicamente insiemi discreti periodici e aperiodici e di approfondire il concetto di quasicristallo da un punto di vista geometrico e fisico. Nella prima parte vengono introdotti gli strumenti matematici fondamentali per la descrizione formale di strutture discrete come tassellazione o strutture cristalline. Vengono poi trattate le strutture aperiodiche e quasiperiodiche citando ed analizzando alcuni dei vari metodi di costruzione. Successivamente sono descritti brevemente i metodi matematici e fisici per determinare la struttura della materia applicata ai cristalli ed ai quasicristalli ed infine viene raccontata l'incredibile storia della scoperta dei quasicristalli con qualche accenno sulle proprietà fisiche e alle possibili applicazioni.

Introduzione

Il problema della tassellatura del piano e dello spazio è antichissimo, nato dall'osservazione della natura, come la tassellatura esagonale degli alveari o dai motivi sulla pelle dei serpenti, ma anche per esigenze pratiche, come la costruzione di muri e pavimenti, e poi diventato una forma d'arte che ogni civiltà ha saputo sviluppare con caratteristiche diverse e portando diverse innovazioni. Numerosi esempi di stupende tassellature si trovano nelle pareti di costruzioni antiche, come il complesso di Alhambra a Granada, Spagna (figura 1), costruito nel tredicesimo secolo dagli arabi, in cui la ricchezza e la complessità delle strutture geometriche è frutto della grande ricerca di questo popolo nel campo della matematica. E' proprio la matematica lo strumento che ha permesso all'uomo di conoscere più a fondo quest'arte permettendogli di creare strutture sempre più complesse, formalizzandone i concetti fondamentali e fornendo strumenti potenti per la loro realizzazione. In età più moderna, la scoperta dell'atomo e della struttura discreta della materia, in particolare cristallina, costituì un'ulteriore applicazione di tutto ciò che si era imparato sulle tassellazioni e sulle strutture periodiche da un punto di vista geometrico. Le regole matematiche che le governavano, come quella della restrizione cristallografica, erano date per assodate e una struttura atomica periodica si poteva identificare formalmente come una tassellatura dello spazio, inoltre non si avevano dubbi sulla natura della materia allo stato condensato: poteva essere periodica, cioè godere di simmetria traslazionale, o amorfa, con disposizione casuale degli atomi. Negli anni 80 però studiando la struttura di una lega metallica con la diffrazione dei raggi X venne osservato l'impossibile: nelle lastre fotografiche utilizzate per studiare la struttura atomica era impressa un'immagine che corrispondeva ad una disposizione molto particolare degli atomi: una sorta di via di mezzo tra una struttura periodica e aperiodica, denominata poi quasiperiodica. Queste strutture presentavano elementi di simmetria fino a quel momento ritenuti impossibili per le tas-

sellazioni in 2 e 3 dimensioni. Dopo anni di ricerca i quasicristalli vennero classificati come un altro possibile stato della materia solida e ancora oggi sono oggetto di grande studio per le loro particolari proprietà fisiche e le loro applicazioni.

La tesi affronta l'argomento delle strutture periodiche e aperiodiche con particolare interesse per la quasiperiodicità.

Nel primo capitolo vengono introdotti i concetti matematici di base per lo studio dei cristalli periodici e aperiodici, in particolare i reticoli, che sono la formalizzazione matematica di un reticolo cristallino, ossia uno spazio vettoriale discreto, i gruppi di simmetria, strumento fondamentale per studiare i reticoli e le tassellature, che rappresentano il riempimento di uno spazio con delle forme geometriche.

Nel secondo capitolo vengono trattate tassellature aperiodiche e quasiperiodiche, su cui non agiscono gruppi di simmetria traslazionale ma, nel caso di quasiperiodicità, sono presenti elementi di simmetria ciclica di ordine proibito per la restrizione cristallografica. In particolare, vengono esposti tre metodi di costruzione: la sostituzione, le multigriglie e le proiezioni canoniche. Viene poi approfondita una delle tassellazioni quasiperiodiche più importanti: quella di Penrose, su cui vengono fatti anche due esempi di costruzione, con le pentagriglie e con le proiezioni canoniche.

Nell'ultimo capitolo viene fatta una breve introduzione alla cristallografia con l'analisi di Fourier e dal metodo di Laue per la determinazione dei gruppi di simmetria di un cristallo, viene riassunta la storia della scoperta dei quasicristalli da parte di un gruppo di circa 15 persone. Infine vengono citate alcune possibili leghe quasicristalline.



Figura 1: Decorazione in zellige di una parete del complesso di Alhambra a Granada. [17]

Capitolo 1

Strumenti matematici e tassellature

In questo capitolo verranno introdotti alcuni concetti matematici fondamentali per lo studio di sistemi periodici e aperiodici come i reticoli, cioè spazi vettoriali discreti, i gruppi di simmetria, che ne definiscono le principali caratteristiche e infine le tassellature.

1.1 Reticoli e celle di Voronoi

Una struttura periodica o aperiodica viene rappresentata matematicamente da un insieme discreto di punti nello spazio euclideo a cui verranno fatti corrispondere, ad esempio, vertici di un reticolo cristallino o di una certa tassellatura. Da essi è inoltre possibile dedurre caratteristiche fondamentali del sistema studiato come le simmetrie e la periodicità. È importante dunque, come prima cosa, introdurre in modo formale gli insiemi discreti e i set di Delone.

Nella successiva trattazione degli strumenti matematici, molte delle definizioni date sono prese da [6], inoltre verrà indicato con E^n lo spazio euclideo in n dimensioni.

Definizione 1.1.1.

Un insieme di punti di E^n è detto discreto se esiste un $r_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, y \in E^n \Rightarrow |x - y| > r_0$.

Definizione 1.1.2.

Un insieme di punti A è detto relativamente denso in E^n se esiste un numero $r_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall B(r) : r > r_0 \Rightarrow B(r) \cap A \neq \emptyset$, dove $B(r)$ è una palla di raggio r .

Definizione 1.1.3.

Un insieme di punti A è detto set di Delone se è discreto e relativamente denso.

Un set di Delone è dunque un insieme discreto di punti aventi una distribuzione localmente uniforme.

Definizione 1.1.4.

Un cristallo periodico n -dimensionale è un sistema regolare di punti che ammette traslazioni in n direzioni indipendenti.

Un cristallo aperiodico n -dimensionale è uno senza simmetria traslazionale.

Un set che è periodico in k direzioni indipendenti, $0 < k < n$, e aperiodico nelle altre $n - k$ è chiamato subperiodico.

La formalizzazione matematica del cristallo è data dal concetto di reticolo. Possiamo identificare un reticolo cristallino con una serie di punti distribuiti in modo regolare nello spazio euclideo, che costituiscono quindi uno spazio vettoriale discreto.

Definizione 1.1.5.

Dati i vettori $\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n$ che generano E^n , Λ è detto reticolo in E^n se $\Lambda = \sum a_i \vec{e}_i, a_i \in \mathbb{Z}$.

Un reticolo è dunque un insieme di punti nello spazio generati dalla combinazione lineare di vettori di base con coefficienti interi; si può dimostrare che esistono solo 14 modi di arrangiare punti identici in 3 dimensioni, questi 14 array sono chiamati “reticoli di Bravais” (figura 1.1). Si definisce cella primitiva unitaria di un reticolo un volume di spazio che, traslato attraverso tutti i vettori di un reticolo di Bravais, riempie completamente il reticolo senza sovrapposizioni. Si dimostra che dati i tre vettori di base $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, il volume della cella unitaria è $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Un reticolo periodico è interamente descritto dalla sua traslazione.

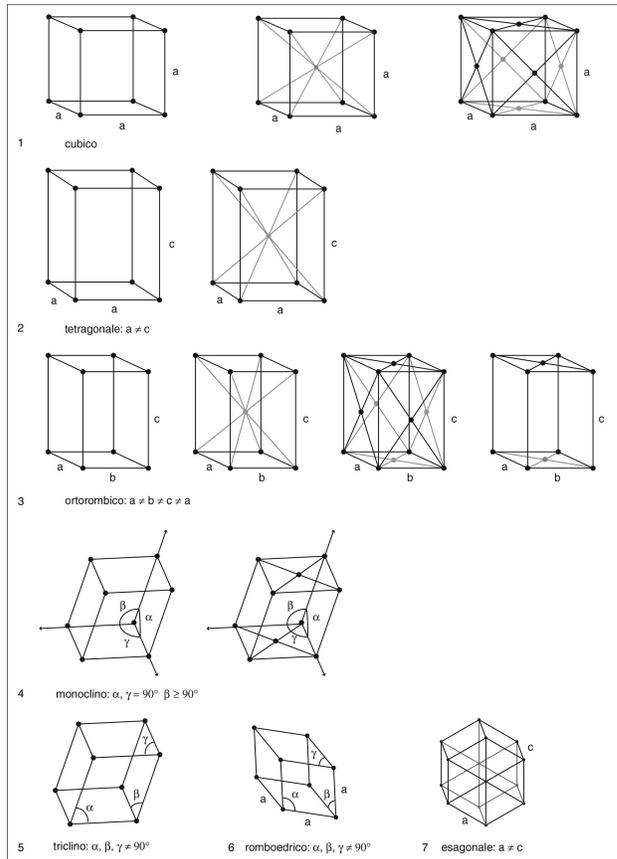


Figura 1.1: I 14 possibili reticoli di Bravais [25].

Definizione 1.1.6.

Siano $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ vettori di base di un reticolo Λ , ogni punto è definito dunque dalla loro combinazione lineare. Sia $N(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}|^2$, con $\vec{x} \in \Lambda$, se $N(x) \in \mathbb{N} \forall x$, allora il reticolo è detto intero.

Definizione 1.1.7.

Siano $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ vettori di base di un reticolo Λ , sia B una matrice che ha come colonne i vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$, allora $M = B^t B$ è detta matrice di Gramm e se $M = \mathbb{I}$ allora il reticolo è detto standard, cioè i vettori di base sono ortogonali.

Per lo studio di un reticolo è fondamentale conoscerne la configurazione locale che può essere studiata in vari modi, uno di questi è considerare una

regione di reticolo interna ad una sfera :

Definizione 1.1.8.

Sia A un insieme discreto di punti e $R \in \mathbb{R}^+$. La R -stella di $x \in A$ è definita dai punti $B(R) \cap A$.

Definizione 1.1.9.

Sia Λ un reticolo su E^n , allora posso definire Λ^* reticolo duale nel seguente modo: $\vec{y} \in \Lambda^* \iff \vec{y} \cdot \vec{x} \in \mathbb{Z}, \forall \vec{x} \in \Lambda$. Inoltre anche Λ è un reticolo e la sua matrice di Gramm è l'inversa di quella di Λ .

Il concetto di reticolo duale si può estendere, come vedremo, a quello di tassellatura duale, con applicazioni molto interessanti.

La tassellatura dello spazio E^n è fortemente connessa con i reticoli, si tratta di stabilire, dato l'insieme di punti, come unirli per formare i tasselli. Questo argomento sarà trattato più avanti in dettaglio, per ora verrà definita solo la cella di Voronoi, concetto fondamentale per la costruzione di particolari strutture.

Definizione 1.1.10.

Sia Λ un set di Delone su E^n . La cella di Voronoi di $x \in \Lambda$ è l'insieme dei punti di E^n t.c. $V(x) = U \in E^n$ t.c. $|x - u| < |y - u|, \forall y \in \Lambda$.

Questa tassellatura (figura 1.2) è costruita dunque in modo che preso un punto P del reticolo, ogni punto appartenente alla regione di spazio delimitata dal tassello che contiene P è più "vicina" a P rispetto ad ogni altro punto del reticolo.

La tassellatura di Voronoi di un set di Delone ha le due seguenti proprietà: [6]

- Le celle sono convesse, si incastrano perfettamente su tutte le facce e non hanno punti interni in comune.
- I punti del reticolo le cui celle di Voronoi condividono un vertice si trovano su una sfera centrata sullo spigolo stesso, e all'interno di questa sfera non ci sono altri punti del reticolo.

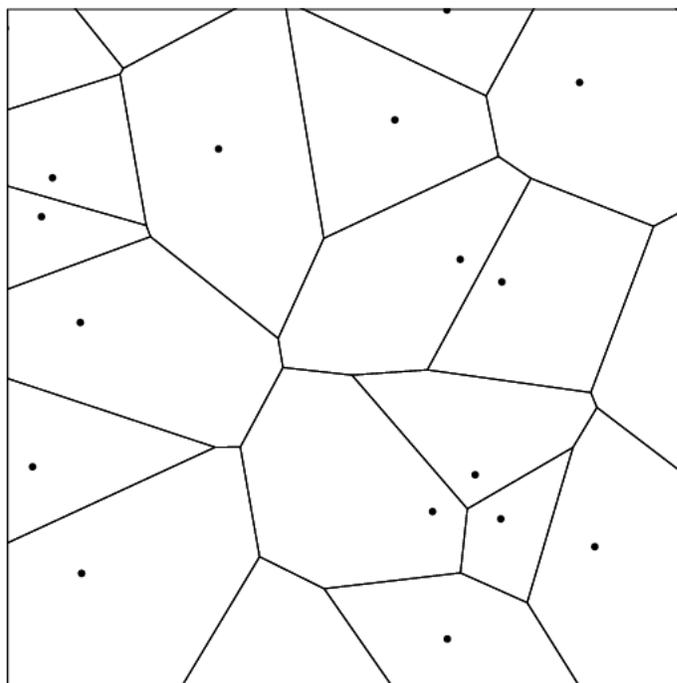


Figura 1.2: Tassellatura di Voronoi di un insieme aperiodico [22].

1.2 Gruppi e simmetrie

I gruppi di simmetrie di un reticolo sono un insieme di operazioni che lasciano invariato il reticolo stesso, essi sono tra gli strumenti più potenti per studiarne le caratteristiche e corrispondono a particolari funzioni dette isometrie.

Definizione 1.2.1.

Siano X, Y spazi metrici con distanza d_x e d_y , $f : X \rightarrow Y$ è detta isometria se $\forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow d_x(x_1, x_2) = d_y(f(x_1), f(x_2))$.

In altre parole, le isometrie sono trasformazioni che non modificano la distanza tra i punti del reticolo. Sono isometrie le rotazioni e le traslazioni, anche se quest'ultime non sono lineari. Ogni isometria è rappresentata da una matrice M : $\det(M) = \pm 1$. Se ad un'isometria è associata una matrice M con determinante 1 allora è detta propria, in caso il determinante sia -1 c'è un'inversione di parità. In due dimensioni, il gruppo delle isometrie, detto

anche movimenti rigidi del piano, è generato da tre operazioni e dalle loro combinazioni:

- **traslazione** t_y :

$$t_y \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

- **rotazione** R_θ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

- **riflessione** r_θ :

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Si noti che R_θ ha determinante 1, è dunque una trasformazione propria, mentre r_θ ha determinante -1 , perchè c'è l'inversione di un'asse.

Definizione 1.2.2.

A è un gruppo ciclico se esiste almeno un elemento “ a ” del gruppo tale che tutti gli elementi del gruppo possono essere scritti come sue potenze: $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Se $a^k = \mathbb{I}$ allora il gruppo è detto di ordine k .

In generale un gruppo ciclico di ordine n viene indicato con C^n .

Un importante esempio di gruppo ciclico è quello delle rotazioni R_θ con $\theta = 2\pi/n$. Chiaramente n è il minimo intero positivo tale che $R_\theta^n = \mathbb{I}$, pertanto R_θ ha ordine n .

Definizione 1.2.3.

Un punto P del piano è detto n -centro per un gruppo G di isometrie se le rotazioni appartenenti a G di centro P formano un gruppo ciclico finito C^n con $n > 1$.

Definizione 1.2.4.

Il gruppo di simmetrie di un reticolo è il gruppo massimale di isometrie che lo stabilizza.

Solo particolari figure possono essere utilizzate per ricoprire uno spazio e il problema di determinare quali è connesso all'ordine del gruppo ciclico C^n per cui sono invarianti.

Il seguente fondamentale teorema, detto di "restrizione cristallografica", pone dei vincoli sui tasselli utilizzabili per creare tassellazioni periodiche in 2 o 3 dimensioni:

Teorema 1.1.1. (di restrizione cristallografica)

Sia G un elemento di un gruppo di simmetrie puntuale di un reticolo Λ in 2 o 3 dimensioni, allora G può essere solo di ordine 2, 3, 4 o 6. Ossia valgono le rotazioni di angoli $2k\pi, k\pi, 2k\pi/3, k\pi/2, k\pi/3$ dove $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Considero un reticolo periodico Λ . Siano $A, B \in \Lambda$ e \vec{r} il vettore che li congiunge. Applico una rotazione di un angolo α al vettore \vec{r} mappando il punto A al punto A' e faccio la stessa cosa con B mappandolo ad un punto B' . Sia \vec{r}' il vettore che congiunge A' e B' , se A' e $B' \in \Lambda$ allora deve valere $|\vec{r}'| = m|\vec{r}|$, con $m \in \mathbb{N}$.

Si è dunque costruito un trapezio formato dai due vettori \vec{r} e \vec{r}' e dai congiungenti $A - A'$ e $B - B'$.

Allora si avrà:

$$|\vec{r}'| = 2|\vec{r}|\cos(\alpha) - |\vec{r}|$$

da cui sostituendo l'espressione $|\vec{r}'| = m|\vec{r}|$ si ottiene:

$$\cos(\alpha) = \frac{m+1}{2} = \frac{M}{2}$$

e visto che $|\cos(\alpha)| < 1$ gli unici possibili valori di $M \in \mathbb{N}$ sono $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Risolvendo l'equazione in α per ognuno dei possibili valori di M si ottiene che nell'intervallo $\alpha \in \{0, \pi\}$ può assumere solo i seguenti valori:

$$\alpha = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\} = \frac{2\pi}{n}, n = 1, 2, 3, 4, 6. \quad \square$$

Questo importante teorema proibisce la tassellazione del piano con tasselli di ordine 5 o maggiore di 6, ad esempio con pentagoni (ordine 5). E' invece possibile tassellare con tasselli di ordine 5 spazi curvi, come la sfera, o spazi a dimensione maggiore.



Figura 1.3: L'alveare delle api, un esempio di tassellatura esagonale, con il gruppo ciclico delle rotazioni di ordine 6.[16]

Esiste una curiosa correlazione tra le simmetrie cicliche permesse nella tassellazione di un reticolo n -dimensionale e la funzione ϕ di Eulero. Sia $n(k)$ in valore minimo di n (dimensione del reticolo) in cui compaiono simmetrie di ordine k . La funzione $\phi(n)$ di Eulero rappresenta il numero di interi positivi che sono coprimi con n . Ora definisco la funzione

$$\Phi(n) = \begin{cases} \phi(n), & \text{se } n = q^a \\ \Phi(n_1) + \Phi(n_2), & \text{se } n = n_1 n_2 \end{cases}$$

dove n_1, n_2 sono relativamente primi.

Teorema 1.1.2.

$$\Phi(k) = n(k).$$

Questo teorema [6] costituisce una generalizzazione della restrizione cristallografica in n -dimensioni. Ad esempio se considero:

$n = 6$, $\Phi(6) = \Phi(2) + \Phi(3) = 1 + 1 = 2$.

Se $n = 5$, $\Phi(5) = 4$.

Ciò significa che per avere gruppi di ordine 5, quindi tassellature pentagonali, devo avere come minimo uno spazio 4 dimensionale, mentre quelle di ordine 6, esagonali, sono permesse anche sul piano, come l'alveare delle api (figura 1.3).

1.3 Tassellature

Definizione 1.3.1.

Una tassellatura τ dello spazio euclideo E^n è una famiglia di insiemi chiusi $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_i\}$ t.c. $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$ per $\forall i \neq j$, $\cup T_i = E^n$.

La definizione di tassellatura è molto generale, non impone alcuna restrizione sulla forma dei singoli tasselli, tuttavia per i nostri scopi saranno considerate solo tassellature i cui tasselli sono copie di un insieme finito di prototipi, in altre parole fanno parte di un insieme finito di classi di equivalenza. Il set di tasselli rappresentativi di una certa classe di equivalenza rispetto ad un certo criterio, che può essere ad esempio l'azione di un gruppo di simmetria, è detto "protoset". Come esempio sono riportate due opere del celebre pittore olandese Maurits Escher (figura 1.4 e 1.5).

Per la descrizione completa di una tassellatura è bene introdurre altri concetti: quello di toppa e di corona.

Definizione 1.3.2.

Data una tassellatura τ e un chiuso O , la toppa di τ determinata da O è l'insieme dei $T_i \in \tau$ t.c. $T_i \cap O \neq \emptyset$.

Definizione 1.3.3.

Data una tassellatura τ la corona di un singolo tassello T_i è l'insieme dei tasselli T_j t.c. $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, cioè quelli attaccati a lui.

La restrizione cristallografica impone che il piano possa essere tassellato da elementi invarianti rispetto a determinati gruppi di simmetria ma non dice nulla su quali forme particolari possano essere utilizzare per ricoprirlo completamente. Il problema di individuare quali tipi di tasselli può formare un tassellamento completo è indecidibile [6], in altre parole non esiste un algorit-

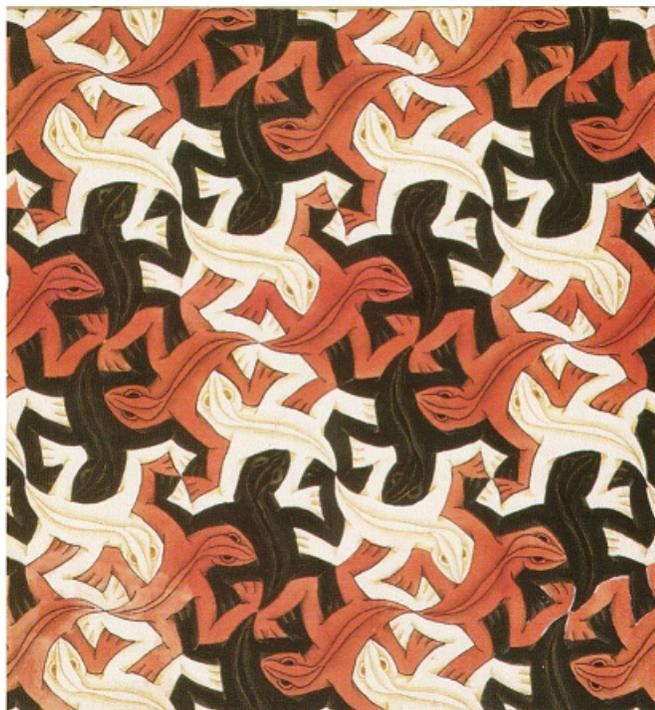


Figura 1.4: Lucertola dei paesi bassi, Escher. Questa tassellatura è formata da un solo prototipo rispetto al gruppo delle rotazioni e ai tre colori. [23]

mo che possa stabilirlo senza fare prove (Robert Berger, 1966). La domanda che ci si pone per un certo tipo di tassello diventa quindi: data una certa forma, qual è il numero k di corone che posso formare tale che non esista la corona $k + 1$? k è detto numero di Heesch.

Si conoscono molte tassellature con numero di Heesch $n = 2$, ma solo una con $n = 3$, scoperta da Robert Ammann (figure 1.6 e 1.7).

Il problema di Heesch ha inoltre rilevanza in fisica, infatti la cristallizzazione inizia con "nuclei" o un gruppo di atomi che si legano tra di loro, tuttavia a seconda del numero di corone che si formano il sistema potrebbe diventare instabile, il problema si riduce dunque a determinare qual è la configurazione con numero di Heesch massimo tale che si possa formare un cristallo stabile.

In analogia con i reticoli si può definire una tassellatura periodica.

Definizione 1.3.4.

Una tassellatura τ in E^n è detta periodica se ammette traslazioni in n dire-



Figura 1.5: Pesce volante/uccello, Escher. Questa tassellatura è formata da due protoset rispetto al gruppo delle rotazioni e ai due colori. [12]

zioni linearmente indipendenti.

E' detto subperiodica se ammette traslazioni in k dimensioni con $k < n$.

Definizione 1.3.5.

Una tassellatura è detta ripetitiva se per ogni toppa esiste un $c \in \mathbb{R}^+$ tale che ogni sfera di raggio c contenga la toppa.

Per escludere dall'analisi casi troppo particolari, verranno considerate solo tassellazioni localmente finite e normali:

Definizione 1.3.6.

Sia τ una tassellatura. Se per ogni arbitrario centro x_0 e raggio r , la sfera $B_r(x_0)$ ha intersezione non vuota con un numero al più finito di tasselli, allora diremo che la tassellatura τ è localmente finita.

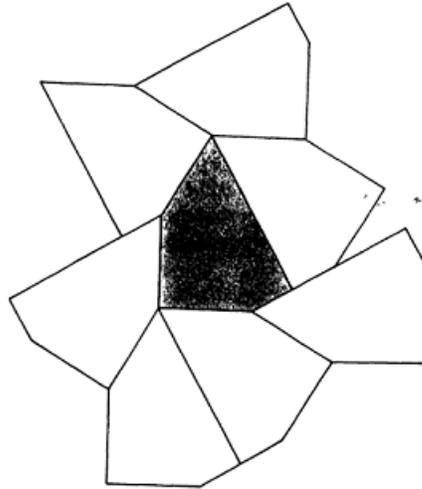


Figura 1.6: Corona con numero di Heesch $n = 1$ [6].

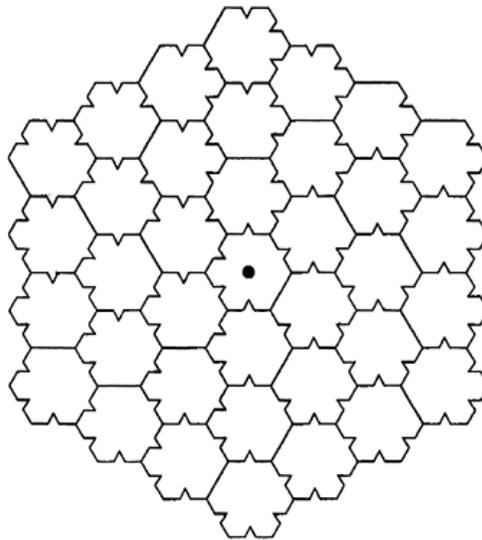


Figura 1.7: Tassellatura di Robert Ammann, l'unica con numero di Heesch $n = 3$ [6].

Definizione 1.3.7.

Sia τ una tassellatura per E^n . Se esistono due numeri reali positivi e distinti r e R tali che ogni tassello $T_i \in \tau$ contiene almeno una sfera di raggio r , $B_r(x_0)$ ed è contenuto in una sfera di raggio R , $B_R(x_1)$ per degli opportuni centri x_0 e x_1 , allora diremo che τ è normale.

E' importante distinguere protoset che ammettono tassellature periodiche, aperiodiche o entrambe. In generale l'aperiodicità è forzata dalle regole di corrispondenza che determinano i modi in cui i tasselli possono essere uniti.

Definizione 1.3.8.

Le regole di corrispondenza per un protoset P sono un atlante finito e minimale delle configurazioni in cui posso apparire nelle tassellature permesse da P .

Un protoset è detto aperiodico se ammette solo tassellature aperiodiche.

Un esempio importante di protoset aperiodico è quello di Penrose che verrà trattato in dettaglio più avanti.

Capitolo 2

Strutture aperiodiche e quasiperiodiche

Fino alla seconda metà del secolo scorso si è pensato che qualunque tassellatura in grado di ricoprire interamente il piano fosse in una certa scala invariante per traslazioni (periodica), tuttavia nel 1961 il matematico statunitense Wang Hao propose una serie di tasselli detti "domino di Wang" (figura 3.1) domandandosi se fosse possibile trovare un algoritmo che permettesse di capire se un insieme qualunque di tasselli potesse riempire l'intero piano. Il problema fu risolto da Robert Berger nel 1966, che dimostrò essere indecidibile [11]. I tasselli introdotti da Wang furono sfruttati dallo stesso Berger per tassellare il piano in modo aperiodico, inizialmente con 20.426 protoset, fino ad arrivare a 10. Questo fu il primo esempio di tassellatura completa del piano senza simmetria di traslazione in nessuna scala. Qualche anno dopo, nel 1973, Roger Penrose trovò una tassellatura aperiodica che necessitava di soltanto due protoset, la famosa tassellatura di Penrose. Molti altri esempi significativi di tassellatura aperiodica furono proposti da Robert Ammann. [6] Negli stessi anni, come verrà raccontato più ampiamente in seguito, furono trovati in natura cristalli aperiodici denominati quasicristalli con la seguente proprietà:

Definizione 2.0.1.

Un quasicristallo è un cristallo aperiodico in cui i pattern di diffrazione hanno simmetrie vietate dalla restizione cristallografica.

Naturalmente, come conseguenza della restrizione cristallografica, un quasi-

crystallo non può essere periodico. Queste particolari tassellazioni, composte da elementi di simmetria proibiti, sono realizzabili proprio a costo della periodicità stessa.

Dopo la scoperta di queste tassellature credute per molto tempo impossibili, e soprattutto dopo la scoperta dei quasicristalli, sono stati sviluppati metodi matematici per creare strutture aperiodiche e quasiperiodiche, in questo capitolo ne verranno esposte tre:

- sostituzione
- multigriglie
- proiezioni canoniche

Ognuno di questi metodi mette in luce particolari caratteristiche del reticolo generato, soprattutto nella generazione di quasicristalli. Verrà inoltre approfondita la tassellatura di Penrose, con dei cenni sul metodo di costruzione con multigriglie e proiezioni canoniche.

2.1 Sostituzione

Definizione 2.1.1.

Una tassellatura è detta "gerarchica" se i suoi tasselli possono essere composti per formare un protoset finito a scala maggiore e così via all'infinito.

Se i tasselli costruiti in questo modo sono sempre uguali (a parte per un fattore di scala) ai tasselli iniziali, la tassellatura è detta "tassellatura di sostituzione". (figura 2.1).

I tasselli di partenza sono detti di ordine 0, quelli composti da quelli di ordine 0 sono detti di ordine 1 e così via.

Dato un protoset composto da m elementi, ogni ordine di tassellatura è connesso al precedente da una matrice primitiva u_{ij} tale che l' i -esimo elemento della riga j -esima corrisponde al coefficiente dell' i -esimo elemento del protoset di ordine n , per creare il j -esimo elemento del protoset di ordine $n + 1$.

Inoltre il volume del i -esimo elemento del protoset $n + 1$ sarà legato agli elementi del protoset n nel seguente modo:

$$V(T_i^{(n+1)}) = \sum_{j=0}^n u_{ij} V(T_i^{(n)})$$

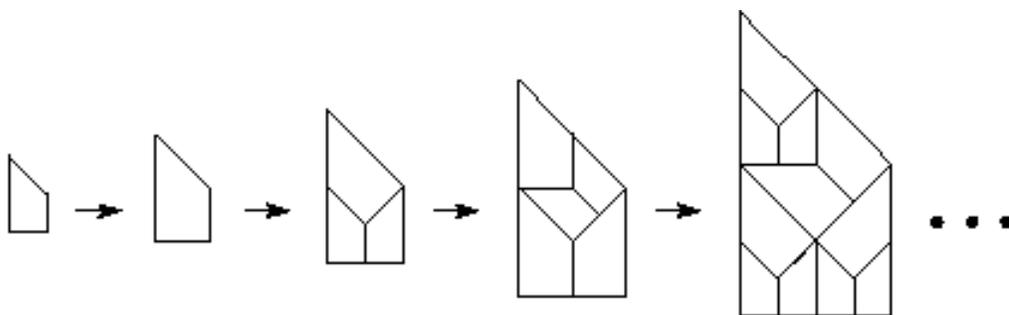


Figura 2.1: Esempio di tassellatura di sostituzione. [13]

Dove $V(T_i^{(m)})$ indica il volume dell' i -esimo tassello di ordine m .

Definizione 2.1.2.

Una tassellatura τ gerarchica è detta unica se il livello di ordine $n + 1$ può essere composto da quello di ordine n in soltanto un modo $\forall n > 0$.

Una tassellatura unica e gerarchica ha per ogni i -esimo livello un atlante di sostituzione A_i , che permette di costruire il livello $i + 1$.

Un semplice algoritmo per costruire tassellature in questo modo viene detto "Decomposizione":

Si parte da un tassello $T_i^{(0)}$ (di ordine 0), esso può essere decomposto in n tasselli di ordine -1 , viene poi fatto un cambiamento di scala in modo da far diventare i tasselli di ordine -1 della grandezza iniziale dei tasselli di ordine 1. Dopodichè viene fatta la stessa operazione ai tasselli di ordine -1 con quelli di ordine -2 e così via.

Il metodo appena citato è importante per la creazione di tassellazioni aperiodiche per il seguente teorema:

Teorema 2.1.1.

Una tassellazione unica e gerarchica è aperiodica.

Intuitivamente la ragione di questo teorema [6] è data dal fatto che una tassellazione unica e gerarchica deve essere invariante per traslazione di ogni

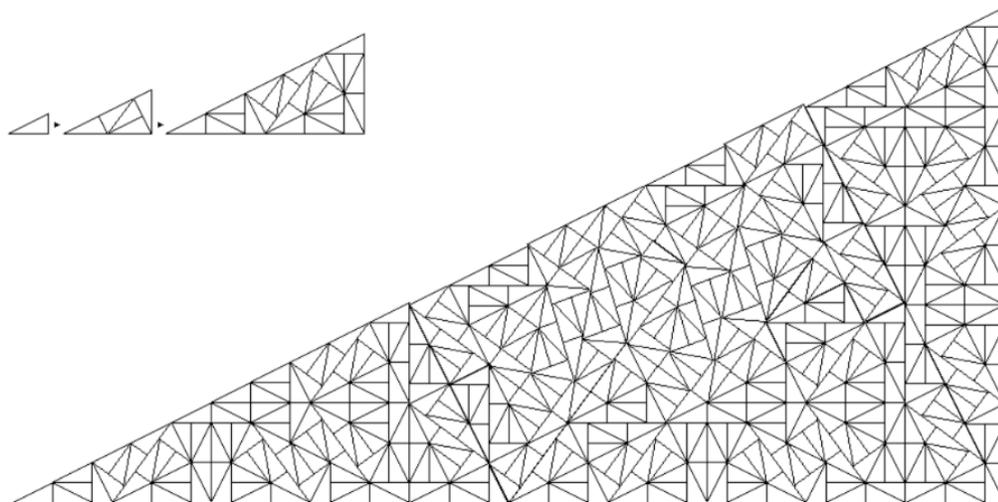


Figura 2.2: Esempio di tassellatura di sostituzione. [21]

ordine, perchè ogni ordine è fondamentalmente uguale. Questo porta ad una contraddizione perchè la simmetria per traslazione (cioè la periodicità) è legata ad una traslazione finita e unica, mentre in questi tipi di tassellazioni cresce con l'aumentare dell'ordine.

Un'interessante esempio di utilizzo del metodo di sostituzione è la costruzione della tassellatura Pinwheel (ghirlanda) introdotta da Charles Radin e composta da un singolo protoset formato da un triangolo rettangolo con lati di rapporto: $1, 2, \sqrt{5}$. Ogni triangolo può essere scomposto in 5 triangoli con gli stessi rapporti, perciò la tassellatura è gerarchica, inoltre è la prima tassellatura scoperta in cui i vari tasselli possono trovarsi in qualunque orientamento possibile. (figura 2.2)

2.2 Multigriglie

Il metodo delle multigriglie fu introdotto dal matematico olandese de Bruijn e permette di costruire una tassellatura aperiodica del piano. Inoltre, con qualche osservazione, può essere facilmente utilizzato per costruire tassellature quasiperiodiche, come quella di Penrose.

Prendendo come esempio proprio Penrose, possiamo basarci sulla seguente osservazione: in una tassellazione fatta da rombi, ogni tassello ha un lato comune con un altro e visto che i lati opposti di ogni rombo sono paralleli, si formeranno dei "nastri" formati da rombi con i due lati comuni tutti paralleli (figura 2.3).

Sostituendo ad ogni rombo una retta ortogonale al lato comune otterremo

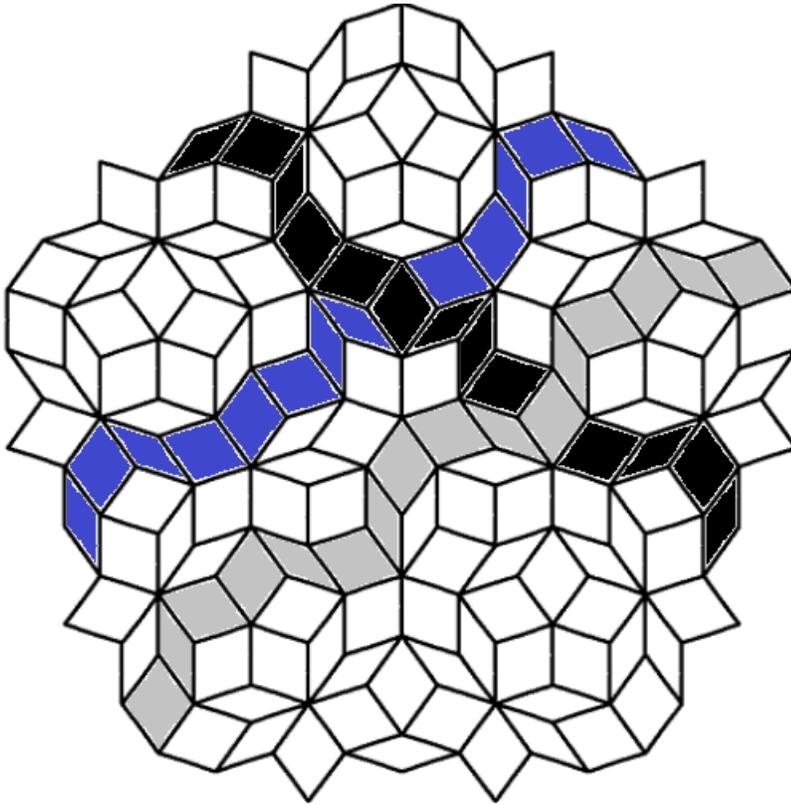


Figura 2.3: Nastri su una tassellazione di Penrose. [20]

k famiglie di infinite rette parallele tra di loro il cui duale sarà proprio la tassellazione con i rombi.

Naturalmente in \mathbb{R}^n si avrà un insieme di k infiniti iperpiani paralleli.

Definizione 2.2.1.

Una griglia in E^n è una famiglia di infiniti iperpiani paralleli ad una distanza fissata d . Ad ogni griglia è associato un vettore \vec{e}_j perpendicolare ad essa

detto "vettore di griglia".

Una multigriglia è la sovrapposizione di k griglie (figura 2.4).

Per costruire una struttura quasiperiodica con questo metodo si fa il pro-

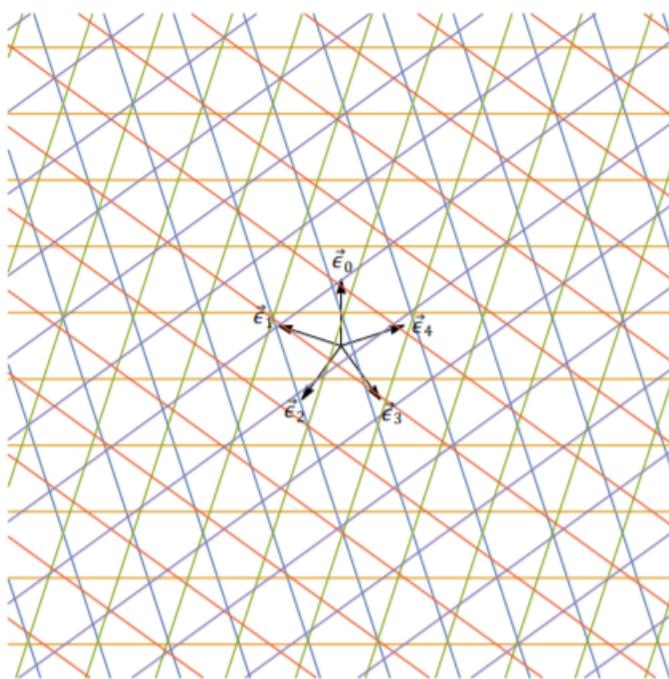


Figura 2.4: k -griglia, con $k = 5$. [19]

cedimento opposto: si parte da una multigriglia particolare e si costruisce la tassellatura facendone il duale definito nel seguente modo.

Definizione 2.2.2.

Due tassellazioni τ e τ' di E^n sono duali se esiste una mappa invertibile tra ogni faccia k -dimensionale di τ e ogni faccia $(n - k)$ -dimensionale di τ' .

In altre parole si può costruire il duale di una tassellazione creando un'altra tassellazione che ha come vertici i centri di ogni tassello iniziale (figura 2.5).

Una k griglia è anch'essa una tassellazione, ma non è normale e il suo protoset non è finito. Quando si passa al duale si avranno tasselli con lati perpendicolari alle rette delle griglie e paralleli ai vettori di griglia.

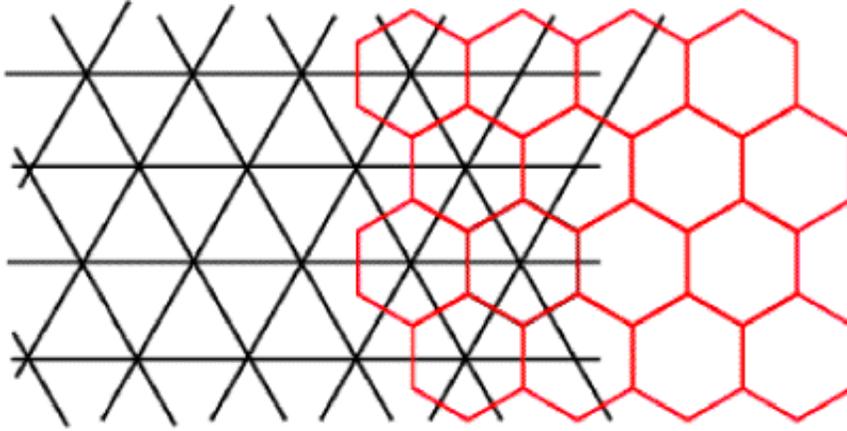


Figura 2.5: Tassellazione con triangoli sovrapposta al suo duale (esagoni). [15]

Definizione 2.2.3.

Una k -griglia in E^n ($k > n$) è detta regolare se in ogni punto si intersecano al massimo n iperpiani, sennò viene detta singolare.

In generale i duali delle griglie sono tassellazioni non periodiche e in particolare se la griglia è regolare il suo duale è ripetitivo [6].

Per costruire una multigriglia regolare si definisce il "vettore di shift":

$\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $0 \leq \gamma_i < 1$, $i = 1, \dots, n$ in modo tale da spostare la j -esima griglia di γ_j e far sì che non si intersechino più di n griglie in un singolo punto. Al variare di $\vec{\gamma}$ si avranno dunque diverse multigriglie e quindi diverse tassellature duali.

L'equazione degli iperpiani di una k -griglia è la seguente:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{e}_j = l_j + 1/2 + \gamma_j, l_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, k \quad (2.1)$$

dove l'intero l_j identifica la j -esima griglia.

Ogni punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ interno ad un tassello deve soddisfare la "condizione di maglia" [6]:

$\exists l_j \in \mathbb{Z}$: la disequazione: $l_j - 1/2 + \gamma_j < \vec{x} \cdot \vec{e}_j < l_j + 1/2 + \gamma_j$ ha soluzione simultanea $\forall j = 1, \dots, k$.

Il vettore \vec{l} rappresenta i vertici della tassellazione duale alla multigriglia.

2.3 Proiezioni canoniche

Uno dei metodi più efficaci per costruire un reticolo aperiodico è quello della proiezione canonica. Esso consiste nella proiezione di un reticolo periodico n -dimensionale Λ in un suo sottospazio k -dimensionale V con $n > k$.

Definizione 2.3.1.

Sia Λ un reticolo n -dimensionale e V un sottospazio k -dimensionale di E^n . V è detto totalmente irrazionale se $V \cap \Lambda = 0$.

L'aspetto interessante di questo metodo è che tracce delle simmetrie permesse in n dimensioni permangono anche nella dimensione k , se scelto un particolare sottospazio, naturalmente a costo della periodicità. A seconda del sottospazio scelto verrà creato un insieme periodico o non di punti. Essendo Λ "illimitato", proiettando ogni suo punto in un sottospazio totalmente irrazionale creo in esso un insieme denso di punti $\pi(\Lambda)$, che non è quindi un set di Delone, si dovranno perciò imporre alcune restrizioni sui punti del reticolo da proiettare. Per far questo si sceglie un insieme compatto $K \in \pi(\Lambda)^\perp$, e si sceglie di proiettare su V solo i punti $x_i \in \Lambda$: $\pi(x_i)^\perp \in K$. Una possibile e naturale scelta della "finestra" K , che è in realtà del tutto arbitraria, è $K = V(0)$, dove $V(0)$ è la cella di Voronoi di Λ in 0 [6]. Fissando questa condizione si può dimostrare che $\pi(\Lambda)$ è effettivamente un set di Delone.

Teorema 2.3.1.

Sia Λ un reticolo n -dimensionale e V un suo sottospazio totalmente irrazionale, allora $\pi(\Lambda)$, la proiezione di Λ in V , è aperiodico.[6]

Se il sottospazio intersecasse il reticolo n -dimensionale allora, come conseguenza della sua periodicità, lo intersecherebbe infinite volte in modo regolare, rendendo periodico anche il sottospazio. Un esempio significativo e facile da visualizzare di proiezione canonica è la costruzione di un quasicristallo 1-dimensionale dalla proiezione di un reticolo 2-dimensionale su una retta che ha coefficiente angolare $m = \frac{1}{\phi}$, dove $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$ è il numero aureo.

La tassellatura aperiodica della retta definita in questo modo è detta "tassellatura di Fibonacci" [1, 9], essa rappresenta la famosa sequenza di Fibonacci nel seguente modo: la retta è interamente tassellata da due segmenti di lunghezza S e L , con $S < L$. Essi si ripetono in modo aperiodico, ma scelto un punto P posto all'estremo superiore nell' n -esimo segmento il numero di

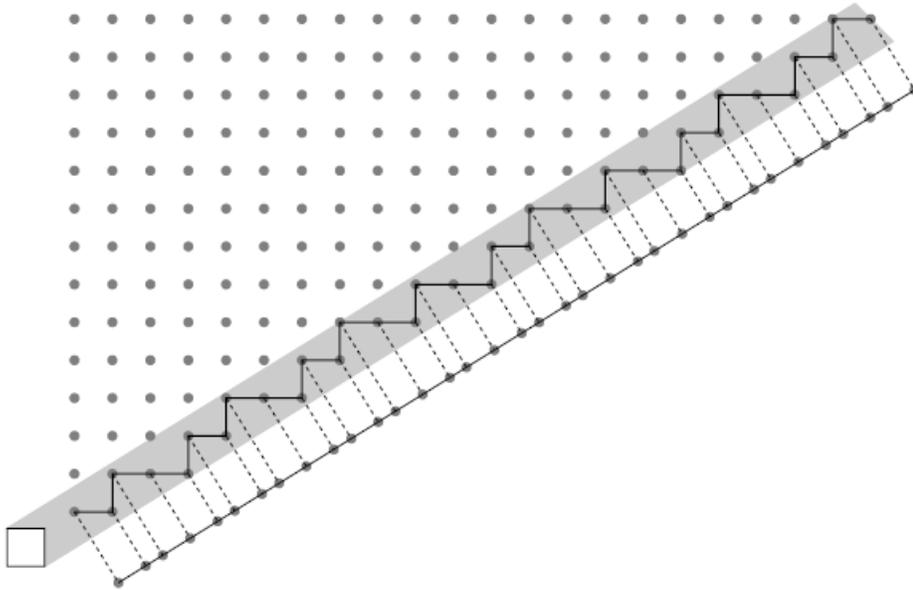


Figura 2.6: Proiezione canonica di un reticolo periodico 2-D su una retta completamente irrazionale. [3]

segmenti L e S che tassellano la porzione di retta è rispettivamente F_n e F_{n-1} , dunque il loro rapporto tende alla sezione aurea (figura 2.6).

L'uso della costante aurea per la pendenza della retta non è casuale: infatti la proiezione del reticolo su un sottospazio completamente irrazionale è aperiodica, ma non è detto che sia formata da un protoset finito, come nel nostro caso. Lo stesso metodo costruzione è estendibile in n -dimensioni. Esempi significativi si trovano soprattutto su la costruzione di strutture sul piano (quindi in 2 dimensioni) da spazi a dimensione maggiore di 3, per ottenere l'aperiodicità.

2.4 Tassellatura di Penrose

La tassellatura di Penrose fu introdotta da Roger Penrose nel 1974 e basata sul rapporto aureo, essa comprende molte tassellature quasiperiodiche che possono essere costruite con il metodo delle multigriglie o equivalentemente con le proiezioni canoniche, ognuno di questi metodi mette in risalto caratteristiche specifiche della tassellazione stessa. Esistono inoltre generalizzazioni

della tassellazione in n dimensioni.

In questo capitolo verrà trattato un particolare esempio di queste tassellature: quella composta da due rombi, uno più spesso con due angoli da $2\pi/5$ e due da $3\pi/5$, e uno più sottile con due angoli da $\pi/5$ e due da $4\pi/5$ (figura 2.7). Dati questi due tasselli esiste una quantità non numerabile di modi per

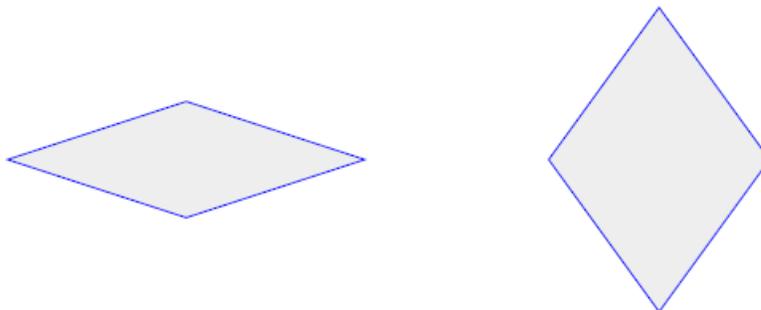


Figura 2.7: I due tasselli di Penrose.[14]

tassellare il piano, inoltre la tassellazione risulta aperiodica e con elementi di simmetria ciclica di ordine 5, quindi quasiperiodici. Nonostante il sistema sia aperiodico, cioè non goda di simmetria traslazionale, comunque, data una regione di schema, per quanto sia grande, questa sarà ripetuta un numero infinito di volte nella tassellazione.

2.4.1 Costruzione con pentagriglie

Per costruire una tassellazione di Penrose in 2 dimensioni con simmetria di ordine 5 si utilizza una multigriglia costituita dalla sovrapposizione di cinque griglie composte da rette parallele aventi angoli tra di loro multipli di $\pi/5$ e traslate in modo che non ci siano punti in cui si intersecano più di due rette (in modo che la multigriglia sia regolare).

De Bruijn dimostrò [6, 10] che una condizione necessaria e sufficiente per costruire Penrose dalle multigriglie è la seguente:

Sommando le 5 condizioni di maglia (per ogni j) si ottiene:

$$0 < \sum_{j=1}^5 l_j + \sum_{j=1}^5 \gamma_j + 5/2 - \vec{x} \cdot \sum_{j=1}^5 \vec{\epsilon}_j < 5 \quad (2.2)$$

visto che i vettori \vec{e}_j sono i vertici di un pentagono la loro somma sarà nulla. Nel caso in cui $\sum_{j=1}^5 \gamma_j = -5/2$ si ha:

$$0 < \sum_{j=1}^5 l_j < 5 \quad (2.3)$$

e visto che gli l_j sono numeri interi :

$$\sum_{j=1}^5 l_j \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (2.4)$$

Quindi nella tassellatura duale di una pentagriglia ogni vertice viene identificato con un numero da 1 a 4, inoltre si può dimostrare che i rombi che si formano possono essere formati solo da vertici in due sequenze: $\{1, 2, 3, 2\}$ e $\{2, 3, 4, 3\}$, perchè tra due vertici consecutivi si può crescere o decrescere solo di 1.

Visto che aggiungere un intero ad ogni γ_j non cambia la pentagriglia o il suo duale sostituisco a $-5/2 \rightarrow 1/2$ (condizione di somma).

Imporre la condizione di somma è equivalente ad imporre le condizioni di corrispondenza [6].

Teorema 2.4.1.

Se una multigriglia regolare soddisfa la condizione di somma allora il suo duale è una tassellatura di Penrose. [6] (figura 2.8)

Ci sono tre modi di avere un lato di un rombo a seconda dei possibili vertici e delle loro sequenze permesse: posso avere un lato composto da un vertice 1 e 2 , 2 e 3, 3 e 4.

Per imporre queste regole (di corrispondenza) vengono disegnate sui lati dei rombi delle frecce: nei lati composti da vertici di tipo 1 e 2 oppure 3 e 4 si disegna una freccia singola rispettivamente verso l'1 e verso il 4, mentre se ne disegnano due nel lato tra i vertici 2 e 3, verso il 3.(figura 2.9).

Una volta disegnate le frecce singole, quelle doppie sono determinate automaticamente, il problema è dimostrare che nella tassellatura tutte le frecce doppie hanno lo stesso verso.

Si osserva facilmente che ci sono tre possibili modi di accostare due rombi in

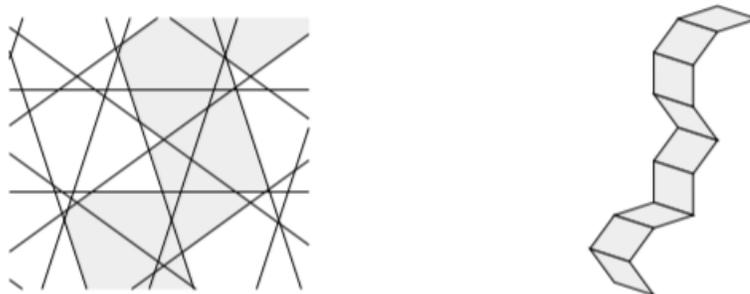


Figura 2.8: Nastro di Penrose da una pentagriglia [14].

modo da avere le frecce in senso opposto (figura 2.10), ma queste combinazioni non soddisfano la "condizione d'alternanza", secondo cui in ogni nastro si devono alternare rombi speculari.

Questo fatto si spiega con la seguente osservazione: dati i vettori $\epsilon_j, j = 1..5$ che generano la pentagriglia, i vettori $\epsilon_{j+1}, \epsilon_{j+2}$ sono speculari ai vettori $\epsilon_{j-1}, \epsilon_{j-2}$ rispetto al vettore ϵ_j , data ora la retta definita da ϵ_j essa intersecherà le rette definite da ϵ_{j-2} e ϵ_{j+2} in modo alternato essendo le rette equidistanziate, il duale di ognuno dei punti d'intersezione non è altro che un rombo (per il vettore ϵ_{j-2}) e il suo corrispondente speculare(per ϵ_{j+2}) perchè i vettori che li generano sono tra loro speculari, la stessa cosa accade con i vettori ϵ_{j-1} e ϵ_{j+1} .

2.4.2 Costruzione con metodo proiettivo

La costruzione di una tessellatura di Penrose partendo da uno spazio a 5 dimensioni si basa sulle seguenti osservazioni.

Innanzitutto la restrizione cristallografica non vieta la tessellazione di uno spazio 5-D con elementi appartenenti al gruppo ciclico di ordine 5. Inoltre considerando lo spazio vettoriale di dimensione 2 definito da determinati autovettori di un elemento di tale gruppo e proiettando su di esso i vettori del

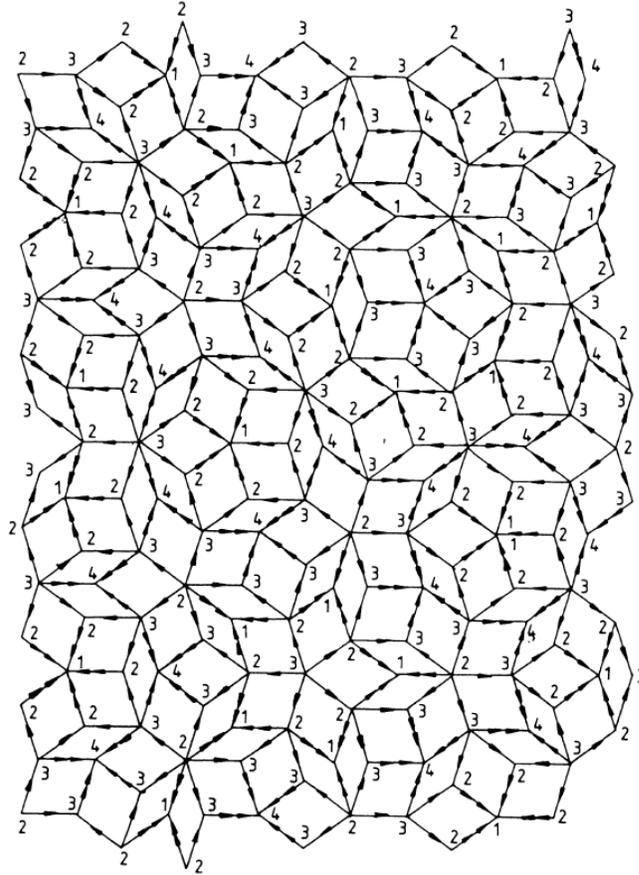


Figura 2.9: Tassellatura di Penrose con regole di selezione.[6]

reticolo 5-D si devono conservare le simmetrie iniziali perchè l'applicazione su tale sottospazio dell'elemento del gruppo deve lasciare invariati i vettori a meno di una costante (l'autovalore).

Si consideri dunque la matrice A definita:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

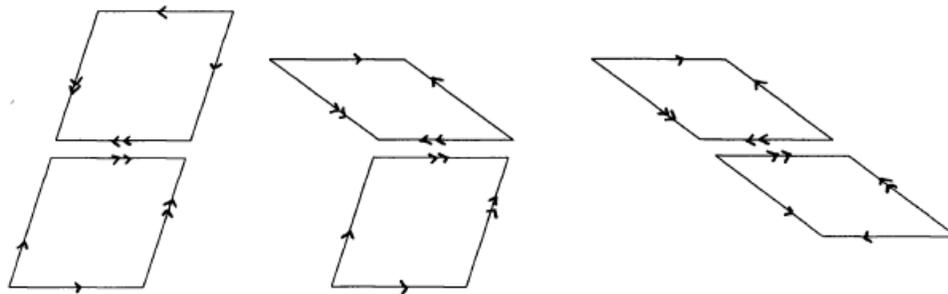


Figura 2.10: I tre possibili accostamenti che violano le regole di selezione di Penrose.[6]

si noti che $A^5 = \mathbb{I}$ perciò A è un elemento di un gruppo ciclico di ordine 5, rappresenta infatti la permutazione ciclica dei 5 assi canonici.

Gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{2i\pi/5}, \lambda_3 = e^{4i\pi/5}, \lambda_4 = e^{6i\pi/5}, \lambda_5 = e^{8i\pi/5}$$

e i corrispondenti autovettori:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\vec{v}_2 = (1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5})$$

$$\vec{v}_3 = (1, e^{4i\pi/5}, e^{8i\pi/5}, e^{2i\pi/5}, e^{6i\pi/5})$$

$$\vec{v}_4 = (1, e^{6i\pi/5}, e^{2i\pi/5}, e^{8i\pi/5}, e^{4i\pi/5})$$

$$\vec{v}_5 = (1, e^{8i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{2i\pi/5})$$

Si noti che gli autovalori sono la radice quinta dell'unità e che per gli autovettori valgono:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i = 0, i = 2, 3, 4, 5$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_4 = \vec{v}_5 \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_5 \cdot \vec{v}_4 = 0$$

Gli autovettori sono complessi ma esistono loro combinazioni lineari che definiscono piani reali, sfruttando il fatto che alcuni di loro sono complessi coniugati. Definisco allora i seguenti vettori $\in \mathbb{R}^5$:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \sqrt{5}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_5$$

$$\vec{u}_3 = i(\vec{v}_2 - \vec{v}_5)$$

$$\vec{u}_4 = \vec{v}_3 + \vec{v}_4$$

$$\vec{u}_5 = i(\vec{v}_3 - \vec{v}_4)$$

L'autospazio con queste combinazioni è dunque composto da due piani reali ortogonali ed una retta:

$$\sigma_1 = span\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\}, \sigma_2 = span\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}, r = span\{\vec{u}_1\}$$

Considero il reticolo

$$\Lambda \in \mathbb{R}^5, \Lambda = \sum_{i=1}^5 \lambda_i \vec{e}_i, \lambda_i \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

con \vec{e}_i base canonica.

Voglio scrivere i coefficienti dei vettori \vec{u}_i in funzione dei λ_i , cioè mi voglio mettere nella base degli \vec{u}_i , per farlo considero le due matrici:

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2i\pi/5} & e^{4i\pi/5} & e^{6i\pi/5} & e^{8i\pi/5} \\ 1 & e^{4i\pi/5} & e^{8i\pi/5} & e^{2i\pi/5} & e^{6i\pi/5} \\ 1 & e^{6i\pi/5} & e^{2i\pi/5} & e^{8i\pi/5} & e^{4i\pi/5} \\ 1 & e^{8i\pi/5} & e^{6i\pi/5} & e^{4i\pi/5} & e^{2i\pi/5} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

La matrice B è composta dagli autovettori di A nelle righe e rappresenta la matrice di cambiamento di base canonica a quelle degli autovettori mentre la matrice C rappresenta la matrice che trasforma gli autovettori \vec{v} negli \vec{u} : $B\vec{e} = \vec{v}, C\vec{v} = \vec{u} \rightarrow \vec{u} = CB\vec{e}$

Allora per le componenti deve valere:

$$\vec{\mu} = (CB)^{-1}\vec{\lambda}, \text{ dove } \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5), \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$$

Quindi:

$$(CB)^{-1} = B^{-1}C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1/2 & i/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2i\pi/5} & -e^{-i\pi/5} & -e^{i\pi/5} & e^{-2i\pi/5} \\ 1 & -e^{-i\pi/5} & e^{-2i\pi/5} & e^{2i\pi/5} & -e^{i\pi/5} \\ 1 & -e^{i\pi/5} & e^{2i\pi/5} & e^{2i\pi/5} & -e^{-i\pi/5} \\ 1 & e^{-2i\pi/5} & -e^{i\pi/5} & -e^{-i\pi/5} & e^{2i\pi/5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{5} & \sin(\pi/10) & \cos(\pi/10) & -\sin(3\pi/10) & \cos(7\pi/10) \\ \sqrt{5} & -\sin(3\pi/10) & \cos(7\pi/10) & \sin(\pi/10) & -\cos(\pi/10) \\ \sqrt{5} & -\sin(3\pi/10) & \cos(3\pi/10) & \sin(\pi/10) & \cos(\pi/10) \\ \sqrt{5} & \sin(\pi/10) & -\cos(\pi/10) & -\sin(3\pi/10) & \cos(7\pi/10) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Voglio proiettare gli elementi del reticolo Λ in σ_1 .

Visto che i piani sono ortogonali, in questa base la proiezione è immediata.

Siano \vec{a}_i le cinque righe della matrice $(CB)^{-1}$ (a partire dall'alto), $\sigma_1 = \text{span}\{\vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \mu_2\vec{u}_2 + \mu_3\vec{u}_3$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ e vista l'ortogonalità si avrà $\mu_2 = \langle \vec{a}_2, \vec{\lambda} \rangle$, $\mu_3 = \langle \vec{a}_3, \vec{\lambda} \rangle$, quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \langle \vec{a}_2, \vec{\lambda} \rangle \vec{u}_2 + \langle \vec{a}_3, \vec{\lambda} \rangle \vec{u}_3 \\ \vec{u}_3 &= \frac{1}{5}(\sqrt{5}\lambda_1 + \sin(\frac{\pi}{10})\lambda_2 + \cos(\frac{\pi}{10})\lambda_3 - \sin(\frac{3\pi}{10})\lambda_4 + \cos(\frac{7\pi}{10})\lambda_5)\vec{u}_2 + \\ &+ \frac{1}{5}(\sqrt{5}\lambda_1 + \sin(\frac{\pi}{10})\lambda_2 - \cos(\frac{\pi}{10})\lambda_3 - \sin(\frac{3\pi}{10})\lambda_4 + \cos(\frac{3\pi}{10})\lambda_5)\vec{u}_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

I coefficienti λ_i che definiscono i punti sullo spazio σ_1 , sono tra loro irrazionali perciò generano un reticolo aperiodico. Oltre all'aperiodicità deve inoltre essere conservata la simmetria ciclica di ordine n avendo proiettato sulla base degli autovettori della matrice $A \in C^n$. Visto che si sono proiettati tutti i punti dello spazio 5-D su σ_1 essi costituiranno uno spazio denso un σ_1 perciò devo selezionare solo alcuni punti in modo da avere un set di Delone e costruire correttamente Penrose. La scelta è arbitraria, tuttavia una scelta naturale è utilizzare soltanto i punti del reticolo tale per cui la loro proiezione nello spazio ortogonale a σ_1 appartiene alla cella di Voronoi situata nell'origine. Si può dimostrare [6] che la tassellazione costruita in questo modo è il duale di una multigriglia che costituisce quindi una tassellazione di Penrose.

Capitolo 3

Cristallografia e storia dei quasicristalli

In questo capitolo verrà trattata una breve introduzione alla cristallografia e ai metodi matematici per lo studio dei pattern di diffrazione, come la trasformata di Fourier. Inoltre verrà esposta la storia della scoperta dei quasicristalli e alcune loro proprietà fisiche.

3.1 Introduzione alla cristallografia

Fino agli anni 80 le tassellature aperiodiche del piano, e in particolare quelle quasiperiodiche, rappresentavano per la comunità scientifica nient'altro che un'interessante "gioco" matematico, non si pensava che potessero esistere fisicamente materiali con disposizioni simili degli atomi. Si credeva che la materia allo stato solido si presentasse soltanto in due forme: quella cristallina, con una distribuzione ordinata e periodica degli atomi e quella amorfa, con una distribuzione casuale.

La determinazione sperimentale delle strutture cristalline è data principalmente dalla diffrazione di elettroni, raggi X o neutroni dovuta all'interazione tra i raggi e gli atomi del reticolo. Per piani cristallini diversi ma paralleli si può studiare la diffrazione e quindi il reticolo stesso con la legge di Bragg:

$$n\lambda = 2d\sin(\theta) \tag{3.1}$$

Per studiare la diffrazione di un reticolo in generale consideriamo un piano con N fori a cui viene inviata un'onda monocromatica.

Questo modello per lo studio di un cristallo è giustificato dal fatto gli atomi del reticolo possono essere considerati come sorgenti secondarie di onde sferiche con una certa "scattering power" f_i [9]. L'ampiezza dell'onda passante per i fori sarà semplicemente la sovrapposizione delle ampiezze delle onde per ogni singolo foro posto a distanza d dagli altri:

$$A(\vec{s}) = \sum_{i=1}^N A_i(\vec{s}) \quad (3.2)$$

dove:

$$A_j(\vec{s}) = A_0(\vec{s}) \exp(2\pi i \vec{d}_j \cdot \vec{s}) \quad (3.3)$$

Il termine esponenziale quantifica lo sfasamento tra la j -esima onda e la prima, dovuto al fatto che sono poste a distanza d_j . L'intensità sarà la data dal quadrato dell'onda totale in uscita:

$$J(\vec{s}) = |A(\vec{s})|^2 \quad (3.4)$$

L'intensità J contiene dunque tutte le informazioni necessarie per conoscere il cristallo, tuttavia sarebbe molto più soddisfacente conoscere un'espressione analitica del cristallo stesso: come vedremo non è altro che l'anti-trasformata di Fourier di \vec{A} [6]. Essa è una funzione generalizzata e viene chiamata "funzione densità" e indicata nel seguente modo: $\rho(\vec{x})$.

Si avrà dunque:

$$\rho(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} A(\vec{s})$$

dove l'operatore \mathcal{F} è definito per una funzione f nel seguente modo:

$$\mathcal{F} f = \hat{f}, \hat{f}(\vec{s}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) \exp(-2\pi i \vec{x} \cdot \vec{s}) d\vec{x} \quad (3.5)$$

Se l'integrale converge allora esisterà la trasformata per la funzione f . L'anti-trasformata è definita come:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \hat{f} = f, f(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\vec{s}) \exp(2\pi i \vec{x} \cdot \vec{s}) d\vec{s} \\ \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f &= f \end{aligned} \quad (3.6)$$

Un'altra proprietà importante della trasformata è la seguente:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) \quad (3.7)$$

dove $*$ rappresenta il prodotto di convoluzione.

Per l'espressione esplicita della funzione densità calcolo dunque l'anti-trasformata dell'onda $\vec{A}(\vec{s})$ trovata precedentemente:

$$\rho(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}[A_0(\vec{s})(1 + \sum_{j=1}^N \exp(-2\pi i \vec{d}_j \cdot \vec{s}))] = [\mathcal{F}^{-1}(A_0(\vec{s}))] * [\mathcal{F}^{-1}(1) + \sum_{j=1}^N \mathcal{F}^{-1} \exp(-2\pi i \vec{d}_j \cdot \vec{s})]$$

del calcolo esplicito degli integrali di Fourier si ricava:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(1) &= \delta(\vec{x}), \\ \mathcal{F}^{-1}(\exp(-2\pi i \vec{d} \cdot \vec{s})) &= \delta(\vec{x} - \vec{d}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove $\delta(\vec{x})$ è la delta di Dirac.

Allora la funzione densità per un reticolo Λ sarà nella forma:

$$\rho_\Lambda(\vec{x}) = \sum_{\vec{d}_k \in \Lambda} \delta(\vec{x} - \vec{d}_k). \quad (3.9)$$

E' facile vedere che $\rho_\Lambda(\vec{x})$ rappresenta proprio un reticolo caratterizzato dai punti \vec{d}_k .

Dalla funzione densità è quindi possibile dedurre facilmente tutte le proprietà geometriche, come le varie simmetrie del materiale che si sta studiando.

In uno spazio 1-D (per comodità) la funzione densità di un reticolo periodico si può scrivere nella seguente forma:

$$\rho_\Lambda(x) = \sum_n \delta(x - na)$$

dove a è detto passo del reticolo.

Un reticolo 1 - D scritto in questa forma naturalmente è invariante rispetto ad una traslazione del passo a , quindi periodico.

Alternativamente posso considerare un reticolo composto dalla sovrapposizione di due reticoli periodici nel seguente modo [9, 7]:

$$\rho_\Lambda(x) = \sum_{n,m} \delta(x - na) + \delta(x - \alpha ma), \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

Se il numero α è irrazionale, cioè non esistono due interi $a, b : \alpha = \frac{a}{b}$, non esisterà alcun valore di n e di m per cui le due δ sono sovrapposte come nel punto $n = m = 0$, per cui il reticolo è aperiodico.

La funzione densità appena descritta è tipica dei quasicristalli, che possono essere quindi interpretati come sovrapposizione di più cristalli periodici ma

con particolari rapporti irrazionali tra i passi, che implicano la quasiperiodicità. Il quasicristallo di Fibonacci descritto nel capitolo 2 è descrivibile in questa forma, in particolare con $\alpha = \phi$.

Nel caso in cui α è irrazionale cambia in modo drastico anche la funzione \vec{J} , che risulta essere la trasformata di una funzione aperiodica che non avrà più uno spettro discreto. (figura 3.1)

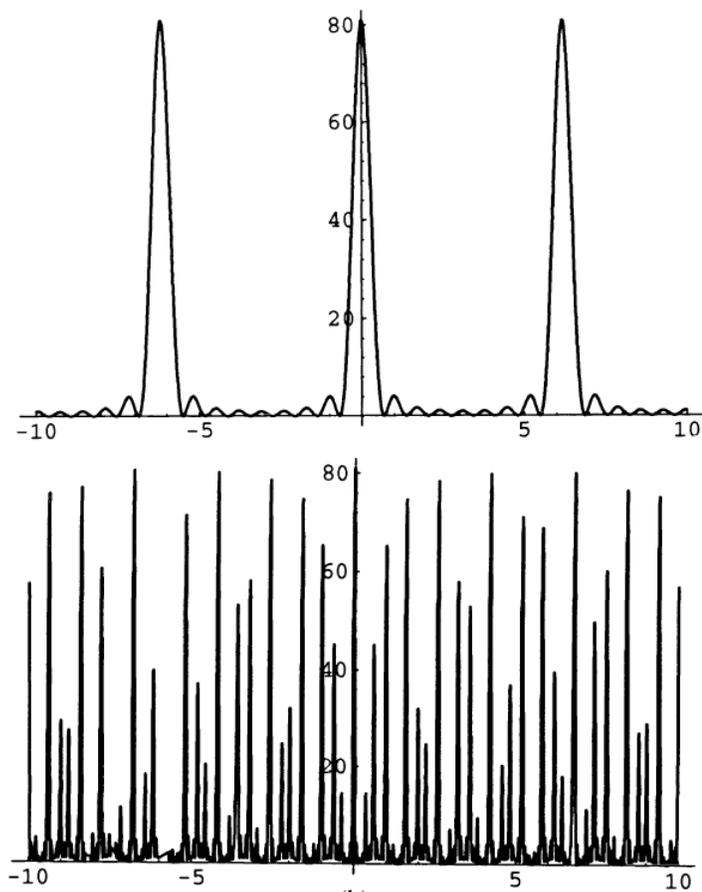


Figura 3.1: Confronto tra l'intensità dell'onda diffratta da un reticolo periodico (sopra) e aperiodico (sotto). [6]

Dalla precedente osservazione e dalle figure di diffrazione si possono definire in modo alternativo ma equivalente i cristalli:

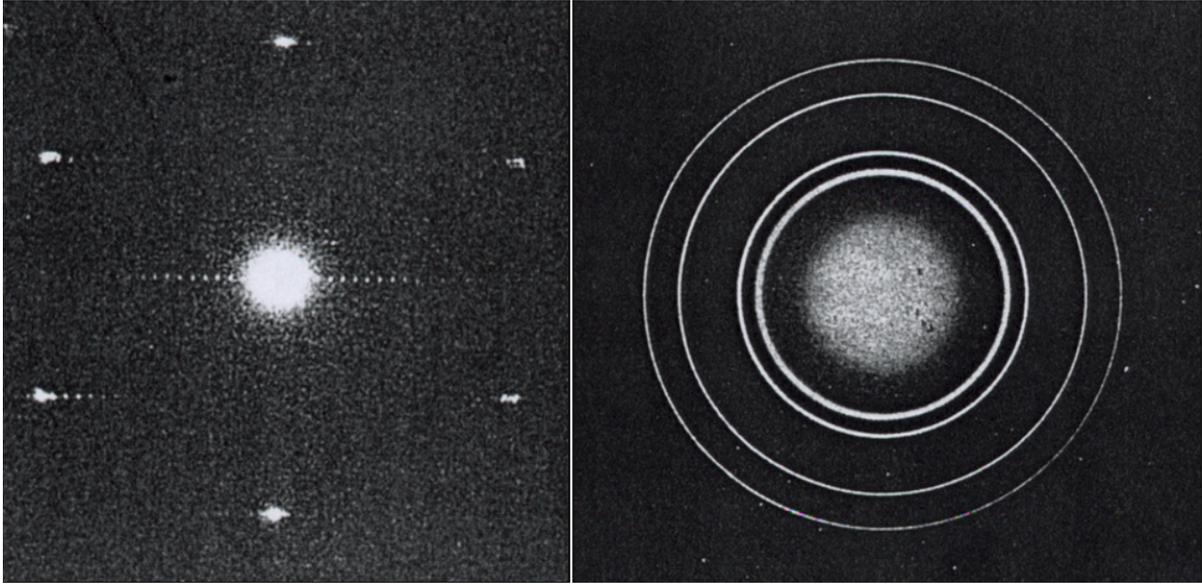


Figura 3.2: Pattern di diffrazione di un cristallo con simmetria di ordine 6 (sinistra) e di un solido amorfo (destra). [24]

Definizione 3.1.1.(condizione di diffrazione)

Λ è un cristallo se il suo spettro ha un'infinità numerabile di componenti discrete.

3.2 Storia e proprietà fisiche dei quasicristalli

Un'applicazione della teoria delle diffrazione sono i diagrammi di Laue, costituiti da macchie disposte simmetricamente, ottenute quando un fascio di raggi X (oppure di elettroni o di neutroni) passa attraverso un sottile strato di un cristallo, lasciando impressionata una lastra fotografica. Tali diagrammi sono impiegati in cristallografia per la determinazione dell'orientazione e della simmetria della struttura cristallina (metodo di Laue). Per un solido cristallino consistono in ben definite macchiette luminose, la cui disposizione simmetrica riflette la simmetria del cristallo, mentre per un liquido o un solido amorfo sono costituiti da anelli diffusi (figura 3.2).

Nel 1982 il fisico israeliano Dan Schechtman, studiando il composto intermetallico $Al_{80}Mn_{20}$ prodotto artificialmente trovò un diagramma di Laue costituito da punti ben definiti, quindi cristallino, ma presentavano una sim-

metria pentagonale dell'icosaedro, vietata nei cristalli (restrizione cristallografica)(figura 3.3) [2, 5].

La scoperta, pubblicata circa due anni dopo, portò grande scalpore tra la

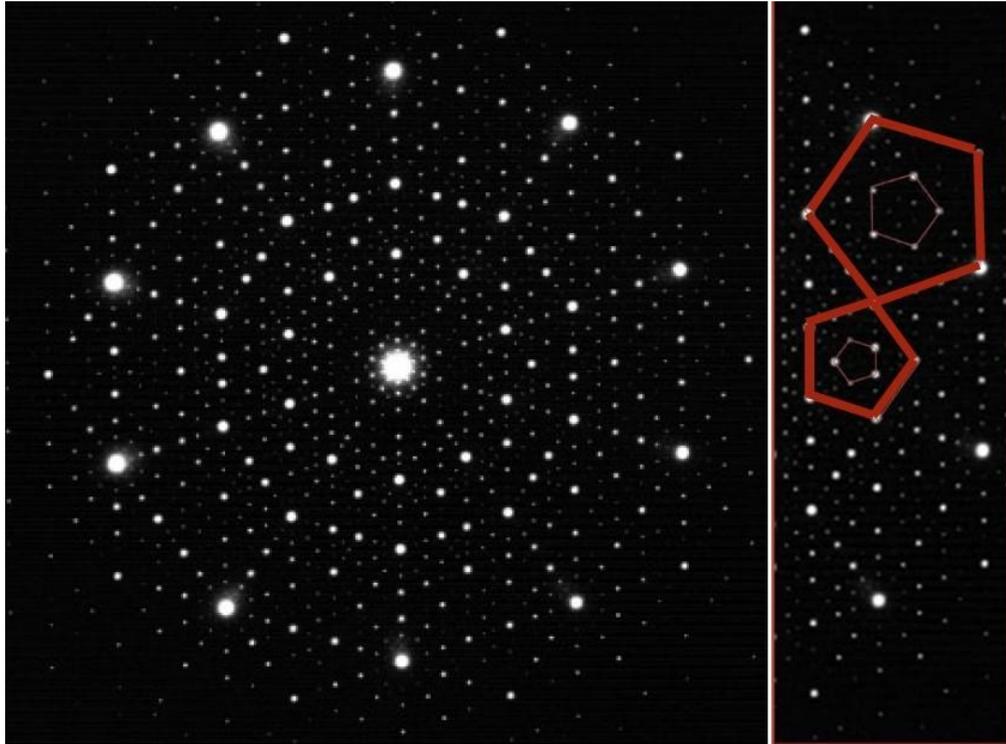


Figura 3.3: Pattern di diffrazione di un quasicristallo. [18]

comunità scientifica, tra l'incredulità iniziale e le accuse di aver sbagliato a leggere lo strumento. Quando effettivamente si verificò che ciò che era stato osservato era giusto, si pensò che l'esistenza di queste strutture non fosse di grande rilevanza, perchè non avrebbero potuto essere stabili, ma appunto "metastabili", cioè non si avevano prove che in centinaia o migliaia di anni questi materiali sarebbero rimasti invariati e avrebbero conservato la loro struttura. L'unica via per poterli promuovere ad oggetti interessanti per lo stato solido fu di tentare di trovarli in natura, se si fosse trovato un campione vecchio di milioni di anni, allora sarebbe la prova della loro stabilità.

Negli anni seguenti vennero pubblicati molti articoli, dividendo la comunità scientifica tra sostenitori e scettici. Sei anni dopo il geologo italiano Luca Bindi, all'epoca curatore del museo di mineralogia di Firenze, dopo aver let-

to in una rivista di fisica la possibile esistenza di questo tipo di cristalli trovò nel suo stesso museo una complicata miscela di rocce molto piccole e saldate su pezzo di silice non descritto nei cataloghi [8]. Dopo qualche analisi, il nuovo minerale, denominato icosaedrite, appunto per la sua disposizione degli atomi, la cui composizione chimica è $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$, fu riconosciuto un perfetto quasicristallo. Per determinarne la stabilità bisognava comunque determinarne la storia: da dove veniva e se ci fossero altri campioni simili in natura. Da quel momento iniziò una caccia durata quasi due anni, partita con aspettative di successo veramente basse. Colui che aveva venduto il campione al museo di mineralogia di Firenze era deceduto, tuttavia la moglie, ospitandoli ad Amsterdam, gli mostrò i suoi diari e affianco alla descrizione del campione che gli interessava venne trovato un nome: Valery Kryachko, un geologo russo. Kryachko portò la spedizione (di circa 15 persone) in un remoto fiume in Chukotka, tra montagne del Koryak in Siberia nord-orientale. Dopo aver setacciato circa una tonnellata e mezzo di argilla per 24 ore in condizioni estreme vennero trovati 10 frammenti diversi di quasicristallo. Il primo ritrovamento si rivelò di origine extraterrestre, portato da una meteorite e creato nello spazio da uno scontro di asteroidi ben 4 miliardi di anni fa. La creazione dei quasicristalli nello spazio è favorita dalla mancanza di ossigeno, infatti sulla terra l'alluminio, che insieme al rame è uno degli elementi più comuni nei quasicristalli, è sempre legato all'ossigeno, che impedisce la formazioni di queste particolari strutture. Inoltre dagli studi condotti i quasicristalli hanno spesso un'età maggiore di quella della terra. Si ottenne quindi la prova della stabilità dei quasicristalli e vennero classificati come un altro stato della materia solida. Tre anni dopo, nel 2011, Dan Schechtman, che era stato per lungo tempo definito quasi-scienziato da alcuni scettici, vinse il Nobel per la chimica per la sua scoperta.

Ora i quasicristalli sono oggetto di grande studio per le loro proprietà fisiche derivanti dalla particolare struttura. Ad esempio nonostante siano leghe metalliche, risultano essere isolanti elettrici e termici, con resistenza elettrica che aumenta con l'aumentare della temperatura. Inoltre mostrano anche particolari proprietà meccaniche: a temperatura ambiente sono duri come il silicio e quasi altrettanto fragili. A circa il 70% della temperatura di fusione (circa $1000K$) diventano plastici senza presentare indurimento, cioè a parità di deformazione si richiede uno sforzo minore. Sono inoltre state studiate leghe $Al - Zn - Mg$ quasicristalline con caratteristiche di superconduttività. Le principali leghe quasicristalline trovate sono le seguenti, divise in base all'ordine di simmetria che presentano [4]:

48CAPITOLO 3. CRISTALLOGRAFIA E STORIA DEI QUASICRISTALLI

- Quasicristalli ottagonali:
 $V - Ni - Si, Mn - Si, Mn - Si - Al - Mn - Fe - Si$
- Quasicristalli decagonali:
 $Al - Cu - Mn, Al - Cu - Fe, Al - Cu - Ni, Al - Cu - Co, Al - Cu - Co - Si, Al - Mn - Pd, V - Ni - Si, Cr - Ni$
- Quasicristalli dodecagonali:
 $Cr - Ni, V - Ni, V - Ni - Si$
- Quasicristalli icosaedrali:
 $Al - Mn, Al - Mn - Si, Al - Li - Cu, Al - Pd - Mn, Al - Cu - Fe, Al - Mg - Zn, V - Ni - Si, Pd - U - Si$

Bibliografia

- [1] Steurer, W. , and Deloudi, S. , *Crystallography of quasicrystals: concepts, methods and structures.*, Vol. 126. Springer Science & Business Media, 2009.
- [2] Bindi, L. , Steinhardt, P. J. , Yao, N. , & Lu, P. J. , *Natural quasicrystals*, science 324.5932 (2009): 1306-1309.
- [3] Harriss, E. O. , *On canonical substitution tilings*, Diss. University of London, 2004.
- [4] Samavat, F. , *Quasicrystals*, Open Journal of Physical Chemistry 2.01 (2012): 7.
- [5] Steinhardt, P. J. , *Quasicrystals: a brief history of the impossible*, Rendiconti Lincei 24.1 (2013): 85-91.
- [6] Senechal, M. , *Quasicrystals and geometry*, CUP Archive, 1996.
- [7] De Bruijn, N.G. , *Quasicrystals and their Fourier transform*, Indagationes Mathematicae 89 (1986): 123-152.
- [8] Steinhardt, P. J. and Bindi, L. , *Quasicristalli naturali = Natural Quasicrystals* Il Museo di Storia naturale dell'Università degli studi di Firenze. Firenze University Press, 2012. 284-286.
- [9] Janot, C. , *Quasicrystals, Neutron and Synchrotron Radiation for Condensed Matter Studies*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1994. 197-211.
- [10] Au-Yang, H. , and Perk, J. HH , *Quasicrystals, The impact of N.G. de Bruijn*, Indagationes Mathematicae 24.4 (2013): 996-1017.

- [11] Berger, Robert, *The undecidability of the domino problem*, No. 66. American Mathematical Soc., 1966.
- [12] http://dm.unife.it/geometria/Escher_A/ricoprimenti.htm
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Substitution_tiling
- [14] https://lipn.univ-paris13.fr/~fernique/qc/structure_2.pdf
- [15] https://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Spherical_Geometry
- [16] <https://phys.org/news/2018-12-honeybee-wake-up-calland.html>
- [17] https://www.123rf.com/photo_22316356_alhambra-palace-in-granada-tile-mosaic-background-spain.html
- [18] <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/advanced-chemistryprize2011.pdf>
- [19] <https://www.mdpi.com/2073-4352/7/10/304>
- [20] http://www.polyhedra.jp/polyhedron/tr_penrose/zindex.html
- [21] <http://www.quadibloc.com/math/til04.htm>
- [22] https://www.researchgate.net/publication/226175188_Percolation_Connectivity_Coverage_and_Colouring_of_Random_Geometric_Graphs/figures?lo=1
- [23] http://www.robertogiunti.it/Reptiles/06_p6.html
- [24] http://www.treccani.it/enciclopedia/quasi-cristalli_%28Enciclopedia-Italiana%29/
- [25] http://www.treccani.it/enciclopedia/reticolo-di-bravais_%28Enciclopedia-della-Matematica