

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Fisica

Stati coerenti nella luce
e
nella materia

Relatore:
Prof.ssa
ELISA ERCOLESSI

Presentata da:
ILARIA STANZANI

Anno Accademico 2018/2019

Abstract

In questa tesi tratteremo vari aspetti degli stati coerenti sia nella luce che nella materia. Partiremo dallo studio teorico degli stati coerenti nell'oscillatore armonico, in seguito studieremo gli stati coerenti all'interno dei sistemi bosonici e fermionici, in relazione alle teorie della condensazione di Bose-Einstein, della superfluidità del ${}^4\text{He}$ e della superconduttività BCS. In seguito mostreremo come i modi della radiazione elettromagnetica corrispondano a degli oscillatori armonici quantistici.

Nel primo capitolo di questa tesi tratteremo lo studio teorico per arrivare agli stati "quasi-classici" dell'oscillatore armonico quantistico. Nel secondo capitolo generalizzeremo la teoria al caso con molte particelle, sia nel caso bosonico che in quello fermionico, affrontando sia il caso della condensazione di Bose-Einstein sia quello delle coppie di Cooper in superconduttività. Infine studieremo per il campo elettromagnetico la corrispondenza tra modi del campo e oscillatori armonici.

Indice

1	Stati coerenti "quasi-classici" dell'oscillatore armonico	5
1.1	Stati classici dell'oscillatore armonico	5
1.2	Stati quasi-classici dell'oscillatore armonico quantistico	7
1.3	Proprietà dello stato $ \alpha\rangle$	10
1.4	Costruzione della funzione d'onda $\Psi_\alpha(x)$	13
1.5	Evoluzione temporale dello stato quasi classico $ \alpha\rangle$	16
2	Stati coerenti macroscopici	19
2.1	Sistemi di bosoni	19
2.2	Sistemi di fermioni	30
2.3	Luce	34

Introduzione

La nascita degli stati coerenti può essere posta cronologicamente subito dopo la rivoluzione apportata dalla Meccanica Quantistica, in quanto vennero ricavati per la prima volta nel 1926 dallo stesso Schroedinger per mostrare l'esistenza di una classe di stati dell'oscillatore armonico quantistico che mostrano un comportamento analogo agli stati dell'oscillatore classico. Da quel momento in poi gli stati coerenti hanno rappresentato un punto cruciale di uno dei più grandi problemi fisici del '900, ovvero la corrispondenza tra la nuova teoria, basata su sistemi microscopici, e la fisica classica, che rimaneva comunque valida per la spiegazione del mondo macroscopico.

Nella pratica sperimentale però gli stati coerenti si rivelarono molto difficili da riprodurre in laboratorio e per questo motivo lo studio e l'avanzamento della teoria su di essi venne trascurata fino ai primi anni '60, quando vennero riscoperti e applicati nello studio dell'ottica quantistica. La teoria venne ripresa e nacquero le teorie più moderne della condensazione di Bose-Einstein, della superfluidità del 4He e della superconduttività BCS.

Lo studio teorico fatto inizialmente da Schroedinger comprendeva la ricerca di uno stato dell'oscillatore quantistico che desse gli stessi risultati dell'oscillatore classico, per fare ciò il passaggio necessario fu quello di passare dalle semplici variabili della fisica classica agli operatori della fisica quantistica. Facendo ciò fu in grado di introdurre e di utilizzare molte delle proprietà degli operatori e riuscì così a trovare lo stato che stava cercando, a studiarne la relativa funzione d'onda e l'evoluzione temporale riuscendo sempre a ricondursi allo stato classico. Per questo gli stati così trovati vennero chiamati "stati quasi-classici" dell'oscillatore armonico quantistico. L'applicazione degli stati coerenti ai sistemi bosonici e fermionici venne introdotta in quanto serviva una descrizione macroscopica dello stato per poter spiegare le proprietà della condensazione di Bose-Einstein, del superfluido di 4He e della superconduttività.

Lo studio più semplice e più immediato è sicuramente quello dei sistemi bosonici in quanto la funzione d'onda risulta simmetrica e non abbiamo nessun limite nel numero di occupazione degli stati.

Più complicato è lo studio della superconduttività, ovvero degli stati coerenti nei sistemi fermionici in quanto bisogna tenere conto del Principio di esclusione di Pauli, e quindi ogni stato può essere occupato al massimo da due fermioni di spin opposto. La sco-

perta che portò alla svolta nello studio dei sistemi fermionici fu la scoperta da parte di Cooper che gli elettroni nei conduttori formano delle coppie. Il problema si sposta quindi sul trovare uno stato coerente in cui ogni coppia partecipi. La soluzione risulta troppo complicata ma si possono studiare delle caratteristiche degli stati condensati nei superconduttori ri-adattando delle proprietà già trovate per i sistemi bosonici.

È anche possibile fare un discorso più incentrato sul campo elettromagnetico, e partendo dalle equazioni di Maxwell e un campo confinato in una cavità si riesce ad arrivare a mostrare che ogni modo del campo elettromagnetico sia equivalente a un oscillatore armonico classico. Tramite poi la Meccanica Quantistica si riesce a quantizzarlo e quindi anche per la luce possiamo applicare i risultati generali ricavati con la teoria degli stati coerenti.

Nel primo capitolo di questa tesi tratteremo lo studio teorico per arrivare agli stati "quasi-classici" dell'oscillatore armonico quantistico. Nel secondo capitolo generalizzeremo la teoria al caso con molte particelle, sia nel caso bosonico che in quello fermionico, affrontando sia il caso della condensazione di Bose-Einstein sia quello delle coppie di Cooper in superconduttività. Infine studieremo per il campo elettromagnetico la corrispondenza tra modi del campo e oscillatori armonici.

Capitolo 1

Stati coerenti "quasi-classici" dell'oscillatore armonico

In questo capitolo verranno introdotti gli stati coerenti dal punto di vista quantistico, ovvero come stati quasi classici di un oscillatore armonico quantistico, per farlo seguiremo l'impostazione del complemento G_V del libro "Quantum Mechanics" di C. Cohen-Tannoudji [1].

In meccanica classica i valori di aspettazione della posizione e del momento di un oscillatore armonico sono funzioni oscillanti del tempo, le quali rimarranno zero solo se l'energia dell'oscillatore sarà zero. Studiando l'oscillatore armonico dal punto di vista della meccanica quantistica, bisogna essere in grado di raggiungere gli stessi risultati della meccanica classica quando l'oscillatore armonico ha un'energia molto più grande del singolo quanto $\hbar\omega$.

Gli stati quanto-meccanici in cui la meccanica quantistica ridà gli stessi risultati della classica sono detti stati quasi classici e sono una sovrapposizione degli stati stazionari dell'oscillatore.

1.1 Stati classici dell'oscillatore armonico

La costruzione di uno stato quanto-meccanico, in cui trovo gli stessi risultati della meccanica classica non è però possibile in quanto la posizione, il momento e l'energia sono descritti da operatori non commutanti tra loro, e quindi non esiste uno stato in cui sono tutti e tre definiti. La soluzione al problema è quella di mettersi in uno stato in cui a qualunque istante i valori di aspettazione $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle E \rangle$ sono il più vicino possibile ai valori classici, ma nessuno dei tre è mai completamente esatto.

Innanzitutto troviamo il parametro α_0 che caratterizza il moto classico dell'oscillatore,

in modo da poter poi trasporlo in termini quantistici.

Le equazioni classiche del moto sono

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}p(t) \\ \frac{d}{dt}p(t) = -m\omega^2x(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Operando le sostituzioni $\tilde{x}(t) = \beta x(t)$ e $\tilde{p} = \frac{1}{\beta\hbar}p(t)$ dove $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ in Eq. (1.1) arrivo ad avere le equazioni del moto nella forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \omega\tilde{p}(t) \\ \frac{d}{dt}\tilde{p}(t) = -\omega\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

Lo stato classico al tempo t è determinato da $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{p}(t)$, che possono essere combinati in un numero adimensionale

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{x}(t) + i\tilde{p}(t)] \quad (1.3)$$

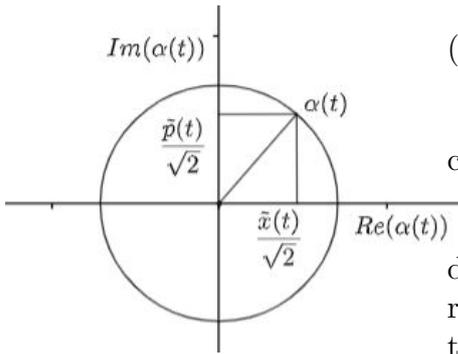


Figura 1.1: Rappresentazione del fattore $\alpha(t)$ sul piano complesso di Argand-Gauss, con rotazione in senso antiorario.

Possiamo riscrivere quindi le due equazioni in Eq. (1.2) come

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) \quad (1.4)$$

che ha come soluzione

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \quad (1.5)$$

dove $\alpha_0 = \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{x}(0) + i\tilde{p}(0)]$. Dato che $\alpha(t)$ rappresenta il moto classico posso studiarne le caratteristiche analizzando il suo andamento su un piano complesso di Argand-Gauss. Da questa rappresentazione possiamo vedere che l'unica grandezza che caratterizza due moti diversi è α_0 e che quindi è quest'ultimo il parametro caratterizzante il moto classico che stavamo cercando, dal quale possiamo ricavare

l'ampiezza di oscillazione dal suo modulo $|\alpha_0|$ e la fase dall'argomento.

Utilizzando questo nuovo parametro possiamo scrivere le variabili del moto come

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}] \\ \tilde{p}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}[\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}] \end{cases} \quad (1.6)$$

e l'energia dello stato H classicamente è costante nel tempo e è uguale a

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}[\tilde{x}(0)]^2 + [\tilde{p}(0)]^2 = \hbar\omega|\alpha_0|^2 \quad (1.7)$$

e quindi se stiamo considerando uno stato macroscopico in cui l'energia è molto più grande di un quanto ($\hbar\omega$) di conseguenza $|\alpha_0| \gg 1$.

1.2 Stati quasi-classici dell'oscillatore armonico quantistico

Fino ad ora abbiamo ancora una trattazione classica dell'oscillatore, il cui moto è totalmente caratterizzato dal parametro $|\alpha_0|$. Da questo punto cominciamo la ricerca dello stato quanto-meccanico che corrisponda a quello semi-classico sotto alcune condizioni, e passiamo come prima cosa allo spazio delle quadrature.

Lo spazio delle quadrature è semplicemente il nome utilizzato per chiamare lo spazio di \hat{X} e \hat{P} .

Possiamo definire gli autostati delle quadrature come

$$\hat{X}|X\rangle = X|X\rangle \quad \hat{P}|P\rangle = P|P\rangle \quad (1.8)$$

e sono legati tra di loro dalla trasformazione di Fourier, in quanto

$$|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iXP} |P\rangle dP \quad (1.9)$$

$$|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+iXP} |X\rangle dX \quad (1.10)$$

Possiamo introdurre anche l'operatore di sfasamento

$$\hat{U}(\theta) = e^{(-i\theta\hat{n})} \quad (1.11)$$

che quando applicato a un operatore ne comporta lo sfasamento di θ . Tramite questo operatore possiamo ruotare le quadrature e passare da una rappresentazione di spazio a una di momento tramite uno sfasamento di $\theta = \pi/2$. Per l'oscillatore armonico quantistico sappiamo che l'operatore hamiltoniano può essere scritto come

$$\hat{H} = \hbar\omega\tilde{H} \quad (1.12)$$

dove $\tilde{H} = \frac{1}{2}[\hat{X}^2 + \hat{P}^2]$ e

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \quad (1.13)$$

$$\hat{P} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \quad (1.14)$$

dove a e a^\dagger sono gli operatori di scala e le relazioni (1.13) e (1.14) sono in forma adimensionale. L'azione degli operatori di creazione $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{x} + i\hat{p}]$ e di distruzione $a = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{x} - i\hat{p}]$ è definita da

$$a^\dagger |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\varphi_{n+1}\rangle \quad (1.15)$$

$$a |\varphi_n\rangle = \sqrt{n} |\varphi_{n-1}\rangle$$

Gli stati $|\varphi_n\rangle$ sono chiamati Stati di Fock e sono la base dello spazio di Fock (uno spazio di Hilbert utilizzato nella descrizione degli stati quantistici a numero variabile di particelle). Questi $|\varphi_n\rangle$ sono autostati dell'operatore "numero di particelle" \hat{n} . Questi autostati sono tutti soluzione della relazione (1.15) per uno stato iniziale $|\varphi_0\rangle$ detto di vuoto (assenza di fotoni)

$$|\varphi_n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |\varphi_0\rangle \quad (1.16)$$

Noi siamo interessati nei valori di aspettazione dei nostri operatori e di come evolvono nel tempo, e dato che li abbiamo scritti in funzione degli operatori a e a^\dagger allora dovremo studiare i valori medi e l'evoluzione nel tempo di questi ultimi.

Preso quindi uno stato arbitrario $|\varphi(t)\rangle$ possiamo definire il valore di aspettazione di a come $\langle \varphi(t) | a | \varphi(t) \rangle = \langle a \rangle (t)$ e per studiarne l'evoluzione nel tempo uso l'equazione¹

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle a \rangle (t) = \langle [a, H] \rangle (t) \quad (1.17)$$

Per prima cosa studiamo il risultato del commutatore

$$[a, H] = \hbar\omega [a, a^\dagger a] = \hbar\omega a \quad (1.18)$$

e sostituendo questo risultato nell'Eq. (1.17) arriviamo ad avere un'equazione differenziale del tipo

$$i \frac{d}{dt} \langle a \rangle (t) = \omega \langle a \rangle (t) \quad (1.19)$$

la cui soluzione è

$$\langle a \rangle (t) = \langle a \rangle (0) e^{-i\omega t} \quad (1.20)$$

A questo punto ricaviamo l'evoluzione temporale di $\langle a^\dagger \rangle (t)$ utilizzando le regole del complesso coniugato e arriviamo ad avere

$$\langle a^\dagger \rangle (t) = \langle a \rangle^* (0) e^{i\omega t}. \quad (1.21)$$

Notiamo subito che le equazioni (1.20) e (1.21) sono in analogia con l'equazione (1.5) che descrive il parametro caratterizzante il moto classico.

Sostituendo le Eq.(1.20) e (1.21) nelle Eq.(1.13) e (1.14) troviamo i valori medi di posizione e momento ovvero

$$\begin{cases} \langle \hat{X} \rangle (t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\langle a \rangle (0) e^{-i\omega t} + \langle a \rangle^* (0) e^{i\omega t} \right] \\ \langle \hat{P} \rangle (t) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[\langle a \rangle (0) e^{-i\omega t} - \langle a \rangle^* (0) e^{i\omega t} \right] \end{cases} \quad (1.22)$$

¹La dimostrazione e la spiegazione di questa formula sono nel capitolo III, paragrafo D-1-d di [1]

e dato che noi stiamo ricercando lo stato quanto-meccanico in cui i valori di aspettazione di \hat{X} , \hat{P} e \hat{H} sono "uguali" ai valori che ho utilizzando una trattazione classica, dobbiamo richiedere per ogni istante di tempo t che

$$\begin{cases} \langle \hat{X} \rangle (t) = \hat{x}(t) \\ \langle \hat{P} \rangle (t) = \hat{p}(t) \end{cases} \quad (1.23)$$

Per avere questo risultato è necessario e sufficiente imporre

$$\langle a \rangle (0) = \langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle = \alpha_0 \quad (1.24)$$

con $|\psi(t)\rangle$ vettore di stato normalizzato dell'oscillatore e α_0 parametro complesso che caratterizza il moto classico dell'oscillatore che stiamo cercando di riprodurre quantisticamente. A questo punto ci manca da imporre la condizione sull'energia ovvero l'energia dello stato quanto-meccanico che stiamo cercando deve essere uguale a quella dello stato classico

$$\langle H \rangle = H \quad (1.25)$$

e quindi

$$\hbar\omega \langle a^\dagger a \rangle (0) + \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega |\alpha_0|^2 \quad (1.26)$$

$$\langle a^\dagger a \rangle (0) = |\alpha_0|^2 \quad (1.27)$$

dove però il secondo termine dell'energia quantistica può essere trascurato in quanto dato che stiamo trattando uno stato macroscopico $|\alpha_0| \gg 1$. Vediamo quindi che le condizioni (1.24) e (1.27) sono sufficienti per la determinazione del vettore di stato normalizzato $|\psi(0)\rangle$ (a meno di un fattore di fase costante).

Avendo trovato i vettori di stato normalizzati ora vogliamo mostrare che sono proprio gli autovettori dell'operatore a .

Introduciamo l'operatore

$$b(\alpha_0) = a - \alpha_0 \quad (1.28)$$

quindi possiamo avere

$$\begin{aligned} b^\dagger(\alpha_0)b(\alpha_0) &= (a^\dagger - \alpha_0)(a - \alpha_0) \\ &= a^\dagger a - \alpha_0 a^\dagger - \alpha_0^* a + \alpha_0^* \alpha_0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

e quindi cercando il valore di aspettazione

$$\langle \psi(0) | b^\dagger(\alpha_0)b(\alpha_0) | \psi(0) \rangle = \langle \psi(0) | a^\dagger a | \psi(0) \rangle - \alpha_0 \langle \psi(0) | a^\dagger | \psi(0) \rangle - \alpha_0^* \langle \psi(0) | a | \psi(0) \rangle + \alpha_0^* \alpha_0 \quad (1.30)$$

Se a questo punto applichiamo le condizioni trovate prima arriviamo ad avere

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | b^\dagger(\alpha_0) b(\alpha_0) | \psi(0) \rangle &= |\alpha_0|^2 - \alpha_0 \alpha_0^* - \alpha_0^* \alpha_0 + \alpha_0^* \alpha_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

e quindi, dato che la norma di $b(\alpha_0)$ è nulla allora anche

$$b(\alpha_0) | \psi(0) \rangle = 0. \quad (1.32)$$

Sostituendo a b la sua definizione arriviamo ad avere

$$a | \psi(0) \rangle = \alpha_0 | \psi(0) \rangle \quad (1.33)$$

e quindi lo stato semi-classico, associato al moto classico caratterizzato dal parametro α è tale che $|\varphi(0)\rangle$ è autovettore dell'operatore a di autovalore α . Da questo punto utilizzeremo come notazione $|\alpha\rangle$ per descrivere l'autovettore di a , che ha come operatore α

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.34)$$

1.3 Proprietà dello stato $|\alpha\rangle$

A questo punto siamo arrivati a dover determinare lo stato $|\alpha\rangle$, e possiamo farlo facendo un'espansione sugli stati stazionari $|\varphi_n\rangle$ ovvero

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \quad (1.35)$$

Posso applicare ora l'operatore a

$$\begin{aligned} a |\alpha\rangle &= \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \\ &= (c_0 \sqrt{0} |\varphi_{-1}\rangle + c_1 \sqrt{1} |\varphi_0\rangle + c_2 \sqrt{2} |\varphi_1\rangle + \dots) \\ &= \sum_n c_{n+1} \sqrt{n+1} |\varphi_n\rangle \end{aligned} \quad (1.36)$$

Se andiamo a sostituire questo sviluppo nella equazione agli autovalori

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.37)$$

$$\sum_n c_{n+1} \sqrt{n+1} |\varphi_n\rangle = \alpha \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \quad (1.38)$$

che diventa

$$\sum_n (c_{n+1}\sqrt{n+1} - \alpha c_n) |\varphi_n\rangle = 0 \quad (1.39)$$

e dato che i $|\varphi_n\rangle$ sono linearmente indipendenti allora per avere la sommatoria uguale a zero, tutti i coefficienti devono essere uguali a zero, quindi

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} - \alpha c_n = 0 \quad (1.40)$$

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n \quad (1.41)$$

Da questo vediamo che possiamo definire ricorsivamente tutti i coefficienti a partire da c_0

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0 \quad (1.42)$$

e quindi abbiamo che fissato il primo coefficiente tutti gli altri ne sono una conseguenza e quindi $|\alpha\rangle$ risulta unico. Oltre all'unicità dello stato ci interessa anche la normalizzazione, e quindi per avere $|\alpha\rangle$ normalizzato dobbiamo imporre

$$\sum_n |c_n(\alpha)|^2 = 1 \quad (1.43)$$

che svolgendolo diventa

$$\begin{aligned} \sum_n |c_n(\alpha)|^2 &= \sum_n |c_0(\alpha)|^2 \frac{\alpha^{2n}}{n!} \\ &= |c_0(\alpha)|^2 \sum_n \frac{\alpha^{2n}}{n!} \\ &= |c_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.44)$$

con la convenzione che abbiamo scelto per i coefficienti $c_0(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$. Arriviamo quindi ad un ket $|\alpha\rangle$ che è unico e normalizzato nella forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle \quad (1.45)$$

Se a questo punto consideriamo un oscillatore nello stato $|\alpha\rangle$, vediamo che per come abbiamo costruito lo stato la probabilità di misurare un'energia $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ è pari a

$$P_n(\alpha) = |c_n(\alpha)|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (1.46)$$

La probabilità di qualunque autovalore è quindi una distribuzione poissoniana e possiamo vedere che la distribuzione raggiunge il suo massimo quando n =parte integrale di $|\alpha|^2$. Per calcolare il valore medio

$$\langle H \rangle_\alpha = \sum_n P_n(\alpha) \left[n + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega \quad (1.47)$$

notiamo anche che la relazione aggiunta

$$\langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha \quad (1.48)$$

e quindi il valore medio dell'Hamiltoniana è

$$\langle H \rangle_\alpha = \hbar\omega \langle \alpha | \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] | \alpha \rangle = \hbar\omega \left[|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (1.49)$$

Vediamo che questo risultato, nel nostro caso in cui $|\alpha| \gg 1$ non è molto diverso, in termini di valore relativo, dall'energia E_n che corrisponde al massimo della probabilità $P_n(\alpha)$. A questo punto ci calcoliamo il valore di $\Delta H_\alpha = \sqrt{\langle H^2 \rangle_\alpha - \langle H \rangle_\alpha^2}$, dove quindi dobbiamo calcolarci il valore medio di $\langle H^2 \rangle_\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle H^2 \rangle_\alpha &= \hbar^2 \omega^2 \langle \alpha | (a^\dagger a + \frac{1}{2})^2 | \alpha \rangle \\ &= \hbar^2 \omega^2 \left[|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2 + \frac{1}{4} \right] \end{aligned} \quad (1.50)$$

Il risultato dell'incertezza di H è quindi

$$\Delta H_\alpha = \hbar\omega |\alpha| \quad (1.51)$$

facendo quindi il rapporto tra il risultato dell'Eq. (1.49) e il risultato dell'Eq.(1.51) troviamo che

$$\frac{\Delta H_\alpha}{\langle H \rangle_\alpha} \simeq \frac{1}{|\alpha|} \ll 1 \quad (1.52)$$

se come nel nostro caso $|\alpha| \gg 1$, e che quindi il valore di energia relativo allo stato $|\alpha\rangle$ è ben definito. Dato che abbiamo calcolato l'incertezza ΔH_α ora ci rimangono da calcolare le incertezze ΔX_α e ΔY_α , per cui abbiamo già l'insieme di Eq. (1.22) e ci manca solo $\langle X^2 \rangle_\alpha$ e $\langle P^2 \rangle_\alpha$ che calcolati usando gli autovalori di a e a^\dagger diventano

$$\begin{cases} \langle X^2 \rangle_\alpha = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right] \\ \langle P^2 \rangle_\alpha = \frac{m\hbar\omega}{2} \left[1 - (\alpha - \alpha^*)^2 \right] \end{cases} \quad (1.53)$$

Di conseguenza le incertezze diventano

$$\begin{aligned}\Delta X_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ \Delta P_\alpha &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\end{aligned}\quad (1.54)$$

dove nessuna delle due dipende da α e il loro prodotto assume il valore minimo possibile

$$\Delta X_\alpha \Delta P_\alpha = \frac{\hbar}{2} \quad (1.55)$$

1.4 Costruzione della funzione d'onda $\Psi_\alpha(x)$

A questo punto abbiamo trovato tutte le grandezze che caratterizzano lo stato $|\alpha\rangle$, ora vogliamo associare a questo stato una funzione d'onda $\Psi_\alpha(x)$.

Iniziamo definendo l'operatore unitario $D(\alpha)$, detto "operatore di Displacement", come:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (1.56)$$

Dato che il commutatore di αa^\dagger e $-\alpha^* a$ dà come risultato $\alpha^* \alpha$ che è un numero, quindi utilizzando l'Eq. (1.57) del complemento B_{II} di [1]² possiamo riscrivere l'operatore $D(\alpha)$ come:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \quad (1.58)$$

Calcoliamo ora il ket $D(\alpha) |\varphi_0\rangle$, e calcoliamo inizialmente

$$\begin{aligned}e^{-\alpha^* a} |\varphi_0\rangle &= [1 - \alpha^* a + \frac{\alpha^{*2}}{2!} a^2 + \dots] |\varphi_0\rangle \\ &= |\varphi_0\rangle\end{aligned}\quad (1.59)$$

come risultato dell'applicazione dell'operatore distruzione allo stato fondamentale. Il calcolo rimanente è quindi

$$\begin{aligned}D(\alpha) |\varphi_0\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |\varphi_0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |\varphi_0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle\end{aligned}\quad (1.60)$$

²La formula a cui si fa riferimento è la formula di Glauber, in cui i due operatori A e B entrambi commutano con il loro commutatore $C=[A,B]$, e vale

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \quad (1.57)$$

Confrontando questo risultato con l'Eq. (1.45) vediamo che l'operatore $D(\alpha)$ è la trasformazione unitaria che trasforma lo stato fondamentale nello stato quasi-classico $|\alpha\rangle$ da noi studiato fino ad ora

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |\varphi_0\rangle \quad (1.61)$$

Per ottenere la funzione d'onda che caratterizza lo stato $|\alpha\rangle$ nella rappresentazione $|x\rangle$ facciamo

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x) &= \langle x|\alpha\rangle \\ &= \langle x|D(\alpha)|\varphi_0\rangle \end{aligned} \quad (1.62)$$

Per poter risolvere questa equazione ci conviene riscrivere l'esponente, riscrivendo a e a^\dagger in funzione di \hat{X} e \hat{P} questa volta tenendo conto delle dimensioni

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\hbar}} \left(\hat{P} - im\omega\hat{X} \right) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\hbar}} \left(\hat{P} + im\omega\hat{X} \right) \end{cases} \quad (1.63)$$

Con queste sostituzioni l'esponente che dobbiamo studiare diventa

$$\alpha a^\dagger - \alpha^* a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(\frac{\alpha - \alpha^*}{\sqrt{2}} \right) \hat{X} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}} \left(\frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} \right) \hat{P} \quad (1.64)$$

Questo appena trovato sarà il nostro nuovo esponente nel quale possiamo riutilizzare la formula (1.57) per separare la somma degli esponenti in prodotto di esponenziali, arrivando ad avere

$$e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\alpha - \alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{X}} e^{-\frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}} \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{P}} e^{\frac{\alpha^* - \alpha}{4}} \quad (1.65)$$

Avendo semplificato fino a questo punto l'esponente ora possiamo andare a risolvere finalmente l'equazione (1.62) che diventa quindi

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x) &= e^{\frac{\alpha^* - \alpha}{4}} \langle x| e^{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\alpha - \alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{X}} e^{-\frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}} \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{P}} |\varphi_0\rangle \\ &= e^{\frac{\alpha^* - \alpha}{4}} e^{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\alpha - \alpha^*}{\sqrt{2}} x} \langle x| e^{-\frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}} \frac{\alpha + \alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{P}} |\varphi_0\rangle \end{aligned} \quad (1.66)$$

La parte dell'esponenziale collegata all'operatore \hat{X} viene risolta facilmente sostituendo all'operatore il suo autovalore ³. Per risolvere la parte dell'operatore \hat{P} utilizziamo le

³Dato un qualsiasi problema agli autovalori

$$\hat{A}|a\rangle = |a\rangle a \quad (1.67)$$

è sempre possibile se si ha $f(\hat{A})$ scrivere

$$f(\hat{A})|a\rangle = |a\rangle f(a) \quad (1.68)$$

proprietà dell' $e^{-\frac{i\lambda\hat{P}}{\hbar}}$, definito come l'operatore che trasla di λ lungo O_x (per maggiori spiegazioni su questo operatore guardare nel complemento E_{II} di [1])

$$\begin{aligned}\langle x| e^{-\frac{i}{\sqrt{m\omega\hbar}}\frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{P}\frac{\hbar}{\hbar}} = \langle x| e^{-\frac{i\lambda\hat{P}}{\hbar}} \\ = \left\langle x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha - \alpha^*) \right| \end{aligned} \quad (1.69)$$

dove per risolverlo abbiamo imposto $\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^*)$.

Andando a sostituire nell'equazione (1.66) il risultato appena ottenuto arriviamo a una funzione d'onda in funzione di x , α e α^*

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(x) = e^{\frac{\alpha^*-\alpha}{4}} e^{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{\alpha-\alpha^*}{\sqrt{2}}x} \varphi_0\left(x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^*)\right) \\ = e^{i\theta_\alpha} e^{i\langle\hat{P}\rangle_\alpha \frac{x}{\hbar}} \varphi_0(x - \langle\hat{X}\rangle_\alpha) \end{aligned} \quad (1.70)$$

dove abbiamo definito un fattore di fase globale $e^{i\theta_\alpha} = e^{\frac{\alpha^*-\alpha}{4}}$ perchè non dipende da x , e abbiamo utilizzato le formule

$$\begin{cases} \langle\hat{X}\rangle_\alpha = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} Re(\alpha) \\ \langle\hat{P}\rangle_\alpha = \sqrt{2m\omega\hbar} Im(\alpha) \end{cases} \quad (1.71)$$

Dalla relazione (1.70) vediamo che la funzione d'onda può essere ottenuta direttamente dalla funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico, traslando di $\langle\hat{X}\rangle_\alpha$ la posizione e moltiplicandolo per un esponenziale in funzione di $\langle\hat{P}\rangle_\alpha$.

Infine, sostituendo alla funzione d'onda φ_0 la sua espressione esplicita arriviamo ad avere

$$\Psi_\alpha(x) = e^{i\theta_\alpha} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\left[\frac{x - \langle\hat{X}\rangle_\alpha}{2\Delta X_\alpha}\right]^2 + i\langle\hat{P}\rangle_\alpha \frac{x}{\hbar}\right] \quad (1.72)$$

di conseguenza il pacchetto d'onda associato alla funzione d'onda sarà

$$|\Psi_\alpha(x)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x - \langle\hat{X}\rangle_\alpha}{\Delta X_\alpha}\right]^2\right] \quad (1.73)$$

Notiamo quindi che ogni pacchetto d'onda associato allo stato $|\alpha\rangle$ è gaussiano.

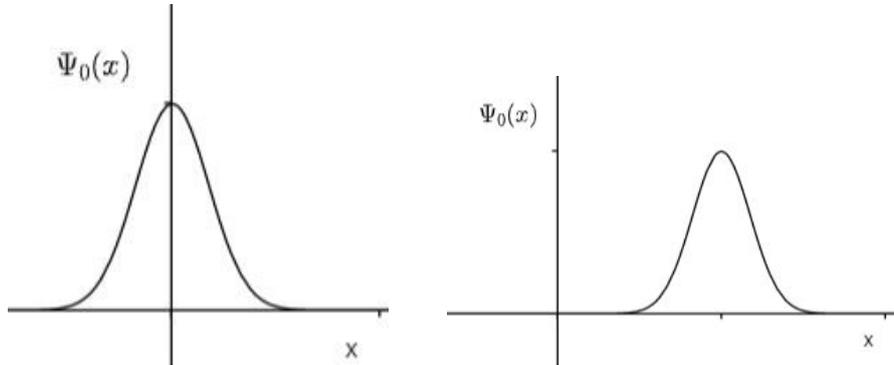


Figura 1.2: In figura possiamo osservare i due grafici di due funzioni d'onda diverse. Il primo grafico rappresenta la funzione d'onda dello stato fondamentale $\Psi_0(x)$ dell'oscillatore armonico mentre il secondo grafico mostra la funzione d'onda dello stato quasi-classico, dove il valore di aspettazione non è più zero, e rappresenta il condensato (che approfondiremo nei capitolo seguente)

1.5 Evoluzione temporale dello stato quasi classico $|\alpha\rangle$

Fino ad ora abbiamo studiato le caratteristiche dello stato quasi-classico senza tenere conto dello scorrere del tempo. Sappiamo già per come gli abbiamo definiti che i valori medi $\langle \hat{X} \rangle(t)$ e $\langle \hat{P} \rangle(t)$ rimarranno uguali ai valori classici ad ogni istante, dobbiamo ora vedere altre proprietà dello stato $|\Psi\rangle(t)$, prendendo come condizione iniziale il fatto che l'oscillatore armonico all'istante di tempo $t = 0$ sia in uno stato $|\alpha\rangle$ e che quindi

$$|\Psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle \quad (1.74)$$

Per prima cosa possiamo mostrare che il nostro stato $|\Psi(t)\rangle$ rimane un autostato dell'operatore a per ogni istante t . Per farlo possiamo vedere che il modo generale per trovare $|\Psi(t)\rangle$ (quando l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo) utilizzando l'eq.(1.45) ⁴

⁴Questo procedimento è spiegato nel cap.III paragrafo D-2-a di [1].

Riassumendo per trovare $|\Psi(t)\rangle$ per ogni t , dopo averlo espanso nella base $|\varphi_{n,\tau}\rangle$, basta moltiplicare ogni coefficiente dell'espansione $c_{n,\tau}(t_0)$ per $e^{iE_n(t-t_0)/\hbar}$ dove E_n è l'autovalore di H associato a $|\varphi_{n,\tau}\rangle$. Alla fine arriviamo ad un'espressione del tipo

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \sum_\tau c_{n\tau}(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_{n,\tau}\rangle \quad (1.75)$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{iE_n(t-t_0)/\hbar} |\varphi_n\rangle \quad (1.76)$$

Se a questo punto scriviamo al posto dell'autovalore $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ abbiamo l'ulteriore formula

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-|\alpha_0|^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n e^{-in\omega t}}{\sqrt{n!}} |\varphi_n\rangle \quad (1.77)$$

Confrontando questa equazione con la (1.45) notiamo che per passare da $|\Psi(0)\rangle$ a $|\Psi(t)\rangle$ basta cambiare α con $\alpha e^{-i\omega t}$ e moltiplicare il ket così ottenuto per $e^{-i\omega t/2}$. Quindi lo stato quasi-classico rimane un autovettore di a , di autovalore $\alpha_0 e^{-i\omega t}$ che in realtà è il parametro caratteristico $\alpha(t)$ dell'equazione (1.5) che caratterizza il moto classico dell'oscillatore ad ogni istante t .

Utilizzando quindi la (1.77) e sostituendo $\alpha_0 e^{-i\omega t}$ al semplice α possiamo ricavarci l'evoluzione temporale dei valori medi di \hat{X} , \hat{P} da (1.71) e H.

Otteniamo quindi

$$\begin{cases} \langle \hat{X} \rangle (t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \left[\alpha_0 e^{-i\omega t} \right] \\ \langle \hat{P} \rangle (t) = \sqrt{2m\omega\hbar} \operatorname{Im} \left[\alpha_0 e^{-i\omega t} \right] \end{cases} \quad (1.78)$$

e sono simili a quelle classiche (Eq. (1.6) come ci saremmo aspettati).

Per il valore di aspettazione dell'Hamiltoniana avremo invece

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \hbar\omega \left[|\alpha(t)|^2 + \frac{1}{2} \right] \\ &= \hbar\omega \left[|\alpha_0|^2 + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.79)$$

e anche questo risultato rispetta le nostre previsioni in quanto l'energia media dell'oscillatore armonico è indipendente dal tempo.

Andando a sostituire il nuovo parametro nelle Eq. (1.54) e (1.51), troviamo

$$\Delta H = \hbar\omega |\alpha_0| \quad (1.80)$$

e

$$\begin{cases} \Delta X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ \Delta P = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \end{cases} \quad (1.81)$$

e vediamo che sono indipendenti dal tempo, ciò garantisce il pacchetto d'onda rimanga il minore possibile per tutto il tempo.

Possiamo anche studiarci il moto del pacchetto d'onda. Partiamo dal calcolarci la funzione d'onda

$$\Psi(x, t) = \langle x | \Psi(t) \rangle.$$

Dall'Eq. (1.72), utilizzando $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle$ otteniamo

$$\Psi(x, t) = e^{i\theta_\alpha} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-i\omega t/2} e^{i\frac{x\langle\hat{P}\rangle(t)}{\hbar}} e^{-\left[\frac{x-\langle\hat{X}\rangle(t)}{2\Delta X}\right]^2} \quad (1.82)$$

All'istante t il pacchetto d'onda è gaussiano e la sua forma non cambia, infatti

$$|\Psi(x, t)|^2 = |\varphi_0[x - \langle\hat{X}\rangle(t)]|^2. \quad (1.83)$$

Il fatto che il pacchetto d'onda rimanga gaussiano durante il tempo e non cambi forma non è una proprietà scontata, infatti è il potenziale parabolico che compensa la distorsione "naturale" del pacchetto Gaussiano.

Questi risultati nel caso in cui $|\alpha|$ sia molto grande, ovvero essere nello stato quasi-classico che ci siamo prefissati di studiare, mostrano che la deviazione quadratica media, ovvero ΔX e ΔP dalla (1.81) non cambiano. Allo stesso tempo i valori medi e quindi l'ampiezza di oscillazione di $\langle\hat{X}\rangle(t)$ e $\langle\hat{P}\rangle(t)$ dalle equazioni (1.78) diventano molto più grandi di ΔX e ΔP .

Da ciò possiamo dire che scegliendo un valore abbastanza grande di $|\alpha|$ possiamo avere un moto quanto-meccanico nel quale la posizione e il momento dell'oscillatore, in termini relativi, sono ben definiti.

Scegliendo un valore adeguato di $|\alpha|$, lo stato $|\alpha\rangle$ descrive adeguatamente il moto di un oscillatore macroscopico per cui posizione, momento e energia possono essere considerate "uguali" alle grandezze classiche.

Capitolo 2

Stati coerenti macroscopici

Lo studio della funzione d'onda macroscopica fatto fino ad ora è fondamentale per capire i fenomeni del condensato di Bose-Einstein (BEC), della superfluidità dell' ^4He e della superconduttività. È però complicato capire come questi sistemi possano essere descritti dalla stessa trattazione in quanto nei primi due casi si tratta di stati coerenti bosonici, nel caso della superconduttività trattiamo invece di stati coerenti fermionici.

Una spiegazione fisica del parametro d'ordine nella teoria di Ginzburg-Landau, ovvero nella superconduttività, arrivò con la teoria della superconduttività microscopica (BCS), che spiega come questo parametro descriva una funzione d'onda macroscopica di coppie di Cooper.

In questo capitolo tratteremo della teoria degli stati coerenti applicati a sistemi bosonici e fermionici. Nel caso fermionico faremo una trattazione molto generale e ci focalizzeremo sulla fisica della BCS, evitando di entrare nel dettaglio. Ricaveremo anche la corrispondenza tra modi del campo elettromagnetico e oscillatori armonici. In questo capitolo seguiremo la trattazione del Cap.5 dell'Annett [2] e [4] per la trattazione del campo elettromagnetico.

2.1 Sistemi di bosoni

Il primo caso in cui sono stati studiati gli stati coerenti è stato nel campo della teoria dei laser. In ottica quantistica gli operatori di creazione e annichilazione $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}s}$ corrispondono alla creazione e alla distruzione di un fotone in un dato modo normale della radiazione elettromagnetica, caratterizzato da \mathbf{k} numero d'onda e s polarizzazione.

Uno stato quantistico del sistema viene rappresentato in maniera generale come

$$|n_{\mathbf{k}_0, s_0}, n_{\mathbf{k}_1, s_1}, n_{\mathbf{k}_2, s_2}, \dots\rangle \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ ecc sono stati diversi di onda piana. Questa equazione viene costruita generalizzando la costruzione del singolo stato di Fock a partire dallo stato fondamentale.

Gli operatori $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}s}$ vengono derivati quasi naturalmente dalla quantizzazione del campo elettromagnetico. Ogni modo del campo elettromagnetico obbedisce alle equazioni di Maxwell, quando queste vengono quantizzate ogni modo del campo diventa un oscillatore armonico indipendente. I numeri $n_{\mathbf{k},s}$ possono essere interpretati come il numero di fotoni presenti nello stato, in cui $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$ ne aggiunge uno, viceversa $a_{\mathbf{k}s}$ ne toglie uno

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}s}^\dagger |\dots n_{\mathbf{k},s}, \dots\rangle &= \sqrt{(n_{\mathbf{k},s} + 1)} |\dots, n_{\mathbf{k},s} + 1, \dots\rangle \\ a_{\mathbf{k},s} |\dots, n_{\mathbf{k},s}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{\mathbf{k},s}} |\dots, n_{\mathbf{k},s} - 1, \dots\rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

Questi operatori hanno la stessa funzione dei modi del campo elettromagnetico degli operatori di scala per l'oscillatore armonico, e quindi devono valere le stesse regole di commutazione

$$[a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}s,\mathbf{k}'s'} \quad (2.3)$$

$$[a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}] = 0 \quad (2.4)$$

$$[a_{\mathbf{k},s}^\dagger, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = 0 \quad (2.5)$$

Lo stato $|n_1, n_2, \dots\rangle$ è quindi lo stato che tiene conto di tutte le occupazioni di tutti gli stati e quindi per ogni stato avremo una costruzione di uno stato di Fock, arrivando ad avere come risultato finale

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{\frac{1}{\prod_j n_j!}} \dots (a_i^\dagger)^{n_i} \dots (a_2^\dagger)^{n_2} (a_1^\dagger)^{n_1} |0\rangle \quad (2.6)$$

Nel caso dei laser possiamo passare naturalmente dalla rappresentazione dei numeri di occupazione agli stati coerenti.

In un laser coerente ideale ci aspettiamo di avere un'occupazione macroscopica solo in uno dei modi della radiazione, $\langle \hat{n}_{\mathbf{k},s} \rangle = |\alpha_{\mathbf{k},s}|^2$ mentre l'occupazione di tutti gli altri modi è praticamente zero. Nella realtà un laser coerente ha solo pochi modi vicini \mathbf{k} con un'occupazione macroscopica, e il sistema può passare casualmente da un modo all'altro. Sono la frequenza di questi salti e il range finito di valori che può assumere \mathbf{k} che limitano la perfetta coerenza di una sorgente laser.

Per trattare in maniera più approfondita gli stati coerenti nel caso di particelle bosoniche introduciamo gli operatori di campo quantistico. I due fenomeni di cui vogliamo studiare lo stato quantistico, sono il condensato di Bose Einstein, un sistema di bose debolmente interagente, e ${}^4\text{He}$, un liquido di bosoni fortemente interagente.

La definizione degli stati coerenti per i bosoni ci porta alla definizione di una funzione d'onda macroscopica $\Psi(\mathbf{r})$ per descrivere il condensato, che è caratterizzata dal fatto che deve essere simmetrica per scambio di due particelle

$$\Psi(\dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots) = \Psi(\dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots) \quad (2.7)$$

Se consideriamo un sistema di N-bosoni interagenti possiamo definirne quindi la funzione d'onda come $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$ che obbedisca all'equazione di Schroedinger in 3N-dimensioni

$$\hat{H}\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (2.8)$$

in cui l'operatore Hamiltoniano è definito come

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V_1(\mathbf{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left(V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \quad (2.9)$$

dove $V_1(\mathbf{r}_i)$ è il potenziale esterno che agisce su ogni bosone del sistema, mentre $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ è il potenziale di interazione tra i bosoni.

Nella trattazione di sistemi a molte particelle è più utile utilizzare gli operatori di campo anzichè le funzioni d'onda. Definiamo $n_{\mathbf{k}}$ come il numero di occupazione dello stato, ovvero il numero finito di bosoni presenti. Uno stato quantistico a molti corpi sarà dato dalla sovrapposizione delle diverse N onde piane dei singoli corpi.

In analogia con la trattazione per i laser utilizziamo gli operatori di creazione e annichilazione 2.2 che aumentano o diminuiscono di uno il numero di occupazione, che in questo caso però hanno solo l'indice \mathbf{k} , e per i quali valgono le stesse regole di commutazione 2.3, 2.5 e 2.4. In analogia il numero di occupazione è dato da

$$\hat{n}_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (2.10)$$

Le regole di commutazione tra gli operatori $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}}$ e la (2.10) definiscono completamente gli operatori di campo bosonici. Il set degli stati a più particelle per tutti i possibili $n_{\mathbf{k}}$ definisce un set completo di funzioni d'onda, ma solo nel caso dell'oscillatore armonico possiamo definire ogni $n_{\mathbf{k}}$ come effetto reiterato dell'operatore $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ sullo stato fondamentale $|0\rangle$, che rappresenta lo stato del vuoto (nessun bosone presente). Ogni stato a molte particelle può essere definito come una sovrapposizione di stati fatta in questo modo. A partire da questi operatori di campo possiamo esprimerli in una forma spaziale reale, definendo gli operatori $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ e $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ che creano e distruggono una particella in un certo punto \mathbf{r} e possono essere definiti come trasformate di Fourier dell'operatore spaziale \mathbf{k}

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}} \\ \hat{\Psi}(\mathbf{r})^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ è l'onda piana di una particella libera.

Usando le leggi di commutazione di Bose e la loro definizione possiamo vedere che questi

operatori di campo reali seguono le leggi di commutazione degli operatori di campo (2.3), (2.5) e (2.4).

A questo punto possiamo rappresentare tutti gli operatori in termini di $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ e $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, un fatto interessante deriva dalla scrittura dell'operatore Hamiltoniana (2.9) diventa

$$\hat{H} = \int \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_1 \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

dove $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ è l'operatore di densità di particelle nel punto \mathbf{r} .

Utilizziamo le regole di commutazione per $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ e $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ (2.3) per riscrivere la (2.12) in "modo normale"¹

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_1 \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \\ + \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.13)$$

Svolgendo i conti per l'ultimo termine avremo

$$\begin{aligned} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = V(0) \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \\ = V(0) \hat{N} \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove l'operatore \hat{N} è l'operatore che rappresenta il numero totale di particelle del sistema, che è quindi una costante, come anche $V(0)$. Questo ultimo termine può quindi non essere considerato al fine del nostro studio, verrà poi ripreso in quanto inglobato nel potenziale chimico μ .

Se a questo punto torniamo nello spazio di \mathbf{k} , riscriviamo i due termini dell'operatore hamiltoniano che rappresentano l'energia cinetica \hat{T} e l'energia potenziale \hat{V} in termini di $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ utilizzando le anti-trasformate di Fourier,

$$\begin{cases} \hat{a}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \end{cases} \quad (2.15)$$

Il termine cinetico diventa quindi

$$\begin{aligned} \hat{T} &= - \int \left(\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right) d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \int \left(\hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) d^3\mathbf{r} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

¹Il modo normale è un modo di lavorare sulle formule in cui gli operatori di creazione stanno alla sinistra e gli operatori di annichilazione sulla destra

Invece per il termine di energia potenziale avremo un risultato un po' più complicato, in quanto abbiamo 4 operatori e non 2 come nel caso precedente

$$\begin{aligned}
\hat{V} &= \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{2V^2} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \times e^{i(-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r})} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \quad (2.17) \\
&= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2}^\dagger a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \int V(r) e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Possiamo esprimere l'Hamiltoniana in maniera diversa introducendo la trasformata di Fourier dell'interazione² ed sostituendo $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$, $\mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}' - \mathbf{q}$, $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{k}'$, $\mathbf{k}_4 \rightarrow \mathbf{k}$.

Arriviamo ad un Hamiltoniana

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}' \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k} + \mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}' - \mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} \quad (2.19)$$

nella quale il termine d'interazione può essere interpretato come un processo nel quale due particelle inizialmente in stati due stati \mathbf{k} e \mathbf{k}' sono diffuse fino a raggiungere gli stati $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ e $\mathbf{k}' - \mathbf{q}$, con \mathbf{q} momento trasmesso tra le due particelle.

Con la definizione e la descrizione degli operatori di campo nel caso di un sistema di bosoni possiamo trattare della coerenza quantistica in condensati e superfluidi.

Possiamo scriverci la matrice di densità di una particella come

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle \quad (2.20)$$

e possiamo scriverla in maniera estesa sostituendo a $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ e $\hat{\Psi}(\mathbf{r}')$ le (2.11) e arriviamo ad avere

$$\begin{aligned}
\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \\
&= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle \quad (2.21)
\end{aligned}$$

che è la trasformata di Fourier della distribuzione del numero di occupazione nello spazio dei momenti

$$n_{\mathbf{k}} \equiv \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle$$

²La trasformata di Fourier dell'interazione è

$$V_{\mathbf{q}} = \frac{1}{V} \int V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (2.18)$$

Possiamo studiare ora le conseguenze che queste definizioni su uno stato coerente quantistico a multi-corpi. Utilizziamo come definizione di stato coerente la formula

$$|\alpha_{\mathbf{k}_1}, \alpha_{\mathbf{k}_2}, \alpha_{\mathbf{k}_3}, \dots\rangle \quad (2.22)$$

come abbiamo visto nella trattazione quantistica del Capitolo 1 arriviamo a dire che

$$n_{\mathbf{k}} \equiv |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.23)$$

e quindi la (2.21) diventa

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.24)$$

e dove saremo interessati nel caso in cui un solo stato \mathbf{k} ha un'occupazione macroscopica. Supponiamo ora che lo stato in questione sia \mathbf{k}_0 con un'occupazione $N_0 = |\alpha_{\mathbf{k}_0}|^2$ ³ e che i $|\alpha_{\mathbf{k}_i}|^2$ con $i \neq 0$.

La (2.23) diventa

$$n_{\mathbf{k}} = N_0 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0} + f(\mathbf{k}) \quad (2.25)$$

dove $f(\mathbf{k})$ è una funzione continua di \mathbf{k} .

La corrispondente matrice di densità diventa

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = n_0 + \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} f(\mathbf{k}) \quad (2.26)$$

con $n_0 = \frac{N_0}{V}$.

La presenza del condensato nello stato coerente si evince dal contributo costante di n_0 , inoltre se la funzione $f(\mathbf{k})$ è sufficientemente continua la sua trasformata di Fourier tende a zero per $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ molto grande, lasciando solo il termine del condensato.

Arriviamo quindi a quello che viene chiamato termine di **ODLRO**⁴. Nella matrice densità di una particella, un'interpretazione del termine ODLRO nei superfluidi può essere quella di una particella che annichila nel punto \mathbf{r} e viene assorbita dal condensato, mentre un'altra viene creata nel punto \mathbf{r}' e viene "espulsa". Questo processo ha un'ampiezza quanto-meccanica a causa della coerenza del condensato, anche quando i punti \mathbf{r} e \mathbf{r}' sono arbitrariamente lontani tra di loro. Ciò è esattamente l'opposto di ciò che accade in un normale fluido quantistico, dove l'unica condizione per avere la coerenza del processo di annichilazione e creazione è quella che i due punti \mathbf{r} e \mathbf{r}' siano vicini tra di loro.

Utilizzando il fatto che i due punti \mathbf{r} e \mathbf{r}' debbano essere distanti tra di loro, possiamo trattarli come statisticamente indipendenti, e quindi la (2.20) diventa

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle \rightarrow \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \rangle \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle \quad (2.27)$$

³ N_0 è un numero macroscopico ed è una frazione del numero totale di particelle del sistema

⁴ODLRO è un'abbreviazione per "off diagonal long ranged order", termine introdotto per la prima volta da R. Penrose

per $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Se avessimo fissato il numero di particelle N , la formulazione a molti-corpi avrebbe portato ad avere la media $\langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \rangle$ nulla, in quanto $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) |N\rangle$ è uno stato a $N + 1$ particelle ed è ortogonale a $|N\rangle$. Se invece lavoriamo sulla base degli stati coerenti, è fissata solo la fase e non il numero N , e quindi non abbiamo nessun problema a trattare le medie.

Possiamo definire a questo punto

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle \quad (2.28)$$

chiamato parametro d'ordine o funzione d'onda macroscopica arrivando quindi a

$$\rho_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \psi_0^*(\mathbf{r})\psi_0(\mathbf{r}') \quad (2.29)$$

sempre per $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$.

Richiamando il capitolo 2 di [2] noi sappiamo che il condensato avviene a $\mathbf{k} = 0$ e che in un sistema traslazionalmente invariante abbiamo

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0} e^{i\theta} \quad (2.30)$$

che corrisponde all'equazione d'onda di uno stato coerente a con un'occupazione macroscopica dello stato $\mathbf{k} = 0$.

Arrivati fino a questo punto non abbiamo fatto nessun collegamento con l'Hamiltoniana (2.19) e quindi non possiamo ancora dire se lo stato coerente è stabile oppure no, abbiamo però costruito la funzione d'onda macroscopica utilizzando θ come parametro di fase. Questa trattazione degli stati coerenti diventa utile nel momento in cui si abbiano delle interazioni nel sistema.

Introduciamo quindi la teoria del **gas di Bose debolmente interagente**, inizialmente sviluppato da N . Bogoliubov per la trattazione teorica del superfluido ${}^4\text{He}$, risultando però incapace di spiegare delle importanti caratteristiche sperimentali.

D'altra parte questa teoria si rivela molto vicina alla spiegazione della Condensazione di Bose-Einstein, in quanto le condizioni dalle quali deriva la teoria sono molto vicine a quelle sperimentali.

Come prima assunzione richiediamo che la temperatura sia molto vicina a zero così che il sistema sia molto vicino allo stato fondamentale. Assumiamo anche che il sistema sia in uno stato coerente a molti-corpi con una funzione d'onda macroscopica (2.28).

Supponiamo che lo stato quantistico a molte-particelle, $|\Psi\rangle$, sia uno stato coerente ideale a $T = 0K$ che è quindi un autostato dell'operatore di annichilazione

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) |\Psi\rangle = \psi_0(\mathbf{r}) |\Psi\rangle \quad (2.31)$$

Possiamo vedere questo come una funzione d'onda di prova a molte-particelle, in cui utilizzeremo il parametro $\psi_0(\mathbf{r})$ come parametro variazionale per trovare il minimo dell'energia. L'energia variazionale la troviamo cercando il valore di aspettazione dell'Hamiltoniana (2.1) dove $V_1(\mathbf{r})$ è il potenziale atomico.

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
E_0 &= \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle \\
&= \int \psi_0^* \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_1(\mathbf{r}) \right) \psi_0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Per trovare il minimo della (2.32) differenziamo l'energia variazionale

$$\frac{\partial E_0}{\partial \psi_0^*(\mathbf{r})} = 0 \tag{2.33}$$

dando come risultato

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_1(\mathbf{r}) - \mu \right) \psi_0(\mathbf{r}) + \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = 0 \tag{2.34}$$

dove μ è un moltiplicatore di Lagrange, necessario per mantenere una costante normalizzazione della funzione d'onda macroscopica. Possiamo notare che (2.34) è esattamente un'equazione di Schroedinger nella forma

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_1(\mathbf{r}) + V_{eff}(\mathbf{r}) - \mu \right) \psi_0(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.35}$$

con potenziale efficace

$$V_{eff}(\mathbf{r}) = \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}')|^2 d^3\mathbf{r}'$$

Per studiare l'accuratezza dello stato fondamentale di prova analizzato fino ad ora, dobbiamo studiare i possibili stati quantistici che si discostano poco da esso. Per farlo consideriamo degli stati che non seguono perfettamente la (2.28). A questo punto per studiare la stabilità di uno stato rispetto agli altri Bogoliubov assume che gli operatori di campo definiti nelle sezioni precedenti potessero essere approssimati al valore dello stato coerente associato più una piccola deviazione

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \tag{2.36}$$

dalle regole di commutazione degli operatori di campo (2.3), (2.5) e (2.4) otteniamo

$$\left[\delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \delta \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.37}$$

e vediamo quindi che a loro volta anche $\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')$ e $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ sono operatori di campo bosonici. Possiamo a questo punto riscrivere l'Hamiltoniana (2.1) in termini di $\psi_0(\mathbf{r})$ e $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, trascurando i termini oltre il secondo ordine in $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, rimanendo quindi con

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \quad (2.38)$$

In questa espansione il termine \hat{H}_0 è semplicemente l'energia originale dello stato coerente (2.32) che abbiamo già minimizzato con (2.34). Inoltre se l'energia è minimizzata variazionalmente non abbiamo nessuna correzione lineare in $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, quindi \hat{H}_1 è nullo. La prima correzione significativa che abbiamo quindi quadratica nel termine $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$, il cui risultato netto è

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = & + \int \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_1(\mathbf{r}) \right) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ & + \frac{1}{2} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \left(\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}') + \right. \\ & + 2\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}') \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}') + 2\psi_0^*(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \\ & \left. + \psi_0^*(\mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{r}') \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Abbiamo come risultato quattro termini distinti che possono essere visualizzati come in figura.

Il primo corrisponde alla diffusione di due particelle dal condensato, una a \mathbf{r} e una a \mathbf{r}' , sotto l'azione di un potenziale $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Il secondo termine corrisponde alla creazione di una quasi-particella⁵ che viene diffusa dal condensato per interazione con esso. Il fattore 2 corrisponde all'interscambiabilità delle due posizioni \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Il terzo termine ha la stessa interpretazione del secondo solo che la quasi-particella invece di essere diffusa è assorbita nel condensato. Il quarto termine è simile al primo solo che le quasi-particelle sono assorbite nel condensato.

Il caso rilevante per la Condensazione di Bose-Einstein atomica è quello in cui il potenziale è di contatto

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.40)$$

La (2.39) si riduce quindi a

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 = & + \int \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_1(\mathbf{r}) - \mu \right) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \\ & + \frac{g}{2} \int n_0(\mathbf{r}) \left(\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) + 4\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right) d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.41)$$

⁵Una quasi particella è un'entità che si utilizza nello studio di sistemi interagenti, in quanto consiste in una particella del sistema più tutte le altre particelle che interagiscono con essa nel suo moto attraverso il sistema

dove a $\psi_0(\mathbf{r})$ abbiamo sostituito $\sqrt{n_0(\mathbf{r})}$ che è la densità spaziale variabile del condensato nel potenziale atomico.

Vediamo che l'Hamiltoniana risulta una forma quadratica negli operatori e che quindi può essere diagonalizzata. Per farlo si utilizza la trasformata di Bogoliubov per eliminare i termini "anomali" $\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ e $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})\delta\hat{\Psi}(r)$. Per farlo definiamo altri due operatori

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) + v(\mathbf{r})\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (2.42)$$

$$\hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{r}) = u^*(\mathbf{r})\delta\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) + v^*(\mathbf{r})\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (2.43)$$

Scegliendo come condizione

$$|u(\mathbf{r})|^2 - |v(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (2.44)$$

abbiamo che i due operatori appena definiti (2.42) e (2.43) sono operatori di campo bosonici in quanto rispettano le regole di commutazione (2.3), (2.5) e (2.4).

Trovare la soluzione diventa molto complicato a questo punto quindi semplifichiamo al semplice gas di Bose uniforme senza il potenziale atomico V_1 . Assumendo un'onda macroscopica costante $\psi_0 = \sqrt{n_0}$ e tornando allo spazio di \mathbf{k} riscriviamo l'Hamiltoniana (2.41) arrivando a

$$\hat{H}_2 = \sum_{\mathbf{k}} \left(\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{n_0 g}{2} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + 4a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \right) \right) \quad (2.45)$$

dove il potenziale chimico è $\mu = gn_0$.

Utilizziamo la trasformata di Bogoliubov nello spazio di \mathbf{k} e arriviamo ad avere due nuovi operatori

$$b_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^\dagger \quad (2.46)$$

$$b_{-\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \quad (2.47)$$

dove mettiamo come condizione

$$u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1.$$

A questo punto riscriviamo la (2.45) in termini di (2.47) e (2.46) e utilizzando $v_{\mathbf{k}}$ e $u_{\mathbf{k}}$ come parametri variazionali per rendere \hat{H}_2 diagonale, in particolare bisogna annullare i coefficienti dei termini anomali $a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$. Dato che il conto risulta lungo studiamo direttamente solo la soluzione.

Dopo la trasformazione di Bogoliubov arriviamo ad avere

$$\hat{H}_2 = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (2.48)$$

che come vediamo è somma di Hamiltoniane di oscillatori armonici indipendenti, dove $E_{\mathbf{k}}$ sarà (2.51).

Quindi lo stato fondamentale $|\theta\rangle$ è fissato dalla condizione

$$b_{\mathbf{k}} |\theta\rangle = 0 \quad \text{per} \quad \forall \mathbf{k} \quad (2.49)$$

e quindi $|\theta\rangle$ è lo stato fondamentale legato all'operatore $b_{\mathbf{k}}$, non è più lo stato fondamentale come inteso in precedenza $|0\rangle$ per l'operatore a

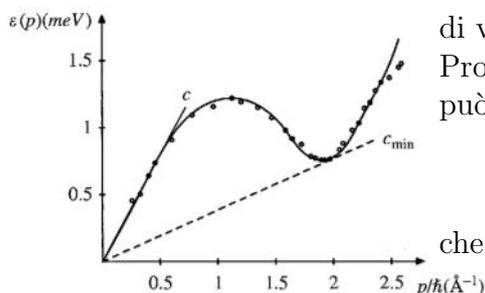


Figura 2.2: Spettro sperimentale dell' ${}^4\text{He}$ specialmente la zona del minimo che non è prevista dai risultati di Bogoliubov. Immagine presa da [2]

Lo stato fondamentale quindi non è più lo stato di vuoto ma è il condensato nello stato $|\theta\rangle$.

Procedendo poi con i calcoli algebrici si vede che $|\theta\rangle$ può essere scritto come

$$|\theta\rangle = e^{-N_0/2} e^{\sqrt{N_0} e^{i\theta} a^\dagger} |0\rangle \quad (2.50)$$

che ha la stessa forma di uno stato coerente con

$$\alpha = \sqrt{N_0} e^{i\theta}.$$

Lo spettro dell'energia di eccitazione delle quasi particelle create dall'operatore $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ è

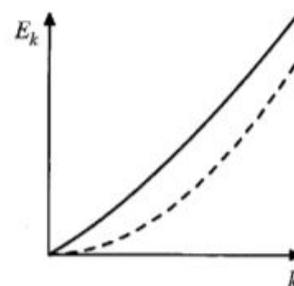
$$E_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + 2n_0 g \right)^{1/2} \quad (2.51)$$

dove per $|\mathbf{k}| \sim \frac{\sqrt{4n_0 g m}}{\hbar}$ abbiamo uno spettro lineare

$$E_{\mathbf{k}} \sim c \mathbf{k} \quad (2.52)$$

dove c è la velocità dei fononi pari a

$$c = \left(\frac{2n_0 g}{m} \right)^{1/2} \quad (2.53)$$



Lo spettro delle quasi-particelle trovato con la teoria di Bogoliubov è lineare per \mathbf{k} piccoli, mentre approssima lo spettro di una particella libera $\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$ per \mathbf{k} grande.

Il successo di questa teoria sta nel successo nella spiegazione della dissipazione lineare dello stato eccitato vicino a $\mathbf{k} = 0$.⁶ Possiamo quindi concludere che il gas di Bose debolmente interagente è un superfluido, anche se il semplice gas di Bose non interagente non lo è.

La velocità critica de superfluido è molto minore di c , e quindi dalla (2.53) vediamo che

Figura 2.3: Spettro teorico ricavato dalle approssimazioni appportate dal metodo di Bogoliubov. Immagine presa da [2]

⁶Lo spettro lineare nelle vicinanze di $\mathbf{k} = 0$ è necessario per prevenire la diffusione delle quasi-particelle al di fuori del fluido verso le pareti, e quindi per mantenere i super-flusso privo di dissipazione. Spiegazioni ulteriori nel Cap.II di [2]

la velocità critica tenderà a zero nei limiti di interazione debole $g \rightarrow 0$ o di bassa densità $n_0 \rightarrow 0$.

Questo spettro però è ancora molto lontano dallo spiegare lo spettro sperimentale dell' ^4He , come abbiamo già accennato all'inizio. La prima differenza che notiamo confrontando i due spettri è la mancanza del minimo nello spettro teorico, che invece è presente nello spettro sperimentale. Ciò significa che il minimo dell'energia lo si trova una volta che si introduce il gas di Bose fortemente interagente.

Senza il minimo quindi lo spettro di Bogoliubov ha una piccola pendenza verso l'alto vicino a $\mathbf{k} = 0$ mentre quello sperimentale una piccola pendenza verso il basso. Questo significa che presa una quasi-particella di impulso $\hbar\mathbf{k}$ e energia $E_{\mathbf{k}}$, questa ha una sezione trasversale diversa da zero di decadere in tre quasi-particelle con impulso e energia minore. Perciò le quasi-particelle di Bogoliubov non sono autostati esatti, a sono come particelle elementari del gas di Bose con vita media lunga, e dove il condensato corrisponde al vuoto.

2.2 Sistemi di fermioni

Le idee del capitolo precedente sono state sviluppate per sistemi bosonici, ma possono essere applicate anche ai superconduttori. Bisogna però modificare l'argomento dello studio in quanto il soggetto di studio nei superconduttori sono gli elettroni, che sono fermioni. Potremmo definire gli stati coerenti per i fermioni in generale, cosa che però non risulterebbe immediatamente utile nel nostro studio perchè ogni stato fermionico può essere occupato da 0 o 1 fermione a causa del principio di esclusione e quindi non è possibile un'occupazione macroscopica di un singolo stato.

Uno dei primi passi che portò Robert Schrieffer allo sviluppo della funzione d'onda a molte-particelle di uno stato coerente per i fermioni fu la scoperta da parte di Bardeen e Cooper che gli elettroni all'interno dei super conduttori si uniscono a coppie. Prima della soluzione di Schrieffer però ci furono altri tentativi di spiegare la teoria degli stati coerenti fermionici, e una di queste fu sviluppata da parte di Blatt e Butler. Nella loro teoria, Blatt e Butler trattarono la superconduttività come un condensato di Bose, ma le coppie di elettroni non possono essere semplicemente pensate come bosoni. Infatti la soluzione di Schrieffer fu quella di trovare stati coerenti per i fermioni, simili a quelli per i bosoni⁷.

Però il punto rimane sempre quello di avere un numero macroscopico di coppie nello stesso stato. Tuttavia anche nella BCS abbiamo una forma di ODLRO e di parametro d'ordine, e dopo aver definito degli operatori di campo anche per il caso di sistemi fermionici ci concentreremo sulle maggiori affermazioni su ODLRO.

⁷Questa scoperta sta nella teoria BCS, la prima teoria sulla superconduttività a livello microscopico che riuscisse a dare delle "predizioni" quantitative.

Iniziamo con la definizione di operatori di campo che descrivano in maniera esatta gli elettroni di conduzione in un solido. La funzione d'onda di una singola particella quanto meccanica nei solidi, noi sappiamo che corrisponde a una delle funzioni d'onda di Bloch

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (2.54)$$

Il vettore d'onda del cristallo \mathbf{k} deve giacere nei limiti della prima zona Brillouin. Assumiamo inoltre che un solo livello energetico sia rilevante (ovvero quello con la superficie di Fermi⁹, e quindi d'ora in poi l'indice n verrà sottinteso.

Uno stato di Bloch con spin dato σ , $\psi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r})$, può essere vuoto o occupato da un elettrone. Nella rappresentazione dei numeri di occupazione, lo stato quantistico di N particelle può essere precisato solo se specifichiamo lo stato di occupazione di ogni stato individuale. Classifichiamo gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ a seguito dell'occupazione o meno di $\psi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r})$. A questo punto possiamo definire gli operatori c e c^\dagger come

$$c^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad (2.55)$$

$$c |1\rangle = |0\rangle \quad (2.56)$$

Questi operatori sono chiamati operatori di creazione e distruzione, perchè la loro azione è come quella degli operatori bosonici (2.11) e gli operatori dell'oscillatore armonico (1.15)

Questi operatori hanno alcune proprietà importanti. Per prima cosa, come gli operatori bosonici, il loro prodotto misura il numero di occupazione dello stato

$$\begin{aligned} c^\dagger c |0\rangle &= 0 \\ c^\dagger c |1\rangle &= 1 \end{aligned} \quad (2.57)$$

La natura fermionica degli elettroni implica che l'applicazione doppia degli operatori dia risultati nulli e porta anche a

$$\{c^\dagger, c\} = c^\dagger c + c c^\dagger = 1 \quad (2.58)$$

dove $\{A, B\} = AB + BA$ è l'anti-commutatore, perchè dato che la funzione d'onda di un sistema a molti-corpi per i fermioni è antisimmetrica, allora gli operatori di diversi stati di Bloch devono anti-commutare e avremo quindi delle regole di anti-commutazione simili alle (2.3), (2.5) e (2.4)

$$\begin{aligned} \{c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} &= \delta_{\mathbf{k}\sigma, \mathbf{k}'\sigma'} \\ \{c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}\} &= 0 \end{aligned}$$

⁸Le funzioni d'onda di Bloch sono le funzioni d'onda che corrispondono a una singola particella, di solito un elettrone, in un potenziale periodico, come quello definito da un reticolo cristallino

⁹La superficie di Fermi è una superficie nello spazio delle fasi che è una diretta conseguenza del principio di esclusione di Pauli

$$\{c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, c_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = 0 \quad (2.59)$$

dove $\sigma = \pm 1$ corrisponde ai due stati di spin in cui può essere l'elettrone.

Possiamo rappresentare questi due operatori su un campo reale, tramite le loro trasformate di Fourier $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ e $\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r})$, ri-ottenendo le regole di anti-commutazione (2.59).

La difficoltà matematica che la BCS ha dovuto affrontare è stata quella di trovare una funzione d'onda a molte-particelle nella quale ogni elettrone vicino alla superficie di Fermi partecipasse all'accoppiamento.

Innanzitutto sappiamo che due elettroni si legano in uno stato di singoletto di spin con una funzione d'onda a due corpi¹⁰

$$\Psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2) = \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right). \quad (2.60)$$

Poi, come prima cosa per la risoluzione del problema, scriviamo una funzione d'onda a molte-particelle in cui ogni elettrone è accoppiato

$$\Psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2, \dots, \mathbf{r}_N\sigma_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P \Psi(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2) \dots \Psi(\mathbf{r}_{N-1}\sigma_{N-1}, \mathbf{r}_N\sigma_N) \quad (2.61)$$

la somma su P indica la somma su tutte le permutazioni di N! e $(-1)^P$ da 1 se la permutazione è pari e -1 se la permutazione è dispari, ed è necessario per rispettare l'antisimmetria dei fermioni

$$\Psi(\dots, \mathbf{r}_i\sigma_i, \dots, \mathbf{r}_j\sigma_j, \dots) = -\Psi(\dots, \mathbf{r}_j\sigma_j, \dots, \mathbf{r}_i\sigma_i, \dots). \quad (2.62)$$

L'utilizzo di questo approccio quanto-meccanico a molti-corpi con N fissato risulta però poco maneggevole, in quanto non è possibile avere una fase complessiva definita, a differenza della rappresentazione con gli stati coerenti. Per poter usare la rappresentazione con gli stati coerenti dobbiamo però riuscire a scriverli per i fermioni, e quindi trovare uno stato coerente per le coppie di fermioni.

Come prima cosa definiamo gli operatori di distruzione e creazione per le coppie di elettroni

$$\hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{R}) = \int d^3\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2) \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \quad (2.63)$$

L'azione di questo operatore su uno stato con N elettroni restituisce uno stato con N + 2 elettroni, ovvero crea uno stato di singoletto di una coppia di elettroni a distanza

¹⁰Cooper notò come due elettroni vicini alla superficie di Fermi subissero una reciproca attrazione a differenza degli elettroni lontani. Questo portò al "problema di Cooper", che mostra come lo stato liquido di un gas di Fermi (elettroni di Bloch indipendenti) non è stabile per piccole interazioni attrattive tra le particelle. Ciò porta all'idea che ogni elettrone vicino alla superficie di Fermi faccia parte di una coppia. Si può trovare tutto questo argomento nella Sez. 6.3 di [2]

reciproca \mathbf{r} , con centro di massa \mathbf{R} . Assumiamo che la funzione d'onda di stato associata a un singoletto di spin sia pari per scambio di coordinate, in quanto lo stato di singoletto di spin in sè è dispari e il loro prodotto deve essere dispari per scambio di coordinate. Si potrebbe pensare che quindi queste coppie di fermioni possono essere considerate bosoni, ma non è corretto in quanto se consideriamo il commutatore di questi operatori troviamo

$$\left[\hat{\varphi}(\mathbf{R}), \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{R}') \right] \neq \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \quad (2.64)$$

e quindi gli operatori commutano solo se sono molto distanti tra di loro, ovvero a coppie non sovrapposte.

Non abbiamo quindi un semplice condensato di Bose ma possiamo comunque definire un analogo termine di ODLRO per le coppie di Cooper corrispondente al condensato di Bose. Procediamo con il ragionamento già utilizzato per il termine di ODLRO nei bosoni.

Definiamo una matrice densità di una particella come abbiamo fatto nel caso bosonico, però in questo caso per una coppia

$$\rho_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \langle \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{R}) \hat{\varphi}(\mathbf{R}') \rangle \quad (2.65)$$

e quindi questa densità di matrice è legata alla matrice di densità di due particelle, ovvero due elettroni

$$\rho_2(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2, \mathbf{r}_3\sigma_3, \mathbf{r}_4\sigma_4) = \langle \hat{\Psi}_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}_{\sigma_3}(\mathbf{r}_3) \hat{\Psi}_{\sigma_4}(\mathbf{r}_4) \rangle \quad (2.66)$$

Inserendo la definizione di operatori di coppia (2.63) otteniamo la matrice densità di una coppia (2.65) in funzione della densità di due elettroni

$$\rho_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}') = \int \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}') \rho_2(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2 \uparrow, \mathbf{R} - \mathbf{r}/2 \downarrow, \mathbf{R}' - \mathbf{r}/2 \downarrow, \mathbf{R}' + \mathbf{r}/2 \uparrow) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \quad (2.67)$$

La funzione d'onda della coppia $\varphi(\mathbf{r})$ è uno stato limite quanto-meccanico limite, e sarà quindi zero per grandi $|\mathbf{r}|$. Se quindi abbiamo che la scala del suo range è definita da una lunghezza come ξ_0 (che è la lunghezza di coerenza dei superconduttori nella BCS), il contributo maggiore alla matrice densità della coppia deriva dalle parti della matrice densità dei due elettroni (2.66), in cui la distanza dei due elettroni della coppia è minore di ξ_0 , però le due coppie possono essere arbitrariamente distanti tra di loro.

A questo punto possiamo avere un termine di ODLRO anche per la matrice di densità della coppia purchè

$$\rho_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \rightarrow \text{cost} \quad (2.68)$$

se $|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| \rightarrow \infty$.

Visto così questo termine di ODLRO sembra corrispondere alla coerenza macroscopica

quantistica della teoria già studiata dell'ODLRO dei superfluidi, ma in realtà qui stiamo trattando le coppie di elettroni come entità, non i singoli come nei superfluidi.

In termini di densità degli elettroni

$$\rho_2(\mathbf{r}_1\sigma_1, \mathbf{r}_2\sigma_2, \mathbf{r}_3\sigma_3, \mathbf{r}_4\sigma_4)$$

questo termine di ODLRO corrisponde al fatto che la densità si avvicina a un valore costante per \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 molto vicini (vale anche per \mathbf{r}_3 e \mathbf{r}_4) ma con coppie separate tra di loro da una lunghezza arbitraria.

Seguendo il ragionamento utilizzato per il gas di Bose debolmente interagente possiamo assumere che \mathbf{R} e \mathbf{R}' siano così lontani da poter essere considerati statisticamente indipendenti e possiamo quindi scrivere (come (2.27))

$$\rho_1(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \sim \langle \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{R}) \rangle \langle \hat{\varphi}(\mathbf{R}') \rangle \quad (2.69)$$

per $|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| \rightarrow \infty$.

Possiamo perciò definire una funzione d'onda macroscopica come

$$\Psi(\mathbf{R}) = \langle \hat{\varphi}(\mathbf{R}) \rangle \quad (2.70)$$

che viene chiamato parametro d'ordine di Ginzburg-Landau per i superconduttori. Non tratteremo la costruzione della funzione d'onda a molte-particelle per le coppie di elettroni in quanto il nostro studio voleva concentrarsi maggiormente sull'importanza degli stati coerenti nei due casi studiati in questo capitolo, per approfondire questa parte si faccia riferimento al capitolo 6, specialmente alla sezione 6.4 di [2].

2.3 Luce

In questo capitolo focalizzeremo la nostra attenzione sullo studio degli stati coerenti nella luce. Partiremo dalle equazioni di Maxwell e vedremo che sarà possibile descrivere un singolo modo del campo come un oscillatore armonico quantizzato.

Per prima cosa richiamiamo alcune proprietà delle equazioni di Maxwell e del campo elettro-magnetico.

Richiamiamo le equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.71)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (2.72)$$

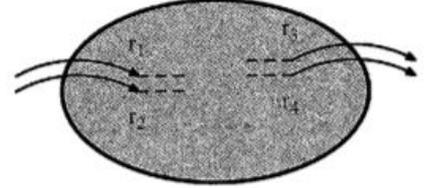


Figura 2.4: Interpretazione fisica del termine di ODLRO per le coppie di elettroni, la distanza $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$ (come quella tra $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4$) può essere arbitrariamente grande. Immagine presa da [2]

dove ρ è la densità di carica e \mathbf{j} è la corrente di densità di carica che sono in relazione tra di loro con l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.73)$$

c è la velocità della luce e ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto.

Ricordiamo anche che al campo elettro-magnetico possiamo associare una densità di energia, un flusso di energia, un momento e un momento angolare

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \quad (2.74)$$

$$\mathcal{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.75)$$

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.76)$$

$$\mathcal{J} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.77)$$

Nel vuoto, $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$, possiamo ricavare le equazioni d'onda sia per \mathbf{B} che per \mathbf{E}

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 \quad (2.78)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (2.79)$$

Le equazioni di Maxwell restituiscono 8 equazioni lineari scalari per le 6 componenti del campo elettro-magnetico, dunque non possono essere indipendenti. Infatti la seconda e la terza, che non dipendono dalle distribuzioni di carica e di corrente, comportano che

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.81)$$

dove Φ e \mathbf{A} sono rispettivamente lo scalare e il vettore potenziale. Così facendo riduciamo il numero di componenti non note del campo elettro-magnetico a 4 che comunque non sono indipendenti in quanto abbiamo delle trasformazioni di Gauge che lasciano \mathbf{E} e \mathbf{B} invariati

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (2.83)$$

dove Λ è una qualunque funzione sufficientemente regolare.

Utilizzando le (2.80) possiamo riscrivere la prima e la quarta equazioni di Maxwell arrivando a

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{cases} \quad (2.84)$$

che possono essere semplificate se scegliamo un particolare gauge, ovvero un particolare Λ . Le scelte ricadono tra:

- Il Gauge di Lorentz $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ che restituisce delle equazioni relativisticamente covarianti
- Il Gauge di Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ in cui l'equazione del potenziale scalare è l'equazione di Poisson per l'elettrostatica

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.85)$$

- Il Gauge della radiazione $\Phi = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, possibile nel vuoto e che restituisce

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (2.86)$$

Partiamo ora a parlare di onde elettromagnetiche. Nel vuoto, ogni componente di \mathbf{E} e \mathbf{B} soddisfa l'equazione d'onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F(x, y, z, t) = 0 \quad (2.87)$$

la cui soluzione generale è del tipo

$$F(x, y, z, t) = F(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (2.88)$$

che rappresenta la propagazione di un impulso lungo la direzione di \mathbf{k} , con $k^2 c^2 = \omega^2$ in cui \mathbf{k} è il vettore d'onda e ω è la frequenza angolare.

Come soluzioni indipendenti possiamo assumere le funzioni

$$F(x, y, z, t) = F_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.89)$$

così il campo elettromagnetico definito come

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.91)$$

dove \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 devono soddisfare le equazioni di Maxwell che implicano che $(\mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ siano reciprocamente ortogonali e che formino quindi un sistema di riferimento destrorso. Se confiniamo il campo elettromagnetico in una cavità siamo in grado di scomporlo in modi normali che corrispondono alle onde stazionarie che sono permesse dalla geometria della cavità

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.92)$$

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (2.93)$$

D'ora in poi considereremo la cavità come un cubo di lato L , così da avere un volume $V = L^3$ e la cui superficie Σ sia costituita da piani conduttori sui quali il campo elettrico deve svanire $\mathbf{E}(x, y, z, t)|_{\Sigma} = 0$.

Supponiamo per semplicità che l'onda si propaghi in direzione di z

$$\mathbf{k} = (0, 0, k) \quad (2.94)$$

ma questo discorso potrà essere generalizzato per tutte le direzioni.

Possiamo assumere il campo elettrico nella forma

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (Q(t)\text{sen}(kz), 0, 0) \quad (2.95)$$

che si annulla sul confine della cavità ovvero $z = 0$ e $z = L$ dove $kL = m\pi$ con $m = 1, 2, \dots$. Quindi la quarta equazione di Maxwell è soddisfatta se il campo magnetico è nella forma

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = (0, \frac{\dot{Q}(t)}{kc^2}\text{cos}(kz), 0) \quad (2.96)$$

La terza equazione di Maxwell è soddisfatta se e solo se

$$\ddot{Q}(t) + k^2c^2Q(t) = 0 \quad (2.97)$$

che riconosciamo essere l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza $\omega = kc$.

Se definiamo una nuova variabile con dimensioni di lunghezza come

$$Q(t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} q(t) \quad (2.98)$$

assieme al suo coniugato

$$p(t) = \dot{q}(t) \quad (2.99)$$

possiamo scrivere le componenti non nulle del campo elettromagnetico come

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} q(t)\text{sen}(kz) \quad (2.100)$$

$$B_y(z, t) = \frac{1}{\omega c} \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V}\right)^{1/2} p(t)\text{cos}(kz) \quad (2.101)$$

con $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$.

A questo punto possiamo calcolarci l'energia associata a questo modo

$$\begin{aligned} H &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\omega^2 q^2(t)\text{sen}^2(kz) + p^2(t)\text{cos}^2(kz)) dx dy \\ &= \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \end{aligned} \quad (2.102)$$

possiamo quindi concludere che un modo del campo elettromagnetico è equivalente ad un oscillatore armonico con frequenza $\omega = kc$.

Quindi classicamente ogni modo del campo elettromagnetico è rappresentato da un grado di libertà di un oscillatore armonico e i differenti modi sono indipendenti tra di loro e possiamo quindi procedere alla quantizzazione. Arriviamo quindi ad avere che il campo elettromagnetico corrisponde quantisticamente alla somma di n oscillatori armonici quantistici.

Questo significa che per ogni modo avremo a che fare con una coppia di operatori canonici \hat{q} e \hat{p} tali per cui

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.103)$$

Passiamo quindi alla versione quantistica dei campi (2.100) arrivando a

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{q}(t) \text{sen}(kz) \quad (2.104)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \frac{1}{\omega c} \left(\frac{2\omega^2}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{p}(t) \text{cos}(kz) \quad (2.105)$$

e l'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (2.106)$$

dove $\hat{q}(t) = U^\dagger(t) \hat{q} U(t)$, uguale per $\hat{p}(t)$ dove $U(t) = e^{itH/\hbar}$, sono gli operatori canonici nella rappresentazione di Heisenberg.

L'oscillatore armonico quantistico può essere descritto in termini di operatori di creazione a e distruzione a^\dagger (1.63) per cui vale la regola di commutazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.107)$$

Operiamo quindi questo cambio di "variabile" per il campo elettromagnetico

$$\hat{E}_x(z, t) = \epsilon_0 \left[\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t) \right] \text{sen}(kz) \quad (2.108)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \frac{i}{c} \epsilon_0 \left[\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}(t) \right] \text{cos}(kz) \quad (2.109)$$

e

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.110)$$

dove $\epsilon_0 = \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$ è l'unità elementare del campo elettromagnetico e gli operatori $\hat{a}(t)$ e $\hat{a}^\dagger(t)$ dipendono dal tempo secondo

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger \hat{U}(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \quad (2.111)$$

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{a} \hat{U}(t) = \hat{a} e^{-i\omega t}. \quad (2.112)$$

Utilizzando queste nuove formule possiamo riscrivere il campo elettromagnetico come

$$\hat{E}_x(z, t) = \varepsilon_0 \left(\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} + \hat{a} e^{-i\omega t} \right) \text{sen}(kz) \quad (2.113)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = \frac{i}{c} \varepsilon_0 \left(\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}(t) \right) \text{cos}(kz) \quad (2.114)$$

Se a questo punto richiamiamo gli stati di Fock (1.16), che sono autostati dell'Hamiltoniana

$$\hat{H} |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle \quad \epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.115)$$

Queste relazioni possono essere interpretate sia guardando a $|n\rangle$ come ad uno stato eccitato dell'oscillatore armonico ma anche come ad uno stato con n eccitazioni, ognuna dal valore di $E_0 = \hbar\omega$. Identifichiamo queste eccitazioni come fotoni e chiamando lo stato $|0\rangle$ come il "vuoto" ovvero uno stato senza nessun fotone, e lo stato $|n\rangle$ come lo stato con n fotoni. Per avere il numero di fotoni contenuti in ogni stato utilizziamo l'operatore

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.116)$$

che agisce sullo stato $|n\rangle$ restituendo il numero di fotoni

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.117)$$

È inoltre importante sottolineare che gli operatori \hat{q} e \hat{p} non rappresentano la posizione e l'impulso del singolo fotone ma sono la posizione e l'impulso del singolo modo vibrazionale.

Gli stati di Fock hanno un numero preciso di fotoni e quindi anche un'energia precisa ma non un campo elettrico definito. È possibile vederlo tramite il calcolo

$$\langle n | \hat{E}_x |n\rangle = \varepsilon_0 \text{sen}(kz) \langle n | \hat{a}(t) + \hat{a}^\dagger(t) |n\rangle = 0 \quad (2.118)$$

e

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{E}_x^2 |n\rangle &= \varepsilon_0^2 \text{sen}^2(kz) \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ &= \varepsilon_0^2 \text{sen}^2(kz) \langle n | 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 |n\rangle \\ &= \varepsilon_0^2 \text{sen}^2(kz) (2n + 1) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Quindi il valore di aspettazione del campo elettrico è

$$\langle E_x \rangle = 0 \quad (2.120)$$

e la deviazione standard è

$$\Delta E_x = \sqrt{\langle \hat{E}_x^2 \rangle + \langle \hat{E}_x \rangle^2} = \varepsilon_0 |\text{sen}(kz)| \sqrt{(2n+1)} \quad (2.121)$$

le fluttuazioni aumentano all'aumentare di n ma non scompaiono totalmente all'azzerarsi del numero di fotoni, questo vuole dire che abbiamo comunque delle fluttuazioni di energia nel vuoto, che è quindi "dinamico".

Abbiamo quindi dimostrato tramite calcoli che ogni modo normale del campo elettromagnetico vincolato in una cavità corrisponde a un oscillatore armonico, che di conseguenza può essere quantizzato. Come abbiamo trattato per tutto il Cap.1, per questo oscillatore armonico possiamo trovare degli stati coerenti che sono definiti come autostati dell'operatore di distruzione.

Possiamo quindi dire che ogni modo del campo magnetico corrisponde ad uno stato coerente e quindi questi ultimi si potranno costruire anche in questo caso. Dato che stiamo trattando di modi della radiazione elettromagnetica viene immediato il collegamento con il laser. Infatti i laser sono particolari campo elettromagnetici di cui solo alcuni modi hanno un'occupazione macroscopica e quindi per questo sono anche chiamati fasci di luce coerenti. La teoria dei laser trattata all'inizio del Cap. 2 possiamo quindi ricondurla a questa trattazione del campo elettromagnetico.

Bibliografia

- [1] Cohen-Tannoudji, Claude (1992), *Quantum Mechanics*, Wiley-VCH.
- [2] Annet, James-F. (2004), *Superconductivity, superfluids and condensates*, Oxford University Press.
- [3] Leonhardt, Ulf. (1997), *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press.
- [4] Ercolessi, Elisa *RADIATION, Notes for the Course: Quantum States of Matter and Radiation*