

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Fisica

ONDE NON LINEARI E SOLITONI

Relatore:
Prof.ssa
ELISA ERCOLESSI

Presentata da:
DAVIDE PIROVANO

Anno Accademico 2018/2019

Sommario

Questo elaborato si propone di studiare il fenomeno dei solitoni applicato ad ambiti naturali e tecnologici, nello specifico si analizzerà il processo di creazione di onde anomale e il funzionamento delle fibre ottiche.

Nel primo capitolo viene introdotta l'equazione di Korteweg-DeVries e le sue proprietà, partendo dal caso più semplice di equazione d'onda lineare e discutendo gli effetti di eventuali termini dispersivi, dissipativi e non lineari.

Nel secondo capitolo si studia il fenomeno degli tsunami, analizzando principalmente la teoria solitonica che ne descrive lo sviluppo. Al fine di ottenere una trattazione completa viene prima eseguita una descrizione delle onde d'acqua nei casi di ampiezza ridotta e di fondale basso. Per fare ciò si parte dalle equazioni di base della meccanica dei fluidi, ponendo delle specifiche condizioni al contorno.

Infine, nell'ultimo capitolo viene analizzato il funzionamento delle fibre ottiche. Inizialmente viene brevemente illustrata la composizione di una fibra ottica e le differenze principali tra la fibra multimodale e quella monomodale. Successivamente viene mostrato il funzionamento di quest'ultima, esplicitando l'efficacia di utilizzare impulsi solitonici al fine di non avere effetti dispersivi sull'informazione trasportata.

Indice

1	Introduzione	2
2	Introduzione ai solitoni	4
2.1	Onde lineari	4
2.1.1	Onde dispersive	5
2.1.2	Onde dissipative	6
2.2	Onde non lineari	6
2.3	Introduzione alla KdV	7
3	Solitoni come onde d'acqua	9
3.1	Onde di superficie, considerazioni iniziali	9
3.2	Onde di superficie con ampiezza ridotta	10
3.3	Onde lineari in acque poco profonde	12
3.4	Onde anomale	14
3.4.1	Teoria del fondale basso	14
3.5	Onde anomale con origine solitonica	15
3.5.1	Condizioni iniziali	16
3.5.2	Scaling e riconduzione alla KdV	17
4	Solitoni nelle fibre ottiche	21
4.1	Introduzione alle fibre ottiche	21
4.2	Effetti dispersivi	22
4.3	Nonlinearità	25
4.4	Effetti di attenuazione	25
4.5	Equazione non lineare di Schrödinger	26
4.5.1	Equazione non lineare di Schrödinger: Come si ricava	27
4.5.2	Solitoni chiari	28
4.5.3	Solitoni scuri	29
4.6	Solitoni nelle comunicazioni	30

Capitolo 1

Introduzione

I solitoni (o onde solitarie) sono onde di traslazione con la peculiare caratteristica di essere generate in condizioni in cui si verifica l'esatto bilanciamento tra gli effetti dovuti ai termini dispersivi e non lineari dell'equazione d'onda. Ciò genera un'onda che idealmente si propaga mantenendo invariata la sua forma e la sua energia.

La prima osservazione di un'onda solitaria avvenne nel 1834, ad opera dell'ingegnere navale scozzese John Scott Russell. Egli stava eseguendo alcuni esperimenti sulle barche del canale che collegava Edimburgo a Glasgow, quando vide una barca trainata da alcuni cavalli generare un'onda che si propagò in maniera anomala. Accadde infatti che la propagazione lungo il canale non modificava né la forma né la velocità dell'onda osservata, e, seguendone il percorso, Russell stabilì che si stesse muovendo a circa otto o nove miglia all'ora, con un'altezza di circa trenta centimetri e una lunghezza d'onda di circa dieci metri. Dopo alcune miglia l'onda diminuì la sua altezza a causa dell'attrito, ma il fenomeno suscitò in lui grande curiosità.

Russel riuscì a trovare sperimentalmente l'espressione della velocità di propagazione di queste onde, ma la prima equazione descrivente la propagazione di solitoni superficiali in un canale a bassa profondità venne trovata nel 1895 da Korteweg e De Vries, nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

conosciuta appunto come equazione di Korteweg-De Vries (KDV).

Esistono svariate manifestazioni di onde solitarie in natura, una di queste è rappresentata dagli tsunami. Gli tsunami sono fenomeni naturali che possono avere origine solitonica, e sono caratterizzati dallo spostamento di una grande massa d'acqua, causato solitamente da terremoti sottomarini. Le onde anomale si differenziano dalle normali onde marine per alcune caratteristiche principali:

- le comuni onde marine sono generate dal vento, e quindi muovono quantità d'acqua molto ridotte rispetto agli tsunami, che muovono l'intera colonna d'acqua dal fondale alla superficie.

- le onde anomale sono caratterizzate da lunghezze d'onda dell'ordine delle decine di chilometri, mentre le normali onde marine solo di pochi metri.
- la velocità degli tsunami è estremamente superiore a quella onde marine generate dal vento, toccando anche i 700-800 km/h.
- gli tsunami possono propagarsi per svariate migliaia di chilometri, senza modificare di troppo la loro energia.

Per tutti i motivi elencati sopra, gli tsunami sono tra gli eventi naturali più catastrofici conosciuti dall'uomo.

I solitoni, tuttavia, non sono conosciuti solo a livello di fenomeni naturali, ma sono anche sfruttati in svariati campi della ricerca e delle tecnologie, come ad esempio nella comunicazione tramite fibre ottiche. Le fibre ottiche sono fibre composte da filamenti di materiali vetrosi o plastica, in cui la luce si propaga per riflessione totale per via della differenza tra l'indice di rifrazione della parte centrale rispetto a quello del rivestimento. Queste fibre sono molto efficienti perché permettono il trasporto di una discreta quantità di informazioni ad alta velocità. A questo fine, l'utilizzo di solitoni per il trasporto dei dati è fondamentale. Affinché sia possibile trasportare grandi quantità di informazioni per lunghe distanze, è necessario che nell'onda che viene utilizzata per il trasporto non ci siano effetti di dispersione o di attenuazione del segnale, altrimenti l'informazione verrebbe persa o quantomeno danneggiata anche dopo aver percorso distanze brevi. Utilizzando dei solitoni, si verifica che gli effetti di non linearità vanno a compensare quelli di dispersione, generando un'onda che resta invariata. Si possono verificare comunque effetti di attenuazione dovuti al mezzo di propagazione, ma questo problema può essere risolto sfruttando un fenomeno chiamato *stimulated raman scattering*, che permette di amplificare periodicamente il segnale, per compensare gli effetti di attenuazione.

Nel primo capitolo di questo elaborato verrà introdotta l'equazione KdV e le sue proprietà, seguendo un discorso che parte dalle equazioni d'onda lineari e discutendo gli effetti dovuti a termini dispersivi, dissipativi e non lineari. Il secondo capitolo descrive il fenomeno degli tsunami, principalmente dal punto di vista della teoria solitonica. La trattazione affronta prima dei casi più semplici, come onde con piccola ampiezza o a fondale basso, per poi arrivare a trattare il fenomeno delle onde anomale. Infine, il terzo capitolo illustra il funzionamento delle fibre ottiche monomodali, concentrandosi sulla propagazione dell'informazione dentro queste ultime, e dando alcuni cenni sul loro utilizzo nelle comunicazioni.

Capitolo 2

Introduzione ai solitoni

Il nome "solitoni" si riferisce a certe soluzioni di equazioni d'onda non lineari che hanno delle particolari proprietà. Al fine di capire a fondo questi fenomeni, è utile introdurre una descrizione che parta dal caso più semplice di equazione d'onda lineare, per poi completare la trattazione con la descrizione di termini dispersivi e non lineari fino ad arrivare a trattare il caso specifico dei solitoni.

2.1 Onde lineari

Si prenda in analisi la propagazione di un'onda lineare in una dimensione, descritta dall'equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

dove $u(x, t)$ è la funzione d'onda, che descrive l'onda nello spazio, e c una costante positiva. Questa equazione, nota come equazione di D'Alembert, ha la seguente soluzione:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (2.1.2)$$

in cui g e f sono funzioni arbitrarie. Tale soluzione prevede la presenza di due onde, una che si propaga verso destra e l'altra verso sinistra, entrambe con velocità c . Queste due onde non interagiscono tra di loro per via del fatto che l'equazione (2.1.1) è lineare. Visto che le onde non interagiscono, è possibile studiare una delle due tralasciando l'altra, e ciò è deducibile dalla soluzione (4.5.15) ponendo $g = 0$. Di fatto si può quindi prendere in analisi l'equazione

$$u_t + cu_x = 0 \quad (2.1.3)$$

la cui soluzione è

$$u(x, t) = f(x - ct). \quad (2.1.4)$$

Nella (2.1.3) stata introdotta una notazione più comoda per le derivate parziali, in cui

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Quando si utilizzano equazioni d'onda per descrivere certi fenomeni fisici, vengono solitamente fatte alcune modellizzazioni che ne semplificano lo studio. In casi di estrema semplificazione, si ottiene l'equazione (2.1.3) che descrive il caso più semplice di onde lineari. Tuttavia, per la maggior parte dei fenomeni naturali, questa descrizione non è efficace, e si devono quindi introdurre termini che sono atti a rappresentare altre caratteristiche dell'onda in questione, come ad esempio termini di dispersione, dissipazione e non linearità.

2.1.1 Onde dispersive

Si consideri l'equazione

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1.5}$$

che è un esempio di equazione d'onda dispersiva. Prendendo la generica onda armonica

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \tag{2.1.6}$$

si ha che quest'ultima è una soluzione della (3.3.4) quando vale:

$$\omega = k - k^3 \tag{2.1.7}$$

dove k rappresenta il numero d'onda e ω la frequenza. La (2.1.7) è detta relazione di dispersione, e determina il valore della frequenza ω a seconda del valore di k . Ricavandosi dalla (2.1.6) l'espressione della velocità di fase si nota che questa dipende da k .

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2 \tag{2.1.8}$$

Di conseguenza si avrà che onde con diversi k avranno velocità di fase diverse, e questa è la caratteristica principale delle onde dispersive. Se si rappresenta un'onda come la somma di tante componenti con la forma della (2.1.6) e con valori di k diversi, o più generalmente si integra su k ottenendo:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \tag{2.1.9}$$

il risultato sarà un'onda che cambia la sua forma al variare della coordinata t , data la diversa velocità delle singole componenti.

Oltre alla velocità di fase, che rappresenta la velocità di una singola componente dell'onda, si definisce la velocità di gruppo, data da:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2 \tag{2.1.10}$$

che rappresenta la velocità del pacchetto d'onda, e di fatto la velocità di propagazione dell'energia.

2.1.2 Onde dissipative

Se si prende in analisi l'equazione (2.1.3) e vi si aggiunge una derivata pari, ad esempio

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \quad (2.1.11)$$

si ottiene una equazione che ha caratteristiche molto diverse da quanto visto per le onde dispersive. Sulla falsariga di quanto fatto nel paragrafo precedente, otteniamo che in questo caso la frequenza è data da

$$\omega = k - ik^2 \quad (2.1.12)$$

e di conseguenza si ha che

$$u(x, t) = \exp -k^2 t + ik(x - t) \quad (2.1.13)$$

è una soluzione della (2.1.11) e descrive un'onda che si propaga ad una velocità unitaria per qualsiasi k , ma anche che decade esponenzialmente per ogni k reale non nullo quando $t \rightarrow \infty$. Un'onda con queste caratteristiche è nota come onda dissipativa.

2.2 Onde non lineari

La maggior parte delle equazioni d'onda viste finora forniscono una descrizione valida solo per fenomeni ondulatori con un'ampiezza ridotta. Se questa condizione viene a meno, è possibile che si ottenga un'equazione non lineare[1], come ad esempio:

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad (2.2.1)$$

La soluzione è definita implicitamente da

$$u = f(x - c(u)t) \quad (2.2.2)$$

dove f è fissata dalla condizione iniziale $f(x) = u(x, 0)$. Se si prende la (2.2.2) e si deriva u , quello che si ottiene è [2]:

$$u_t + c(u)u_x = -tc'f'(u_t + c(u)u_x) \quad (2.2.3)$$

e questa può essere soddisfatta se $u(x, t)$ soddisfa la (2.2.1). Di conseguenza si ha che se $c(u)$ è una funzione crescente, allora la parte del segnale con ampiezza maggiore si propaga più velocemente, ed esisterà un t_c , detto tempo critico, oltre il quale la soluzione dell'equazione non sarà più unica (Figura 2.1).

Un'altra caratteristica importante è che, per le onde non lineari, non risulta più valido il *principio di sovrapposizione*. Quest'ultimo afferma che, date due soluzioni u_1 e u_2 di un'equazione lineare, anche la loro combinazione lineare sarà soluzione. È immediato verificare che questo non è valido per due soluzioni di un'equazione non lineare.

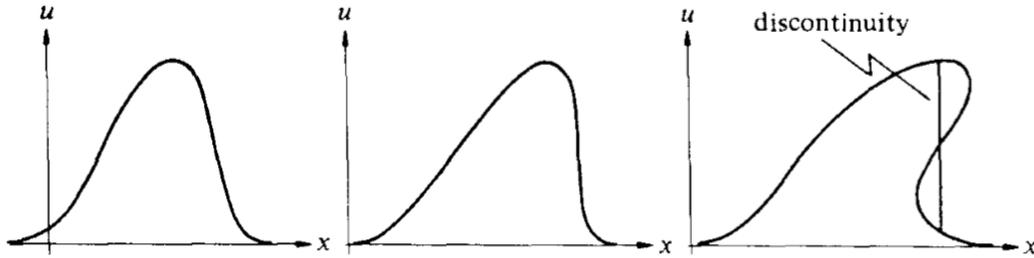


Figura 2.1: Propagazione di un'onda non lineare [1]

2.3 Introduzione alla KdV

In alcuni fenomeni accade che una data onda sia descritta da un'equazione in cui compare sia un termine non lineare che un termine dispersivo. In tutta generalità si avrà un'equazione d'onda di questo tipo:

$$u_t + c(u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.3.1)$$

Questi fenomeni sono molto interessanti, e stanno alla base di ciò di cui tratteremo nei prossimi capitoli. Può accadere infatti che gli effetti dovuti a non linearità e dispersione si compensino, dando luogo alla propagazione di un'onda che mantiene la sua forma $f(x - ct)$, che sarà chiamata *onda solitonica* o *solitone*. Uno dei casi più noti in cui ciò è verificato è l'*equazione di Korteweg - de Vries* anche nota come *KdV*, che ha la seguente forma:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.3.2)$$

Le principali caratteristiche delle onde solitoniche sono le seguenti:

- Hanno forma permanente
- Sono onde localizzate, perciò tendono ad un valore costante all'infinito
- L'interazione è molto particolare, infatti le onde ne escono "indenni", continuando il loro percorso come se non ci fosse stato alcun tipo di interazione[1].

Quest'ultima proprietà, esemplificata dalla Figura 2.2, è molto particolare. Questo tipo di comportamento è infatti atteso da due onde che soddisfano il principio di sovrapposizione, condizione che chiaramente viene a mancare nel caso di onde non lineari. Ciò suggerisce che il processo non lineare che si sta esaminando sia un processo molto peculiare.

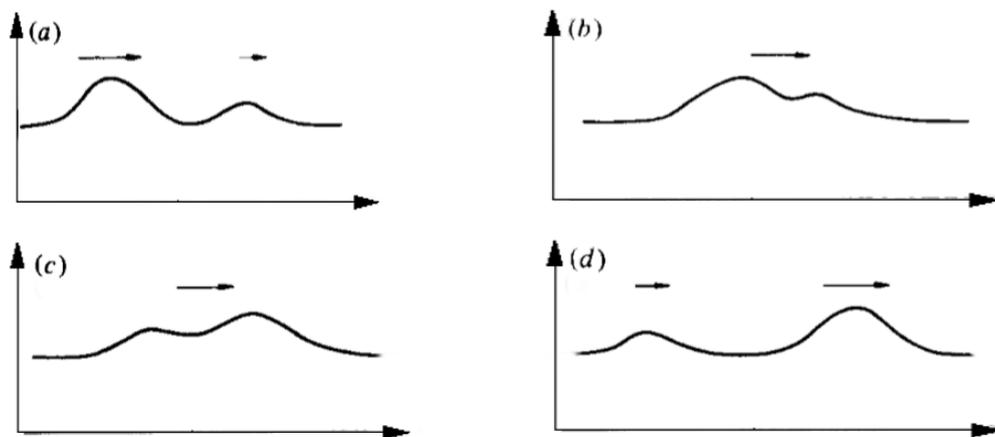


Figura 2.2: Schema raffigurante l'interazione di 2 solitoni per tempi: (a) $t = t_1$, (b) $t = t_2 > t_1$, (c) $t = t_3 > t_2$, (d) $t = t_4 > t_3$ [1]

Nei prossimi paragrafi verranno analizzate delle applicazioni di questi fenomeni in ambiti di carattere naturale, come gli tsunami, e di carattere tecnologico, come le fibre ottiche.

Capitolo 3

Solitori come onde d'acqua

In questo capitolo verranno prima introdotte alcune proprietà delle onde d'acqua in approssimazione lineare (ovvero con una piccola ampiezza) per poi analizzare il caso con ampiezza maggiore, che innesca processi di non linearità e può dare origine a solitoni. Inoltre si analizzeranno due processi diversi che portano alla creazione di onde anomale, conosciute con il nome di Tsunami.

3.1 Onde di superficie, considerazioni iniziali

Seguendo la trattazione di [3] si considerino delle onde di superficie e si scelga un sistema di coordinate in cui viene posto l'asse z verticale verso l'alto, il cui versore è il versore \mathbf{k} . Si definisca quindi il campo gravitazionale come $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ e la coordinata z di un generico punto sulla superficie che stiamo prendendo in analisi come:

$$z = \eta(x, y, z) \quad (3.1.1)$$

e all'equilibrio, dato che la superficie è imperturbata, si avrà $\eta(x, y, z) = 0$. È lecito assumere [3] che l'acqua sia incomprimibile, ovvero che la sua densità ρ resti costante su tutto il volume. Inoltre, se si tiene conto del fatto che gli effetti viscosi sono apprezzabili maggiormente su movimenti di piccola scala, si avrà che nei fenomeni presi in analisi il fluido potrà essere considerato irrotazionale. Si ha quindi che per studiare questo sistema possono essere sfruttate le equazioni del moto di Eulero, ponendo alcune condizioni al contorno:

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \quad \text{per } -h < z < \eta(x, y, t) \quad (3.1.2)$$

$$\phi_z = \eta_x\phi_x + \eta_y\phi_y + \eta_t, \quad \text{per } z = \eta(x, y, t) \quad (3.1.3)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, \quad \text{per } z = \eta(x, y, t) \quad (3.1.4)$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{per } z = -h \quad (3.1.5)$$

dove h è l'altezza del fondale e ϕ è detto *potenziale velocità* ed è definito come

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad}\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}. \quad (3.1.6)$$

Le equazioni (3.1.3), (3.1.4) e (3.1.5) sono le condizioni al contorno del problema. La (3.1.3) è detta *condizione cinematica*, che è una condizione volta a conservare l'equazione di frontiera, che descrive la superficie libera dell'acqua. La (3.1.4) è detta *condizione dinamica* e pone la continuità dello stress applicato alla superficie libera che separa i due fluidi (in questo caso aria e acqua). Infine la (3.1.5) impone che la velocità lungo z sia nulla oltre quello che è stato definito come "fondo", visto che non è previsto che il fluido lo attraversi.

3.2 Onde di superficie con ampiezza ridotta

Considerata una piccola perturbazione della configurazione a riposo della superficie libera, si avrà che sia la variazione di η che del potenziale velocità ϕ saranno piccole. Come conseguenza, è possibile riscrivere la (3.1.3) e la (3.1.4) senza i termini non lineari, ottenendo come risultato rispettivamente:

$$\eta_t - \phi_z = 0, \quad \text{per } z = \eta \quad (3.2.1)$$

$$\phi_t + g\eta = 0, \quad \text{per } z = \eta. \quad (3.2.2)$$

Dato che si sta considerando η piccolo, si può espandere ϕ_z in serie di Taylor in $z = 0$:

$$\phi_z|_{\eta} = \phi_z|_0 + \eta\phi_{zz}|_0 + \dots \quad (3.2.3)$$

quindi approssimando al prim'ordine si ha che la (3.2.1) può essere considerata calcolata in 0, mentre derivando rispetto al tempo la (3.2.2) e sostituendovi $\eta_t = \phi_z$ si ottiene

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0, \quad \text{per } z = 0. \quad (3.2.4)$$

Le condizioni (3.1.2)-(3.1.5) potranno quindi essere riscritte nel seguente modo:

$$\Delta\phi = 0, \quad \text{per } -h < z < 0 \quad (3.2.5)$$

$$\phi_{tt} + g\phi_z = 0, \quad \text{per } z = 0. \quad (3.2.6)$$

$$\phi_z = 0, \quad \text{per } z = -h. \quad (3.2.7)$$

D'ora in avanti, per motivi di comodità, si tratterà un problema bidimensionale dipendente dalle variabili x e z , considerando onde che su propagano lungo l'asse x e che sono uniformi lungo l'asse y . Sperimentalmente[3], le onde generate da una perturbazione

di piccola entità hanno una forma approssimativamente sinusoidale. Ha senso dunque cercare una soluzione separabile [3] per la (3.2.5) con frequenza ω e numero d'onda k :

$$\phi = q(x, z) \sin(kx - \omega t) \quad (3.2.8)$$

che sostituita nella (3.2.5) dà

$$\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - k^2 q \right) \sin(kx - \omega t) + k \frac{\partial q}{\partial x} \cos(kx - \omega t) = 0. \quad (3.2.9)$$

Questa equazione è valida solo quando i coefficienti del coseno e del seno sono nulli, di conseguenza si avrà

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - k^2 q = 0 \quad (3.2.11)$$

la cui soluzione generale è

$$q(z) = A \exp^{kz} + B \exp^{-kz}. \quad (3.2.12)$$

Si esprime quindi il potenziale velocità come

$$\phi = (A \exp^{kz} + B \exp^{-kz}) \sin(kx - \omega t) \quad (3.2.13)$$

e sostituendo nella condizione a contorno (3.2.7) si determina

$$B = A \exp^{-2hk} \quad (3.2.14)$$

da cui

$$\phi = A \exp^{-kh} \cosh[k(z + h)] \sin(kx - \omega t). \quad (3.2.15)$$

Dalla (3.2.1) è possibile ricavare la variazione del livello di superficie:

$$\eta = 2 \frac{kA}{\omega} \exp^{-kh} \sinh(kh) \cos(kx - \omega t) + c \quad (3.2.16)$$

dove si ricava che $c = 0$ dato che il valore medio di η è 0. Inoltre scrivendo la (3.2.16) nella forma

$$\eta = a_m \cos(kx - \omega t) \quad (3.2.17)$$

si può definire una nuova ampiezza

$$a_m = 2 \exp^{-kh} \frac{kA}{\omega} \sinh(kh). \quad (3.2.18)$$

Utilizzando ciò che è stato ricavato finora, si può quindi esprimere il potenziale velocità come

$$\phi = \omega a_m \frac{\cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \sin(kx - \omega t). \quad (3.2.19)$$

L'espressione sopra ricavata, deve rispettare anche la condizione (3.2.6), da cui può essere ricavata la relazione di dispersione

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (3.2.20)$$

Da questa si può calcolare la velocità di fase ponendo $v = \frac{\omega}{k}$ che dà come risultato:

$$v = \sqrt{\frac{g}{h} \tanh(kh)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \quad (3.2.21)$$

e la velocità di gruppo ponendo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$v_g = \frac{v}{2} \left[1 + \frac{2kh}{2 \sinh(2kh)} \right]. \quad (3.2.22)$$

Questi risultati esplicitano la dipendenza di ω , v e v_g da k e h . Nel prossimo paragrafo si prenderà in analisi il caso specifico delle onde d'acqua lineari quando ci si trova in una situazione di acque poco profonde.

3.3 Onde lineari in acque poco profonde

Basandosi sui risultati ottenuti nel paragrafo precedente, si possono distinguere due casi: le onde in acque profonde e quelle in acque poco profonde. Prendendo in analisi il parametro $\frac{h}{\lambda}$, si ha che il primo caso si verifica quando $\frac{h}{\lambda} \gg 1$, mentre il secondo quando $\frac{h}{\lambda} \ll 1$. In questa trattazione verrà esposto solo il caso in acque poco profonde, che ci tornerà utile nei paragrafi successivi.

Si consideri quindi una situazione in cui $\frac{k}{\lambda} \ll 1$, relazione esprimibile anche come $kh \ll 1$. Si ha allora che il termine $\tanh(kh)$ è esprimibile in serie di potenze di kh come

$$\tanh(kh) = kh - \frac{(kh)^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \dots \quad (3.3.1)$$

anche se per i nostri scopi è sufficiente fermarsi al terzo ordine. Ponendo quindi

$$\tanh(kh) \approx kh - \frac{(kh)^3}{3} \quad (3.3.2)$$

e sostituendo quest'ultima espressione nella relazione di dispersione (3.2.20) si ottiene

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)} = \sqrt{gk \left[kh \left(1 - \frac{(kh)^2}{3} \right) \right]} = k \sqrt{gh} \sqrt{1 - \frac{(kh)^2}{3}} \quad (3.3.3)$$

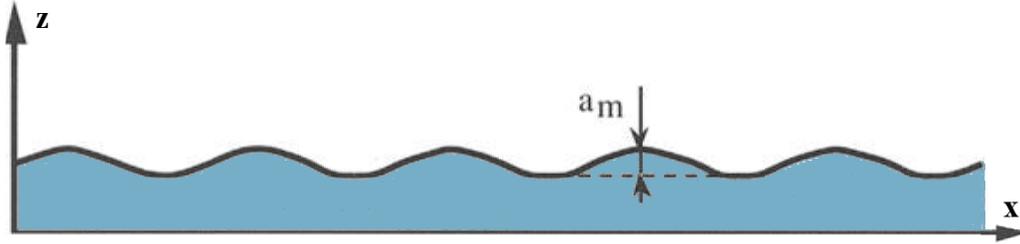


Figura 3.1: Schema di un'onda d'acqua in fondale poco profondo

ponendo $c_0 = \sqrt{gh}$ e sviluppando in serie di Taylor la radice si ottiene

$$\omega = c_0 k \left[1 - \frac{(kh)^2}{6} \dots \right] \quad (3.3.4)$$

Come conseguenza del fatto che si sta considerando una situazione in cui il termine kh è molto piccolo, è lecito concludere che i termini $(kh)^2$ sono trascurabili. Si avrà quindi che la relazione di dispersione e la velocità di fase possono essere scritte come

$$\omega \approx c_0 k \quad (3.3.5)$$

$$v \approx \sqrt{gh} = c_0. \quad (3.3.6)$$

Questo risultato esplicita il fatto che, nel caso di onde la cui lunghezza d'onda è molto maggiore della profondità del fondale, si ha che la velocità non dipende da k ma solo da h , e quindi non c'è dispersione. L'approssimazione (3.3.6) dà una precisione superiore al 3% se vale la relazione $h < 0.07\lambda$ [3]. In questa situazione, l'espressione della superficie libera (3.3.6) non cambia, e descrive un'onda armonica semplice di ampiezza ridotta (figura 3.1). Analizzando l'espressione del potenziale velocità (3.2.19), si nota che si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$\cos[k(z+h)] \approx 1$$

$$\sinh(kh) \approx kh$$

e si ottiene

$$\phi = \frac{c_0}{h} \sin(kx - \omega t) \quad (3.3.7)$$

che descrive una semplice onda armonica con ampiezza costante.

3.4 Onde anomale

Le onde anomale, anche conosciute con il nome di Tsunami, sono delle onde estremamente potenti, che possono raggiungere velocità dell'ordine di centinaia di km/h e altezze fino ai 30m. L'origine di questi fenomeni è descritta da due teorie principali: La teoria del fondale basso e la teoria solitonica. Queste due teorie descrivono lo stesso fenomeno, basandosi però su dinamiche diverse, che sono dettate da condizioni iniziali differenti. In questo paragrafo verrà brevemente descritta la teoria del fondale basso, mentre nel paragrafo successivo ci si concentrerà in maniera più accurata sulla teoria solitonica.

3.4.1 Teoria del fondale basso

La teoria del fondale basso tratta gli Tsunami come onde lineari che acquisiscono caratteristiche non lineari quando entrano in zone in cui la distanza tra il fondo e la superficie dell'onda cala in maniera critica. In generale, basandosi sulla (3.3.4) si ha che la velocità di gruppo v_g dipende dal termine h in questa maniera

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c_0 - \frac{c_0 k^2 h^2}{2} \dots \quad (3.4.1)$$

quindi se h diminuisce, si avrà una diminuzione della velocità di gruppo. Dalla relazione

$$v = \nu \lambda \quad (3.4.2)$$

dove ν rappresenta la frequenza, si ottiene che al diminuire della velocità di propagazione del pacchetto d'onda, diminuirà anche la lunghezza d'onda di quest'ultimo. A questo punto potrebbero non essere più valide le approssimazioni considerate nei paragrafi precedenti, che si basavano sulla validità della relazione $\frac{h}{\lambda} \ll 1$. Inoltre, nel caso bidimensionale in cui ci si è posti, vale la relazione di conservazione [4]

$$\frac{d}{dx}(v_g E) = 0 \quad (3.4.3)$$

dove E rappresenta la densità di energia dell'onda, direttamente proporzionale alla sua ampiezza. Si ha quindi che, quando l'onda si avvicina alla costa, diminuisce la velocità di gruppo, e come conseguenza diminuisce la lunghezza d'onda ed aumenta l'ampiezza.

Nel paragrafo precedente, quando è stata ricavata la (3.3.6), si è considerato infinitesimo lo spostamento di η dal valore di equilibrio h . Se si considerano onde via via con ampiezza maggiore, questa assunzione non è più valida ed è necessario tenere conto del valore di η nonostante sia comunque piccolo confrontato con la lunghezza d'onda [3]. È possibile approssimare questa situazione sostituendo h con $h + \eta$ nella relazione (3.3.6), e di conseguenza si avrà che la velocità relativa al fluido sarà scritta nella forma:

$$v = \sqrt{g(h + \eta)} \approx c_0 \left(1 + \frac{\eta}{2h}\right). \quad (3.4.4)$$

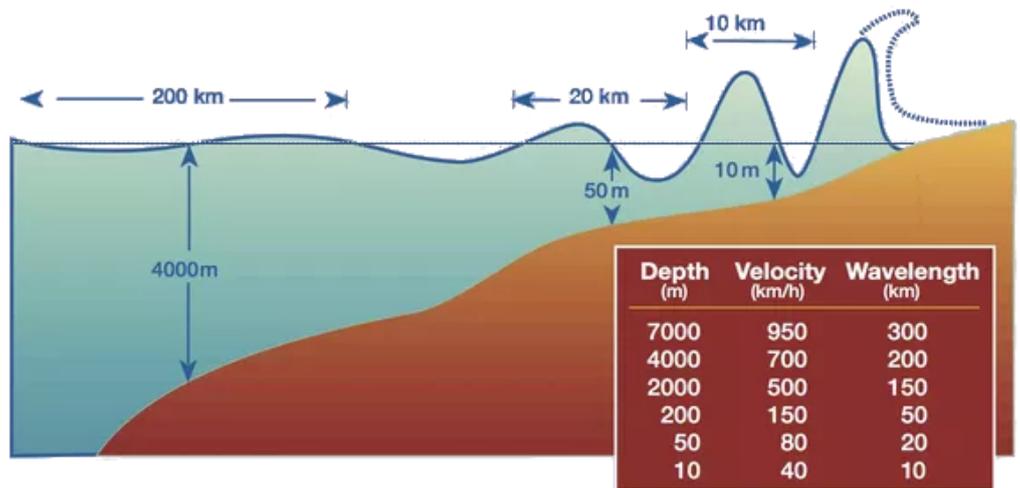


Figura 3.2: Grafico che mostra come si modifica l'onda al variare della profondità del fondale, della velocità di gruppo e della lunghezza d'onda.[6]

La dipendenza diretta della velocità da η porta in alcuni casi ad onde la cui velocità della cresta (punto con η massimo) è considerabilmente maggiore della velocità alla base dell'onda (punto con η minimo). Queste dinamiche possono portare ad un innalzamento dell'onda e successivamente una rottura di quest'ultima quando è molto vicina alla costa, generando conseguenza catastrofiche.

3.5 Onde anomale con origine solitonica

In alcuni casi di tsunami, succede che l'onda iniziale si propaga per distanze molto lunghe, e ciò è dovuto al fatto che, nel tempo, i singoli fattori non lineari delle onde, considerati trascurabili, danno un effetto non lineare cumulativo non trascurabile. Tale termine viene equilibrato dagli effetti di dispersione, dando luogo ad onde con forma permanente che si propagano per distanze enormi. Questi tsunami si dicono di natura solitonica. In questo paragrafo si fisseranno delle condizioni iniziali adatte al problema che si sta trattando, e si cercherà di ricondursi, partendo dalle equazioni di Eulero ed alcune condizioni al contorno, all'equazione di Korteweg - de Vries.

3.5.1 Condizioni iniziali

Nella trattazione che segue verranno poste le stesse condizioni iniziali sul fluido che sono state utilizzate nei paragrafi 2.1-2.3. Si considererà quindi un fluido irrotazionale e a densità costante posta pari a 1. Le equazioni di partenza sono quindi le equazioni di Eulero e le condizioni al contorno viste nel paragrafo 2.1, tenendo però conto che per facilità si sta analizzando un problema bidimensionale, dove la componente y è considerata costante. Le equazioni (3.1.2) - (3.1.5) possono quindi essere riscritte in questo modo:

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, & \text{per } -h < z < \eta(x, t) \\ \phi_z = \eta_x \phi_x + \eta_t, & \text{per } z = \eta(x, t) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, & \text{per } z = \eta(x, t) \\ \phi_z = 0, & \text{per } z = -h. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Per predire le regioni in cui la teoria solitonica descrive le onde di superficie, è necessario trovare una regione spazio-temporale in cui la KdV è una buona approssimazione delle equazioni che governano il fenomeno stesso. Come è stato già visto, l'aspetto più significativo della KdV è che descrive l'equilibrio tra gli effetti di nonlinearità e dispersione. Queste due proprietà sono rappresentate da due parametri, ϵ e σ [5], così definiti:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{h_0}{\lambda} \\ \epsilon &= \frac{a}{h_0} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

dove h_0 è l'altezza media del fondale, e λ ed a sono rispettivamente la lunghezza d'onda media e l'ampiezza media dell'onda. A questo punto è utile eseguire uno scaling adimensionale delle variabili di tempo, spazio e velocità. Si scriverà quindi:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \lambda x & z &\rightarrow h_0 z & t &\rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{gh_0}} t \\ u &\rightarrow \sqrt{gh_0} u & w &\rightarrow \frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

E si definisce

$$H = h_0 + h, \quad z = h(x, t), \quad z = 1 + \epsilon \eta(x, t)$$

dove si ricorda che u è la componente x della velocità del fluido e w ne è la componente z . Si ha quindi che, a titolo di esempio, x verrà sostituita da λx , in cui x sarà ora un parametro adimensionale. Eseguendo questo scaling sulle equazioni di Eulero, e sostituendo i parametri (3.5.2), si ottengono delle equazioni in cui questi ultimi compaiono nella forma ϵ e σ^2 [5]. Ciò suggerisce che, per tenere conto degli effetti più rilevanti, è necessario includere termini fino all'ordine $O(\epsilon)$ e $O(\sigma^2)$ [5].

3.5.2 Scaling e riconduzione alla KdV

In questo sottoparagrafo si ricaverà la KdV partendo dal sistema di equazioni (3.5.1), e per farlo si seguirà la trattazione di [5]. Partendo dai parametri (3.5.2) è possibile modificare la (3.5.3) sostituendvi ϵ e σ , in modo tale che, introducendo quest'ultimo scaling nel (3.5.1) si ottenga un sistema di equazioni dipendente solo da uno dei due parametri (in questo caso si utilizzerà ϵ). Si procede quindi in questo modo:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}x & z &\rightarrow z & t &\rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}t \\ u &\rightarrow u & w &\rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}w \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

sostituendo in (3.5.1) e con alcuni passaggi algebrici si ottiene:

$$\begin{cases} \epsilon\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 + \epsilon\eta(x, t) \\ \phi_z = \epsilon(\epsilon\eta_x\phi_x + \eta_t), & \text{per } z = 1 + \epsilon\eta(x, t) \\ \phi_t + \epsilon\frac{1}{2}\phi_x^2 + \frac{1}{2}\phi_z^2 + g\eta = 0, & \text{per } z = 1 + \epsilon\eta(x, t) \\ \phi_z = 0, & \text{per } z = 0. \end{cases} \quad (3.5.5)$$

Espandendo ϕ ed η in potenze di ϵ :

$$\phi(x, z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \phi_k(x, z, t) \quad \eta(x, z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \eta_k(x, z, t) \quad (3.5.6)$$

si ottiene che l'approssimazione di ordine 0 del (3.5.5) è data da

$$\begin{cases} \phi_{(0)zz} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 \\ \phi_{(0)z} = 0, & \text{per } z = 1 \\ \phi_{(0)z} = 0, & \text{per } z = 0. \\ \phi_{(0)t} + (\frac{1}{2}\phi_{(0)z})^2 + \eta_0, & \text{per } z = 1. \end{cases} \quad (3.5.7)$$

Le prime tre equazioni di (3.5.7) implicano che ϕ_0 sia indipendente da z e quindi che

$$\phi_0(x, z, t) = F(x, t) \quad (3.5.8)$$

con F una funzione da definire. Si ha quindi che la quarta equazioni di (3.5.7) si può scrivere come

$$F_t + \eta_0 = 0 \quad \text{per } z = 1. \quad (3.5.9)$$

Al livello successivo di approssimazione si ha che la (3.5.5) diventa

$$\begin{cases} \phi_{(0)zz} + \phi_{(1)xx} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 \\ \phi_{(1)z} - \eta_{(0)t} = 0, & \text{per } z = 1 \\ \phi_{(0)z} = 0, & \text{per } z = 0. \\ \phi_{(1)t} + (\frac{1}{2}\phi_{(0)z})^2 + \eta_1 + \phi_{(0)z}\phi_{(1)z}, & \text{per } z = 1. \end{cases} \quad (3.5.10)$$

Dalla (3.5.8) e dalle equazioni 1 e 3 della (3.5.10) si ottiene che

$$\phi_{(1)z} = -zF_{xx} \quad \text{per } 0 \leq z \leq 1 \quad (3.5.11)$$

e la seconda equazione del sistema diventa

$$F_{xx} - \eta_{(0)t} \quad \text{per } z = 1 \quad (3.5.12)$$

che combinata con la (3.5.9) porta all'equazione di un'onda lineare

$$\eta_{(0)xx} - \eta_{(0)tt} = 0. \quad (3.5.13)$$

Come già detto nel capitolo 1, è possibile scrivere la soluzione di questa equazione come

$$\eta_0(x, t) = f(x - t). \quad (3.5.14)$$

questo suggerisce che in un intorno di (x, t) è possibile avere delle precise informazioni sull'evoluzione della superficie libera. È utile eseguire i seguenti cambi di variabile:

$$\xi = x - t, \quad \tau = \epsilon t \quad (3.5.15)$$

e tramite alcuni passaggi algebrici ci si riconduce alla seguente versione del sistema (3.5.1):

$$\begin{cases} \epsilon\phi_{\xi\xi} + \phi_{zz} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 + \epsilon\eta(x, t) \\ \phi_z = \epsilon(-\eta_\xi + \epsilon\eta_\tau + \epsilon\phi_\xi\eta_\xi), & \text{per } z = 1 + \epsilon\eta(x, t) \\ \epsilon\phi_\tau - \phi_\xi + \epsilon\frac{1}{2}(\phi_\xi)^2 + \frac{1}{2}(\phi_z)^2 + \eta = 0, & \text{per } z = 1 + \epsilon\eta(x, t) \\ \phi_z = 0, & \text{per } z = 0. \end{cases} \quad (3.5.16)$$

Sviluppando, come fatto in precedenza, ϕ ed η in potenze di ϵ

$$\phi(x, z, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \phi_k(\xi, z, \tau) \quad \eta(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k H_k(\xi, \tau) \quad (3.5.17)$$

e tenendo conto dell'ordine 0, si ottiene il sistema (3.5.16) trasformato in questo modo:

$$\begin{cases} \phi_{(0)zz} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 \\ \phi_{(0)z} = 0, & \text{per } z = 1 \\ \phi_{(0)z} = 0, & \text{per } z = 0 \\ -\phi_{(0)\xi} + \frac{1}{2}\phi_{(0)z}^2 + H_0, & \text{per } z = 1 \end{cases} \quad (3.5.18)$$

Dalle prime 3 equazioni si ottiene $\phi_{(0)z=0}$ e di conseguenza è possibile scrivere

$$\phi_0(x, z, \tau) = \theta(\xi, \tau) \quad \text{per } 0 \leq z \leq 1 \quad (3.5.19)$$

per una generica funzione θ e dall'ultima equazione si ottiene

$$H_0(\xi, \tau) = \theta_\xi(\xi, \tau) \quad \text{per } z = 1. \quad (3.5.20)$$

Al successivo livello di approssimazione del (3.5.16) si ottiene

$$\begin{cases} \phi_{(1)zz} + \phi_{(0)\xi\xi} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 \\ \phi_{(1)z} + H_{0\xi} = 0, & \text{per } z = 1 \\ \phi_{(1)z} = 0, & \text{per } z = 0 \\ \phi_{(0)\tau} + \left(\frac{1}{2}\phi_{(0)\xi}\right)^2 + H_1 + \phi_{(0)z}\phi_{(1)z}, & \text{per } z = 1 \end{cases} \quad (3.5.21)$$

da cui, dalle prime 3 equazioni combinate con la (3.5.19) si può dedurre che

$$\phi_{(1)z}(x, z, \tau) = -z\theta_{\xi\xi}(\xi, \tau). \quad (3.5.22)$$

Integrando quest'ultima equazione sulla variabile z si ottiene

$$\phi_{(1)}(x, z, \tau) = -\frac{1}{2}z^2\theta_{\xi\xi}(\xi, \tau) + \alpha(\xi, \tau), \quad \text{per } 0 < z < 1 \quad (3.5.23)$$

dove α è una funzione risultante dall'integrazione, che non dipende da z . Combinando quest'ultima espressione con la quarta equazione del sistema (3.5.21) si ottiene

$$H_1(\xi, \tau) = -\theta_\tau(\xi, \tau) - \frac{1}{2}\theta_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \alpha_\xi(\xi, \tau) - \frac{1}{2}\theta_\xi^2(\xi, \tau). \quad (3.5.24)$$

Se si prende il sistema (3.5.16) al terzo livello di approssimazione, si ha

$$\begin{cases} \epsilon\phi_{(1)\xi\xi} + \phi_{(2)zz} = 0, & \text{per } 0 < z < 1 \\ \phi_{(2)z} - H_0\theta_{\xi\xi} = -H_1\xi + H_{0\tau} + \phi_{(0)\xi}H_{0\xi} & \text{per } z = 1 \\ \phi_{(1)\tau} - \phi_{(2)\xi} + \frac{1}{2}(\phi_{(1)z})^2 + \phi_{(0)\xi}\phi_{(1)\xi} + \phi_{(0)z}\phi_{(2)z} + H_2 = 0 & \text{per } z = 1 \\ \phi_z = 0, & \text{per } z = 0. \end{cases} \quad (3.5.25)$$

Dalla prima e terza equazione del (3.5.25) e dalla (3.5.23) si ricava

$$\phi_2(x, z, \tau) = \frac{1}{24}z^4\theta_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - \frac{1}{2}z^2\alpha_{\xi\xi}(\xi, \tau) + \beta(\xi, \tau) \quad (3.5.26)$$

con β una generica funzione di integrazione indipendente da z . Infine, usando quest'ultima equazione in combinazione con (3.5.20), (3.5.23) e (3.5.24) nella seconda equazione di (3.5.25) si ottiene

$$\frac{1}{3}\theta_{\xi\xi\xi\xi} + 3\theta_\xi\theta_{\xi\xi} + 2\theta_{\tau\xi} = 0 \quad (3.5.27)$$

e sostituendovi la (3.5.20)

$$2H_{0\tau} + 3H_0H_{0\xi} + \frac{1}{3}H_{0\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.5.28)$$

L'equazione ottenuta è esattamente la Korteweg de Vries per una superficie d'onda $\eta \sim H_0(\xi, \tau)$, ed è stato quindi verificato il fatto che si possano originare dei fenomeni solitonici di onde marine se ci si pone in determinate condizioni.

Può risultare interessante introdurre alcune stime delle distanze che le onde marine dovrebbero percorrere prima di entrare in un regime di equilibrio tra dispersione e nonlinearietà. Queste distanze si possono ricavare dalla formula [5]

$$\lambda\sigma\epsilon^{-\frac{3}{2}} = h_0\left(\frac{a}{h_0}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.5.29)$$

dove a indica l'ampiezza media dell'onda, e h_0 la profondità media del fondale.

Capitolo 4

Solitoni nelle fibre ottiche

Nei sistemi di trasmissione ottica in cui vengono utilizzati impulsi lineari, si ha che la velocità di trasmissione dell'informazione è limitata dalle caratteristiche dispersive del materiale utilizzato. La fibra ottica è composta da filamenti di plastica o materiali vetrosi, e questo porta ad avere una dispersione molto minore di casi in cui vengono utilizzati fili di metallo. Nonostante ciò, anche questi tipi di materiali molto efficienti hanno una componente dispersiva, e ciò può causare un grosso cambiamento delle caratteristiche del segnale, danneggiando così l'informazione trasportata. Per ovviare a questo problema, Hasegawa e Tappert nel 1973 ebbero l'idea di compensare la componente dispersiva sfruttando il fenomeno della variazione non lineare dell'indice di rifrazione (effetto Kerr) caratteristico del materiale che componeva la fibra. Quando la variazione della frequenza dovuta all'effetto Kerr compensa quella dovuta alla dispersione, il segnale tende a mantenere la sua forma iniziale generando ciò che viene chiamato "solitone ottico".

4.1 Introduzione alle fibre ottiche

Una fibra ottica è composta da 2 strati concentrici di materiale estremamente trasparente con forma cilindrica. Lo strato centrale è detto *core* ed ha un alto indice di rifrazione, mentre lo strato che lo circonda è detto *cladding* e ha un indice di rifrazione leggermente inferiore. Il segnale dentro questi materiali si propaga per riflessione totale, grazie alla differenza tra gli indici di rifrazione nello strato interno ed esterno.

Esistono principalmente 2 tipi di fibra: multimodale e monomodale. La fibra multimodale ha un core di diametro maggiore, ed una maggiore differenza tra l'indice di rifrazione interno ed esterno. Per far sì che un raggio venga riflesso, è necessario che l'angolo con cui il raggio incide sulla superficie di separazione dei due materiali sia maggiore dell'angolo critico, ricavato dalla legge di Snell (figura 4.1)

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \tag{4.1.1}$$

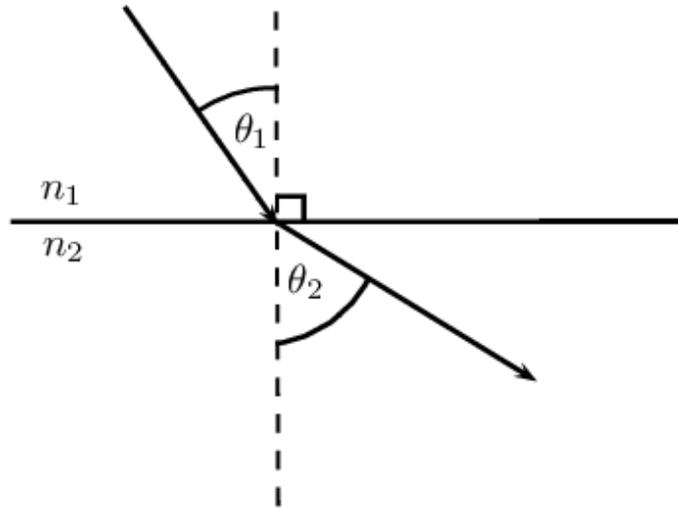


Figura 4.1: Rifrazione di un raggio di luce passante per materiali con indici di rifrazione diversi.

da cui si ottiene

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (4.1.2)$$

Se il rapporto tra i due indici è piccolo, lo sarà anche l'angolo critico e di conseguenza sarà più probabile che un raggio mandato in direzione casuale venga riflesso totalmente. Si ha quindi che nelle fibre multimodali certi raggi, incidendo con angoli diversi, seguiranno percorsi diversi e quindi attraverseranno la fibra in tempi differenti. Di conseguenza, la dispersione è maggiore in questo tipo di fibre. (figura 4.2)

Nella fibra monomodale il rapporto tra gli indici di rifrazione è molto vicino ad 1 e quindi vengono trasmessi solo raggi che formano con la superficie di separazione dei due materiali angoli molto piccoli o nulli. La fibra monomodale è quindi migliore sotto l'aspetto della quantità di informazione trasportabile, ed è il tipo più utilizzato nei sistemi di comunicazione ottica. In questo elaborato si tratteranno solamente le fibre ottiche di tipo monomodale.

4.2 Effetti dispersivi

Le fibre ottiche sono un mezzo dispersivo, e nello specifico si hanno 3 tipi principali di dispersione:

- Dispersione dovuta alla **velocità di gruppo** (GVD) che deriva dal fatto che la velocità di propagazione del segnale dipende dalla lunghezza d'onda;

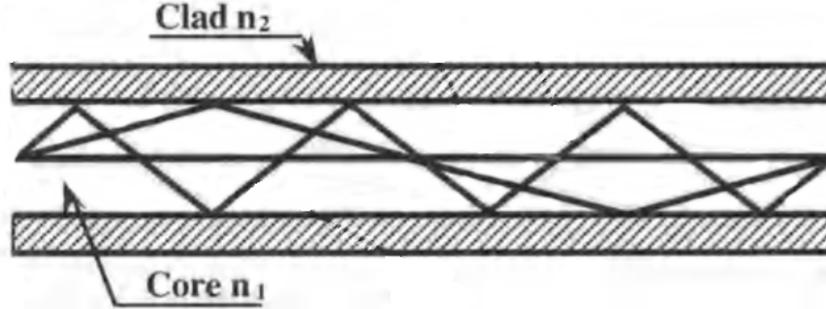


Figura 4.2: Schema semplificato del funzionamento di una fibra ottica, con diversi cammini percorribili dai raggi entranti.[3]

- Dispersione **modale**, caratteristica delle fibre multimodali;
- Dispersione dovuta ad **effetti geometrici**.

In questo elaborato si ci si concentrerà sulla dispersione GVD, che ha un ruolo centrale nella propagazione di impulsi ottici. Si seguirà principalmente la trattazione di [3].

La dispersione GVD ha luogo per via della dipendenza dalla frequenza ω della parte lineare $n_0(\omega)$ dell' indice di rifrazione. Nello specifico si ha

$$n_0(\omega) = \frac{ck(\omega)}{\omega} \quad (4.2.1)$$

dove c è la velocità della luce e k il numero d'onda. Quest'ultimo può essere sviluppato in serie di Taylor come funzione di ω , attorno al valore centrale k_0 .

$$k(\omega) = k_0 + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \right) + \dots \quad (4.2.2)$$

Risulta ora utile scrivere le derivate di k rispetto a ω nelle seguenti forme:

$$\frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{1}{v_g} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega n_0(\omega)}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(n_0(\omega) + \omega \frac{\partial n_0(\omega)}{\partial \omega} \right) \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \beta = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{v_g} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial n_0(\omega)}{\partial \omega} + \omega \frac{\partial^2 n_0(\omega)}{\partial \omega^2} \right) \quad (4.2.4)$$

dove v_g è la velocità di gruppo e β è definita come dispersione della velocità di gruppo (GVD)[3], che dipende dalle proprietà del materiale ma anche da quella della guida

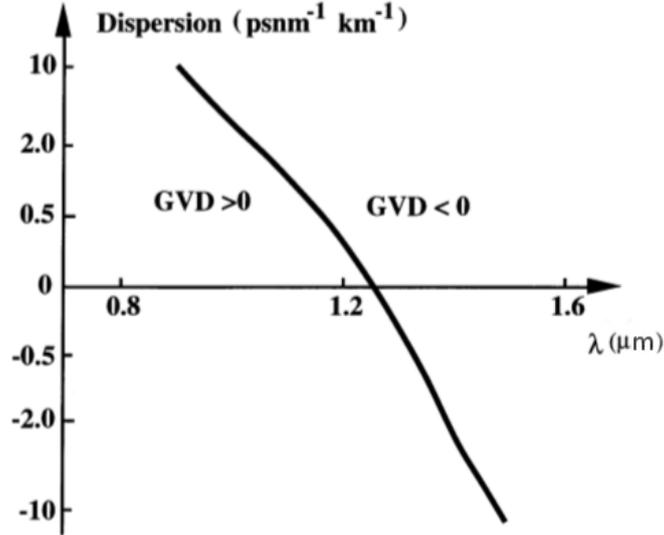


Figura 4.3: Relazione tra il parametro di dispersione D e la lunghezza d'onda λ . [3]

d'onda che caratterizza la fibra ottica. Risulta più comodo esprimere le equazioni appena introdotte in funzione della lunghezza d'onda, la cui espressione è $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. Si ha quindi

$$\frac{\partial n_0}{\partial \omega} = \frac{\partial n_0}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial n_0}{\partial \lambda} \quad (4.2.5)$$

per cui la (4.2.3) e la (4.2.4) diventano

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(n_0(\lambda) - \lambda \frac{\partial n_0(\lambda)}{\partial \lambda} \right) \quad (4.2.6)$$

$$\beta = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = \frac{\lambda^2}{2\pi c} D \quad (4.2.7)$$

dove D è detto parametro di dispersione

$$D = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 n_0(\lambda)}{\partial \lambda^2}. \quad (4.2.8)$$

In figura 4.3 è rappresentata la dipendenza tra D misurato in $[\frac{ps}{nm \cdot km}]$ e la lunghezza d'onda λ . Si nota che D è nullo per $\lambda = \lambda_D = 1.3\mu m$. Di conseguenza per $\lambda < \lambda_D$ β è positivo e si dice che la fibra è in un regime di *dispersione normale*. Viceversa se $\lambda > \lambda_D$ allora β sarà negativo ed è definito regime di *dispersione anomala*. A titolo di esempio, si prenda $\lambda = 1.5\mu m$, da cui si ottiene $D = -10[\frac{ps}{nm \cdot km}]$ e di conseguenza $\beta = -8[\frac{ps^2}{km}]$. Questo risultato indica che un segnale con larghezza di pochi ps sarà deformato percorrendo distanze anche dell'ordine del kilometro.

4.3 Nonlinearità

Ogni mezzo dielettrico, se sottoposto ad un campo magnetico intenso, assume caratteristiche non lineari. Nelle fibre ottiche la nonlinearità è dovuta alla dipendenza dal campo elettrico della polarizzazione elettrica indotta[3]. È possibile esprimere, utilizzando la notazione tensoriale, la polarizzazione indotta in un mezzo dielettrico non lineare nella seguente forma:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0[\chi^{(2)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(3)} \cdot \mathbf{EE} + \chi^{(4)} \cdot \mathbf{EEE} + \dots] \quad (4.3.1)$$

dove \mathbf{P} ed \mathbf{E} sono rispettivamente il vettore polarizzazione ed il vettore campo elettrico, e $\chi^{(n)}$ sono tensori di rango n . Facendo alcune considerazioni su questa espressione, e considerando una fibra isotropa, si deduce che l'indice di rifrazione può essere scritto, con grande precisione, nel seguente modo[4]:

$$n(\omega, |\mathbf{E}|^2) = n(\omega) + n_2 |\mathbf{E}|^2 \quad (4.3.2)$$

dove n_2 è una quantità collegata a $\chi^{(4)}$ dalla seguente relazione

$$n_2 = \frac{3}{8n} \chi_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(4)} \quad (4.3.3)$$

dove $\chi_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{(4)}$ è una rappresentazione scalare di $\chi^{(4)}$ (utilizzando la notazione tensoriale) ed è adatta ad un qualsiasi stato di polarizzazione che la luce ha in quel momento[4].

4.4 Effetti di attenuazione

Sebbene la qualità delle fibre ottiche sia migliorata molto negli ultimi anni, queste ultime causano comunque un'attenuazione del segnale, che seppur debole, non può essere considerata trascurabile su distanze di svariati chilometri come nel caso delle telecomunicazioni. L'indice di perdita di potenza Γ_p espresso in $[\frac{1}{km}]$, oppure Γ_{dB} espresso in $[\frac{dB}{km}]$ è definito nel seguente modo:

$$\Gamma_p L = -\log_e\left(\frac{P_t}{P_i}\right), \quad \Gamma_{dB} L = -10 \log_{10}\left(\frac{P_t}{P_i}\right) \quad (4.4.1)$$

dove P_i e P_t rappresentano la potenza in entrata ed in uscita rispettivamente per le distanze $z = 0$ e $z = L$. Dalla (4.4.1) si può ricavare una *lunghezza di attenuazione* L_p in funzione della potenza, definita come

$$L_p = \frac{1}{\Gamma_p} = \frac{1}{\Gamma_{dB}} \frac{10}{\log_e(10)}. \quad (4.4.2)$$

Il livello di attenuazione è variabile a seconda della lunghezza d'onda del segnale, come mostrato in figura 4.4. Ci sono dei particolari intervalli di lunghezze d'onda per i quali

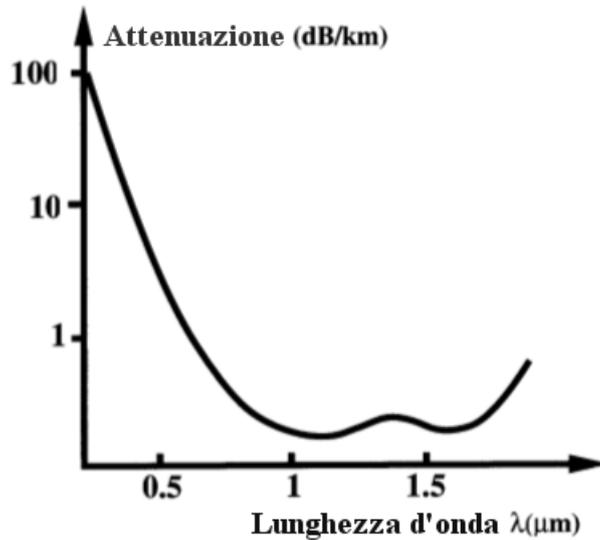


Figura 4.4: Grafico in scala logaritmica che mostra l'andamento dell'attenuazione in funzione della lunghezza d'onda del segnale.[3]

l'attenuazione è molto bassa, come ad esempio vicino alla lunghezza d'onda $\lambda \approx 1\mu m$ e $\lambda \approx 1.6\mu m$ dove l'attenuazione raggiunge anche livelli di $0.2 \left[\frac{dB}{km}\right]$. Invece, per lunghezze d'onda appartenenti al visibile ($0.4 - 0.7nm$), l'attenuazione può avere valori molto alti, variando tra 1 a $10 \left[\frac{dB}{km}\right]$.

4.5 Equazione non lineare di Schrödinger

L'equazione che governa la propagazione di segnali nelle fibre ottiche è conosciuta come equazione non lineare di Schrödinger (NLS). In questo capitolo si ricaverà l'equazione partendo dalle condizioni di dispersione e nonlinearità, seguendo quanto fatto in [3]. L'equazione in questione è la seguente:

$$-i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + |A|^2 A \quad (4.5.1)$$

dove A rappresenta l'onda di segnale e z è l'unica variabile spaziale presa in considerazione (direzione in cui si propaga l'onda) perché x e y , essendo una fibra monomodale (diametro molto stretto), non vengono considerate. L'equazione (4.5.1) ha come soluzione

$$A(z, t) = \text{sech}(t) \exp\left(\frac{iz}{2}\right) \quad (4.5.2)$$

che è nota come "solitone fondamentale".

4.5.1 Equazione non lineare di Schrödinger: Come si ricava

Si consideri la propagazione di una generica onda elettromagnetica. Partendo dalle equazioni di Maxwell nel mezzo, si dimostra [3] che la propagazione di un'onda attraverso un mezzo è descritta dall'equazione

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (4.5.3)$$

dove \mathbf{P} rappresenta il vettore polarizzazione che è composto da una parte lineare ed una non lineare. Per semplicità si assume un'onda polarizzata linearmente, che si propaga lungo z , ignorando le componenti trasversali x e y per i motivi citati nel capitolo precedente. Si consideri ora la parte reale di un'onda monocromatica, che si può scrivere come

$$E(z, t) = \frac{1}{2} [A(Z, T) e^{i(kz - \omega t)} + A^*(Z, T) e^{-i(kz - \omega t)}] \quad (4.5.4)$$

dove $A(Z, T)$ è la componente trasversa del campo elettrico lentamente variabile, che dipende da $Z = \epsilon z$ e $T = \epsilon t$ (ovvero componente spaziale e temporale che variano lentamente, con $\epsilon \ll 1$), $A^*(Z, T)$ è il suo complesso coniugato, k il numero d'onda e ω la frequenza. Se si inserisce la (4.5.4) nella (4.5.3) si ottiene in prima approssimazione la seguente relazione di dispersione non lineare:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 + \chi_L(\omega) + 3\chi_{NL}|A|^2 = n^2(\omega) \quad (4.5.5)$$

dove χ_L e χ_{NL} rappresentano rispettivamente la suscettività elettrica lineare e non lineare. La suscettività elettrica è definita come $\chi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}}$. Utilizzando la (4.3.2) e la (4.5.4) si può scrivere l'indice di rifrazione come

$$n(\omega) = n_0(\omega) + n_2|A|^2. \quad (4.5.6)$$

Mettendo a sistema la (4.5.6) e la (4.5.5), considerando trascurabili i termini di ordine superiore ad $|A|^2$ si ottiene:

$$n_0^2(\omega) \approx 1 + \chi_L(\omega), \quad 2n_0n_2 \approx 3\chi_{NL}. \quad (4.5.7)$$

Al fine di tenere conto della non linearità, si prende lo sviluppo (4.2.2) e si aggiunge il termine non lineare $\frac{\partial k}{\partial |A|^2}$ valutato in $|A_0|^2 = 0$. Si ha quindi

$$k - k_0 = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \left. \frac{\partial k}{\partial |A|^2} \right|_{|A_0|^2} (|A_0|^2) + \dots \right) \quad (4.5.8)$$

Ponendo

$$k - k_0 = K, \quad \omega - \omega_0 = \Omega \quad (4.5.9)$$

e utilizzando le variabili di Fourier (Ω, K) che corrispondono alle variabili spaziali e temporali (Z, T) , è possibile scrivere la trasformata di Fourier diretta e inversa della funzione d'onda in questione. Facendo ciò si ottiene che[3], considerando Ω e K come molto piccole (dell'ordine di $\epsilon \ll 1$), queste ultime possono essere rimpiazzate dagli operatori

$$i\epsilon \frac{\partial}{\partial T}, \quad -i\epsilon \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (4.5.10)$$

Sostituendo questi ultimi nella (4.5.8) si ottiene

$$\epsilon i \left(\frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A}{\partial T} \right) - \frac{1}{2} \epsilon^2 \beta \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \epsilon^2 \frac{\partial k}{\partial |A|^2} |A|^2 A = 0 \quad (4.5.11)$$

dove è stato assunto che il termine nonlineare sia $O(\epsilon^2)$. Se fossero assenti la dispersione e la nonlinearity, si otterrebbe

$$A = A\left(T - \frac{Z}{v_g}\right) \quad (4.5.12)$$

e risulta quindi sensato descrivere l'evoluzione di A utilizzando un sistema di coordinate che si muove alla velocità di gruppo v_g :

$$s = \epsilon Z, \quad t' = T - \frac{Z}{v_g}. \quad (4.5.13)$$

Sostituendo queste ultime nella (4.5.11) si ottiene l'equazione non lineare di Schrödinger

$$i \frac{\partial A}{\partial s} - \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2} + Q |A|^2 A = 0 \quad (4.5.14)$$

dove è stato posto $Q = \frac{\partial k}{\partial |A|^2}$.

Una conseguenza di questo risultato è che la soluzione dell'equazione non lineare di Schrödinger dipende dal segno del prodotto $-\beta Q$, ovvero il prodotto tra il termine dispersivo e quello non lineare. Nelle fibre ottiche si ha che Q è sempre positivo, ma β può variare nel modo indicato dalla figura 4.3. Ciò può dare origine a due tipi di soluzioni solitoniche: solitoni chiari e solitoni scuri.

4.5.2 Solitoni chiari

Nel regime di dispersione anomala, ovvero nel caso in cui $-\beta Q > 0$, si può calcolare [3] che la (4.5.14) ha una soluzione solitonica di ampiezza A_0 :

$$A = A_0 \operatorname{sech} \left[\sqrt{-\frac{Q}{\beta}} A_0 \epsilon \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] \exp \left(i \frac{Q}{2} A_0^2 \epsilon^2 z \right) \quad (4.5.15)$$

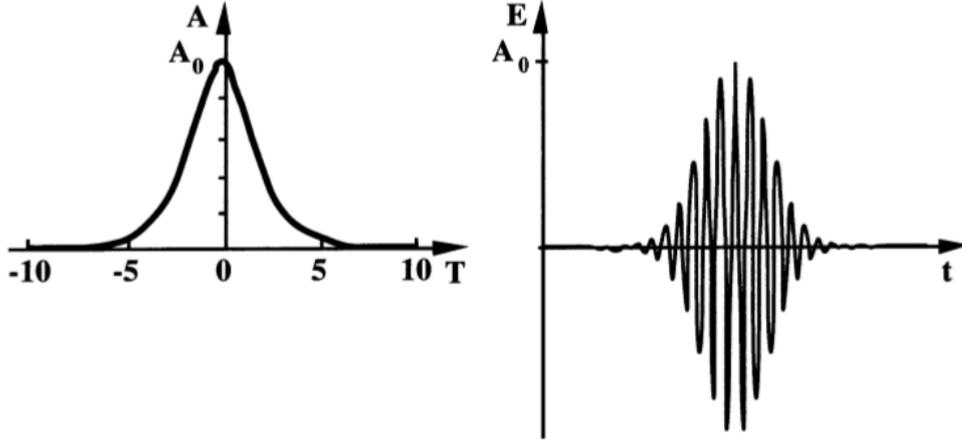


Figura 4.5: Rappresentazione della funzione d'onda $A(Z, T)$ e del corrispondente campo elettrico per un solitone chiaro.[3]

che è espressa nelle variabili di spazio e tempo originarie. Il campo elettrico totale $E(z, t)$ che rappresenta l'onda propagata, in questo caso un'onda di luce il cui inverso della frequenza è dell'ordine di $10^{-15}s$, si può ottenere sostituendo la (4.5.15) nella (4.5.4). Questo solitone è chiamato *solitone chiaro* perché corrisponde ad un'onda di luce (figura 4.5). Gli effetti di allargamento del segnale, dovuti alla dispersione, sono perfettamente bilanciati da quelli di restringimento dovuti alla nonlinearietà, e di conseguenza l'onda resta invariata.

4.5.3 Solitoni scuri

Nel caso in cui ci si trova in regime di dispersione normale, ovvero in cui $-\beta Q < 0$, si ha che gli impulsi "chiaro" non si possono propagare, per via del fatto che dispersione e nonlinearietà portano ad un generale allargamento del segnale. Tuttavia, in questo caso la (4.5.14) ammette una soluzione detta *solitone scuro*. Questa soluzione ha la seguente forma:

$$\Phi = A(Z, T)e^{i\phi(z,t)} \quad (4.5.16)$$

dove $A(Z, T)$ è data da

$$A = A_0 \left\{ 1 - m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{Q}{\beta}} m A_0 \epsilon \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] \right\}. \quad (4.5.17)$$

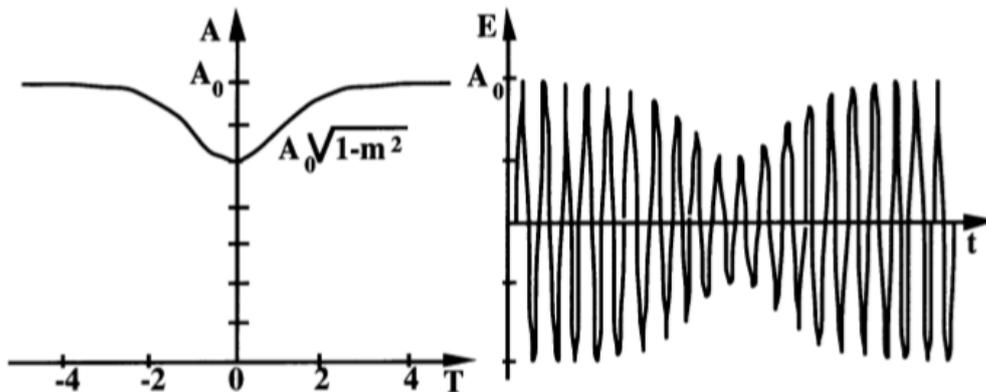


Figura 4.6: Rappresentazione della funzione d'onda $A(Z,T)$ e del corrispondente campo elettrico per un solitone scuro.[3]

in cui A_0 rappresenta l'ampiezza ed m è un parametro che controlla il modulo dell'ampiezza. Il campo elettrico $E(z, t)$ si ottiene sostituendo la (4.5.16) nella (4.5.4). Questa soluzione rappresenta un solitone perché si propaga senza cambiare forma, tuttavia non è un normale impulso ma descrive un "buco" di energia in un'onda di luce continua (da cui l'aggettivo scuro)(figura 4.6). Per le comunicazioni nelle fibre ottiche vengono utilizzati impulsi luminosi, quindi solitoni chiari.

4.6 Solitoni nelle comunicazioni

Nelle comunicazioni ottiche, l'informazione è sotto forma di impulsi binari. Il funzionamento ad alta velocità delle fibre ottiche è spesso impedito principalmente da due fattori già visti in precedenza, ovvero la dispersione e gli effetti di attenuazione. Si può ovviare al primo problema utilizzando un singolo solitone come bit di informazione, visto che gli effetti di dispersione vengono compensati, come già visto in precedenza, da quelli di non linearità.

Gli effetti di attenuazione di questi ultimi, dovuti al materiale di cui è composta la fibra, possono essere compensati amplificando i solitoni periodicamente, così da lasciarne inalterata l'ampiezza. Per fare ciò, viene sfruttato il fenomeno chiamato *stimulated Raman scattering*. Ciò che si verifica è che dei laser "pompa" immettono luce che interagisce con la luce presente nella fibra. Dalla frequenza iniziale, parte dell'energia è diffusa ad una frequenza diversa, che è quella del solitone che trasporta le informazioni e che quindi si traduce in un'amplificazione del segnale. Gli effetti di attenuazione sono così compensati ed il solitone può propagarsi per lunghe distanze.

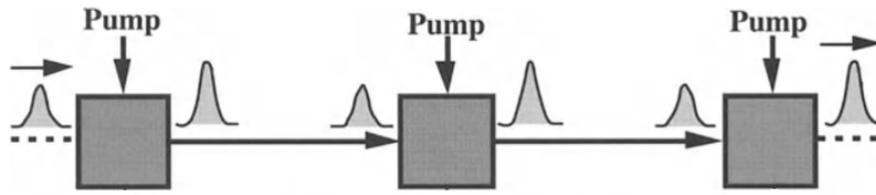


Figura 4.7: Schema di un sistema di comunicazione che sfrutta l'uso dei solitoni.[3]

Questi sistemi di comunicazione che sfruttano i solitoni sono molto efficienti, infatti in questo modo si riescono a trasferire informazioni per oltre 5000km anche a velocità di $100 \frac{Gbit}{s}$.

Bibliografia

- [1] P. G. DRAZIN E R. S. JOHNSON. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1990.
- [2] G. TURCHETTI. *Dinamica classica dei sistemi fisici* Zanichelli, 1998.
- [3] M. REMOISSENET. *Waves Called Solitons* Springer, 1994.
- [4] R.G. DEAN; R.A. DALRYMPLE *Water wave mechanics for engineers and scientists* World Scientific , 1991.
- [5] A. COSTANTIN; R. S. JOHNSON, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 15:sup2,58-73
- [6] www.sms-tsunami-warning.com