

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL PROBLEMA GEOMETRICO
DELLE PROIEZIONI
CARTOGRAFICHE

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Prof.ssa
Alessia Cattabriga

Presentata da:
Stefano Mulazzani

I Sessione
Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

La cartografia risponde alla necessità di rappresentare il mondo reale su un piano. La rappresentazione della superficie terrestre risolve svariati problemi, permette infatti di misurare distanze, angoli e aree rappresentative delle corrispondenti misure nella superficie terrestre. Questa esigenza ha aperto una vastità di studi, dall'antichità ad oggi, per cercare di risolvere il problema; in questa tesi andremo a indagare le difficoltà e le possibili soluzioni matematiche. Nel primo capitolo dell'elaborato verranno proposti i problemi in cui si imbattono i cartografi nella costruzione dei planisferi, studiandone i concetti matematici di geometria differenziale da cui derivano.

Dal punto di vista geometrico ci concentreremo sullo studio delle proprietà delle superfici immerse in \mathbb{R}^3 con un particolare riguardo alla sfera, piano cilindro e cono. Queste superfici infatti sono le più usate per costruire le mappe geografiche.

Nella seconda parte invece andremo a presentare le proiezioni terrestri più utilizzate al giorno d'oggi e nella storia passata, studiandone le proprietà e le modalità di utilizzo.

Indice

1	Superfici in \mathbb{R}^3	4
1.1	Superfici regolari	4
1.1.1	Esempi di superfici regolari	5
1.2	Prima forma fondamentale	11
1.2.1	Esempi di forme fondamentali	14
1.3	Geodetiche	17
1.3.1	Curve geodetiche su superfici	18
2	Modelli di proiezione cartografica	22
2.0.1	Proprietà e proiezioni	24
2.1	Proiezioni cilindriche	25
2.1.1	Proiezione di Mercatore	26
2.1.2	Proiezione di Gall-Peters	29
2.2	Proiezioni coniche	31
2.2.1	Proiezione conica di Lambert	32
2.3	Proiezioni polari	34
2.3.1	Proiezione stereografica	34
2.3.2	Proiezione centrografica	36

Capitolo 1

Superfici in \mathbb{R}^3

Per la stesura di questo capitolo sono state usate come fonti [1], [2] e [3]; alcune immagini sono state prese da [3] e altre create con il software Geogebra3D.

1.1 Superfici regolari

Una superficie è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 che localmente appare come una porzione di \mathbb{R}^2 ; proprio come la superficie della terra, sebbene sia quasi sferica, appare piatta ad un osservatore sulla superficie.

Definizione 1. Un sottoinsieme S di \mathbb{R}^3 è una superficie se, per ogni punto $p \in S$, esiste un aperto U di \mathbb{R}^2 e W un aperto di \mathbb{R}^3 che contiene p tale che $S \cap W \subseteq \mathbb{R}^3$ è omeomorfo a U . Una mappa $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ che sia un omeomorfismo sull'immagine $S \cap W$ come descritto è chiamata parametrizzazione locale di S in $S \cap W$ o in p . Un insieme di parametrizzazioni locali che ricopre tutta S è detto atlante.

Definizione 2. Superfici regolari Consideriamo U un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 . Diremo che una mappa $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è liscia se le componenti di f am-

mettono le derivate parziali di ogni ordine e sono continue. Presa quindi una parametrizzazione $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che: $\sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v))$ denoteremo le derivate parziali:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right) = \sigma_u$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) = \sigma_v.$$

Una superficie S con un atlante \mathcal{A} è detta regolare se \forall parametrizzazione $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ in \mathcal{A} si ha che è liscia e σ_u e σ_v sono linearmente indipendenti. Alternativamente si può richiedere che il prodotto vettoriale $\sigma_u \times \sigma_v$ sia sempre diverso dal vettore nullo.

1.1.1 Esempi di superfici regolari

Esempio 1. Ogni piano in \mathbb{R}^3 è una superficie con un atlante formato da una singola parametrizzazione. Infatti sia P_0 un punto sul piano e \mathbf{a} e \mathbf{b} due vettori che sono paralleli al piano e perpendicolari tra loro. Allora una parametrizzazione del piano è:

$$\sigma(u, v) = P_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$$

In particolare il **piano** passante per gli assi z e y in \mathbb{R}^3 è parametrizzato come:

$$\sigma(u, v) = (0, u, v)$$

con $\sigma_u = (0, 1, 0)$ e $\sigma_v = (0, 0, 1)$ chiaramente linearmente indipendenti.

Esempio 2. Un cilindro circolare è un luogo di punti di \mathbb{R}^3 che si trovano a una distanza fissa da una retta. Per esempio il **cilindro unitario**, di raggio 1 e con asse in z è immagine della seguente mappa:

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

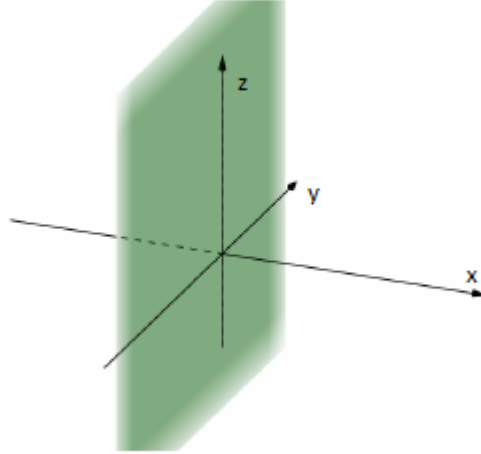


Figura 1.1: Piano passante per gli assi z e y .

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Chiaramente $\sigma(u, v) \in S$ per ogni $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e ogni punto di S ha questa forma, inoltre σ è continua, ma non iniettiva. Per avere una mappa iniettiva su un aperto possiamo considerare $\sigma|_U$ con

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi\}.$$

Tuttavia con l'insieme U non compriamo tutta la superficie del cilindro, ma solo il sottoinsieme aperto ottenuto rimuovendo la retta $x = 1, y = 0$. Per ottenere un atlante completo di S abbiamo bisogno di considerare un'altra parametrizzazione. Possiamo prendere allora $\sigma|_{\tilde{U}}$:

$$\tilde{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi\};$$

questa parametrizzazione ricopre il sottoinsieme aperto di S ottenuto rimuovendo la retta $x = -1, y = 0$. Allora ogni punto di S è immagine di almeno una delle due parametrizzazioni $\sigma|_U, \sigma|_{\tilde{U}}$, quindi $\sigma|_U, \sigma|_{\tilde{U}}$ è un atlante per S , e S è una superficie.

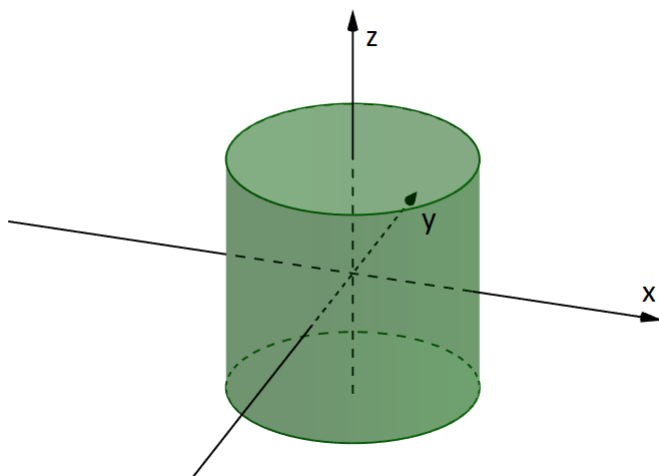


Figura 1.2: Cilindro unitario con asse in z .

Per verificare che la superficie sia regolare calcoliamo σ_u e σ_v :

$$\sigma_u = (-\sin u, \cos u, 0) \qquad \sigma_v = (0, 0, 1)$$

I due vettori sono chiaramente linearmente indipendenti per ogni punto $(u, v) \in U$ e per ogni punto di \tilde{U} .

Esempio 3. Una sfera è un insieme di punti di \mathbb{R}^3 che hanno distanza costante da un punto detto centro. Nell'esempio considereremo la sfera di raggio 1 detta **sfera unitaria** che denoteremo con S^2 . La parametrizzazione più usata per la sfera è data dalla longitudine θ e dalla latitudine φ ; riferendoci alla Figura 1.3, se consideriamo un punto p sulla sfera, la retta passante per p e parallela all'asse z interseca il piano xy nel punto q , chiameremo quindi θ l'angolo convesso pOq con O centro della sfera, mentre φ quello fra Oq e l'asse positivo delle x . Una circonferenza sulla sfera con valore costante di θ viene chiamata parallelo, mentre con φ costante viene chiamata meridiano. Per ottenere una formula esplicita della parametrizzazione, dovremo esprimere p in funzione degli angoli θ e φ . Osservando triangolo formato fra O ,

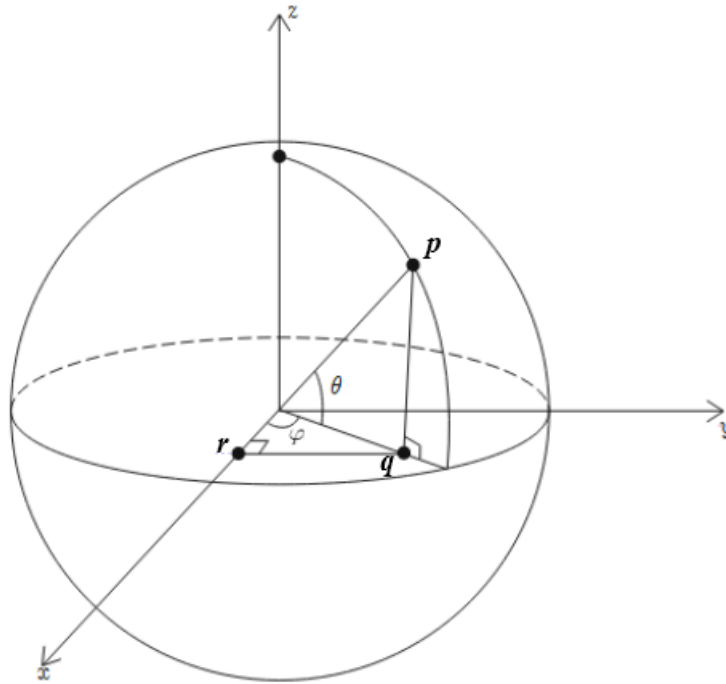


Figura 1.3: Parametrizzazione della sfera con coordinate sferiche.

p e q , vediamo come la componente sull'asse z di p è $\sin \theta$. La componente sull'asse x e sull'asse y possono essere trovate usando il triangolo con vertici O, q, r , dove r è il piede della perpendicolare da q all'asse x . la lunghezza dell'ipotenusa di questo triangolo è $\|q\| = \cos \theta$, perciò le componenti sull'asse x e y di p saranno:

$$\|q\| \cos \varphi = \cos \theta \cos \varphi \qquad \|q\| \sin \varphi = \cos \theta \sin \varphi.$$

Otteniamo quindi la seguente parametrizzazione della sfera

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

Tuttavia come nel caso del cilindro σ non è iniettiva infatti $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma(\theta, \varphi + 2\pi)$.

Quindi per ottenere l'iniettività consideriamo l'insieme:

$$U = \left\{ (\theta, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi \right\}.$$

Anche in questo caso però l'immagine di $\sigma|_U$ non copre tutta la sfera, ma il sottoinsieme aperto ottenuto rimuovendo la semicirconferenza formata dai punti della sfera della forma $(x, 0, z)$ con $x \geq 0$. Per mostrare che la sfera è una superficie dobbiamo trovare almeno un'altra parametrizzazione che copre la parte della sfera omessa da $\sigma|_U$. Una possibilità è considerare $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da:

$$\tilde{\sigma}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta, -\cos \theta \sin \varphi)$$

L'immagine di $\tilde{\sigma}$ è il sottoinsieme aperto di S^2 ottenuto rimuovendo la semicirconferenza formata dai punti della sfera della forma $(x, y, 0)$ con $x \leq 0$.

Per mostrare la regolarità calcoliamo σ_θ e σ_φ :

$$\sigma_\theta = (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad \sigma_\varphi = (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0)$$

$\sigma_\theta \times \sigma_\varphi = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) = (-\cos^2 \theta \cos \varphi, -\cos^2 \theta \sin \varphi, -\cos \theta \sin \theta)$ che è non nullo dato che $\|\sigma_\theta \times \sigma_\varphi\| = |\cos \theta| \neq 0 \forall (\theta, \varphi) \in U$ dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea. Analogamente per $\tilde{\sigma}$.

Esempio 4. Un cono è una superficie che si ottiene facendo ruotare intorno ad una retta r una semiretta avente l'origine su r e non perpendicolare o parallela ad essa. Possiamo per esempio considerare il cono che si ottiene facendo ruotare la retta di equazioni $x = z$ e $y = 0$ attorno all'asse z .

Una possibile parametrizzazione sarà:

$$\sigma(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, u)$$

con $(u, \theta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

Con questa parametrizzazione come nei casi precedenti non abbiamo l'iniettività di σ , infatti $\sigma(u, 0) = \sigma(u, 2\pi)$. Occorre quindi restringere l'insieme e

considerare:

$$U = \{(u, \theta) \mid u \in \mathbb{R}^+, 0 < \theta < 2\pi\}.$$

Tuttavia anche in questo caso l'immagine di $\sigma|_U$ non copre tutta la superficie del cono, ma esclude la retta del cono formata dai punti $(x, 0, z)$ con $x \geq 0$. Per mostrare che il cono è una superficie dobbiamo trovare un'altra parametrizzazione che include anche la parte non considerata da $\sigma|_U$. Possiamo considerare allora $\sigma|_{\tilde{U}}$ con

$$\tilde{U} = \{(u, \theta) \mid u \in \mathbb{R}^+, -\pi < \theta < \pi\}.$$

Questa parametrizzazione esclude la retta del cono formata dai punti $(x, 0, z)$ con $x \leq 0$. Allora ogni punto di S è immagine di almeno una delle due parametrizzazioni e quindi $\sigma|_U, \sigma|_{\tilde{U}}$ è un atlante per S e S è una superficie.

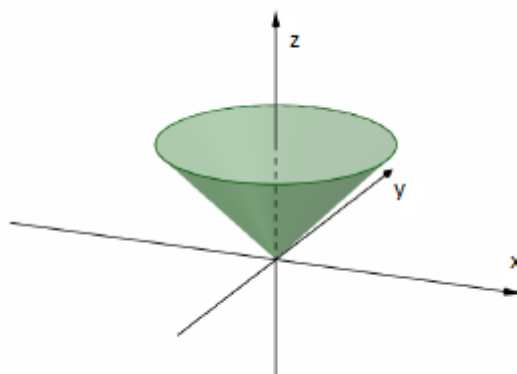


Figura 1.4: Esempio di un cono con vertice nell'origine.

Per mostrare la regolarità, calcoliamo σ_u e σ_θ :

$$\sigma_u = (\cos \theta, \sin \theta, 1) \quad \sigma_\theta = (-u \sin \theta, u \cos \theta, 0).$$

Notiamo che per $u = 0$, $\sigma_\theta = 0$ e quindi anche il prodotto vettoriale $\sigma_u \times \sigma_\theta = 0$. Dunque la superficie è regolare se escludiamo il punto $(0, 0, 0)$ chiamato vertice (che altro non è che l'origine della semiretta).

Definizione 3. Siano S_1 e S_2 due superfici regolari con atlanti \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 , rispettivamente. Diciamo che una funzione $f : S_1 \rightarrow S_2$ è liscia se per ogni $\sigma_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in \mathcal{A}_1 e $\sigma_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in \mathcal{A}_2 tali che $f(\sigma_1(U_1)) \cap \sigma_2(U_2) \neq \emptyset$ la composizione $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1$ è liscia come mappa tra aperti di \mathbb{R}^2 .

1.2 Prima forma fondamentale

Definizione 4. Spazio Tangente Sia S una superficie regolare e sia $\sigma : U \rightarrow W \cap S \subseteq \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione. Viene detto spazio tangente ad S in p lo $Span \{ \sigma_u(p), \sigma_v(p) \}$, dove $\sigma_u(p) = \sigma_u(u_0, v_0)$, $\sigma_v(p) = \sigma_v(u_0, v_0)$ con $\sigma(u_0, v_0) = p$. Lo spazio tangente ad S in p si indica con $T_p S$ e i suoi elementi si chiamano vettori tangenti. Inoltre poiché la regolarità assicura che è ben definito $\sigma_u \times \sigma_v$ allora possiamo definire il **vettore unitario normale** alla superficie in p :

$$\mathbf{N}_p = \frac{\sigma_u(p) \times \sigma_v(p)}{\| \sigma_u(p) \times \sigma_v(p) \|}. \quad (1.1)$$

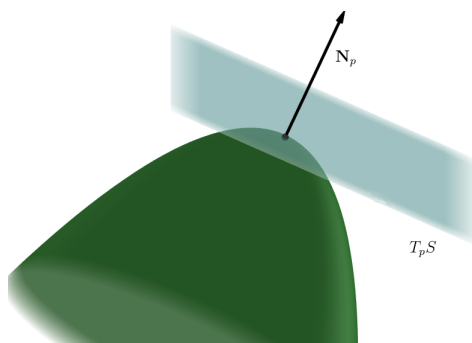


Figura 1.5: Piano tangente in un punto p e vettore normale.

Si consideri una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \in S$. Se denotiamo $\frac{d}{dt}$ con un punto, abbiamo $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$, cioè $\dot{\gamma}(t)$ appartiene a $T_{\gamma(t)} S$, per ogni $t \in (a, b)$. Viceversa è possibile mostrare che ogni vettore $\mathbf{v} \in T_p S$ è il vettore tangente ad una curva in S passante per p .

Sia S una superficie regolare, $\forall p \in S$ è definita la restrizione del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ di \mathbb{R}^3 in $T_p S$ che viene detto **prima forma fondamentale**; vediamo come si esprime in una parametrizzazione locale.

Sia $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di S in un suo punto p , un qualsiasi vettore tangente a S nel punto p può essere descritto come combinazione lineare di σ_u e σ_v , cioè preso $\mathbf{v} \in T_p S \implies \mathbf{v} = \lambda \sigma_u + \mu \sigma_v$, definiamo:

$$du : T_p S \rightarrow \mathbb{R}; \quad du(\mathbf{v}) = \lambda$$

$$dv : T_p S \rightarrow \mathbb{R}; \quad dv(\mathbf{v}) = \mu.$$

Ora usiamo il fatto che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una forma bilineare simmetrica:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p = \lambda^2 \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle + 2\lambda\mu \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle + \mu^2 \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle.$$

Tradizionalmente si usa indicare $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = ds^2$, $\|\sigma_u\|^2 = E$, $\|\sigma_v\|^2 = G$ e $\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = F$

e la prima forma fondamentale della superficie si scrive:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (1.2)$$

Quindi presa una superficie S , una parametrizzazione locale σ in p e (σ_u, σ_v) base ordinata di $T_p S$, la matrice della prima forma fondamentale sarà:

$$\begin{pmatrix} \|\sigma_u\|^2 & \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \\ \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle & \|\sigma_v\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

La prima forma fondamentale descrive le proprietà metriche delle superfici, aggiustando la lunghezza delle curve e considerando la superficie in cui esse vivono. Permette infatti di valutare la lunghezza di un tratto di curva sulla superficie. La scrittura della prima forma fondamentale nella forma (1.2)

varia al variare della parametrizzazione della superficie, ma la prima forma fondamentale dipende solo da p e da S .

Definizione 5. Differenziale di una mappa Siano S e \tilde{S} , due superfici e $f : S \rightarrow \tilde{S}$ una mappa liscia. Sia ora $\mathbf{w} \in T_p S$ un vettore tangente ad S in p e sia $\gamma : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \in S$ una curva tale che $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{w}$. Chiaramente $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ è una curva in \tilde{S} passante per $f(p)$ quando $t = t_0$; di conseguenza $\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\tilde{\gamma}}(t_0) \in T_{f(p)} \tilde{S}$. Con queste notazioni il differenziale $D_p f$ di f nel punto $p \in S$ è la mappa $D_p f : T_p S \rightarrow T_{f(p)} \tilde{S}$ tale che $D_p f(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{w}}$ per ogni vettore tangente $\mathbf{w} \in T_p S$.

Teorema 1. Se $f : S \rightarrow \tilde{S}$ è un'applicazione liscia tra superfici e $p \in S$, allora il differenziale $D_p f : T_p S \rightarrow T_{f(p)} \tilde{S}$ è una mappa lineare.

Definizione 6. Diffeomorfismo locale Siano S e \tilde{S} due superfici e sia $f : S \rightarrow \tilde{S}$ una mappa liscia. Allora f è un diffeomorfismo locale se per ogni $p \in S$, la mappa lineare $D_p f : T_p S \rightarrow T_{f(p)} \tilde{S}$ è invertibile.

Definizione 7. Lunghezza di una curva Sia S una superficie regolare e $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ una curva tale che $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ allora la lunghezza di γ sulla superficie è data da:

$$L_\gamma = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt \quad (1.3)$$

dove $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ e E, F, G i coefficienti della prima forma fondamentale (1.2).

Definizione 8. Area di una regione su una superficie Sia $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrizzazione di una superficie regolare e sia $D \subseteq U$ un compatto, allora

$$Area(\sigma(D)) = \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (1.4)$$

dove E, F, G sono i coefficienti della prima forma fondamentale (1.2).

1.2.1 Esempi di forme fondamentali

Esempio 5. Si consideri un **piano**:

$$\sigma(u, v) \rightarrow P_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

con \mathbf{a}, \mathbf{b} vettori ortogonali di norma 1 e $P_0 \in \mathbb{R}^3$. Si ha

$\sigma_u = \mathbf{a}$ e $\sigma_v = \mathbf{b}$, e quindi

$$E = \|\mathbf{a}\|^2 = 1, F = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0, G = \|\mathbf{b}\|^2 = 1$$

La prima forma fondamentale del piano è quindi $dv^2 + du^2$. Cerchiamo anche la prima forma fondamentale riparametrizzando in coordinate polari:

$$\tilde{\sigma}(\rho, \varphi) \rightarrow P_0 + \rho \cos \varphi \mathbf{a} + \rho \sin \varphi \mathbf{b}$$

con $\rho \in (0, \infty)$ e $\varphi \in (0, 2\pi)$ e otteniamo quindi $d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ che è l'espressione della metrica euclidea in coordinate polari.

Forma fondamentale di superfici di rivoluzione Una superficie di rivoluzione è una superficie ottenuta ruotando una curva γ intorno ad una retta detta generatrice.

Preso $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ una curva appartenente al piano xz parametrizzata a lunghezza d'arco, cioè con una parametrizzazione tale che $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, costruiamo la superficie di rivoluzione facendo ruotare γ intorno all'asse delle z . Possiamo parametrizzare la superficie ottenuta in questo modo:

$$\sigma(t, \varphi) = (x(t) \cos \varphi, x(t) \sin \varphi, z(t))$$

con $\varphi \in [0, 2\pi]$ e $t \in (a, b)$.

Inoltre assumiamo $x(t) > 0$ per evitare autointersezioni nella rotazione. Si può dimostrare che la superficie così ottenuta è regolare. Calcoliamone i

coefficienti della prima forma fondamentale:

$$\sigma_t = (\dot{x}(t) \cos \varphi, \dot{x}(t) \sin \varphi, \dot{z}(t)) \quad \sigma_\varphi = (-x(t) \sin \varphi, x(t) \cos \varphi, 0)$$

$$\Rightarrow E = \|\sigma_t\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1, \quad F = \langle \sigma_t, \sigma_\varphi \rangle = 0, \quad G = \|\sigma_\varphi\|^2 = x(t)^2$$

Allora la prima forma fondamentale per le superfici di rotazione sarà:

$$dt^2 + x^2(t)d\varphi^2$$

Scriviamo quindi la sfera, il cono e il cilindro visti nella Sezione 1.1 come superfici di rotazione per trovare la prima forma fondamentale:

$$1. \text{ **Sfera** } \gamma: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ z(t) = \sin t \end{cases} \Rightarrow \text{la prima forma fondamentale è } dt^2 + \cos^2 t d\varphi^2$$

$$2. \text{ **Cilindro** } \gamma: \begin{cases} x(t) = 1 \\ z(t) = t \end{cases} \Rightarrow \text{la prima forma fondamentale è } dt^2 + d\varphi^2$$

$$3. \text{ **Cono** } \gamma: \begin{cases} x(t) = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ z(t) = \frac{t}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \text{la prima forma fondamentale è } dt^2 + \frac{t^2}{2} d\varphi^2$$

Osserviamo come piano e cilindro, quando correttamente parametrizzati, abbiano la stessa prima forma fondamentale. La ragione geometrica che spiega questo fatto è che il piano e il cilindro hanno la stessa metrica, infatti se prendiamo un foglio di carta che possiamo immaginare come una parte di piano, questo può essere arrotolato su se stesso per formare un cilindro senza rompere il foglio. Inoltre se disegnassimo una curva sul foglio e lo arrotolassimo otterremo comunque la stessa curva sul cilindro senza deformazioni. Analogamente anche il cono ha la stessa prima forma fondamentale di un piano parametrizzato in coordinate polari e anche in questo caso possiamo avvalerci

dell'esperienza empirica ritagliando la superficie di un cono per svilupparla senza distorsioni su un piano.

Al contrario il piano e la sfera hanno due prime forme fondamentali differenti e, come suggerito dall'esperienza non è possibile ricoprire un corpo sferico con un foglio senza raggrinzirlo e stracciarlo. Più precisamente:

Definizione 9. Isometria locale Consideriamo S_1 e S_2 due superfici e $f : S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione liscia, allora f è detta isometria locale se ogni curva su S_1 viene mandata su una curva della stessa lunghezza in S_2 . Se esiste una isometria locale $f : S_1 \rightarrow S_2$ diciamo che S_1 e S_2 sono localmente isometriche.

Chiaramente due superfici che hanno la stessa prima forma fondamentale sono localmente isometriche fra loro ed è vero anche il contrario.

Teorema 2. Un'applicazione liscia $f : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria locale se e solo se la prima forma fondamentale $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ su $T_p S_1$ coincide con il pull-back $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ in $T_p S_1$ della prima forma fondamentale $\langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)}$ in $T_{f(p)} S_2$, cioè $f^* \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle D_p f(\mathbf{v}), D_p f(\mathbf{w}) \rangle_{f(p)}$.

Definizione 10. Prese due superfici S_1 e S_2 una mappa conforme $f : S_1 \rightarrow S_2$ è un diffeomorfismo locale tale che, se γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$ sono due qualsiasi curve in S_1 che si intersecano nel punto $p \in S_1$ e se γ_2 e $\tilde{\gamma}_2$ sono le loro immagini tramite f , l'angolo di intersezione fra γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$ in p è uguale all'angolo dell'intersezione tra γ_2 e $\tilde{\gamma}_2$ in $f(p)$.

Teorema 3. Un diffeomorfismo locale $f : S_1 \rightarrow S_2$ è conforme se e solo se esiste una funzione $\lambda : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$f^* \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \lambda(p) \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p$$

per ogni $p \in S_1$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S_1$.

Non è difficile da osservare che se λ esiste è necessariamente liscia.

1.3 Geodetiche

In una visione intrinseca della superficie, cioè vista da un essere che vive e si muove vincolato ad essa, le geodetiche appaiono come percorsi dritti. Mentre in una visione estrinseca, cioè vedendo la superficie nella sua interezza e considerando la terza dimensione, le geodetiche appaiono come curve. Vi è un interessante interpretazione meccanica di geodetica: una particella che si muove su una superficie e non soggetta ad alcuna forza eccetto quella che agisce perpendicolarmente e la mantiene sulla superficie, si muoverà lungo una geodetica. Questo perché la seconda legge di Newton afferma che la forza sulla particella è parallela alla sua accelerazione che sarà quindi perpendicolare alla superficie.

Definizione 11. Una curva γ su una superficie S è detta geodetica se $\gamma''(t)$ è 0 o perpendicolare al piano tangente sulla superficie nel punto $\gamma(t)$, cioè parallela al vettore normale unitario, per ogni valore di t .

Si può dimostrare che le geodetiche minimizzano la distanza tra due punti in un percorso sulla superficie.

Teorema 4. Una curva γ su una superficie S è una geodetica se e solo se, per ogni parte $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ di γ contenuta in una parametrizzazione σ di S , sono soddisfatte le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2) \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2) \end{cases} \quad (1.5)$$

dove $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ è la prima forma fondamentale di S in σ . Queste equazioni sono chiamate equazioni geodetiche.

1.3.1 Curve geodetiche su superfici

Esempio 6. Possiamo quindi determinare le geodetiche della sfera unitaria S^2 risolvendo le equazioni geodetiche (1.5). Per la parametrizzazione di latitudine e longitudine vista nell'Esempio 3:

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

la prima forma fondamentale della sfera è $d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2$. Possiamo assumere che la curva $\gamma(t) = \sigma(\theta(t), \varphi(t))$ sia parametrizzata a lunghezza d'arco, quindi:

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta = 1,$$

e se γ è una geodetica dalla seconda equazione delle (1.5) possiamo dire che:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \cos^2 \theta) = 0,$$

allora

$$\dot{\varphi} \cos^2 \theta = \omega,$$

dove ω è una costante. Perciò se $\omega = 0$ allora $\dot{\varphi} = 0$ e quindi φ è costante e γ è un meridiano. Assumiamo ora che $\dot{\varphi} \neq 0$. La condizione del vettore unitario ci dà:

$$\dot{\theta}^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\cos^2 \theta},$$

quindi lungo la geodetica avremo:

$$\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\varphi}^2} = \cos^2 \theta (\omega^{-2} \cos^2 \theta - 1).$$

Allora

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{\omega^{-2} \cos^2 \theta - 1}},$$

dove φ_0 è una costante. L'integrale può essere calcolato con la sostituzione $u = \tan \theta$:

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{\omega^{-2} - 1 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{\omega^{-2} - 1}} \right),$$

e quindi $\tan \theta = \pm \sqrt{\omega^{-2} - 1} \sin(\varphi - \varphi_0)$.

Questo implica che le coordinate $x = \cos \theta \cos \varphi, y = \cos \theta \sin \varphi$ e $z = \sin \theta$ di $\gamma(t)$ soddisfano l'equazione

$$z = ax + by,$$

dove $a = \mp \sqrt{\omega^{-2} - 1} \sin \varphi_0$, e $b = \pm \sqrt{\omega^{-2} - 1} \cos \varphi_0$. Questo ci mostra che γ è contenuta in un'intersezione di S^2 con un piano passante per l'origine. Allora in ogni caso γ è parte di un cerchio massimo. Possiamo intuire anche

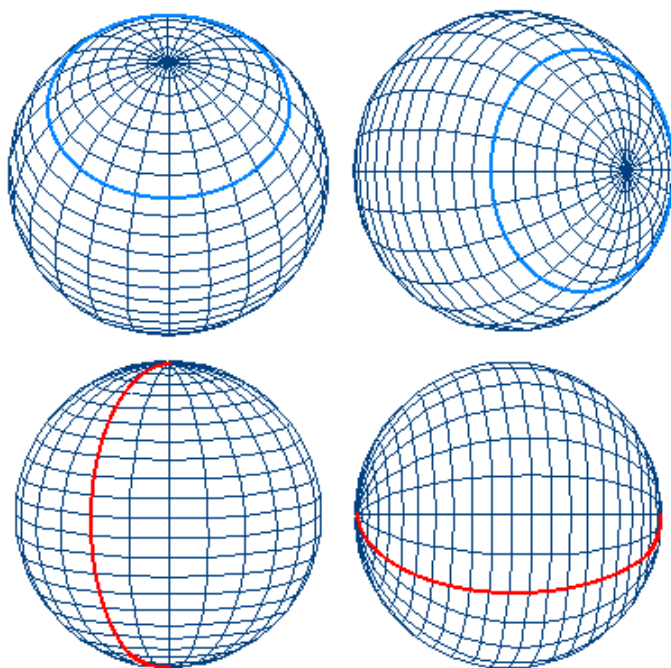


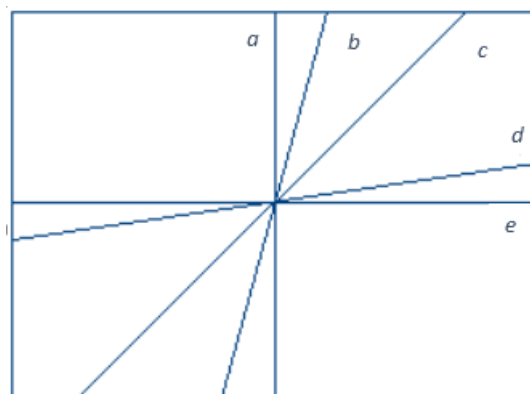
Figura 1.6: Percorso geodetico (in rosso) e percorso non geodetico (in azzurro).

che le geodetiche su S^2 sono archi di circonferenze massime in modo meccanico. Consideriamo di muoverci con un carrello a due ruote sulla superficie

della sfera, se ci muovessimo sul piano lungo un percorso rettilineo, la ruota di destra percorrerebbe la stessa distanza della ruota di sinistra, mentre ciò non accadrà in un tratto di curva. Analogamente se spingessimo il carrello sulla superficie di una sfera, lungo una circonferenza massima, le due ruote percorrerebbero la stessa distanza mentre ciò non accadrebbe se spingessimo il carrellino lungo un'altra curva (si veda Figura 1.6).

Esempio 7. Da quanto osservato dopo la Definizione 11 si intuisce subito come nel piano le curve che minimizzano la distanza e quindi le geodetiche siano le rette.

Esempio 8. Per trovare le geodetiche sul cilindro, ricordiamo dalla Definizione 9 e dal Teorema 2 che un cilindro S è localmente isometrico ad un piano, avendo la medesima prima forma fondamentale. Infatti, un'isometria locale è quella che prende il punto $(u, v, 0)$ del piano xy e lo manda nel punto $(\cos u, \sin u, v) \in S$. Per trovare le geodetiche su S , dobbiamo trovare le immagini mediante tale mappa di tutte le linee rette sul piano. Disegnamone allora alcune:



Immaginando ora di arrotolare il piano come fosse un foglio di carta troviamo le rispettive immagini delle geodetiche sul cilindro:

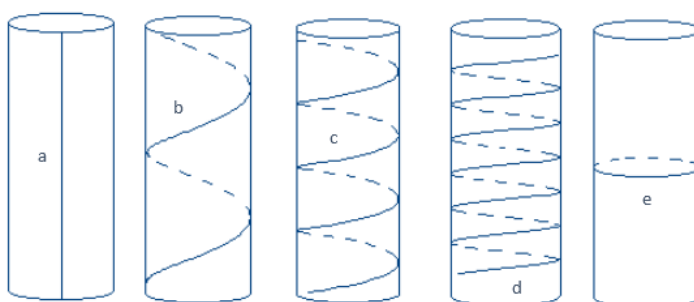


Figura 1.7: Geodetiche sul cilindro.

Allora le geodetiche sul cilindro sono archi di circonferenza, parti di eliche cilindriche e segmenti verticali.

Esempio 9. Sul cono possiamo procedere allo stesso modo disegnando una linea retta su un pezzo di piano per poi arrotolarlo per formare un cono.

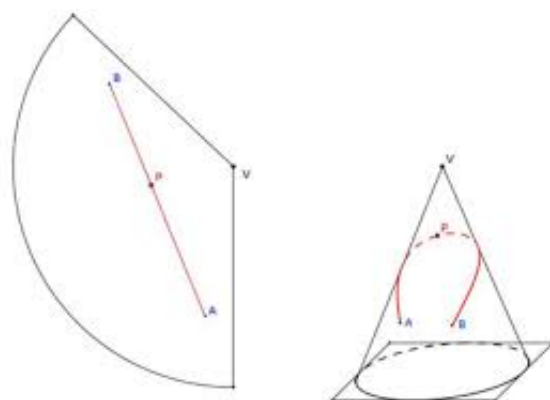


Figura 1.8: Esempio di geodetica sul cono.

Le geodetiche su un cono sono i tratti di "cravatta" e porzioni di rette contenute nel cono.

Capitolo 2

Modelli di proiezione cartografica

Per la stesura del Capitolo 2 le fonti utilizzate sono [2], [4], le immagini delle mappe sono state prese da [5]. Mentre per le sezioni delle proiezioni è stato usato il software GeoGebra.

Per costruire carte geografiche ossia proiettare la superficie della terra, che approssimeremo ad una sfera, su un piano sono state studiate numerose mappe differenti. I metodi utilizzati sono basati sulla strategia di proiettare tutti i punti della superficie terrestre su un piano o una superficie localmente isometrica ad esso, come il cilindro o il cono. Nel capitolo precedente abbiamo visto che non esiste un'isometria locale tra sfera e piano. Le due superfici infatti hanno la prima forma fondamentale diversa. Perciò ogni tentativo di rappresentare la terra su un piano sarà sempre soggetto a un certo tipo di errore o deformazione.

Dato che approssimeremo la terra ad una sfera, in questo capitolo per descrivere le coordinate di un punto sulla superficie terrestre e quindi la sua proiezioni useremo le coordinate terrestri, introdotte nel Esempio 3 del Ca-

pitolo 1, richiamiamole brevemente. Conoscendo la misura del raggio della terra, per posizionare un punto P sul globo terrestre abbiamo bisogno di un sistema di riferimento. Questo è dato da latitudine e longitudine. La latitudine misura l'angolo sotteso all'arco di meridiano compreso tra l'Equatore e il parallelo passante per il punto P , mentre la longitudine misura l'angolo sotteso all'arco di parallelo compreso tra il meridiano di Greenwich e il meridiano passante per il punto P . Indicheremo la latitudine con β e la longitudine con λ .

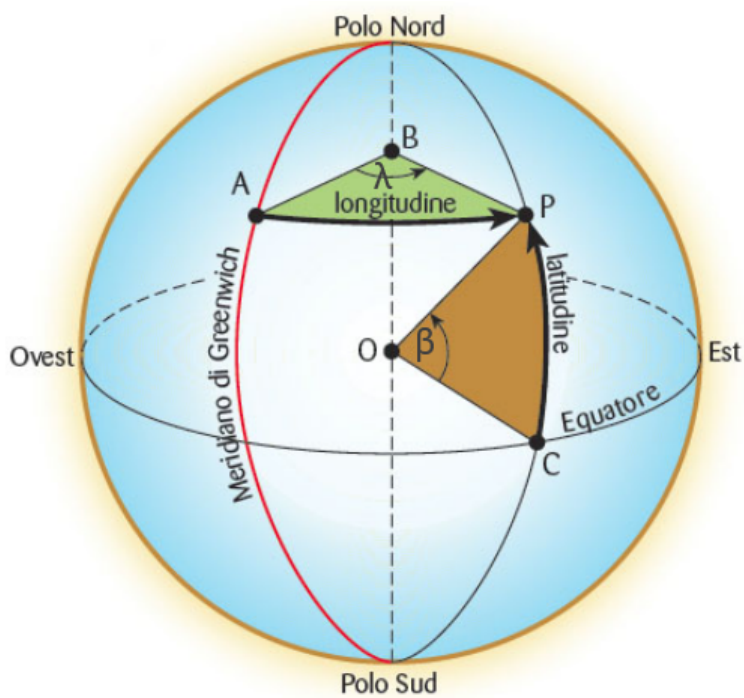


Figura 2.1: Coordinate terrestri.

Lossodromiche e ortodromiche

Prima di descrivere le principali proiezioni terrestri diamo alcune nozioni riguardo ai percorsi sulla terra. Il percorso più breve fra due punti sulla superficie terrestre, ossia la geodetica, è detto **ortodromia**. Se consideriamo due punti A e B sulla terra il percorso ortodromico che li congiunge sarà l'arco di circonferenza massima passante per essi. Queste curve da una parte minimizzano la distanza da percorrere, dall'altra risultano difficilmente seguibili, in quanto non è possibile usare una bussola per percorrerli, infatti l'angolo fra la rotta e i paralleli che si intersecano via via varia continuamente. Al contrario le linee **lossodromiche** mantengono un angolo sempre costante fra la rotta percorsa e i paralleli che si attraversano. Questa peculiarità le ha rese molto note per chiunque volesse intraprendere un viaggio soprattutto nei tempi passati, in quanto la direzione ad angolo costante tracciata dalla bussola rispecchia appunto una lossodromia.

2.0.1 Proprietà e proiezioni

Abbiamo capito come ogni mappa sia sempre soggetta a qualche tipo di distorsione rispetto alla realtà e quindi è possibile conservare solo alcune peculiarità del mondo reale. Elenchiamo quindi le proprietà di una proiezione:

1. **Equivalenza:** conserva il rapporto fra aree reali e aree sulla carta, cioè le superfici sono in scala.
2. **Conformità o isogonia:** conserva gli angoli tra due direzioni qualsiasi e quindi vengono mantenute anche le forme degli oggetti rappresentati.
3. **Lossodromia:** trasforma le linee lossodromiche in rette.

4. **Geodesia**: trasforma geodetiche sulla sfera (ortodromie) in geodetiche sul piano (rette).

Inoltre le proiezioni cartografiche teorizzate nei vari secoli possono essere raggruppate in 3 macro categorie:

- Proiezioni cilindriche
- Proiezioni coniche
- Proiezioni polari (prospettiche)

Ogni tipo di proiezione genera una mappa cartografica differente e, a seconda dell'uso, risulta più utile utilizzarne una piuttosto che un'altra.

2.1 Proiezioni cilindriche

Le proiezioni cilindriche sono ottenute circoscrivendo un cilindro alla sfera terrestre e proiettando ogni punto su di esso. La tangenza del cilindro può avvenire in vari modi come rappresentato in Figura 2.2:

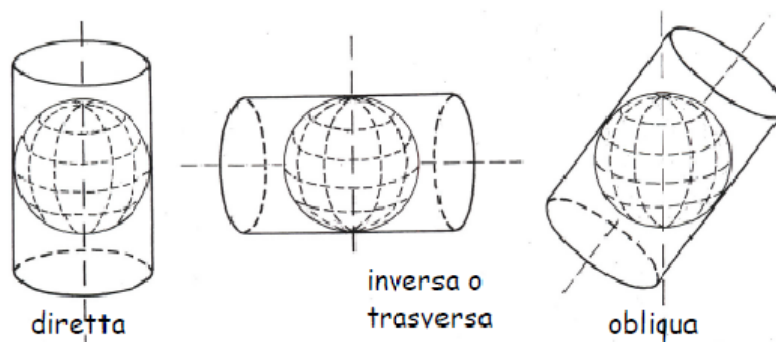


Figura 2.2: Modalità di tangenza del cilindro.

Nelle proiezioni cilindriche, meridiani e paralleli formano un reticolo ortogonale. Le più celebri sono la storica proiezione di Mercatore e la più recente proiezione di Gall-Peters.

2.1.1 Proiezione di Mercatore

Teorizzata e realizzata dal tedesco Gerard de Cremer (nome poi latinizzato in Gerardus Mercator) nel 1569, la proiezione di Mercatore si basa sulla proiezione cilindrica centrale, alla quale vengono apportate alcune modifiche in modo da ridurre notevolmente lo schiacciamento nelle zone polari. Per costruire la mappa, si considera un cilindro tangente in modo diretto alla sfera, i punti della sfera vengono proiettati mediante semirette uscenti dall'origine della sfera (vedi Figura 2.3).

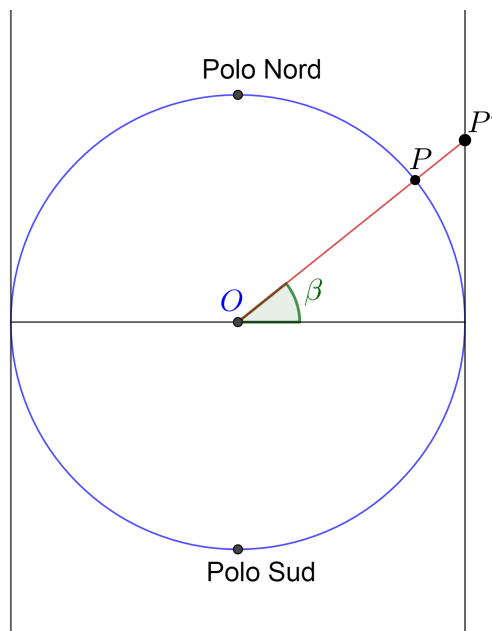


Figura 2.3: Sezione della proiezione di Mercatore.

La proiezione di Mercatore si basa sulle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = r\lambda \\ y' = r \tan \beta \end{cases} . \quad (2.1)$$

La proiezione così ottenuta tuttavia non è conforme, infatti i paralleli subiscono una dilatazione di fattore $\frac{1}{\cos \beta}$ e i meridiani un ingrandimento di fattore $\frac{1}{\cos^2 \beta}$. Per ottenere una proiezione conforme, Mercatore decise di proporre che alla latitudine β anche i meridiani subissero il medesimo ingrandimento dei paralleli.

Per fare ciò si deve risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy'}{d\beta} = \frac{r}{\cos \beta}. \quad (2.2)$$

E integrando rispetto a β otteniamo:

$$y' = r \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\cos \beta}. \quad (2.3)$$

Le equazioni della proiezione di Mercatore saranno quindi:

$$\begin{cases} x' = r\lambda \\ y' = r \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\cos \beta} \end{cases} . \quad (2.4)$$

La proiezione così ottenuta è **conforme**. Possiamo dimostrarlo con l'aiuto della geometria differenziale mostrando come gli elementi d'arco della sfera e dalla proiezione siano proporzionali. Chiamiamo ds^2 l'elemento d'arco sulla sfera terrestre che mediante la prima forma fondamentale e le coordinate terrestri possiamo scrivere come:

$$ds^2 = r^2 d\beta^2 + r^2 \cos^2 \beta d\lambda^2$$

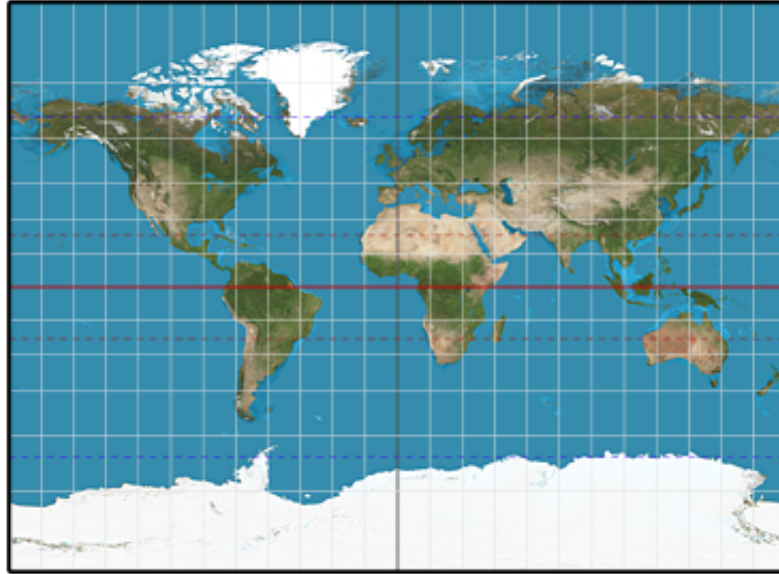


Figura 2.4: Carta di Mercatore.

Ora denotiamo con ds_m^2 l'elemento d'arco della proiezione di Mercatore che possiamo calcolare partendo dalla prima forma fondamentale del piano, vista nell'Esempio 5:

$$du^2 + dv^2$$

dove a u e v sostituiamo x' e y' , perciò derivando le Equazioni (2.4) troviamo:

$$ds_m^2 = r^2 d\lambda^2 + \frac{r^2 d\beta^2}{\cos^2 \beta}$$

risulta quindi che

$$ds_m^2 = \frac{ds^2}{\cos^2 \beta}.$$

La carta di Mercatore, essendo conforme, ha anche la proprietà di **lossodromia**. Questa peculiarità l'ha resa molto celebre e utile per i marinai nella traccia delle rotte di viaggio. Tuttavia, come visto, la mappa presenta una deformazione delle superfici che aumenta progressivamente all'allontanarsi dall'equatore.

2.1.2 Proiezione di Gall-Peters

La proiezione di Gall-Peters fu realizzata dai cartografi James Gall e Arno Peters nel 1973 in contrapposizione alla carta di Mercatore.

Per costruire la mappa occorre circoscrivere la terra ad un cilindro tangente all'equatore, in seguito fissare un valore di latitudine specifica β_s sulla superficie terrestre. Viene costruito poi un cilindro interno in modo che intersechi la sfera nei punti di latitudine β_s come rappresentato in Figura 2.5; per ottenere la proiezione di un punto P , troviamo Q proiettando P sul cilindro più interno. Viene poi tracciata la semiretta che parte da O , passa per Q e interseca il cilindro esterno in R . Proiettando R sul cilindro interno trovo P' che diremo immagine di P .

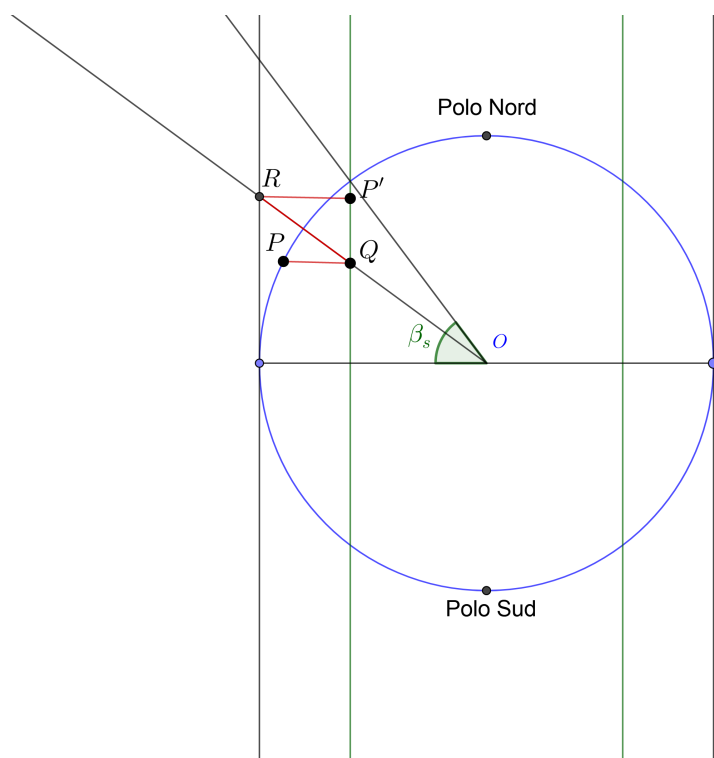


Figura 2.5: Sezione della proiezione di Gall-Peters.

Le equazioni della proiezione sono:

$$\begin{cases} x' = r\lambda \cos \beta_s \\ y' = r \frac{\sin \beta}{\cos \beta_s} \end{cases} \quad (2.5)$$

La proiezione di Gall-Peters usa come latitudine di riferimento $\beta_s = 45^\circ$.

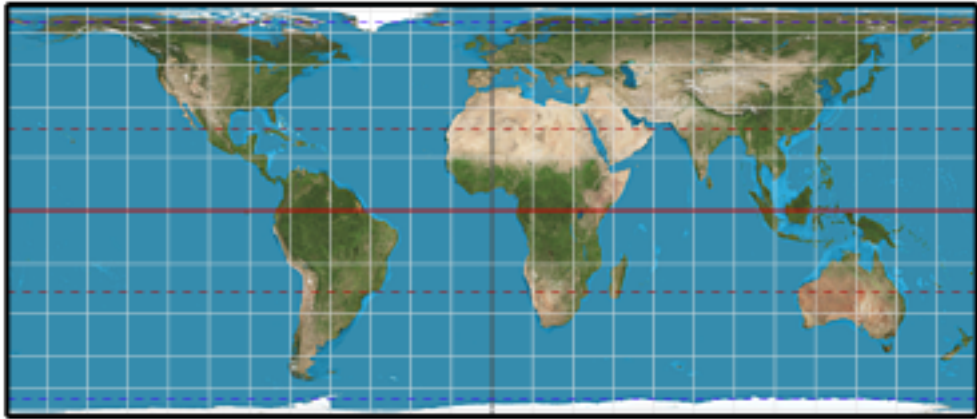


Figura 2.6: Carta di Gall-Peters.

La proiezione di Gall-Peters è una proiezione **equivalente**, cioè consente una riproduzione delle aree, senza distorsioni di esse. Per dimostrarlo consideriamo il segmento d'area infinitesimo ripreso dalla Formula (1.4):

$$dA = \sqrt{EG - F^2} d\beta d\lambda.$$

Calcoliamo i coefficienti E_p , F_p e G_p del piano di proiezione e confrontiamoli con quelli della sfera. Per fare ciò, sostituiamo alla prima forma fondamentale del piano $du^2 + dv^2$ le coordinate x' e y' e derivando le Equazioni (2.5) troviamo:

$$ds_p^2 = r^2 \cos^2 \beta_s d\lambda^2 + r^2 \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta_s} d\beta^2.$$

Allora $E_p = r^2 \cos^2 \beta_s$, $F_p = 0$ e $G_p = r^2 \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \beta_s}$, ricordando i coefficienti della prima forma fondamentale della sfera ($E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 \beta$), abbiamo che:

$$EG - F^2 = E_p G_p - F_p^2 = r^4 \cos^2 \beta$$

quindi la proiezione è equivalente. Possiamo anche notare come la proiezione non sia conforme, infatti ds_p^2 non è proporzionale a ds^2 .

Questa mappa ha assunto anche un grande valore geopolitico, mettendo in discussione la visione eurocentrica del mondo diffusa fino alle metà del XX secolo, dando maggior risalto ai continenti storicamente ritenuti più poveri e subordinati all'occidente. In Figura 2.7 riportiamo la mappa di Mercatore e quella di Gall-Peters sovrapposte.

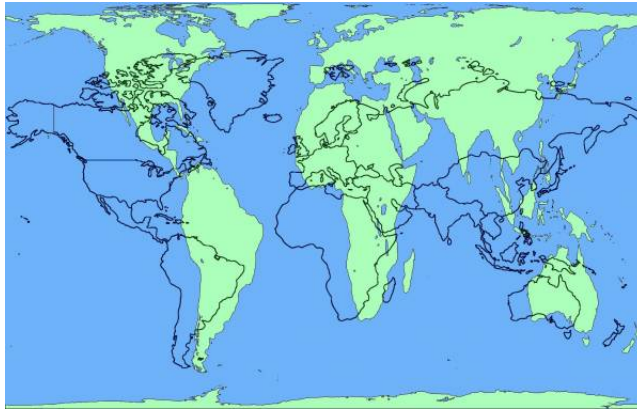


Figura 2.7: Proiezione di Mercatore (in azzurro) e Peters (in verde) a confronto.

2.2 Proiezioni coniche

Le proiezioni coniche si ottengono circoscrivendo un cono alla sfera e proiettando su di esso ogni punto a partire dal centro della terra. Il cono circoscritto può essere tangente alla terra o secante ad essa.

Nelle proiezioni coniche i meridiani sono rappresentati da linee rette uscenti dal polo, mentre i paralleli sono cerchi concentrici intorno al polo. Le varia-

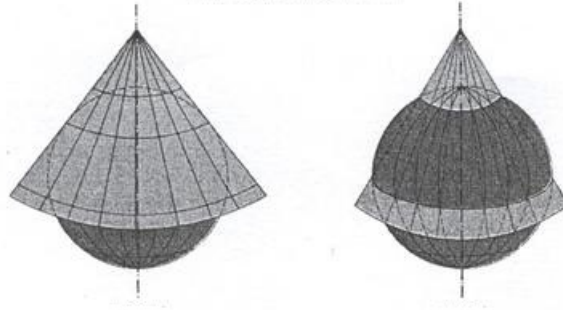


Figura 2.8: Modalità di avvolgimento della terra a un cono; tangente nella figura a sinistra, secante in quella a destra.

zioni riguardano la scelta dei paralleli di tangenza o secanza e la spaziatura fra essi. La più utilizzata è la proiezione conica di Lambert.

2.2.1 Proiezione conica di Lambert

La proiezione conica di Lambert viene costruita considerando un cono secante alla sfera terrestre, in modo che lo intersechi in due paralleli di riferimento. Chiamiamo β_1 e β_2 la latitudine dei due paralleli di secanza del cono, λ_0 la longitudine di riferimento (meridiano di Greenwich) e β_0 la latitudine di riferimento (equatore).

Le equazioni della proiezione di Lambert si definiscono come segue:

$$\begin{cases} x' = \rho \sin[n(\lambda - \lambda_0)] \\ y' = \rho_0 - \rho \cos[n(\lambda - \lambda_0)] \end{cases} \quad (2.6)$$

dove:

$$n = \frac{\ln(\cos \beta_1 \sec \beta_2)}{\ln[\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta_2) \cot(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta_1)]}$$

$$\rho = F \cot^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta\right)$$

$$F = \frac{\cos \beta_1 \tan^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta_1\right)}{n}$$

$$\rho_0 = F \cot^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\beta_0\right).$$

La proiezione di Lambert così costruita è **conforme**. Questa mappa è frequentemente utilizzata in aeronautica, infatti approssima con un segmento rettilineo un percorso ortodromico. Inoltre se il tratto da percorrere è breve, e comunque fino a quando la differenza fra l'angolo di rotta iniziale e quello finale non supera i 3° circa, il tratto rettilineo fra i due punti si può ritenere coincidente con il corrispondente arco di lossodromia; si assume allora come angolo di rotta quello riferito al meridiano corrispondente alla longitudine media tra i due punti.

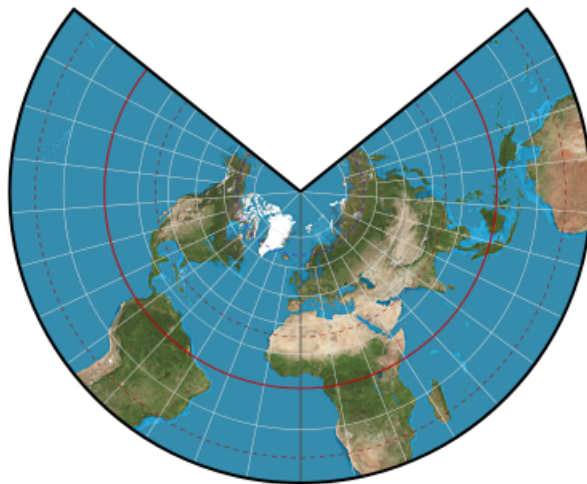


Figura 2.9: Proiezione conforme di Lambert.

2.3 Proiezioni polari

Le proiezioni polari o prospettiche sono ottenute mediante l'ausilio di un piano tangente alla sfera terrestre, su cui vengono proiettati tutti i punti del globo a partire da un punto di osservazione. Le proiezioni più utilizzate sono quella stereografica e quella centrografica.

2.3.1 Proiezione stereografica

La proiezione stereografica si ottiene proiettando i punti della sfera dal Polo Nord ad un piano tangente al Polo Sud.

Le equazioni della proiezione sono:

$$\begin{cases} x' = 2r \tan(\alpha) \cos \lambda \\ y' = 2r \tan(\alpha) \sin \lambda \end{cases} \quad (2.7)$$

con $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$, infatti l'angolo che sottende l'arco fra il Polo Sud e P misura $\frac{\pi}{2} + \beta$ e α è l'angolo alla circonferenza corrispondente (si veda Figura 2.10).

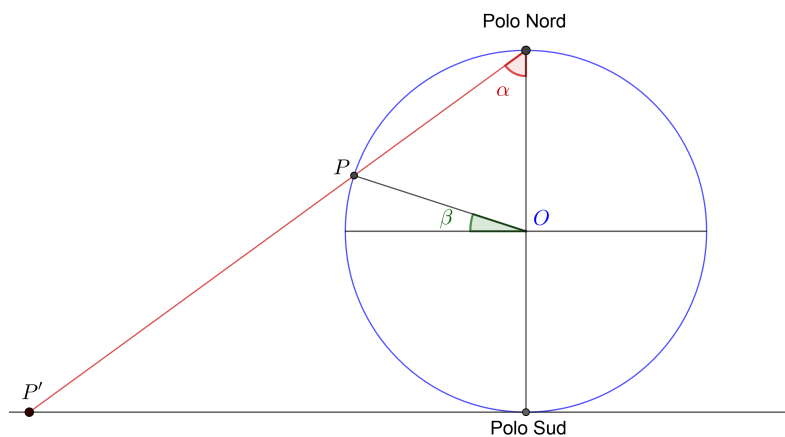


Figura 2.10: Sezione della proiezione stereografica

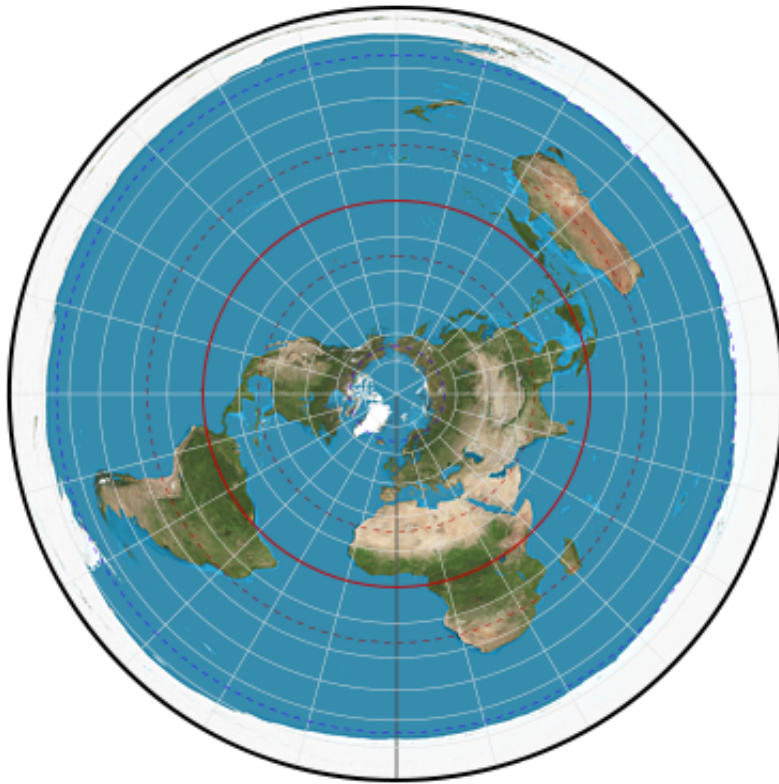


Figura 2.11: Proiezione stereografica.

La proiezione così ottenuta è una proiezione **conforme** e ha la speciale proprietà di trasformare cerchi in cerchi. Vediamone la dimostrazione come nel caso di Mercatore.

$$ds^2 = r^2 d\beta^2 + r^2 \cos^2 \beta d\lambda^2,$$

per trovare il segmento ds_s^2 della proiezione stereografica utilizziamo la prima forma fondamentale del piano in coordinate polari vista nell'Esempio 5:

$$ds_s^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

Possiamo intuire dalla Figura 2.10 che nel piano di proiezione $\rho = 2r \tan(\alpha)$ e $\varphi = \lambda$, allora:

$$ds_s^2 = \frac{r^2}{\cos^4 \alpha} d\beta^2 + 4r^2 \tan^2 \alpha d\lambda^2.$$

Ricordando come

$$4 \tan^2 \alpha = 4 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^4 \alpha} (4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) = \frac{1}{\cos^4 \alpha} (2 \cos \alpha \sin \alpha)^2 =$$

$$\frac{\sin^2(2\alpha)}{\cos^4 \alpha} = \frac{\sin^2(\beta + \frac{\pi}{2})}{\cos^4 \alpha} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^4 \alpha},$$

allora

$$ds_s^2 = \frac{r^2}{\cos^4 \alpha} d\beta^2 + r^2 \frac{\cos^2 \beta}{\cos^4 \alpha} d\lambda^2 = \frac{r^2}{\cos^4 \alpha} (d\beta^2 + \cos^2 \beta d\lambda^2).$$

Quindi

$$ds_s^2 = \frac{ds^2}{\cos^4 \alpha}.$$

2.3.2 Proiezione centrografica

La proiezione centrografica è ottenuta proiettando i punti della sfera dal centro di essa sul piano tangente posto in uno dei due poli, si veda Figura 2.12.

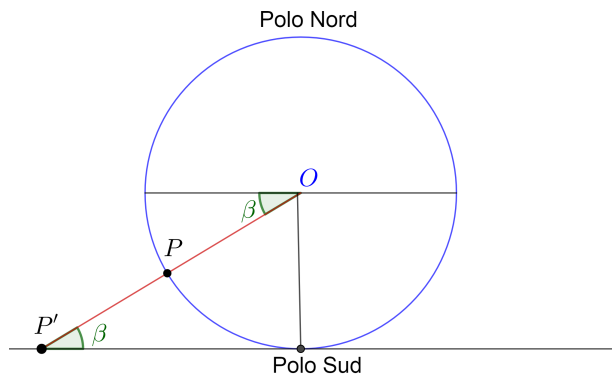


Figura 2.12: Sezione della proiezione centrografica.

Le equazioni della proiezione sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{r}{\tan \beta} \cos \lambda \\ y' = \frac{r}{\tan \beta} \sin \lambda \end{cases} \quad (2.8)$$

Come si evince dalle equazioni la proiezione permette di rappresentare solo un emisfero terrestre in quanto β dovrà essere diverso da $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$.

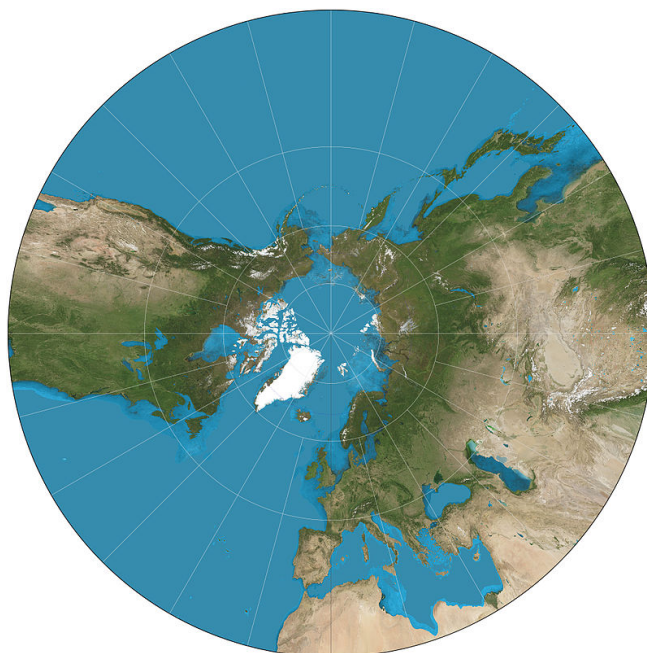


Figura 2.13: Proiezione centrografica dell'emisfero Boreale.

La proiezione centrografica è una proiezione **geodetica** cioè trasforma le curve geodetiche sulla sfera (ortodromie) ovvero circonferenza massime, in geodetiche sul piano, ovvero in rette.

Infatti qualsiasi piano che passa per il centro della sfera determina una circonferenza massima e interseca il piano di proiezione lungo una retta. Viceversa, presa una qualsiasi retta sul piano e considerato il fascio di piani passante per essa, consideriamo tra quelli il piano passante per il centro della sfera; questo, appunto, la taglierà lungo un cerchio massimo. Quindi nella carta

centrografica le linee lossodromiche sono rappresentate come una linee curve che tagliano i meridiani con angolo costante, mentre le ortodromiche come segmenti rettilinei.

Bibliografia

- [1] S. Cohn-Vossen and D. Hilbert. *Geometria intuitiva*. Universale Bollati Boringhieri, 2001.
- [2] C. Dané, F. Arzarello, L. Lovera, M. Mosca, N. Nolli, and A. Ronco. *Dalla geometria di Euclide alla geometria dell'Universo*. Springer, 2012.
- [3] A. Pressley. *Elementary differential geometry*. Springer, 2012.
- [4] <http://dm.unife.it/matematicainsieme/matcart/distors.htm>.
- [5] <https://www.mapmathematics.com/Index.php>.