

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Realizzazione di macchine termiche basate su sistemi a due livelli

**Relatore:**  
Prof. Marco Prevedelli

**Presentata da:**  
Francesco Cangiotti

Anno Accademico 2018/2019

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Fondamenti teorici</b>	<b>5</b>
1.1 Matrice densità . . . . .	5
1.1.1 Misura di osservabili e informazioni . . . . .	6
1.2 Meccanica quantistica statistica . . . . .	7
1.2.1 Lavoro in meccanica quantistica . . . . .	8
<b>2 Schema delle macchine termiche</b>	<b>10</b>
2.1 Macchina termica ed estrazione del lavoro . . . . .	10
2.1.1 Composizione della macchina termica . . . . .	11
2.1.2 La seconda legge della termodinamica . . . . .	12
2.1.3 Estrazione del lavoro . . . . .	13
2.1.4 L'efficienza limite di Carnot . . . . .	15
2.2 Costruzione della sorgente fredda . . . . .	16
2.2.1 Primo modello: due qubit . . . . .	16
2.2.2 Secondo modello: un qubit e un qutrit . . . . .	20
2.2.3 Terzo modello: un singolo qutrit . . . . .	20
2.3 Trappole di Paul . . . . .	21
<b>3 Risultati sperimentali</b>	<b>24</b>
3.1 Costruzione della macchina termica . . . . .	24
3.2 Riscaldamento e raffreddamento dello ione . . . . .	26
3.3 Potenza emessa ed efficienza . . . . .	28

Appendice	32
Bibliografia	33

# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è illustrare il funzionamento di macchine termiche quantistiche basate su sistemi a due livelli, mostrando gli schemi teorici che ne permettono la creazione e illustrandone i risultati sperimentali.

Una macchina termica è un dispositivo ciclico collegato ad una sorgente calda e ad una fredda, in grado di convertire calore in energia meccanica; la schematizzazione classica di tali dispositivi è la macchina di Carnot che costituisce un punto di partenza per le macchine quantistiche: utilizzando dei sistemi quantomeccanici a due livelli (solitamente degli ioni) e sfruttando le leggi della meccanica quantistica si riuscirà in linea teorica a raggiungere il limite di efficienza dato dal teorema di Carnot con un margine di errore arbitrariamente piccolo, inoltre si mostrerà che i principi classici della termodinamica non perdono la loro validità nell'ambito microscopico. L'idea dietro le macchine termiche quantistiche è di utilizzare la transizione tra i due stati di uno ione a due livelli per trasferire energia ad un sistema esterno (spesso un oscillatore armonico), facendo interagire lo ione con una sorgente fredda e una calda per permettergli di assorbire energia dalla prima e di ritornare alla posizione di equilibrio a bassa temperatura grazie alla seconda.

Macchine di questo tipo risultano interessanti in quanto consentono di manipolare energie a scale nanoscopiche interagendo con i più piccoli costituenti della realtà e studiando in modo diretto le caratteristiche e le leggi che governano la meccanica quantistica; attualmente tramite le macchine termiche si osservano le interazioni tra un singolo sistema e sorgenti termiche, e quindi si riesce a definire il significato delle leggi termodinamiche nella meccanica del singolo ione, cosa assolutamente non banale in quanto classicamente la termodinamica è sempre stata definita per sistemi macroscopici.

Nella pratica macchine in grado di assorbire il calore sono utilizzate principalmente

nel raffreddamento di sistemi quantistici e di conseguenza in dispositivi che richiedono l'utilizzo di particelle fredde.

In questa tesi sono raccolte informazioni derivanti principalmente da diversi articoli sulle macchine termiche ([1], [2] e [3]) in cui si illustrano gli aspetti teorici per la costruzione di questi dispositivi e i risultati sperimentali che si sono riusciti ad ottenere.

La prima parte dell'elaborato si concentrerà sui principi fisici che stanno alla base delle macchine termiche quantistiche, i quali discendono soprattutto dalla meccanica statistica e termodinamica. Nella seconda parte si dirà in che modo tali principi possono essere applicati nella progettazione delle macchine termiche, e si presenteranno diversi modelli per la sorgente fredda che risulta essere di particolare interesse in quanto anch'essa può esser costruita utilizzando pochi sistemi a due (o a volte tre) livelli. In questa parte verrà inoltre discusso il principio di funzionamento di una trappola di Paul, un sistema in cui un campo di quadrupolo elettromagnetico variabile nel tempo viene utilizzato per intrappolare un singolo ione, e se ne vedrà un utilizzo pratico all'interno di una macchina termica. Infine nella terza parte verrà descritto un esperimento sulle macchine termiche quantistiche svolto da un gruppo di ricercatori del Max Planck Institut, Germania [1], e ne saranno riportati i dati raccolti; Si noterà che l'apparato sperimentale di questo esperimento è relativamente semplice in quanto si utilizza la tecnica del raffreddamento laser e un rumore di campo elettrico, come sorgente fredda e calda rispettivamente, per indurre un ciclo termodinamico in uno ione catturato in una trappola di Paul. Si vedrà che le macchine termiche raggiungono buoni livelli di efficienza (seppur non ottimali e con un discreto margine di miglioramento) e con un rapporto tra massa e rendimento in potenza pari a quello di un motore di un'automobile.

# Capitolo 1

## Fondamenti teorici

### 1.1 Matrice densità

In meccanica quantistica lo stato di un sistema è completamente noto in caso sia possibile determinare un set completo di osservabili commutanti, e in tal caso lo si può descrivere con un singolo vettore dello spazio di Hilbert associato al sistema. Solitamente però le informazioni sul sistema non sono completamente definite e si potrà affermare che il sistema non sarà più descritto da un singolo vettore, ma da una miscela statistica di stati diversi. Lo stato di un sistema così definito è detto "misto" (mentre in caso contrario lo stato è detto "puro").

Per descrivere uno stato misto è conveniente introdurre un operatore hermitiano autoaggiunto e semidefinito positivo, chiamato operatore densità o matrice densità.

La matrice densità è definita come

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (1.1)$$

dove  $|\psi_n\rangle$  è l' $n$ -esimo vettore che descrive lo stato misto (questi vettori sono normalizzati, ma non necessariamente ortogonali) e  $p_n$  è la probabilità di rilevare  $|\psi_n\rangle$  a seguito di una misura del sistema (quindi deve ovviamente valere  $p_n \geq 0$  e  $\sum_n p_n = 1$ ).

È possibile descrivere l'evoluzione temporale di una matrice densità tramite l'equazione di von Neumann (la quale è equivalente all'equazione di Schrödinger):

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho] \quad (1.2)$$

dove  $H$  è l'Hamiltoniana del sistema. Nel caso in cui l'Hamiltoniana non dipenda dal tempo si ottiene facilmente la soluzione

$$\rho(t) = e^{-\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}} \rho(0) e^{\frac{i\mathcal{H}t}{\hbar}}. \quad (1.3)$$

### 1.1.1 Misura di osservabili e informazioni

In questa sezione tratteremo di come sono definiti gli osservabili nella notazione della matrice densità e di come quantificare le informazioni contenute in un sistema, il tutto tratto da [4]. Dato un osservabile  $\mathcal{A}$  il suo valore di aspettazione si può scrivere come

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathcal{A}) \quad (1.4)$$

mentre la probabilità di ottenere l'autovalore  $A_n$  sullo spazio generato dagli autovettori dell'operatore  $\mathcal{A}$  a seguito di una misura sull'osservabile è

$$P_n = \text{Tr}(\rho \Pi_n) \quad (1.5)$$

dove  $\Pi_n$  è l'operatore di proiezione sul relativo autospazio. Infine si ha che in seguito ad una misura dell'osservabile avente come risultato l'autovalore  $A_n$ , la matrice densità viene proiettata nell'autospazio relativo e diventa

$$\rho_n = \frac{\Pi_n \rho \Pi_n}{\text{Tr}(\rho \Pi_n)}. \quad (1.6)$$

Nel caso si abbiano due sistemi non correlati e due osservabili  $\mathcal{A}^{(a)}$  e  $\mathcal{A}^{(b)}$ , corrispondenti a due operatori che agiscono rispettivamente sul primo e sul secondo sistema, vale

$$\langle \mathcal{A}^{(a)} \otimes \mathcal{A}^{(b)} \rangle = \langle \mathcal{A}^{(a)} \rangle \langle \mathcal{A}^{(b)} \rangle \quad (1.7)$$

e la matrice densità totale dovrà quindi essere il prodotto tensoriale tra le matrici densità dei singoli sistemi

$$\rho_{tot} = \rho_a \otimes \rho_b \quad (1.8)$$

Per uno stato puro vale  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$  e l'informazione che si ottiene a seguito di una misura sul sistema è massima; si ha inoltre che le fluttuazioni statistiche di una grandezza fisica aumentano al diminuire di  $\text{Tr}(\rho^2)$  che è compreso tra 1 e  $N^{-1}$ , dove  $N$  è la dimensione di  $\rho$ , e quest'ultimo valore limite di  $\text{Tr}(\rho^2)$  rappresenta il sistema quando la mistura di stati è massima e l'informazione contenuta è minima. È in effetti possibile fornire una rappresentazione quantitativa dell'informazione contenuta in un sistema data dalla grandezza  $\text{Tr}(\rho^2)$ : consideriamo un sistema composto da due sottosistemi non correlati tra loro, vale

$$\text{Tr}(\rho_{tot}^2) = \text{Tr}(\rho_a^2)\text{Tr}(\rho_b^2) \quad (1.9)$$

che discende dalla (1.8), mentre intuitivamente possiamo affermare che l'informazione del sistema è la somma delle informazioni dei singoli sistemi, per cui potremmo prendere la grandezza additiva  $\ln \text{Tr}(\rho^2)$  invece che  $\text{Tr}(\rho^2)$  per identificare la quantità di informazione contenuta dal sistema. Vedremo nella sezione successiva che questa grandezza ha un collegamento diretto con l'entropia del sistema.

## 1.2 Meccanica quantistica statistica

Tra i più importanti risultati della meccanica statistica si ha che temperatura  $T$  di un sistema è esprimibile come la distribuzione di occupazione dei vari livelli energetici permessi, per cui è possibile definire la matrice densità in funzione di questa grandezza termodinamica; in particolare si ha

$$\rho = \frac{e^{-\mathcal{H}/k_B T}}{\mathcal{Z}} \quad (1.10)$$

con  $k_B$  costante di Boltzmann, e  $\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-\mathcal{H}/k_B T})$  è detta funzione di partizione e ha il ruolo di normalizzare i pesi dei vari autostati del sistema. Nella base degli autostati di  $\mathcal{H}$  la matrice densità è diagonale e gli autovalori sono

$$\rho_n = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{\mathcal{Z}} \quad (1.11)$$

per cui la probabilità di occupare un livello  $n$ -esimo diminuisce esponenzialmente con  $E_n$ , aumentando la velocità di decrescita con l'abbassarsi della temperatura.

Questa equazione è di particolare importanza perché permette di legare grandezze termodinamiche "classiche" a concetti presenti unicamente nel mondo microscopico, come la discretizzazione degli stati possibili di un sistema, e questa relazione risulterà essenziale nell'ideazione delle macchine termiche.

Un'altra grandezza importante è l'entropia di von Neumann, definita come

$$S(\rho) = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho) \quad (1.12)$$

e risulta essere legata direttamente con la quantità di informazioni di un sistema che abbiamo identificato con  $\ln \text{Tr}(\rho^2)$ , infatti abbiamo che  $\ln \text{Tr}(\rho^2) = \ln \langle \rho \rangle \simeq \langle \ln \rho \rangle = \text{Tr}(\rho \ln \rho)$  ed è un noto risultato della meccanica statistica che l'entropia di un sistema equivale al valore medio di  $-k_B \ln \rho$ , rappresentato dal terzo membro della catena di uguaglianze precedente, per cui si ottiene immediatamente la (1.12). Questa equazione rappresenta l'entropia quantistica (che rispetta il secondo principio della termodinamica) e ha la caratteristica di essere uguale a zero nel caso il sistema sia descritto da uno stato puro, ossia quando l'informazione su un sistema è massimale.

### 1.2.1 Lavoro in meccanica quantistica

Consideriamo un sistema con una Hamiltoniana del tipo  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$  dove  $\mathcal{H}_0$  è l'Hamiltoniana del sistema imperturbato, mentre  $\mathcal{H}_I$  è data da un'interazione esterna che agisce sul sistema in un tempo  $t = \tau$ . Il lavoro è quindi definito similmente al caso classico da

$$W = E_\tau - E_0 \quad (1.13)$$

dove  $E_\tau$  e  $E_0$  sono gli autovalori di  $\mathcal{H}_I$  misurati rispettivamente al tempo  $t = \tau$  e  $t = 0$ . Per definizione il lavoro non può essere espresso sotto forma di operatore in quanto necessita di almeno due misure separate per essere determinato. Vediamo ora come il secondo principio della termodinamica mantiene la propria validità anche nell'ambito microscopico, attraverso una relazione statistica tra l'energia libera e la media sul lavoro compiuto sul sistema: è possibile dimostrare un'uguaglianza detta di Jarzynski (si veda [6] per i dettagli) che lega il lavoro alla differenza di energia libera tra due stati di un sistema tramite la relazione

$$e^{-\Delta F/k_B T} = \langle e^{-W/k_B T} \rangle. \quad (1.14)$$

Applicando poi la disuguaglianza di Jensen per il caso discreto (per la dimostrazione si veda l'appendice)  $\langle f(x) \rangle \geq f(\langle x \rangle)$ , con  $f(x)$  funzione convessa, si ottiene

$$\Delta F \leq \langle W \rangle \quad (1.15)$$

che è un'espressione statistica del secondo principio della termodinamica.

# Capitolo 2

## Schema delle macchine termiche

In questo capitolo si mostrerà un modello teorico di macchina termica e delle sue implementazioni nella creazione di alcuni dispositivi di raffreddamento di dimensioni minime, trattati rispettivamente in [2] e [3], infine verrà illustrato il funzionamento di una trappola di Paul per il confinamento di particelle cariche. Nella trattazione sulla macchina termica verrà mostrato come estrarre da un qubit (ossia l'unità di informazione quantistica, che può assumere valori 0, 1 o una combinazione lineare di entrambi) energia pari all'energia libera sotto forma di lavoro, mentre nei vari modelli di sorgente fredda si utilizzeranno sia sistemi a due livelli (qubit), sia sistemi a tre livelli (qutrit, valori 0,1,2 o combinazione di essi) per assorbire calore da un qubit di prova e dissipare l'energia nell'ambiente.

### 2.1 Macchina termica ed estrazione del lavoro

Vediamo un modello di macchina termica composta da una singola particella a contatto con un bagno termico e da un dispositivo in grado di conservare il lavoro (schematizzato come un "peso" che viene alzato o abbassato); verrà mostrato inoltre come estrarre del lavoro nel caso ottimale, ossia in cui esso sia uguale alla differenza di energia libera tra diversi stati del sistema.

### 2.1.1 Composizione della macchina termica

Consideriamo un generico sistema in un arbitrario stato  $\rho_S$  e con Hamiltoniana  $\mathcal{H}_S$ . Si ha che l'energia interna è definita come  $U = \text{Tr}(\rho_S \mathcal{H}_S)$  (come da eq. 1.4) e l'entropia risulta essere quella di von Neumann, già definita nella (1.12),  $S = -k_B \text{Tr}(\rho_S \ln \rho_S)$ ; infine riprendiamo la definizione classica di energia libera

$$F = U - TS. \quad (2.1)$$

La sorgente termica a temperatura  $T$  con cui è a contatto il sistema può essere rappresentata da un numero infinito di sistemi aventi Hamiltoniana  $\mathcal{H}_B$  e stato termico  $\tau_B = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-\mathcal{H}_B/k_B T)$  con  $\mathcal{Z}$  funzione di partizione. A seguito di una trasmissione di calore dalla sorgente termica gli stati termici cambieranno in proporzione al calore scambiato  $Q$  passando da  $\tau_B$  a  $\sigma_B$ ; quantifichiamo questo passaggio di calore con

$$Q = \text{Tr}(\mathcal{H}_B(\tau_B - \sigma_B)). \quad (2.2)$$

Il dispositivo in grado di conservare il lavoro è nel nostro caso un sistema quantistico che funge da "peso", ossia il passaggio di energia verso di esso sarà dato da un operatore di traslazione  $\Gamma_a$  che agisce sulla posizione del peso, la quale a sua volta è identificata dall'operatore posizione  $\hat{x}$

$$\Gamma_a |x\rangle = |x + a\rangle. \quad (2.3)$$

L'Hamiltoniana del peso rappresenta l'energia potenziale gravitazionale ed è  $\mathcal{H}_W = mg\hat{x}$ . Definiamo il lavoro  $W$  estratto dal sistema come la variazione del valore di aspettazione dell'energia del peso e scriveremo

$$W = \text{Tr}(\mathcal{H}_W(\sigma_W - \rho_W)) \quad (2.4)$$

dove  $\rho_W$  rappresenta lo stato iniziale e  $\sigma_W$  lo stato finale.

Il vantaggio di usare un peso invece che la transizione tra due stati di un sistema a più

livelli è che nel secondo caso sarebbe necessaria la conoscenza a priori dell'energia estratta per permettere la transizione, mentre nel nostro caso il lavoro può avere una gamma di valori più ampia; inoltre con un peso è possibile ripetere il processo termodinamico più volte accumulando il lavoro estratto, senza dover intervenire sul sistema tra l'esecuzione di un protocollo e l'altra.

Lo stato iniziale della macchina termica è lo stato prodotto del sistema, peso e sorgente termica. Le trasformazioni consentite su questo apparato sono soggette a due condizioni di carattere molto generale: la prima è che non bisogna aumentare l'energia della macchina tramite fonti esterne di lavoro ed energia libera, mentre la seconda è che non dobbiamo utilizzare l'energia estratta dal sistema se non per alzare o abbassare il peso.

La prima condizione matematicamente si traduce con l'unitarietà delle trasformazioni che dovranno quindi lasciare invariata la traccia dello stato prodotto; la seconda condizione è invece la legge di conservazione del valore di aspettazione dell'energia che si scrive utilizzando le definizioni date in precedenza, come

$$\Delta U = Q - W \tag{2.5}$$

che è la prima legge della termodinamica. Imponiamo l'ulteriore condizione sul peso che il lavoro estratto in un ciclo sia indipendente dalla posizione iniziale del peso; questa condizione assegna al peso un ruolo "passivo" nella macchina, in quanto esso non può interferire sul lavoro estratto e inoltre garantisce la possibilità di utilizzare più volte di fila l'apparato senza preoccuparci delle singole transizioni del peso ad ogni interazione.

### **2.1.2 La seconda legge della termodinamica**

Proviamo ora la validità della seconda legge della termodinamica all'interno della macchina termica, ossia che non è possibile estrarre lavoro dalla sorgente termica lasciando il sistema invariato; la dimostrazione avverrà per assurdo.

Consideriamo la sorgente termica essere a temperatura  $T$ . Durante un intero di ciclo di estrazione del lavoro l'energia del sistema deve rimanere invariata in quanto il suo stato finale deve coincidere con quello iniziale, mentre la variazione di energia del peso sarà

$\Delta E_W > 0$  e quindi dalla conservazione dell'energia si avrà  $\Delta E_B = -\Delta E_W$ .

Passiamo ora a considerare l'entropia, la quale inizialmente non è che la somma delle entropie dei singoli componenti in quanto non sono correlati prima dell'interazione; durante il protocollo l'entropia non può variare a causa degli operatori in quanto essi sono tutti unitari, ma possono formarsi delle correlazioni tra sistema, sorgente e peso, per cui si otterrà

$$\Delta S_B + \Delta S_W + \Delta S_S \geq 0. \quad (2.6)$$

Per il sistema deve valere  $\Delta S_S = 0$  perché lo stato finale e iniziale coincidono, mentre  $\Delta S_B < 0$  in quanto l'energia della sorgente durante l'estrazione del lavoro viene ridotta e lo stato termico della sorgente passa ad uno stato quantomeccanico con minore mistura di stati, abbassando l'entropia. È possibile dimostrare che la variazione di entropia del peso può essere arbitrariamente ridotta (si veda [2] per i dettagli) per cui si può raggiungere una differenza di entropia tale che  $\Delta S_W < |\Delta S_B|$  violando l'equazione (2.6) e dimostrando che non è possibile estrarre lavoro direttamente dalla sorgente.

### 2.1.3 Estrazione del lavoro

L'estrazione del lavoro procede tramite un protocollo diviso in due parti, la prima consiste nell'agire sul sistema senza utilizzare la sorgente termica, nella seconda si trasforma lo stato del sistema in uno stato termico utilizzando diversi qubit della sorgente ad ogni interazione (ogni interazione con un singolo qubit può essere vista come un ciclo di Carnot infinitesimale). Vedremo che in entrambi i processi si potrà estrarre lavoro arbitrariamente vicino alla differenza di energia libera del sistema.

Nella prima parte trasformiamo lo stato del sistema in uno stato misto di autostati di energia senza utilizzare la sorgente termica. Inizialmente il sistema e il peso non sono correlati tra loro per cui lo stato iniziale sarà dato dalla matrice densità  $\rho_S \otimes \rho_W$ ; possiamo esprimere  $\rho_S$  in funzione dei suoi autovalori  $p_n$  e autovettori  $|\psi_n\rangle$  come  $\rho_S = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$  con  $p_{n+1} \leq p_n$  per comodità. Implementiamo ora la trasformazione unitaria

$$V = \sum_n |E_n\rangle \langle \psi_n| \otimes \Gamma_{\epsilon_n/(mg)} \quad (2.7)$$

dove  $E_n$  sono gli autovalori dell'energia e  $\epsilon_n = \langle \psi_n | \mathcal{H}_S | \psi_n \rangle - E_n$ .

Dopo la trasformazione lo stato totale sarà

$$\sigma_{SW} = \sum_n p_n |E_n\rangle \langle E_n| \otimes \Gamma_{\epsilon_n/mg} \rho_W \Gamma_{\epsilon_n/mg}^\dagger \quad (2.8)$$

e gli stati finali di sistema e peso saranno rispettivamente  $\sigma_S = \text{Tr}_W(\sigma_{SW})$  e  $\sigma_W = \text{Tr}_S(\sigma_{SW})$  con  $\text{Tr}_S()$  e  $\text{Tr}_W()$  operatori di traccia parziale relativi al sistema e al peso. Il lavoro estratto è dato da  $W = \text{Tr}(\sigma_W \mathcal{H}_W) - \text{Tr}_W(\rho_W \mathcal{H}_W) = \sum_n p_n \epsilon_n$ , mentre la variazione nel valore di aspettazione dell'energia nel sistema è  $\Delta U = \text{Tr}(\sigma_S \mathcal{H}_S) - \text{Tr}_S(\rho_S \mathcal{H}_S) = -\sum_n p_n \epsilon_n$  ossia vale  $\Delta U = -W$  in accordo con la prima legge della termodinamica. Infine si ha che l'entropia del sistema rimane invariata, per cui il lavoro estratto è la variazione di energia libera del sistema

$$\Delta F = F(\rho_S) - F(\sigma_S) = \Delta U = -W. \quad (2.9)$$

La seconda parte del protocollo consiste nell'estrarre lavoro dallo stato  $\sigma_S$  ottenuto nella parte precedente e mostreremo che anche in questo caso estrarremo lavoro pari alla differenza di energia libera del sistema.

Iniziamo considerando una piccola variazione nelle probabilità di occupazione di due livelli di energia, in particolare una trasformazione dallo stato  $\sigma_S = \sum_n p_n |E_n\rangle \langle E_n|$  allo stato  $\sigma'_S = \sum_n q_n |E_n\rangle \langle E_n|$  con  $q_0 = p_0 - \delta p$ ,  $q_1 = p_1 + \delta p$  e  $q_k = p_k$  per  $k > 1$ .

Prendiamo ora un qubit dalla sorgente termica il cui stato sia nella forma

$$\rho_B = \frac{q_0}{q_0 + q_1} |0\rangle \langle 0| + \frac{q_1}{q_0 + q_1} |1\rangle \langle 1| \quad (2.10)$$

in modo tale che il rapporto tra la popolazione dello stato fondamentale e quella dello stato eccitato sia uguale al sistema. La differenza di energia tra i due stati del qubit della

sorgente termica è  $E_B = k_B T \log(\frac{q_0}{q_1})$ . Applichiamo ora la trasformazione unitaria che scambia gli stati del sistema e del qubit della sorgente, e che trasla il peso per conservare l'energia totale

$$|E_0\rangle_S |1\rangle_B |x\rangle_W \leftrightarrow |E_1\rangle_S |0\rangle_B |x + \epsilon/(mg)\rangle_W \quad (2.11)$$

dove  $\epsilon = E_B - (E_1 - E_0)$ . Questa trasformazione è valida per ogni  $x$  e rispetta la prima legge della termodinamica.

Il lavoro estratto con questo processo è dato da  $\delta W = \epsilon \delta p$ , mentre la variazione di energia libera del sistema è  $\delta F = \delta U - T \delta S$ ; è possibile verificare ([2] per dettagli) che  $\delta U = \delta p(E_1 - E_0)$  e che l'aumento di entropia è  $\delta S = \delta p \frac{E_B}{T} + \mathcal{O}(\delta p^2)$  da cui, approssimando al primo ordine in  $\delta p$  si ottiene  $\delta F \approx \delta p(E_1 - E_0 - E_B) = -\epsilon \delta p = -W$  che mostra come il lavoro estratto sia uguale alla variazione dell'energia libera del sistema a meno di una correzione dell'ordine di  $\mathcal{O}(\delta p^2)$ .

Per massimizzare il lavoro estratto si ripete il processo appena descritto  $N$  volte, prendendo ad ogni nuova interazione un nuovo qubit dalla sorgente termica, finché lo stato del sistema non risulta essere trasformato in uno stato termico a temperatura  $T$ . Per grandi valori di  $N$  possiamo scegliere stati successivi del sistema che differiscono tra loro per una probabilità  $\delta p = \mathcal{O}(\frac{1}{N})$  per cui si avrà

$$W = F(\sigma_S) - F(\tau_S) - \mathcal{O}(\frac{1}{N}) \quad (2.12)$$

e nel limite  $N \rightarrow \infty$  il lavoro estratto sarà uguale alla variazione di energia libera.

Unendo i due processi finora descritti vediamo che possiamo trasformare un arbitrario stato iniziale  $\rho_S$  in uno stato termico  $\tau_S$  e il lavoro massimo che sarà possibile estrarre è dato da  $W_{max} = F(\rho_S) - F(\tau_S)$ .

#### 2.1.4 L'efficienza limite di Carnot

Vediamo rapidamente che il modello raggiunge l'efficienza limite imposta dal teorema di Carnot.

Supponiamo di avere due sorgente termiche, una calda a temperatura  $T_h$  e una fredda

a temperatura  $T_c < T_h$ ; il sistema a due livelli viene inizialmente posto a contatto con la sorgente fredda, quindi è in uno stato termico con energia interna  $U_c$  ed entropia  $S_c$ . Eseguiamo ora il protocollo descritto in precedenza e portiamo il sistema a contatto con la sorgente calda, trasformandolo in uno stato termico a temperatura  $T_h$ , con energia interna  $U_h$  ed entropia  $S_h$ , ed estraendo lavoro. Successivamente riportiamo il sistema a contatto con la sorgente fredda e lo trasformiamo allo stato termico iniziale relativo alla sorgente fredda. Il totale di lavoro estratto in questo ciclo è dato dalla somma del lavoro estratto nei due processi che corrisponde a  $W = W_{(i)} + W_{(ii)} = (T_h - T_c)(S_h - S_c)$ , dove  $W_{(i)} = -\Delta F_{(i)} = (U_c - T_h S_c) - (U_h - T_h S_h)$  e  $W_{(ii)} = -\Delta F_{(ii)} = (U_h - T_c S_h) - (U_c - T_c S_c)$ , mentre dalla prima legge della termodinamica si ottiene  $Q_h = T_h(S_h - S_c)$ . Unendo i risultati si ha

$$\frac{W}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (2.13)$$

che è proprio l'efficienza di Carnot.

## 2.2 Costruzione della sorgente fredda

Vediamo ora come costruire alcuni dispositivi di dimensioni minime in grado di raffreddare un qubit, che potranno essere implementati in qualsiasi macchina termica come sorgente fredda.

### 2.2.1 Primo modello: due qubit

In questo modello consideriamo due qubit che compongono la sorgente fredda e che chiameremo qubit 2 e qubit 3, i quali agiranno sul qubit 1 che sarà l'oggetto da raffreddare. Iniziamo considerando il sistema formato unicamente dai qubit 1 e 2: l'Hamiltoniana libera è  $\mathcal{H}_0 = E_1\Pi^{(1)} + E_2\Pi^{(2)}$  dove  $\Pi^{(i)} = |1\rangle_i\langle 1|$  è un operatore di proiezione per il qubit  $i$ , mentre gli stati  $|0\rangle_i$  sono stati fondamentali a energia zero, e le energie  $E_1$  e  $E_2$  sono le energie degli stati eccitati dei due qubit con  $E_2 > E_1$ .

Lo stato del sistema si può scrivere come

$$\rho_{12} = \tau_1 \otimes \tau_2 \quad (2.14)$$

in quanto i due qubit non sono correlati e con  $\tau_i$  che rappresenta lo stato termico di ciascun qubit, dato da

$$\tau_i = r_i e^{-E_i \Pi^{(i)} / k_B T_r} \quad (2.15)$$

con  $T_r$  temperatura ambiente e  $r_i = (1 + e^{-E_i/k_B T_r})^{-1}$ . Un modo conveniente di rappresentare (2.15) è attraverso le probabilità  $r_i$  e  $1 - r_i$  di trovare il qubit in  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  rispettivamente, ossia come  $\tau_i = r_i |0\rangle \langle 0| + (1 - r_i) |1\rangle \langle 1|$ .

Raffreddare il qubit 1 significa fargli raggiungere una temperatura di equilibrio minore della temperatura ambiente o, equivalentemente, aumentare la probabilità di trovarsi nello stato fondamentale.

L'idea è quella di trasferire lo stato eccitato del primo qubit al secondo; per fare questo consideriamo le probabilità degli autostati  $|01\rangle$  (qubit 1 eccitato) e  $|10\rangle$  (qubit 2 eccitato) di  $\rho_{12}$  che valgono rispettivamente  $r_1(1 - r_2)$  e  $(1 - r_1)r_2$  e, dall'assunzione precedente  $E_2 > E_1$ , si ha che  $(1 - r_1)r_2 > r_1(1 - r_2)$ , ossia che lo stato  $|10\rangle$  è più probabile di  $|01\rangle$ . Supponiamo ora di applicare un operatore unitario che scambia gli stati dei qubit

$$U : |10\rangle \leftrightarrow |01\rangle \quad (2.16)$$

e che aumenta la probabilità dello stato fondamentale del qubit 1, ottenendo il raffreddamento desiderato; tuttavia i qubit tendono a termalizzare con l'ambiente circostante tornando alla temperatura ambiente, per cui è necessario continuare a ripetere l'applicazione di  $U$  per garantire la stabilità allo stato in cui il qubit 1 è raffreddato. Questo processo d'altronde richiede del lavoro esterno per poter funzionare, e servirebbe quindi un dispositivo che agisce sul sistema in quanto l'energia di  $|01\rangle$  è maggiore di quella di  $|10\rangle$ . L'alternativa al dispositivo esterno è quella di aggiungere un terzo qubit, il qubit 3, che viene messo in contatto con un bagno termico a temperatura  $T_h > T_r$ . L'energia

dello stato eccitato del qubit 3 deve essere  $E_3 = E_2 - E_1$  in modo da consentire transizioni tra diversi stati del sistema senza un ausilio esterno. Otteniamo ora un sistema i cui autostati  $|010\rangle$  e  $|101\rangle$  sono degeneri, per cui la trasformazione

$$|101\rangle \leftrightarrow |010\rangle \quad (2.17)$$

non richiede energia e risulta equivalente alla (2.16). Perché avvenga la transizione tra  $|010\rangle$  e  $|101\rangle$  introduciamo l'Hamiltoniana di interazione

$$\mathcal{H}_{int} = g(|010\rangle \langle 101| + |101\rangle \langle 010|) \quad (2.18)$$

dove  $g$  è la costante di accoppiamento. L'interazione è interna al sistema e non richiede controlli o dispositivi esterni.

Assumiamo che  $g$  sia molto bassa rispetto alle energie dei qubit per cui gli autovalori e gli autostati del sistema non variano sensibilmente a seguito dell'interazione e rimangono sostanzialmente definiti da  $\mathcal{H}_0$  così che le notazioni e le considerazioni utilizzate fino adesso mantengano la loro validità.

Il processo descritto da (2.17) è normalmente equiprobabile in entrambe i versi, ma il qubit 3 è a contatto con una sorgente termica a temperatura maggiore di quella ambientale per cui lo stato  $|101\rangle$  risulta più probabile e il processo che occorre maggiormente sarà verso lo stato  $|010\rangle$ . Abbiamo quindi formato un frigorifero quantistico utilizzando i qubit 2 e 3.

Scriviamo ora l'equazione che determina il sistema: matematicamente il contatto tra i qubit e la rispettiva sorgente termica ( $T_r$  per i qubit 1 e 2,  $T_h$  per il qubit 3) si può esprimere in termini delle probabilità  $p_i$  che i qubit termalizzino al loro stato termico iniziale dato da (2.15) tramite l'evoluzione non unitaria  $\rho \rightarrow p_i \delta t \tau_i \otimes \text{Tr}_i(\rho) + (1 - p_i \delta t) \rho$  nel tempo  $\delta t$ . unendo questo risultato all'evoluzione temporale di  $\rho$  data da (1.2) si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int}, \rho] + \sum_{i=1}^3 p_i (\tau_i \otimes \text{Tr}_i \rho - \rho) \quad (2.19)$$

dove  $\mathcal{H}_0 = E_1\Pi^{(1)} + E_2\Pi^{(2)} + E_3\Pi^{(3)}$ . La soluzione allo stato stazionario è di nostro interesse perché mostra la temperatura del qubit 1 che si può raggiungere in funzione dei parametri della macchina frigorifera; nella figura 2.1 viene mostrato il grafico di tale soluzione in cui è possibile osservare la temperatura di equilibrio  $T_1^S$  del qubit 1 in funzione della temperatura a cui è termalizzato il qubit 3. Nel grafico sono riportati diversi andamenti di  $T_1^S$  per diversi valori della temperatura  $T_c$  a cui termalizza il qubit 2.

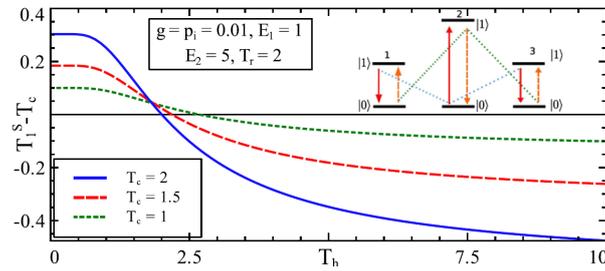


Figura 2.1: Grafico della temperatura di equilibrio del qubit 1 in funzione della temperatura del qubit 3 per diversi valori della temperatura con cui è a contatto il qubit 2, da [3]. In alto a destra un diagramma delle varie interazioni e livelli energetici non in scala con il resto del grafico.

Vediamo infine la temperatura minima che possiamo raggiungere in un caso ideale, ossia assumendo un perfetto isolamento del sistema dall'esterno: fissiamo innanzitutto  $E_1$ , in quanto caratteristica dell'oggetto da raffreddare e non della macchina frigorifera, e  $T_r$ , la temperatura dell'ambiente. Aumentiamo ora i parametri  $E_3$ ,  $E_2$  e  $T_h$  in modo da mantenere  $E_3/k_B T_h$  costante e poco inferiore ad 1. Così facendo otterremo un aumento delle probabilità di occupazione dello stato fondamentale del qubit 2 e dello stato eccitato del qubit 3, andando quindi ad aumentare le probabilità di transizione verso lo stato  $|010\rangle$ ; possiamo quindi avvicinarci a piacimento alla temperatura di zero assoluto, come mostrato in figura 2.2. Nella realtà il limite della temperatura raggiungibile sarà dato da imperfezioni nell'isolamento del sistema, e quindi da fonti di calore esterno che riscaldano la macchina frigorifera.

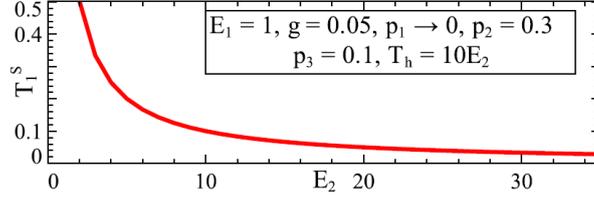


Figura 2.2: Da [3]. Andamento della temperatura limite in funzione di  $E_2$  (e quindi anche di  $E_3$  e  $T_h$ ).

### 2.2.2 Secondo modello: un qubit e un qutrit

Il modello consiste in un qubit da raffreddare e un sistema che funge da macchina frigorifera generato da un qutrit e un qubit. In questo nuovo sistema gli autostati  $|020\rangle$  e  $|101\rangle$  sono degeneri e il raffreddamento avviene allo stesso modo del modello precedente, tramite una transizione della popolazione da  $|101\rangle$  a  $|020\rangle$ .

Introduciamo due Hamiltoniane di interazione tra particelle

$$\mathcal{H}_{int}^{(12)} = g(|02\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 02|) \otimes \mathbb{1}^{(3)} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{H}_{int}^{(23)} = h\mathbb{1}^{(1)} \otimes (|01\rangle \langle 10| + |10\rangle \langle 01|). \quad (2.21)$$

La transizione cercata si ottiene in due interazioni  $|101\rangle \rightarrow |110\rangle \rightarrow |020\rangle$ , la prima causata da (2.21) e la seconda da (2.20).

Come nel caso precedente le particelle 1 e 2 sono a contatto con una sorgente termica a temperatura  $T_r$ , mentre il qubit 3 è a temperatura  $T_h > T_r$ ; questo modello è qualitativamente lo stesso del precedente e si basa sulla stessa idea senza apportare modifiche al di fuori del qutrit al posto del qubit 2 e delle due Hamiltoniane che sostituiscono l'unica Hamiltoniana di interazione precedente.

### 2.2.3 Terzo modello: un singolo qutrit

L'ultimo modello consiste in quella che è la più piccola macchina frigorifera possibile, infatti è composto da un singolo qutrit. Il modello è simile al precedente (senza la

presenza del qubit 3) con la differenza che il qutrit non è più unicamente a contatto con la sola temperatura  $T_r$ , ma viene messo a contatto con diverse sorgenti termiche a seconda dello stato in cui si trova (figura 2.3).

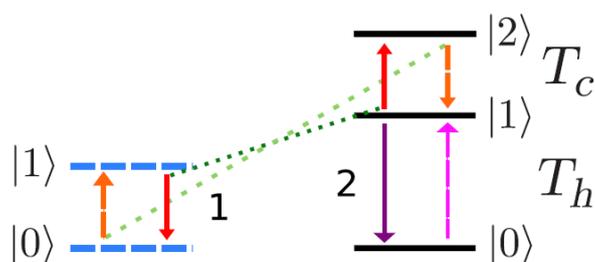


Figura 2.3: Schema della macchina frigorifera con il qubit da raffreddare, sono riportate le temperature relative ai diversi state del qutrit, da [3].

## 2.3 Trappole di Paul

Le trappole di Paul sono dispositivi che consentono di intrappolare particelle cariche all'interno di un minimo di potenziale generato da un campo quadrupolo elettromagnetico. A causa del teorema di Gauss sappiamo che non può esistere un estremo del potenziale elettrico nel vuoto, per cui si usa un campo variabile nel tempo: facendo roteare un punto di sella ad una frequenza opportuna la particella vedrà un minimo di potenziale come risultato di una media sul tempo. In figura 2.4 è mostrata una rappresentazione del potenziale di trappola.

Le trappole di Paul che ci interesseranno in questo trattato sono dette lineari in quanto gli elettrodi che generano il quadrupolo sono disposti paralleli tra loro e il campo variabile nel tempo garantirà il confinamento in due dimensioni, mentre il confinamento assiale sarà dato da un campo elettrostatico (figura 2.5). Tuttavia nella trappola che vedremo in seguito gli elettrodi saranno disposti secondo una geometria ad "imbuto", ma è ugualmente classificata come lineare.

I parametri che descrivono una trappola sono la profondità di potenziale  $U_0$ , spesso espressa sotto forma di temperatura  $T_0 = \frac{U_0}{k_B}$ , e le frequenze proprie  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (sotto approssimazione armonica attorno al minimo). Nel caso di una trappola a simmetria

cilindrica le frequenze proprie si riducono a  $\omega_r$  e  $\omega_z$ . Un campo elettrico generato da un quadrupolo risulta essere quadratico in coordinate cartesiane, per cui uno ione intrappolato in una buca del potenziale sente una forza di tipo elastico che lo direziona verso il centro della trappola (trappola armonica). Il potenziale della trappola di quadrupolo elettrico sarà quindi nella forma

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \quad (2.22)$$

dove  $r_0$  rappresenta la dimensione caratteristica della trappola. Affinché si abbia un minimo la condizione  $\nabla^2\Phi = 0$  deve essere verificata; in due dimensioni una soluzione è data da  $\alpha = -\gamma = 1, \beta = 0$  che genera il potenziale

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(x^2 - z^2). \quad (2.23)$$

Affinché si possa generare un campo del genere poniamo  $\Phi_0 = U + V \cos \omega t$  dove  $U$  e  $V$  sono potenziali elettrici opportuni.

Le equazioni del moto per una particella di massa  $m$  e carica  $e$  sono quindi

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (a + 2q \cos 2\tau)x = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} - (a + 2q \cos 2\tau)z = 0 \quad (2.25)$$

con  $a = \frac{4eU}{mr_0^2\omega^2}$ ,  $q = \frac{2eV}{mr_0^2\omega^2}$  e  $\tau = \frac{\omega t}{2}$ . La stabilità del moto non dipende dai parametri iniziali del moto dello ione, come ad esempio la velocità, ma unicamente da  $a$  e  $q$  che tipicamente assumono valori compresi tra 0 e 1; per maggiori dettagli vedere [5]. Lo ione risulta così confinato nel piano  $xz$ , mentre lungo  $y$  il confinamento sarà dato da un semplice campo elettrico statico.

La profondità  $D$  della trappola in  $z$  e in  $x$  è calcolabile dal moto armonico dello ione lungo queste due direzioni e a  $U = 0$  equivale a  $D_{x,z} = \frac{q}{16}V$  che corrisponde tipicamente alle decine di Volt; dalla profondità è possibile calcolare la temperatura minima raggiungibile dal sistema.

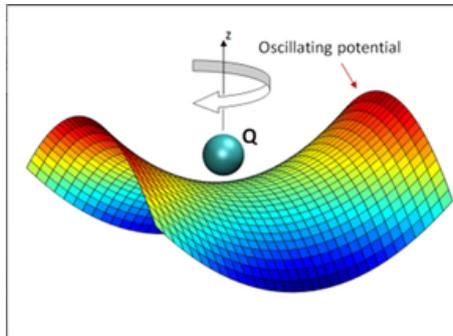


Figura 2.4: Una particella denominata Q su un potenziale di Paul in due dimensioni. La freccia attorno all'asse z rappresenta il moto circolare del potenziale a sella. La particella Q tende a "cadere" dalla sella muovendosi verso le zone in blu del potenziale (che rappresentano il punto dove il potenziale ha valore numerico minimo), ma la rotazione fa sì che Q si ritrovi a salire verso la zona rossa dopo un periodo di tempo  $t = \frac{2\pi}{\omega}$  equivalente a mezzo periodo, dove  $\omega$  è la frequenza di trappola.

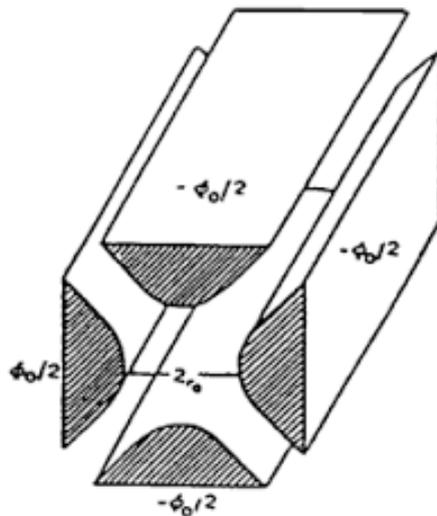


Figura 2.5: Schema di una trappola lineare, da [5].

# Capitolo 3

## Risultati sperimentali

Vediamo ora i risultati che si sono ottenuti sperimentalmente, da [1]. Verrà mostrata una macchina termica costruita con un singolo ione in una trappola di Paul e ne saranno riportati i dati raccolti (potenza emessa ed efficienza).

Il dispositivo dell'esperimento consiste in uno ione di  $\text{Ca}^+$  (che si comporta come un sistema a due livelli) intrappolato in una trappola di Paul lineare i cui elettrodi sono disposti in una geometria ad imbuto (figura 3.1). Le sorgenti termiche calda e fredda sono date rispettivamente dal rumore di un campo elettrico e dall'applicazione della tecnica di laser cooling. Il lavoro compiuto dal sistema viene immagazzinato in un oscillatore armonico il quale verrà fatto oscillare contro la forza di attrito. Per valutare i valori di potenza in uscita ed efficienza vengono ripetuti diversi cicli del sistema a diverse differenze di temperature tra la sorgente calda e fredda.

### 3.1 Costruzione della macchina termica

Agli elettrodi di trappola viene applicato un potenziale sinusoidale oscillante con una frequenza di 21 MHz e un'ampiezza picco-picco di 830 V. Il potenziale risultante, in prossimità del fondo di trappola, è esprimibile come

$$U(x, y) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \quad (3.1)$$

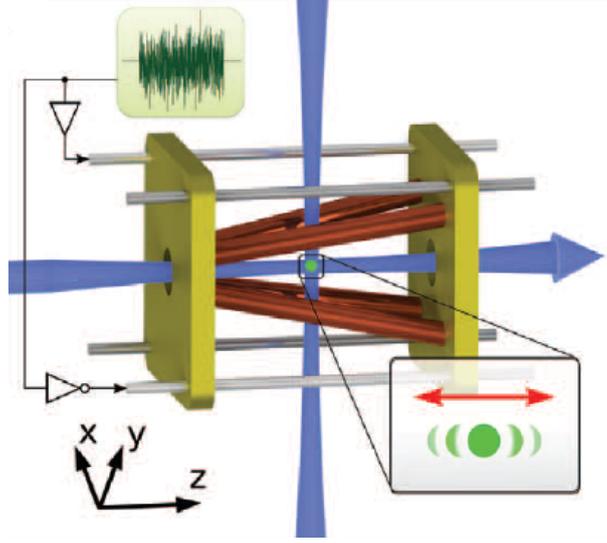


Figura 3.1: (da [1]) Schema della trappola di Paul ad imbuto, in rosso sono rappresentati gli elettrodi nella geometria ad imbuto, mentre in giallo sono rappresentati gli elettrodi che garantiscono il confinamento assiale.

dove  $m$  è la massa dello ione e  $\omega_{x,y}$  indica le due frequenze di trappola radiali. Il confinamento lungo  $z$  è dato da un potenziale del tipo  $U_z = (m/2)\omega_z^2 z^2$  che genera una frequenza di trappola pari a  $\omega_z/2\pi = 81$  kHz.

La geometria ad imbuto è caratterizzata dall'angolo  $\theta = 10$  degli elettrodi rispetto all'asse  $z$  e dall'estensione radiale pari a  $r_0 = 1.1$  mm a  $z = 0$ . I valori delle frequenze di trappola radiali sono

$$\omega_{x,y}(z) = \frac{\omega_{x,y}(0)}{\left(1 + \frac{z \tan \theta}{r_0}\right)^2} \quad (3.2)$$

con  $\omega_x(0) = 2\pi \times 447$  kHz e  $\omega_y(0) = 2\pi \times 450$  kHz; questi due valori di  $\omega_x(0)$  e  $\omega_y(0)$  sono abbastanza simili da poter considerare valida l'approssimazione di simmetria cilindrica in cui si ha una frequenza di trappola radiale media  $\omega_r$ .

Il laser per raffreddare lo ione ha lunghezza d'onda pari a 397 nm, risonante con la transizione  $S_{\frac{1}{2}} - P_{\frac{1}{2}}$ , e la fluorescenza viene rilevata tramite un dispositivo chiamato "ICCD" (Intensified Charge-Coupled Device), una telecamera in grado di rilevare un singolo fotone per pixel. La temperatura limite a cui lo ione termalizza con la sorgente

fredda è  $T_c = 3.4$  mK, mentre la temperatura dello ione quando esso è in contatto con la sorgente calda raggiunge valori di  $T_h = 51$  mK.

## 3.2 Riscaldamento e raffreddamento dello ione

In questo esperimento i processi di riscaldamento e raffreddamento sono indotti lungo la direzione radiale e la risultante distribuzione radiale mediata sul tempo dello stato termico è

$$\xi_r(r, T) = \frac{1}{2\pi\sigma_r^2(T)} \exp \left[ -\frac{(r - r_0)^2}{2\sigma_r^2(T)} \right] \quad (3.3)$$

con ampiezza  $\sigma_r(T) = \sqrt{k_B T / m\omega_r^2}$ ; è possibile studiare la dinamica dell'intero sistema tramite un approccio classico in quanto l'energia termica è molto maggiore della differenza tra i livelli dell'oscillatore armonico ( $k_B T_c \gg \hbar\omega_r$ ).

I processi di riscaldamento e raffreddamento si ottengono tramite l'accensione o lo spegnimento del rumore elettrico rispettivamente, mentre il laser di raffreddamento rimane sempre attivo. Durante questi processi si ha una variazione dell'ampiezza spaziale  $\sigma_r(T)$ , inoltre, grazie alla forma conica del potenziale che crea un gradiente di campo lungo  $z$ , lo ione è soggetto ad una forza media lungo  $z$  che dipende proprio dall'ampiezza

$$F_z(T) = -2\pi \int_0^\infty \xi_r(r, T) \frac{dU(r)}{dz} r dr. \quad (3.4)$$

Quando lo ione viene riscaldato si sposta lungo l'asse  $z$  verso una zona con minore confinamento radiale. Quando lo ione si sposta a causa del riscaldamento la sua energia meccanica aumenta e viene prodotto del lavoro, poi viene spento il rumore di campo elettrico e il laser di raffreddamento riporta il sistema allo stato iniziale; questo processo corrisponde ad un ciclo termodinamico chiuso. Un grafico della forza e dello spostamento nel tempo è in figura 3.2.

La frequenza con cui si accende e spegne il rumore elettrico è la stessa della frequenza assiale  $\omega_z$  così che ad ogni ciclo l'ampiezza delle oscillazioni assiali dello ione aumenti (e

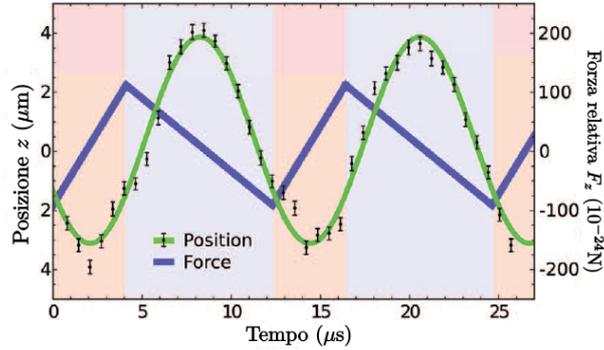


Figura 3.2: Da [1], grafico delle misure di posizione dello ione in funzione del tempo al tempo. La linea verde è il fit della posizione, mentre la linea blu è la forza agente lungo  $z$ . Le aree colorate in rosso rappresentano le fasi di riscaldamento del sistema, mentre in blu quelle di raffreddamento.

l'energia meccanica aumenta di conseguenza).

Per limitare l'oscillazione (che se continuasse ad aumentare rimuoverebbe lo ione dalla trappola) si aggiunge un ulteriore laser di raffreddamento lungo l'asse  $z$  che dissipa l'energia generata dalla macchina. Il laser di raffreddamento assiale tuttavia non è sempre attivo con il laser che funge da sorgente fredda, ma viene attivato solamente nei punti di inversione del moto oscillatorio dello ione, in modo tale da ridurre al minimo l'energia dissipata mantenendo il più alto tasso di raffreddamento possibile. La misura della posizione dello ione viene effettuata da un dispositivo ICCD il cui tempo di misura è molto minore del periodo di oscillazione assiale in modo tale da ottenere una buona precisione sulla fase e sulla posizione.

Il ciclo termodinamico dello ione viene mostrato in figura 3.3 dove è riportato il numero medio di fononi  $\bar{n}_r = k_B T / \hbar \omega_r$  lungo la direzione radiale in funzione della frequenza di trappola radiale  $\omega_r$ .

La pulsazione  $\omega_r(t)$  viene calcolata a partire dall'equazione (3.2) ed effettuando misure sulla posizione assiale dello ione. La misura della temperatura dello ione è data dai tassi di riscaldamento e raffreddamento, i quali a loro volta sono calcolati tramite la misura dell'allargamento delle linee spettrali delle transizioni del sistema.

Il ciclo termodinamico può essere considerato quasistatico perché la dinamica interna dello ione è molto più veloce dei processi di riscaldamento e raffreddamento e le perdite

di energia sono trascurabili.

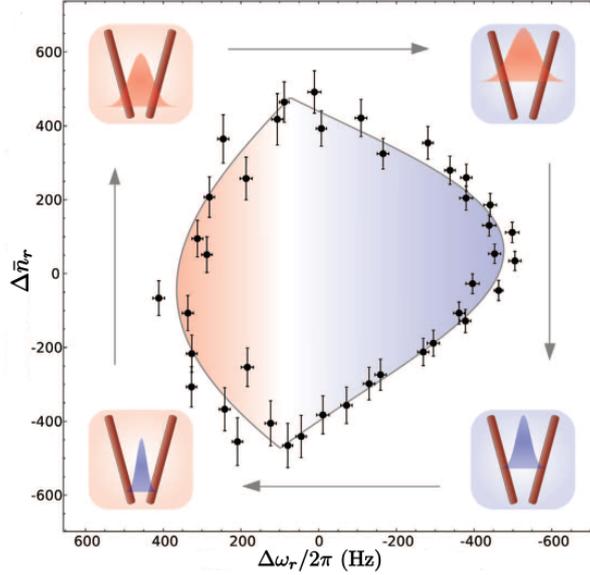


Figura 3.3: Da [1], grafico del ciclo termodinamico, in rosso sono rappresentati i processi di riscaldamento e in blu i processi di raffreddamento. I valori di  $\omega_r$  e  $\bar{n}_r$  sono relativi a valori centrali pari a  $\omega_{0r}/2\pi = 447.9 \pm 0.2$  kHz e  $\bar{n}_{0r} = 2.61(\pm 0.04) \times 10^4$  fononi.

### 3.3 Potenza emessa ed efficienza

La potenza emessa dal sistema viene ricavata in tre modi distinti. Il primo consiste nel calcolare il lavoro compiuto in un ciclo, pari a  $W_{ciclo} = \hbar \oint 2\bar{n}_r d\omega_r$ , tramite la misura di  $\omega_r$  e calcolando  $P_{cic} = \frac{W_{cic}}{t_{cic}}$  dove  $t_{cic} = 2\pi/\omega_z$  per diversi valori di  $\Delta T$ ; per variare  $\Delta T$  si possono modificare le temperature delle riserve termiche o il tempo di interazione tra ioni e sorgenti. Il secondo metodo consiste nel misurare l'ampiezza delle oscillazioni  $A_z$  lungo l'asse  $z$  e il parametro di smorzamento dell'oscillatore armonico  $\gamma$  e calcolando la potenza tramite l'equazione  $P_{osc} = \gamma m \omega_z^2 A_z^2$ . Entrambi i metodi appena discussi portano ad una potenza che raggiunge il valore di  $3.4(\pm 0.5) \times 10^{-22}$  W a seconda della differenza di temperatura tra la sorgente calda e quella fredda. L'ultimo modo per calcolare la potenza emessa è un calcolo analitico del lavoro compiuto che deriva dall'integrale (3.4) sul percorso del ciclo, ottenendo per la potenza

$$P_{an} = \frac{W_{an}}{t_{cic}} = \frac{4k_B^2 \sin^2(\pi d) \tan^2 \theta \Delta T^2}{m\pi^4 \gamma [(d^2 - d)r_0]^2} \simeq (8.8 \times 10^{-20} \text{WK}^{-2}) \Delta T^2 \quad (3.5)$$

con  $d = t_h/t_{cic}$  grandezza adimensionale che rappresenta il tempo relativo di interazione con le sorgenti termiche, dato dal tempo di interazione con la sorgente calda  $t_h$  sul tempo di un ciclo  $t_{cic}$ .

I risultati di questi tre modi per ricavare la potenza sono riportati nella figura 3.4 dove vengono confrontati i risultati sperimentali con la previsione analitica

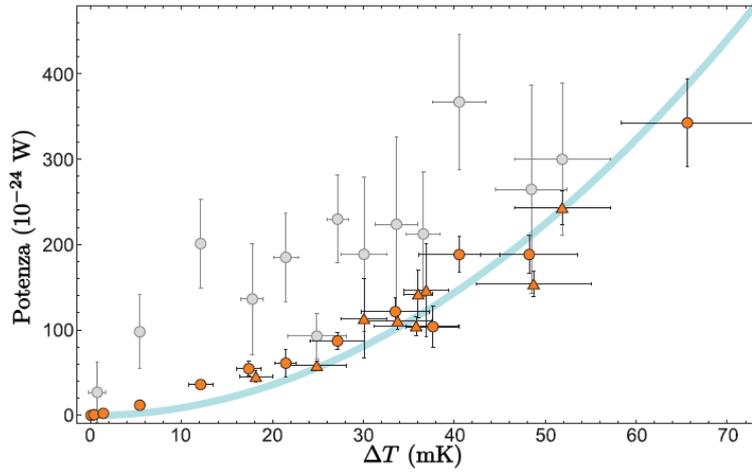


Figura 3.4: Da [1], potenza emessa dalla macchina; la linea blu rappresenta la previsione analitica data da (3.5), mentre i dati in arancione e grigio sono relativi al calcolo della potenza tramite misura di  $\omega_r$  e dell'ampiezza  $A_z$  rispettivamente. Le differenze di temperatura  $\Delta T$  sono date dalla variazione del rumore del campo elettrico (indicate dai cerchi) e dalla modifica del tempo di interazione (indicate dai triangoli).

L'efficienza della macchina si calcola come  $\eta_{cic} = W_{cic}/Q_h$ , dove  $Q_h = \int_h TdS$  è il calore assorbito dalla sorgente calda. L'entropia  $S$  si calcola come entropia di un oscillatore armonico termico,  $S = k_B[1 + \ln(k_B T/\hbar\omega_r)]$  da [8]. Analiticamente si trova infine

$$\eta_{an} = \frac{4k_B \sin^2(\pi d) \tan^2 \theta \Delta T}{m\pi^3 \gamma \omega_z [(d^2 - d)r_0]^2} \simeq (0.041 \text{K}^{-1}) \Delta T \quad (3.6)$$

in accordo con i dati sperimentali che raggiungono valori di  $\eta_{cic}$  pari a  $0.28 \pm 0.07\%$ ; un confronto tra i dati sperimentali e previsioni analitiche è riportato in figura 3.5.

Il limite di efficienza a potenza massima è dato dal teorema di Carnot  $\eta = 1 - T_c/T_h$ ; nel nostro caso si ha  $\eta = 3.8\%$  per cui la macchina termica qui presentata non è ottimale: per aumentare ulteriormente l'efficienza occorre aumentare la frequenza radiale di trappola  $\omega_r$  tramite una modifica nella geometria del sistema.

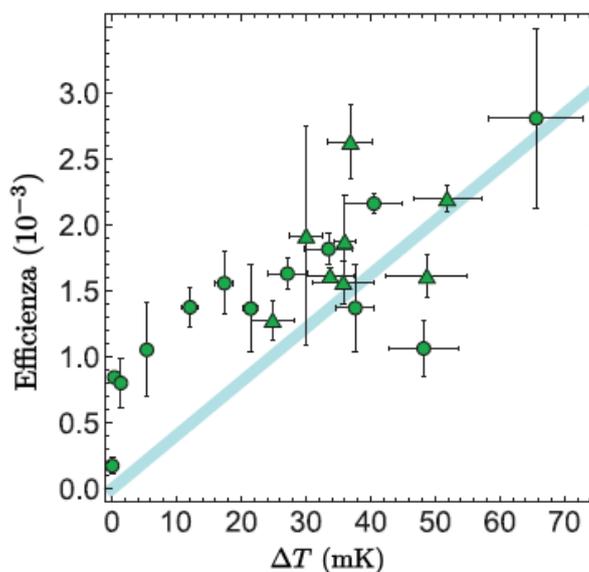


Figura 3.5: Da [1], efficienza misurata in funzione di  $\Delta T$ , la linea blu rappresenta il calcolo analitico; con i triangoli sono indicati i  $\Delta T$  ottenuti variando il tempo di interazione ione-sorgente, mentre con i cerchi è indicato il  $\Delta T$  ottenuto variando il segnale di rumore elettrico.

In questo capitolo è stata quindi mostrata la realizzazione di una macchina termica basata su un singolo ione con la quale si sono ottenuti discreti risultati di potenza ed efficienza, tuttavia le possibilità di miglioramento non mancano: l'implementazione di una macchina frigorifera descritta nel paragrafo 2.2 al posto del laser di raffreddamento potrebbe portare ad un ulteriore abbassarsi della temperatura minima raggiungibile dal sistema.

Questo elaborato si limita a sintetizzare i contenuti dell'articolo sperimentale "A Single-Atom Heat Engine" presentato nella rivista Science 352 nel 2017, tuttavia di recente sono stati pubblicati dei lavori più avanzati in cui si tengono conto di proprietà

quantistiche come la coerenza e la superposizione, trattati nell'articolo "Experimental Demonstration of Quantum Effects in the Operation of Microscopic Heat Engines" del Physical Review Letters 122, 110601 (2019).

# Appendice

## Disuguaglianza di Jensen

Per una funzione convessa reale  $\phi(x)$  con dominio discreto  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  la disuguaglianza di Jensen si scrive come

$$\phi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \leq \frac{\sum a_i \phi(x_i)}{\sum a_i}$$

che è equivalente a

$$\langle \phi(x) \rangle \geq \phi(\langle x \rangle)$$

dove le parentesi  $\langle \rangle$  indicano il valor medio.

Dati due numeri reali non negativi arbitrari tali che  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , la convessità di  $\phi$  implica che  $\forall x_1, x_2 : \phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 \phi(x_1) + \lambda_2 \phi(x_2)$ . La dimostrazione procede ora per induzione: dobbiamo dimostrare la validità della disuguaglianza

$$\phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 \phi(x_1) + \lambda_2 \phi(x_2) + \dots + \lambda_n \phi(x_n)$$

con  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  numeri non negativi tali che  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ .

Supponiamo che la disuguaglianza sia valida per  $n$ , dobbiamo quindi verificarla per  $n+1$ . Supponiamo che almeno un  $\lambda_i$  sia strettamente positivo (per esempio  $\lambda_1$ ), dalla proprietà delle funzioni convesse si ha

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = \phi\left(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i\right) \leq \lambda_1 \phi(x_1) + (1 - \lambda_1) \phi\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i\right).$$

Dato che

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} = 1$$

si può ripetere il ragionamento per l'ultimo termine della formula precedente e ottenere la disuguaglianza di Jensen per il caso discreto.

# Bibliografia

- [1] J. Rossnagel, S. T. Dawkins, K. N. Tolazzi, O. Abah, E. Lutz, F. Schmidt-Kaler, K. Singer. *A Single-Atom Heat Engine*. Science **352**, 325 (2017).
- [2] P. Skrzypczyk, A. J. Short, S. Popescu. *Work extraction and thermodynamics for individual quantum systems*. Nat. Commun. **5** 4185 (2014).
- [3] N. Linden, S. Popescu, P. Skrzypczyk. *How Small Can Thermal Machines Be? The Smallest Possible Refrigerator*. Phys. Rev. Lett. **105**, 130401 (2010).
- [4] U. Fano. *Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques*. Rev. Mod. Phys. **29**, 74 (1957).
- [5] W. Paul *Electromagnetic traps for charged and neutral particles*. Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).
- [6] M. Campisi, P. Hänggi, P. Talkner. *Quantum Fluctuation Relations: Foundations and Applications*. Rev. Mod. Phys. **83**, 771 (2011).
- [7] M. T. Mitchison *Quantum thermal absorption machines: refrigerators, engines and clocks*. ArXiv:1902.02672 (2019).
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifschitz. *Statistical Physics*. (1980).