

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

*DIPARTIMENTO di
INGEGNERIA INDUSTRIALE*

*CORSO DI LAUREA in
INGEGNERIA ENERGETICA*

TESI DI LAUREA

in

TRASMISSIONE DEL CALORE E TERMOFLUIDODINAMICA M

**STUDIO NON LINEARE DELLA CONVEZIONE
NATURALE IN UNO STRATO POROSO ORIZZONTALE**

CANDIDATO
Luca Bernardini

RELATORE:
Chiar.mo Prof.
Antonio Barletta

CORRELATORE
Dott. Michele Celli

Anno Accademico 2017/2018
Sessione II

And if the snow buries my, my neighborhood.
And if my parents are crying
Then I'll dig a tunnel from my window to yours.
Yeah, a tunnel from my window to yours.

You climb out the chimney,
And meet me in the middle, the middle of the town.
And since there's no one else around,
We let our hair grow long,
And forget all we used to know.
Then our skin gets thicker from
Living out in the snow.

You change all the lead
Sleepin' in my head,
As the day grows dim
I hear you sing a golden hymn

Then we tried to name our babies
But we forgot all the names that
The names we used to know.
But sometimes, we remember our bedrooms,
And our parents' bedrooms,
And the bedrooms of our friends.
Then we think of our parents,
Well what ever happened to them?!

You change all the lead
Sleepin' in my head to gold,
As the day grows dim,
I hear you sing a golden hymn,
The song I've been trying to say.

Purify the colors, purify my mind.
Purify the colors, purify my mind,
And spread the ashes of the colors,
Over this heart of mine!

"Arcade Fire, Neighborhood #1 (Tunnel)"

Alla mia famiglia

Indice

Capitolo 1: Introduzione	5
1.1 Obiettivo e contenuti della tesi	5
1.2 Problema di Rayleigh-Benard	7
Capitolo 2: Equazioni che governano il moto di un fluido	11
2.1 Equazioni fondamentali.....	11
2.1.1 Equazione di continuità	11
2.1.2 Equazione di Navier-Stokes	12
2.1.3 Equazione dell'energia	13
2.2 Approssimazione di Oberbeck-Boussinesq	15
2.3 Condizioni ausiliarie per la risoluzione di PDE.....	19
2.3.1 Condizioni al contorno.....	20
2.3.2 Condizioni iniziali	21
Capitolo 3: Problema di Bénard per mezzi porosi	22
3.1 Mezzi porosi.....	22
3.1.1 Porosità.....	24
3.1.2 Velocità intrinseca e relazione di Dupuit-Forcheimer.....	25
3.1.3 Legge di Darcy	26
3.1.4 Convezione	29
3.2 Problema di Darcy-Bénard	30
3.2.2 Analisi lineare	34
3.2.3 Caso di studio: modello bidimensionale stazionario e non lineare.....	41
3.3 Revisione della letteratura	44
3.3.1 Osservazioni sperimentali.....	45
Capitolo 4: Discretizzazione mediante metodo agli elementi finiti.....	47
4.1 Introduzione.....	47
4.1.1 Una introduzione al metodo degli elementi finiti	48
4.1.2 Cenni storici.....	51
4.2 Risoluzione dell'equazione di Poisson mediante metodo degli elementi finiti.....	52
4.2.1 Forma debole: equazione di Poisson	53
4.2.2 Funzioni test e campo ϕ	54
4.3 Metodo FEM su Wolfram Mathematica.....	56
4.3.1 Introduzione a Mathematica	56

4.3.2 FEM method	58
Capitolo 5: Implementazione del problema su Mathematica.....	66
5.1 Modello del problema	66
5.2 Implementazione del codice su Mathematica	68
5.3 Risultati ottenuti.....	74
5.3.1 Numero di celle di convezione ottenute al variare del numero di Rayleigh.....	75
5.3.2 Correlazione R e Nu	80
5.3.3 Calcolo dell'energia cinetica al variare di R.....	88
Capitolo 6: Analisi dei risultati e conclusioni.....	91
Bibliografia.....	96

Capitolo 1: Introduzione

1.1 Obiettivo e contenuti della tesi

Questa tesi si propone di analizzare l'estensione del problema di Rayleigh-Bénard, descritto brevemente nel paragrafo 1.2, al caso in cui lo strato orizzontale analizzato sia costituito da un mezzo poroso, ovvero un solido contenente vuoti interconnessi riempiti da fluido, tale caso è anche noto come problema di Darcy-Bénard.

In questo elaborato si costruirà un modello numerico del problema sopracitato con l'obiettivo di approssimarsi alla sua risoluzione mediante il pacchetto software Mathematica 11.1 (© Wolfram, inc.).

La struttura della tesi comprenderà, nel capitolo 2, una descrizione delle equazioni fondamentali che governano il moto di un fluido condotta avvalendosi dell'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq, si descriveranno, inoltre, le condizioni al contorno e le condizioni iniziali applicabili ad un generico sistema di equazioni differenziali.

Nel capitolo 3 verrà descritto il problema di Darcy-Bénard riferito ad uno strato poroso orizzontale, nonché le caratteristiche generali dei mezzi porosi stessi.

Si porrà particolare attenzione al caso in cui le equazioni che descrivono il problema siano considerate non lineari, stazionarie e descritte utilizzando la funzione di corrente, tale scenario costituirà il modello del problema che si cercherà in seguito di risolvere numericamente.

Verrà, altresì, riportata un'analisi della stabilità lineare condotta analiticamente per il problema di Darcy-Bénard.

Il capitolo 3 si concluderà con una breve revisione della letteratura attualmente esistente riguardante lo studio di instabilità convettive in mezzi porosi.

Sarà poi necessario, nel capitolo 4, introdurre il metodo degli elementi finiti il quale verrà utilizzato implicitamente dal software di calcolo per discretizzare il dominio del problema in esame e permettere quindi la risoluzione numerica del problema stesso.

Tale metodo sarà analizzato sia in via teorica, mediante la descrizione della procedura di soluzione della equazione di Poisson bidimensionale, che in maniera pratica descrivendo la procedura di implementazione del suddetto metodo sul software Mathematica 11.1 (© Wolfram, inc.).

Il capitolo 5 riguarderà la descrizione della tecnica di implementazione del problema di Darcy-Bénard sul software utilizzato mostrando sia la procedura utilizzata che i risultati ottenuti.

Verranno individuate le varie configurazioni a diverso numero di celle convettive che si formano al variare del numero di Rayleigh, si otterrà una correlazione tra il numero di Rayleigh e il numero di Nusselt medio alla parete e, infine, verrà riportato l'andamento dell'energia cinetica, per le configurazioni a diverso numero di celle di convezione ottenute, sempre al variare del numero di Rayleigh.

Nel capitolo 6 sarà condotta una analisi dei risultati visualizzati nel capitolo 5 ed il loro confronto con risultati ottenuti nella letteratura attualmente esistente.

1.2 Problema di Rayleigh-Benard

La convezione in uno strato piano orizzontale riscaldato dal basso, meglio nota con il nome di convezione di Rayleigh-Bénard, rappresenta un modello canonico per l'investigazione scientifica nei fenomeni di convezione, aiutandoci nella comprensione di processi fisici quali lo studio della morfologia del mantello terrestre o della superficie solare, così come l'andamento delle correnti marine e lo studio della meteorologia.

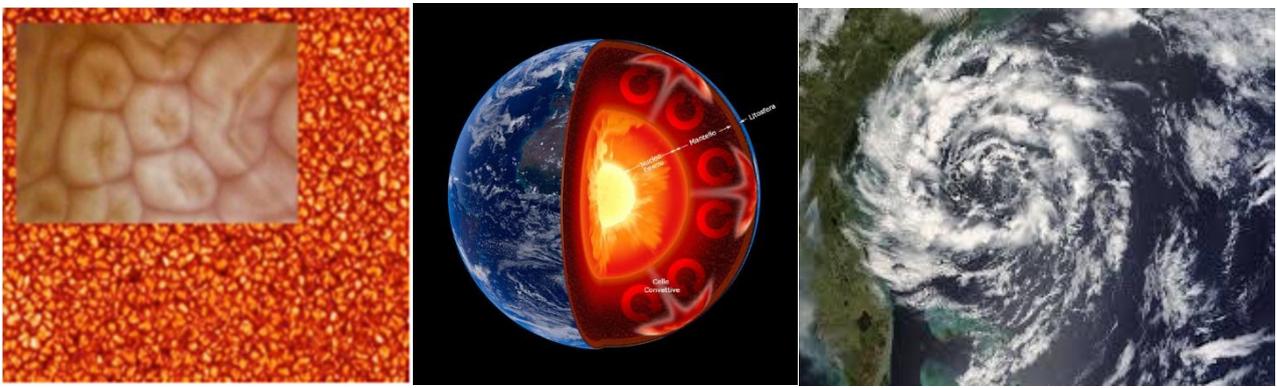


Figura 1.1: Da sinistra, celle convettive sulla superficie del sole [1], nel mantello terrestre e turbolenze metereologiche.

Nella sua più basilica descrizione il Problema di convezione di Rayleigh-Bénard consiste in un sottile strato di fluido che si estende nel piano normale alla direzione dell'accelerazione gravitazionale.

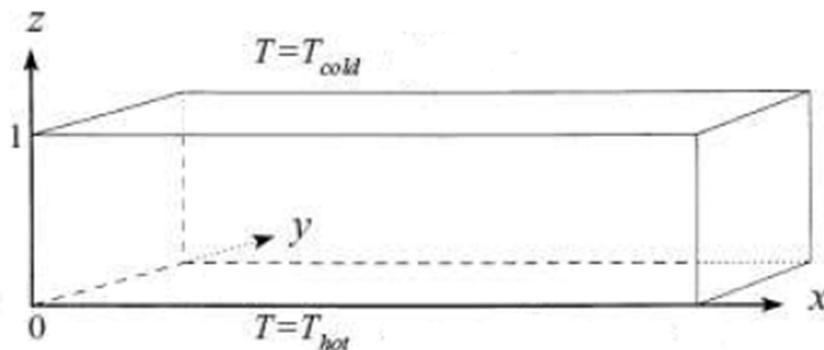


Figura 1.2: Dominio del problema di Bénard [1]

Il fluido sarà riscaldato dal basso e raffreddato dall'alto, la differenza di temperatura ΔT attraverso il fluido darà origine ad una differenza di densità, nello specifico le regioni di fluido vicino al bordo inferiore essendo scaldate tenderanno ad espandersi mentre le regioni di fluido prossime al bordo superiore raffreddato tenderanno a contrarsi.

Le differenze di densità a loro volta provocheranno una forza di galleggiamento la quale tenderà a riorganizzare il fluido più leggero al limite superiore e il fluido più pesante nella parte inferiore.

Per piccoli ΔT il fluido rimarrà fermo e il calore risulterà trasferito per conduzione attraverso il fluido stesso con un profilo di temperatura lineare.

Quando, invece, la differenza di temperatura supererà un certo valore critico il trasferimento di energia attraverso la riorganizzazione spaziale del fluido (veicolata da fluido freddo e fluido caldo) diventerà più efficiente rispetto alla dissipazione termica e viscosa e dunque si instaurerà il moto del fluido.

Tale fenomeno fu osservato già da Rumford (1797) e da Thomson (1882) ma solo successivamente, nel 1900, con gli esperimenti di Bénard [2] si avviò un'indagine accurata degli aspetti fisici del problema.

In particolare, Bénard osservò e documentò con materiale fotografico che il fluido in uno strato orizzontale scaldato dal basso si suddivide in celle entro le quali si svolge il moto e che tali celle tendono ad allinearsi e assumere forma esagonale costituendo una struttura reticolare periodica estesa sul piano.

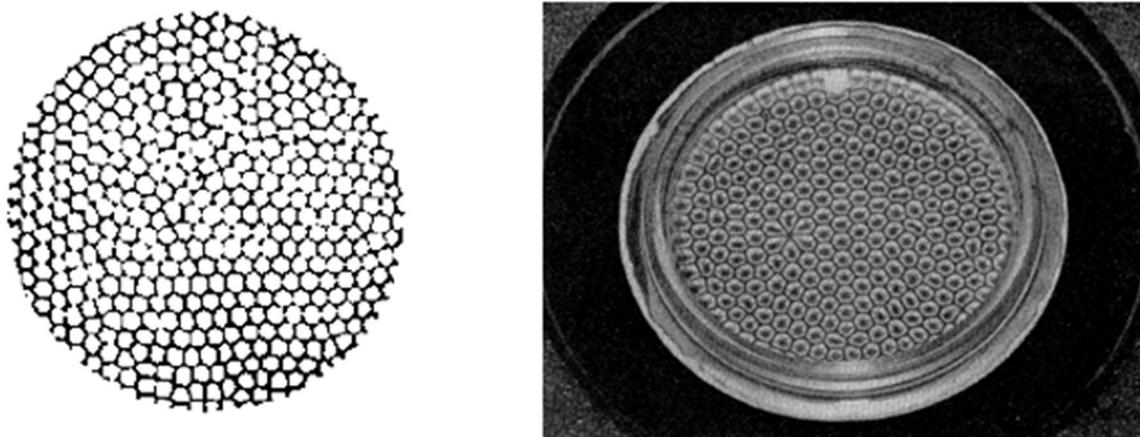


Figura 1.3: da sinistra, celle di Bénard in uno strato di spermaceti [2] e osservazione di pattern a celle esagonali in un olio di alluminio [3]

Gli esperimenti di Bénard furono condotti con strati dell'ordine del millimetro di spermaceti (sostanza cerosa presente nel capo dei capodogli e in quantità minori anche in altri cetacei) giacenti su una piastra metallica mantenuta a temperatura uniforme e costante e aventi la superficie superiore libera.

Bénard si accorse che, in funzione del gradiente di temperatura imposto al fluido (regolabile attraverso la temperatura della piastra sottostante), poteva ottenere differenti condizioni di moto nel sottile strato di fluido; nello specifico, aumentando il gradiente di temperatura ottenne dapprima configurazioni stazionarie di quiete ed in seguito, oltrepassato un certo valore di soglia, configurazioni a celle esagonali fino ad arrivare a condizioni di moto turbolento.

Nei suoi studi Bénard attribuì un ruolo fondamentale, nella formazione delle celle convettive, alla tensione superficiale del fluido e alla sua dipendenza dalla temperatura, ma non elaborò analiticamente questo aspetto limitandosi, invece, a misurare la grandezza delle celle in relazione alla profondità dello strato di fluido utilizzato.

Solo nel 1916, grazie al lavoro di Lord Rayleigh [4], si arrivò alla prima analisi matematica quantitativa corretta in grado di spiegare i risultati sperimentali osservati da Bénard.

L'analisi condotta da Rayleigh fu la prima in grado di spiegare, ignorando il ruolo della tensione superficiale, di come il meccanismo di instabilità dipendesse dal bilanciamento degli effetti viscosi e di galleggiamento nel fluido.

In particolare, a partire dalle equazioni di Navier-Stokes (si veda paragrafo 2.1), Rayleigh dimostrò che il parametro decisivo che porta all'insorgenza dei fenomeni convettivi non è di per sé il gradiente verticale di temperatura ma più precisamente un numero adimensionale che prese poi il nome di numero di Rayleigh; tale numero lega insieme gradiente di temperatura, accelerazione di gravità, profondità dello strato di fluido, coefficienti di espansione termica e viscosità cinematica del fluido.

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu \alpha} \quad (1.1)$$

Dove β è il coefficiente di espansione termica, g l'accelerazione gravitazionale, ν la viscosità cinematica, α la diffusività termica e ΔT è la differenza di temperatura tra i due piatti posti a distanza d .

Per una fissata profondità d , $\beta g \Delta T$ determina la taglia della forza di galleggiamento che tende a causare un locale riscaldamento e così un movimento di parte di fluido meno denso verso la parte superiore del dominio, viceversa un locale raffreddamento e quindi un movimento di fluido più denso dall'alto verso il piatto inferiore; ν esprime la forza di trascinamento viscosa che si oppone a tale moto mentre α determina il rateo di temperatura alla quale la porzione di fluido è equilibrata con il fluido circostante attraverso la sola diffusione termica.

L'insorgenza del moto convettivo attraverso una instabilità dello stato conduttivo avverrà ad un valore critico del numero di Rayleigh, per il caso di confini rigidi nella direzione verticale tale numero adimensionale corrisponderà a $Ra_c = 1708$ [5].

A numeri di Rayleigh leggermente superiori a questo valore critico si può osservare l'insorgenza di moti convettivi che portano alla formazione di una struttura regolare a nido d'ape di celle esagonali all'interno delle quali avviene il moto (convezione di Rayleigh-Bénard)

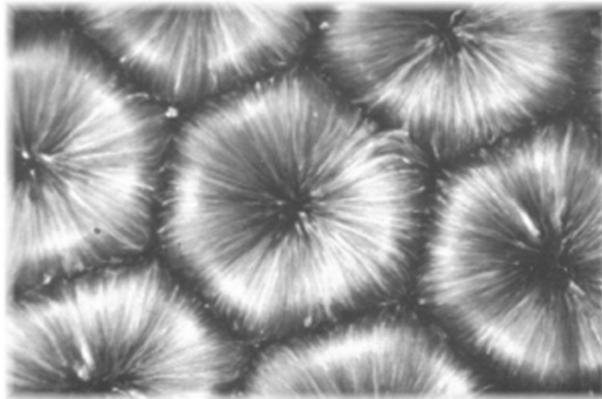


Figura 1.4: fotografia in time-lapse di celle convettive di Rayleigh-Bénard [6]

Quando il numero di Rayleigh diviene svariate volte più grande del valore critico il modello diviene instabile, insorgono moti oscillatori, ed aumentando ulteriormente il valore del numero di Rayleigh si arriva ad un modello di convezione turbolento.

Capitolo 2: Equazioni che governano il moto di un fluido

2.1 Equazioni fondamentali

Si definiscono flussi a convezione naturale quelli in cui il moto è generato dalle forze di galleggiamento; Le differenze di temperatura vengono introdotte nel campo, per esempio, attraverso i contorni mantenuti a temperatura costante e le differenze di densità che si generano inducono il moto: il fluido caldo tende a salire e quello freddo a scendere.

Per studiare tali flussi si utilizza un sistema ridotto di equazioni ottenute a partire dal sistema completo di Navier-Stokes in cui viene applicata l'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq, così chiamata dopo il pionieristico lavoro di Oberbeck [7] e Boussinesq [8].

Le equazioni di Oberbeck-Boussinesq sono ampiamente utilizzate come modello fisico-matematico per la maggioranza degli studi riguardanti l'analisi dei fenomeni di convezione quali ad esempio il problema di Rayleigh-Benard.

Il punto di partenza di questo modello è, come detto, quello di definire il set completo di equazioni che descrivono il moto di un fluido; ovvero l'equazione di bilancio locale della massa o equazione di continuità, l'equazione di bilancio locale della quantità di moto o equazione di Navier-Stokes e l'equazione di bilancio locale dell'energia.

2.1.1 Equazione di continuità

L'equazione di bilancio locale della massa, anche detta equazione di continuità può essere espressa come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

Dove con $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ si è indicato il campo di velocità, con ρ la densità e con t il tempo.

Se si considera un fluido incomprimibile, ovvero si assume che ρ sia indipendente dal tempo (assumendo la validità della somma su indici ripetuti) si otterrà

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

2.1.2 Equazione di Navier-Stokes

Considerando l'equazione di bilancio della quantità di moto espressa nella forma

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

Dove con g_i si è indicata l'accelerazione gravitazionale mentre $\frac{D}{Dt}$ rappresenta la notazione utilizzata per esprimere la derivata sostanziale

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Con σ_{ij} si è, invece, indicato il tensore degli sforzi meccanici così definito

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.5)$$

Nella quale p è la pressione del fluido, δ_{ij} è la Delta di Kronecker rappresentata da una matrice identità 3×3 ed infine τ_{ij} rappresenta il tensore delle forze viscosse che, per un fluido Newtoniano (fluido con viscosità non dipendente dalla velocità), può essere scritto

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u}_i)\delta_{ij} \quad (2.6)$$

Avendo indicato con D_{ij} il tensore delle deformazioni.

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.7)$$

Andando ad introdurre tali notazioni nella (2.3) si otterrà l'equazione di bilancio della quantità di moto espressa nella forma

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) \right] \quad (2.8)$$

Riconducibile all'equazione di Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (2.9)$$

2.1.3 Equazione dell'energia

A partire dall'equazione di bilancio locale dell'energia così scritta

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = q_g - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} D_{ij} \quad (2.10)$$

Nella quale $\rho \frac{D\varepsilon}{Dt}$ rappresenta la variazione di energia interna nel tempo, q_g il calore generato e $\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$ il calore scambiato attraverso la superficie e infine, il prodotto tra i due tensori può essere esplicitato come in seguito

$$\sigma_{ij}D_{ij} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + D_{ij}\tau_{ij} \quad (2.11)$$

Ove il primo termine a destra dell'uguaglianza esprime il lavoro di compressione ed il secondo l'energia dissipata per attrito.

Ricordando che per un fluido Newtoniano il tensore delle forze viscosi è espresso dalla (2.6), l'energia dissipata per attrito può essere scritta sviluppando il prodotto scalare tra i due tensori, ottenendo

$$D_{ij}\tau_{ij} = \mu\Phi \quad (2.12)$$

Dove con Φ si è indicata la funzione di dissipazione così definita

$$\Phi = 2D_{ij}D_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot u_i)^2 \quad (2.13)$$

Mediante la legge di Fourier, la quale recita

$$q_i = k\nabla T \quad (2.14)$$

Dove con k si è intesa la conducibilità termica.

Il calore scambiato attraverso la superficie potrà essere riscritto come

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = k\nabla^2 T \quad (2.15)$$

Introducendo tali risultati nell'equazione (2.10) si otterrà la seguente forma per l'equazione di bilancio dell'energia:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = q_g + k\nabla^2 T - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu\Phi \quad (2.16)$$

2.2 Approssimazione di Oberbeck-Boussinesq

Alla base di tale approssimazione vi è l'assunzione per la quale si considererà, nell'equazione di bilancio della quantità di moto, ρ coincidente con la densità di riferimento ρ_0 in tutti i termini eccetto quello relativo al potenziale gravitazionale ρg_i nel quale si assumerà che le variazioni della densità non saranno trascurabili ma dipenderanno, invece, dalla temperatura.

Risulterà pertanto, per il termine relativo al potenziale gravitazionale, $\rho = \rho(T)$; avendo ipotizzato che ogni elemento di fluido compia un processo approssimativamente isobaro.

Si ipotizzerà, inoltre, che le variazioni di densità in funzione della temperatura siano abbastanza piccole da permettere la descrizione di $\rho(T)$ mediante lo sviluppo in serie di Taylor

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{T=T_0} (T - T_0) + O(T - T_0)^2 \quad (2.17)$$

Pertanto, prendendo in esame il sistema di equazioni fondamentali (2.1),(2.8) e (2.16) già viste nelle sezioni precedenti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot u_i) \right] \quad (2.8)$$

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = q_g + k\nabla^2 T - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu\Phi \quad (2.16)$$

La suddetta approssimazione di Oberbeck-Boussinesq porterà alle semplificazioni in seguito analizzate.

Per l'equazione di continuità (2.1) sostituendo a ρ la densità di riferimento ρ_0 si otterrà

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \quad (2.18)$$

Dalla quale, essendo la densità di riferimento un termine costante, si ricaverà ancora

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.19)$$

Mentre l'equazione di bilancio locale della quantità di moto (2.9) diverrà

$$\rho_0 \frac{Du_i}{Dt} = \rho(T)g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\nabla^2 u_i \quad (2.20)$$

Nella quale è stata utilizzata la (2.19) per eliminare il termine $\frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_i)$.

Risulta necessario definire due parametri essenziali per il proseguimento della trattazione: il coefficiente isobaro di dilatazione termica β e il carico piezometrico P .

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \quad (2.21)$$

$$P = p - \rho_0 g x_i \quad (2.22)$$

Nella (2.21) la derivata della densità rispetto al tempo è intesa come effettuata a pressione costante; mentre, con la (2.22), viene espressa la differenza tra la pressione dinamica e la pressione idrostatica.

Applicando queste considerazioni all'equazione (2.20) si otterrà l'equazione di bilancio della quantità di moto scritta secondo l'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq

$$\rho_0 \frac{Du_i}{Dt} = -\rho_0 \beta (T - T_0) g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (2.23)$$

Il termine $-\rho_0 \beta (T - T_0) g_i$ è chiamato forza di galleggiamento ed è diretto verticalmente (sull'asse y) secondo la direzione dell'accelerazione di gravità con verso dipendente dal segno di $(T - T_0)$; Pertanto, elementi di fluido con $T > T_0$ saranno spinti verso l'alto mentre elementi di fluido con $T < T_0$ verso il basso.

Infine, per l'equazione di bilancio dell'energia (2.16), considerando i risultati finora ottenuti, è possibile scrivere

$$\rho_0 \frac{D\varepsilon}{Dt} = q_g + k \nabla^2 T + \mu \Phi \quad (2.24)$$

Ove Φ è la funzione dissipazione espressa dalla (2.13), avendo però annullato il termine $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ in accordo con la (2.19).

Ricordando la definizione di derivata sostanziale (2.4) e assumendo che per l'energia interna specifica ε si possa scrivere

$$d\varepsilon = c dT \quad (2.25)$$

Nella quale con c si è indicato il calore specifico del fluido.

Si potrà riscrivere l'equazione dell'energia come in seguito

$$\rho_0 c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = q_g + k \nabla^2 T + 2\mu D_{ij} D_{ij} \quad (2.26)$$

Occorre specificare che L'equazione di bilancio locale dell'energia così ricavata non è univocamente definita in letteratura e può essere espressa secondo diverse formulazioni, si faccia riferimento a [9] per approfondire.

In conclusione introducendo nelle (2.19) , (2.23) e (2.26) la viscosità cinematica ν e la diffusività termica α così definite

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (2.27)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho_0 c} \quad (2.28)$$

Si otterrà il sistema di equazioni che governano il moto di un fluido scritte secondo l'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\beta(T - T_0)g_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_g}{\rho_0 c} + 2 \frac{\nu}{c} D_{ij} D_{ij} \quad (2.31)$$

2.3 Condizioni ausiliarie per la risoluzione di PDE

Quando si cerca di risolvere una equazione alle derivate parziali (partial differential equation, PDE) si ottiene una soluzione che rimane indeterminata a causa della presenza di costanti di integrazione.

Si prenda come esempio la seguente equazione differenziale alle derivate ordinarie omogenea e la corrispondente soluzione generale

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = C_1x + C_2 \quad (2.32)$$

Nella quale ϕ rappresenta un generico campo incognito mentre C_1 e C_2 sono le costanti di integrazione di cui si parlava sopra, appare chiaro che la soluzione all'equazione risulta nota a meno delle due costanti di integrazione; vi è, pertanto, la necessità di avere ulteriori informazioni per poter risolvere il problema.

Tali formazioni saranno fornite attraverso le condizioni al contorno e/o le condizioni iniziali in numero pari alle costanti di integrazione che occorre determinare.

Le condizioni al contorno saranno applicate alle pareti che racchiudono un dominio, tali condizioni saranno presenti sia nei problemi riguardanti domini chiusi (equazioni ellittiche, problemi di equilibrio), sia nei problemi a carattere evolutivo riguardanti un dominio aperto (equazioni paraboliche e iperboliche, problemi di propagazione).

Le condizioni iniziali saranno invece applicate ai soli problemi di propagazione, andranno posizionate sul lato chiuso presente nella direzione di propagazione; vi sarà necessità di una sola condizione iniziale per i problemi descritti da equazioni paraboliche mentre ne occorreranno due per quelli descritti da equazioni iperboliche.

In seguito, verranno descritte le tre tipologie esistenti di condizioni al contorno e le due riguardanti, invece, le condizioni iniziali

2.3.1 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno sono necessarie per la soluzione di PDE ellittiche, paraboliche ed iperboliche, quindi quando si ha a che fare sia con problemi al contorno che con problemi di propagazione.

Si suddividono in tre gruppi: le condizioni al contorno di primo tipo anche note come condizioni di Dirichlet, le condizioni al contorno di secondo tipo o di Neumann e le condizioni al contorno di terzo tipo o di Robin.

➤ Condizioni al contorno di Dirichlet:

Consistono nell'imporre il valore del campo ϕ su un contorno che delimita il dominio del problema considerato, esprimendole nella forma più generale si avrà

$$\phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \forall t > 0 \quad (2.33)$$

Nella quale \mathbf{x} rappresenta il vettore (x, y, z) , t il tempo mentre $\partial\Omega$ indica la frontiera del dominio spaziale Ω considerato; infine, $f(\mathbf{x}, t)$ rappresenta una funzione nota che può variare sia nello spazio che nel tempo.

Il caso più semplice sarà quello in cui la $f(\mathbf{x}, t)$ assume un valore costante ϕ_0 su un contorno.

➤ Condizioni al contorno di Neumann:

Consistono nell'imporre il valore della derivata di ϕ in direzione normale ad un contorno che delimita il dominio del problema considerato, nella loro forma più generale possono essere così enunciate

$$\nabla\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \forall t > 0 \quad (2.34)$$

Dove ∇ rappresenta l'operatore gradiente espresso dal vettore $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, \mathbf{n} versore normale al contorno considerato.

Il caso più semplice sarà quello in cui la funzione nota $f(\mathbf{x}, t)$ assume un valore costante ϕ_0 su un contorno.

➤ Condizioni al contorno di Robin:

Sono una combinazione delle condizioni di primo e secondo tipo, nella loro forma più generale possono essere così espresse

$$\alpha \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} + \beta \phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \forall t > 0 \quad (2.35)$$

Si osserva la presenza di due parametri (α, β) , nel caso in cui $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ si riottengono le condizioni al contorno di Dirichlet mentre se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ si avranno le condizioni di Neumann

2.3.2 Condizioni iniziali

Le condizioni iniziali sono necessarie per la risoluzione di PDE paraboliche ed iperboliche, ovvero quando si ha a che fare con problemi di propagazione nei quali occorre analizzare l'evoluzione temporale di una data variabile in un dato dominio aperto a partire dall'istante iniziale dell'osservazione.

Le condizioni iniziali possono essere di due tipi e nella loro forma più generale sono schematizzabili come in seguito

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= f_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad t = 0 \\ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= f_2(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad t = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nella quale $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$ sono funzioni note, variabili solamente nello spazio e non nel tempo; è bene specificare che per la risoluzione di PDE paraboliche sarà sufficiente una sola delle due condizioni definite dalla (2.36) mentre per la risoluzione di PDE iperboliche saranno necessarie entrambe le condizioni iniziali.

Capitolo 3: Problema di Bénard per mezzi porosi

3.1 Mezzi porosi

Con il termine mezzo poroso si intende un materiale costituito da una matrice solida contenete pori (vuoti) interconnessi.

Tali mezzi possono essere formati da un singolo solido in cui sono presenti fori (ad esempio una spugna) oppure da numerosi solidi più piccoli ravvicinati che presentano piccoli spazi tra loro (come ad esempio la sabbia).

Generalmente si assume che la matrice solida sia rigida o che possa subire soltanto piccole deformazioni.

L'interconnessione tra i vuoti presenti nel mezzo poroso fa sì che all'interno di esso possa circolare un fluido.

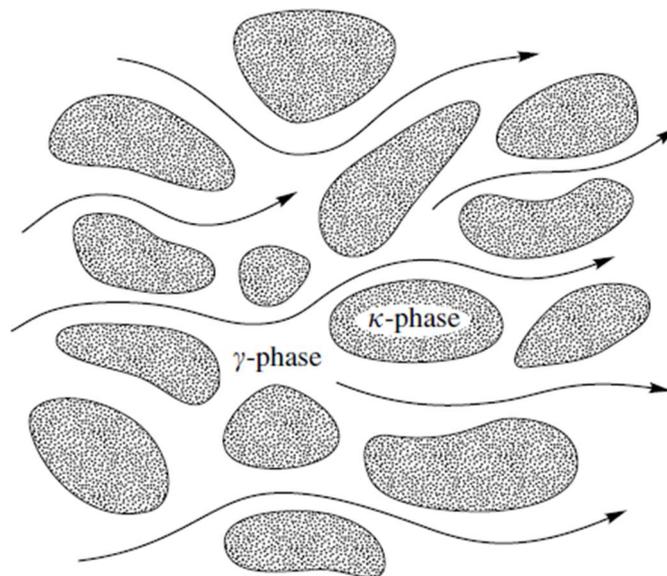


Figura 3.1: mezzo poroso [10]

In figura 3.1 si può osservare un fluido, indicato dalla fase γ (γ -phase), che fluisce all'interno di un solido impermeabile, rappresentato dalla fase κ (κ -phase).

Nella situazione più semplice il volume vuoto è saturato da un singolo fluido (flusso monofase), può, altresì, verificarsi la situazione nella quale all'interno del mezzo poroso circolano due fluidi, un liquido e un gas (flusso bifase); in questo elaborato si prenderà in considerazione il solo caso di flusso monofase.

In un mezzo poroso naturale la distribuzione dei pori rispetto alla forma e alla dimensione del mezzo risulta irregolare; si pensi ad esempio alla sabbia di una spiaggia, al legno o ad un polmone umano.

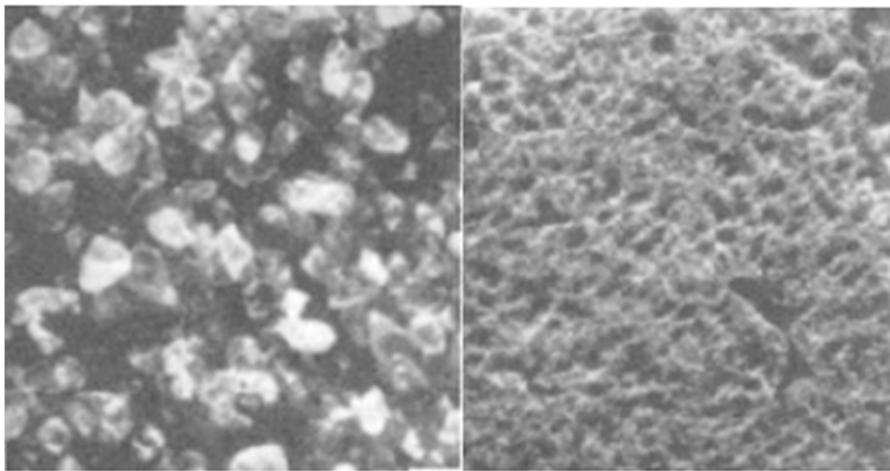


Figura 3.2: da sinistra; sabbia di una spiaggia e tessuto di un polmone umano [11]

Un mezzo poroso artificiale (creato dall'uomo) può presentare regolarità nella distribuzione dei pori, sono esempi di questa categoria i materiali ceramici o le schiume metalliche (figura 3.3).

I mezzi porosi possono essere utilizzati per modellare fenomeni naturali quali i flussi di acque sotterranee, la circolazione del sangue all'interno di tessuti umani o ancora il flusso del magma vulcanico nella roccia solida non fusa; oppure per modellare fenomeni veicolati dall'intervento umano come ad esempio processi di raffreddamento industriale che utilizzano pellet oppure reazioni chimiche che avvengono all'interfaccia tra un solido e un fluido in esso contenuto.

Nello studio del flusso di un fluido all'interno di un mezzo poroso assume un ruolo preponderante la scala di grandezza sulla quale si svilupperà l'analisi sperimentale, occorrerà collegare la struttura di flusso effettiva con il dominio individuato dal solutore di problemi che si intende utilizzare.

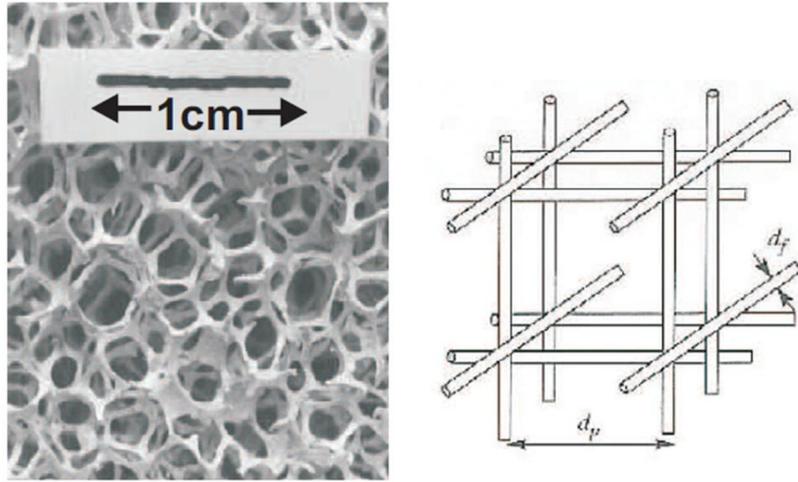


Figura 3.3: microstruttura di una schiuma metallica e sua rappresentazione schematica [12]

3.1.1 Porosità

Una quantità basilare per la descrizione di un mezzo poroso è la porosità φ , definita come frazione tra il volume occupato dai pori (nei quali fluirà il fluido) e volume totalmente occupato dal mezzo.

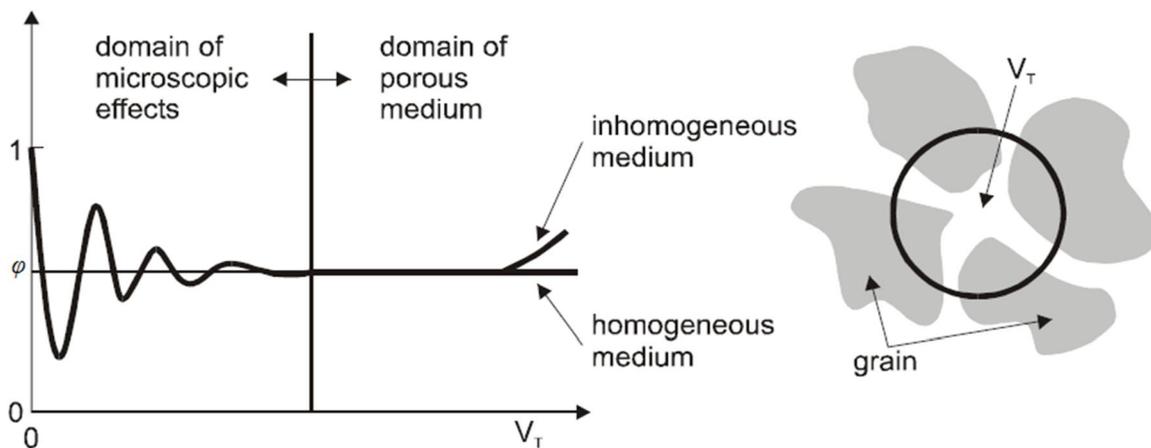


Figura 3.4: Volume rappresentativo per misure di porosità [13]

In riferimento alla figura 3.4, si considera un volume rappresentativo V_t (comprendente sia solido che cavità) ed un volume V_f , compreso in V_t , rappresentativo delle sole cavità.

Possiamo, allora, definire la porosità, in riferimento a [13], come

$$\varphi = \frac{V_f}{V_t} \quad (3.1)$$

$\varphi - 1$ rappresenta, invece, la frazione del mezzo poroso occupata dal solido.

φ appartiene all'intervallo $[0,1]$: nel caso in cui sia pari a 0 avremo un materiale non poroso (impermeabile al fluido), mentre nel caso in cui la porosità sia pari a 1 saremo nel caso di assenza di solido (il fluido si muove liberamente nello spazio).

La porosità risulta una quantità dipendente dalla grandezza del volume totale preso in considerazione: se tale volume appare troppo piccolo la porosità calcolata potrebbe discostarsi notevolmente dal valore reale, d'altro canto se il volume risulta essere troppo grande la porosità potrebbe deviare dal valore reale a causa dell'influenza dell'eterogeneità del mezzo (tale ragionamento è rappresentato graficamente in figura 3.4).

3.1.2 Velocità intrinseca e relazione di Dupuit-Forcheimer

Lo studio della convezione nei mezzi porosi si basa sul presupposto che un mezzo poroso saturo di fluido possa essere descritto come continuo, nel senso che il volume rappresentativo del sistema contenga un numero di pori molto elevato tra loro interconnessi [14].

Dunque, occorrerà considerare elementi di volume sufficientemente grandi rispetto al volume dei singoli pori in maniera tale da poter ottenere una media volumetrica realistica.

In questa maniera si potrà definire un campo di velocità del fluido come valore medio della velocità locale del fluido u_i^* .

Occorrerà distinguere una media calcolata rispetto al volume rappresentativo V_t , comprendente sia i pori che la matrice solida, e una media calcolata rispetto al volume V_f , contenente solamente i pori in cui fluisce il fluido.

Chiameremo velocità intrinseca media del fluido (U_i) la velocità media calcolata sul volume V_t espressa dalla (3.2).

$$U_i = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} u_i^* dV \quad (3.2)$$

Mentre, chiameremo velocità di infiltrazione o velocità di Darcy la velocità media calcolata sul volume V_t

$$u_i = \frac{1}{V_t} \int_{V_t} u_i^* dV \quad (3.3)$$

Poiché la velocità locale del fluido u_i^* risulta, naturalmente, nulla in tutto il volume V_t eccetto che nella parte V_f in cui fluisce il fluido, i due integrali presenti nella (3.2) e nella (3.3) risultano coincidenti.

Risulta possibile, pertanto, scrivere la relazione che lega la velocità intrinseca U_i alla velocità di Darcy come in seguito

$$u_i = \varphi U_i \quad (3.4)$$

Tale relazione prende il nome di relazione di Dupuit-Forcheimer, Il valore locale della velocità di infiltrazione u_i dipenderà dalla forma e dalla dimensione dei pori nonché dalle cause che determinano il moto del fluido.

3.1.3 Legge di Darcy

Quando si cerca di modellare il comportamento del flusso di un fluido all'interno di un mezzo poroso si può scegliere tra un approccio microscopico od uno macroscopico [12].

L'approccio microscopico consiste nel concentrarsi su una piccola area di volume modellando i pori come canali pieni di fluido mediante l'utilizzo di un approccio fluidodinamico tradizionale.

Tale approccio richiederà una conoscenza dettagliata della struttura interna del mezzo poroso e le risorse computazionali necessarie alla modellazione risulteranno quasi sempre eccedere limiti ragionevoli quando si considererà un, sufficientemente, grande dominio.

In alternativa sarà possibile, attraverso un approccio macroscopico, utilizzare quantità globali come la permeabilità in sostituzione alla dettagliata microstruttura del materiale.

Tale approccio richiederà l'utilizzo di equazioni nelle quali sarà presente un campo di velocità mediato piuttosto che una dettagliata velocità microscopica.

In questo elaborato adotteremo un approccio macroscopico basato sull'equazione nota come legge di Darcy.

Nel 1856 Darcy pubblicò il suo rapporto sulle fontane pubbliche di Dijon [15], il quale presentava una equazione utile a relazionare la portata volumetrica alla differenza di pressione, in seguito tale relazione è stata affinata per includere gli effetti di viscosità e permeabilità, fino al raggiungimento della forma oggi nota come legge di Darcy

$$\frac{\mu}{K}u_i = -\nabla P + f_i \quad (3.5)$$

Nella quale si è indicato con μ la viscosità dinamica del fluido, con K la permeabilità del mezzo poroso, la quale risulta indipendente dalla natura del fluido ma dipendente dalla geometria del mezzo, con ∇P il gradiente di pressione, con u_i si è espressa la velocità del fluido precedentemente definita come velocità di Darcy (3.4) e con f_i la forza per unità di volume che agisce sul fluido.

Tale legge sperimentale è stata successivamente derivata teoricamente utilizzando tecniche di discretizzazione volumetrica da autori quali Whitaker [16].

Tale legge è valida per un flusso incomprimibile e per flussi con basse velocità per i quali il numero di Reynolds sia sufficientemente basso (moto laminare).

Il numero di Reynolds può essere così definito

$$Re = \frac{u_i D}{\nu} \quad (3.6)$$

In questo caso (flussi laminari e velocità di Darcy relativamente piccola) il gradiente di pressione risulta proporzionale alla velocità media.

Nel caso in cui non si possa applicare l'ipotesi di flusso laminare in ogni poro si avrà la transizione verso un regime turbolento, il gradiente di pressione sarà proporzionale al quadrato della velocità media del fluido.

Per tenere conto di tale effetto occorrerà estendere la legge di Darcy mediante l'utilizzo del modello di Darcy-Forcheimer

$$\frac{\mu}{K} u_i \left(1 + \frac{C_f \sqrt{K}}{\nu} |u_i| \right) = -\nabla P + f_i \quad (3.7)$$

Dove si è indicato con C_f il fattore di forma, ovvero un parametro adimensionale determinato sperimentalmente noto anche con il nome di coefficiente di Forcheimer; mentre con ν si è espressa la viscosità cinematica definita come il rapporto tra la viscosità dinamica e la densità.

Tale modello tenderà alla legge di Darcy nel limite $C_f \rightarrow 0$ mentre quando risulterà $\frac{C_f \sqrt{K}}{\nu} |u_i| \gg 1$ si verificherà la transizione al regime turbolento.

Un criterio ampiamente accettato per stabilire quando la legge di Darcy debba essere abbandonata in favore del modello di Darcy-Forcheimer si basa sulla descrizione della permeabilità attraverso il numero di Reynolds espresso dalla (3.6).

Quando tale numero supera un certo limite fortemente dipendente dalla microstruttura del mezzo la legge di Darcy non potrà più essere applicata e occorrerà adottare il modello di Darcy-Forcheimer; per approfondire si faccia riferimento a [12].

Sia la legge di Darcy che il modello di Darcy-Forcheimer non presentano derivate della velocità a differenza dell'equazione (2.30) per la quantità di moto; per esse sarà, quindi, necessaria l'imposizione di una sola condizione al contorno, per esempio la condizione di impermeabilità

$$u_i \cdot \hat{n} = 0 \quad (3.8)$$

Dove con \hat{n} si è indicato il versore normale alla superficie.

3.1.4 Convezione

La convezione è un movimento di fluido che si verifica a causa di differenze di densità tra diverse regioni del fluido stesso, quando si è in presenza di gravità la differenza di densità determina la presenza di forze di galleggiamento; Il fluido più leggero tenderà a spostarsi verso l'alto mentre il fluido più pesante tenderà a spostarsi verso il basso.

In uno strato poroso orizzontale delimitato da due pareti tenute a due diverse temperature (scaldato dal basso) vi sarà un gradiente verticale di temperatura e lo strato di fluido sarà soggetto ad instabilità e moto convettivo se le forze di galleggiamento risulteranno sufficientemente forti da superare le forze viscosive e dissipative che si oppongono al moto.

In un mezzo poroso la frazione tra le forze di galleggiamento e le forze viscosive è indicata mediante il numero di Darcy-Rayleigh definito come

$$R = \frac{\rho g \beta \Delta T K H}{\mu \alpha} \quad (3.9)$$

Dove ρ rappresenta la densità, g il modulo dell'accelerazione di gravità, β il coefficiente di dilatazione termica, ΔT la differenza di temperatura tra i due piatti che delimitano lo strato considerato, K la permeabilità del mezzo, H una scala di lunghezza appropriata per il problema considerato, μ la viscosità dinamica e α la diffusività termica.

In svariati problemi, quali ad esempio il problema di Bénard per uno strato poroso orizzontale, vi sarà un valore critico di soglia del numero di Darcy-Rayleigh appena definito oltre il quale si verificherà instabilità convettiva, tale numero sarà indicato come R_c .

Il verificarsi della convezione porterà ad una significativa alterazione del diagramma di flusso e di conseguenza saranno alterate importanti caratteristiche quali la trasmissione del calore.

3.2 Problema di Darcy-Bénard

Il problema di Darcy-Benard, noto anche come problema di convezione di Horton-Roger-Lapwood (si faccia riferimento a [17] e [18]) è il problema di riferimento per la stabilità termoconvettiva nei mezzi porosi ed è l'analogo del problema di Bénard per un fluido chiaro di cui si è già accennato nel capitolo introduttivo.

Nella sua configurazione più classica il problema di Darcy Bénard viene rappresentato da uno strato poroso completamente saturo di fluido e confinato sopra e sotto da superfici impermeabili ed isoterme.

La superficie inferiore che delimita lo strato in esame è scaldata ad una temperatura T_h più elevata rispetto a quella a cui è mantenuta la superficie superiore T_c , ciò darà origine ad uno, potenzialmente instabile, stato nel quale il fluido più denso si troverà al di sopra del fluido più leggero, si faccia riferimento alla figura 3.5.

Considerando il numero di Darcy-Rayleigh espresso dalla (3.9), per un mezzo con un dato set di proprietà fisiche, risulta chiaro che il valore della differenza di temperatura tra la superficie superiore e quella inferiore nonché l'altezza H dello strato influiranno sul valore del numero stesso, inoltre, se si verifica il superamento del limite R_c si avrà transizione da moto laminare a moto turbolento.

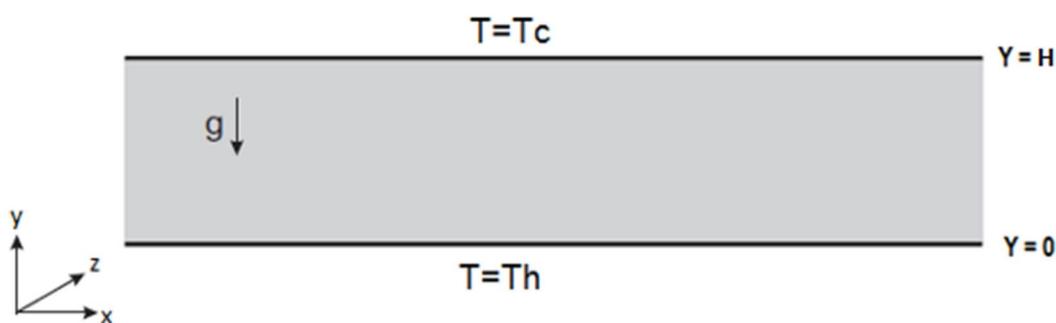


Figura 3.5: Dominio di flusso per il problema di Darcy-Bénard [12]

Horton e Rogers [17] e Lapwood [18] derivarono la curva di stabilità lineare per il problema di Darcy-Bénard espressa dall'equazione (3.10).

$$R = \frac{(\lambda^2 + \pi^2)^2}{\lambda^2} \quad (3.10)$$

Attraverso tale equazione è possibile determinare il valore critico (soglia) al di sopra del quale si verificherà il fenomeno della convezione nel dominio di flusso.

Il minimo valore critico derivato per il numero di Rayleigh risulta essere $R_c = 4\pi^2$ e il numero d'onda associato risulta valere $\lambda = \pi$.

Dunque, per $R < 4\pi^2$ lo stato conduttivo rimane stabile, mentre, quando il numero di Rayleigh supera tale valore di soglia si genererà instabilità sottoforma di moto cellulare cui viene associato un numero d'onda λ [11].

Confrontando il valore critico del numero di Darcy-Rayleigh ($R_c = 4\pi^2$), di cui si è appena discusso, con il valore critico del numero di Rayleigh per la formazione di celle convettive nel problema di Rayleigh-Bénard classico ($Ra_c = 1708$), già introdotto nel capitolo 1; ad una prima analisi, potrebbe sembrare che sia più facile ottenere instabilità convettive nel caso di fluido che fluisce in un mezzo poroso anziché nel caso di fluido libero.

Occorre, tuttavia, considerare che, mentre il numero di Rayleigh per un fluido libero risulta proporzionale allo spessore dello strato di fluido al cubo, nel caso di fluido all'interno di un mezzo poroso, risulta, invece, proporzionale allo spessore dello strato moltiplicato per la Permeabilità.

Dunque, essendo la permeabilità molto piccola, si può concludere che sarà più facile per un fluido libero raggiungere la condizione $Ra_c > 1708$ che, per un mezzo poroso saturato di fluido avere $R_c > 4\pi^2$.

Assumendo la validità dell'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq espressa dal set di equazioni (2.29)-(2.31) Nonché della legge di Darcy espressa dall'equazione (3.5) e trascurando gli effetti della dissipazione viscosa, possiamo scrivere le equazioni di bilancio locale per il problema di Darcy-Bénard (in riferimento a [14]).

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{u}_i = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\mu}{K} \tilde{u}_i = -\tilde{\nabla} \tilde{P} + \rho_0 g \beta (\tilde{T} - T_0) \hat{y} \quad (3.12)$$

$$\rho_0 c \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_i \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \right) = k' \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \quad (3.13)$$

Dove, in questo caso, con l'apice \sim si è voluto indicare che il campo in questione è dimensionale, si ricorda che \tilde{P} rappresenta il carico piezometrico, ovvero la differenza tra la pressione e la pressione idrostatica ($-\rho g \tilde{y}$), \hat{y} è il versore diretto lungo l'asse \tilde{y} , ρ_0 è la densità valutata rispetto alla temperatura di riferimento T_0 , β rappresenta il coefficiente di espansione termica, c il calore specifico e k' la conducibilità termica effettiva del mezzo poroso; Chiameremo, inoltre, ($\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$) le componenti del vettore velocità \tilde{u}_i .

Per le condizioni al contorno in prossimità delle due pareti si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{y} = 0 : \quad \tilde{v} = 0, \tilde{T} = T_h \\ \tilde{y} = H : \quad \tilde{v} = 0, \tilde{T} = T_c \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2.1 Adimensionalizzazione delle equazioni

Per adimensionalizzare il set di equazioni (3.11)-(3.13) nonché le condizioni al contorno (3.14) occorrerà definire i seguenti parametri adimensionali, in riferimento a [23]

$$(x, y, z) = \frac{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{H} \tag{3.15}$$

$$t = \frac{\alpha'}{H^2} \tilde{t} \tag{3.16}$$

$$u_i = \frac{H}{\alpha'} \tilde{u}_i \tag{3.17}$$

$$P = \frac{K}{\mu \alpha'} \tilde{P} \tag{3.18}$$

$$T = \frac{\tilde{T} - T_c}{T_h - T_c} \quad (3.19)$$

$$\nabla = H\tilde{\nabla} \quad (3.20)$$

$$R = \frac{g\beta(T_h - T_c)KH}{\nu\alpha'} \quad (3.21)$$

Dove (x, y, z) sono le coordinate spaziali adimensionali, t è il tempo adimensionale, u_i il campo di velocità adimensionale, P il carico piezometrico adimensionale, T la temperatura adimensionale, ∇ l'operatore gradiente adimensionale.

Si è inoltre richiamato il numero adimensionale di Darcy-Rayleigh (R) già espresso nella equazione (3.9) dove è stato, però, inserito il ΔT relativo al presente problema, $\alpha' = \frac{k'}{\rho_0 c}$ indica la diffusività termica effettiva, infine, la viscosità cinematica ν è ottenuta dal rapporto tra viscosità dinamica e densità di riferimento.

Adimensionalizzando il set di equazioni (3.11)-(3.13) mediante l'introduzione dei parametri adimensionali (3.15)-(3.21) si otterrà il sistema di equazioni adimensionali che governano il moto per il problema in esame

$$\nabla \cdot u_i = 0 \quad (3.22)$$

$$u_i = -\nabla P + TR\hat{y} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (3.24)$$

Mentre le condizioni al contorno espresse in forma adimensionale saranno

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & v = 0, T = 1 \\ y = 1 : \quad & v = 0, T = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.2.2 Analisi lineare

Tale sezione è condotta in analogia con quanto riportato in [14], una analisi dettagliata della stabilità lineare per il problema di Darcy-Bénard è, altresì, riportata nel capitolo 6 del lavoro di Nield & Bejan [11], si veda anche [19].

In questo caso si ricercano forme di instabilità applicando perturbazioni alla soluzione base (per il campo di velocità, temperatura e pressione), alla quale corrisponde uno stato stazionario in cui tutto il calore viene trasferito tramite conduzione [20].

I campi di velocità, temperatura e pressione potranno essere scritti come

$$u_i = u_{ib} + \varepsilon U_i \quad (3.26)$$

$$T = T_b + \varepsilon \vartheta \quad (3.27)$$

$$p = p_b + \varepsilon P \quad (3.28)$$

Dove con ε si è indicato un parametro di perturbazione arbitrariamente piccolo.

Sostituendo tali campi nelle equazioni adimensionali (3.22)-(3.24) che descrivono il problema analizzato e trascurando i termini di ordine ε^2 , si otterrà il sistema di equazioni (3.29)-(3.31); le quali descrivono il problema analizzato soggetto a perturbazioni lineari.

$$\nabla \cdot U_i = 0 \quad (3.29)$$

$$U_i = -\nabla P + R\vartheta \hat{y} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - V = \nabla^2 \vartheta \quad (3.31)$$

La regione di spazio considerata è assunta come infinitamente estesa orizzontalmente (si faccia riferimento a figura 3.5), dunque non saranno presenti pareti verticali e come conseguenza, le condizioni al contorno da applicare saranno solo quelle relative alle superfici orizzontali poste a $y=0$ e $y=l$

$$y = 0: V = 0, \vartheta = 1 ; y = l: V = 0, \vartheta = 0 \quad (3.32)$$

Considerando perturbazioni cilindriche, la soluzione alle equazioni verrà ricercata in forma di onde piane orientate lungo una arbitraria direzione ortogonale all'asse y .

La soluzione base così come la fisica e la geometria del sistema risulta invariante per rotazioni attorno all'asse y , ciò significa che l'effetto di una perturbazione ad onde piane orientata in una direzione ortogonale all'asse y produce lo stesso effetto di un'onda piana che si propaga lungo l'asse x .

Pertanto, si può scegliere una perturbazione piana orientata lungo la direzione x , questa scelta implica che l'analisi delle perturbazioni cilindriche potrà essere formulata mediante un problema bidimensionale riferito al piano (x, y) si vedano [19] e [14].

Inserendo la funzione di corrente adimensionale $\psi(x, y, t)$ così definita

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.33)$$

Si ottiene il seguente problema bidimensionale riferito al piano (x, y)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -R \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad (3.35)$$

Con condizioni al contorno

$$y = 0: \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \vartheta = 1 ; y = 1: \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \vartheta = 0 \quad (3.36)$$

Una generica perturbazione può essere considerata come sovrapposizione di onde piane che si propagano lungo l'asse x aventi arbitrario valore del numero d'onda λ [14].

Sostituendo nel sistema di equazioni (3.34)-(3.35) con condizioni al contorno (3.36) le funzioni (3.37) e (3.38) risulta possibile trasformare il suddetto problema differenziale in un problema differenziale ordinario nelle incognite $f(y)$ e $h(y)$.

$$\psi = f(y)e^{\eta t} \sin(\lambda x) \quad (3.37)$$

$$\vartheta = h(y)e^{\eta t} \cos(\lambda x) \quad (3.38)$$

Nelle quali $f(y)$ e $h(y)$ rappresentano funzioni a valori reali e λ il numero d'onda.

Infine, η descrive il coefficiente esponenziale tale che, quando risulta $\eta > 0$ l'ampiezza dell'onda cresce esponenzialmente nel tempo e dunque il comportamento del sistema risulterà instabile, quando, invece, risulta $\eta < 0$ si ha uno smorzamento dell'onda nel tempo ed un corrispondente comportamento stabile del sistema; infine $\eta = 0$ indica il valore di soglia tra comportamento stabile ed instabile, perturbazioni che soddisfano quest'ultima condizione vengono chiamate 'marginalmente stabili' [14]; si veda anche [20].

Si ottiene il seguente problema

$$f''(y) - \lambda^2 f(y) - \lambda R h(y) = 0 \quad (3.39)$$

$$h''(y) - (\lambda^2 + \eta)h(y) - \lambda f(y) \quad (3.40)$$

Con condizioni al contorno

$$y = 0, y = 1 : f = 0, h = 0 \quad (3.41)$$

Dove gli apici ' e '' denotano, rispettivamente, la derivata prima e la derivata seconda rispetto alla variabile y .

Il problema (3.39)-(3.41) è omogeneo, ciò significa che qualsiasi siano i valori dei parametri il sistema ammetterà sempre la soluzione banale $f = h = 0$.

Tuttavia, per qualunque coppia di valori (λ, η) , il problema ammetterà anche una soluzione non banale per specifici valori di R ; questi specifici valori di R sono chiamati autovalori ed il problema correlato alla ricerca di questi ultimi prende il nome di problema agli autovalori [14].

In accordo con le condizioni al contorno (3.41), $f(y)$ e $h(y)$ possono essere scritte in forma di serie

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin(n\pi y) \quad (3.42)$$

$$h(y) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(n\pi y) \quad (3.43)$$

Dove i coefficienti F_n e H_n sono tali che vengano soddisfatte le seguenti equazioni di bilancio

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda^2 + n^2\pi^2)F_n + \lambda R H_n] \sin(n\pi y) = 0 \quad (3.44)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda^2 + \eta + n^2\pi^2)H_n + \lambda F_n] \sin(n\pi y) = 0 \quad (3.45)$$

A causa della validità della relazione di ortogonalità tra funzioni seno

$$\int_0^1 \sin(m\pi y) \sin(n\pi y) dy = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{1}{2}, m = n \end{cases} \quad (3.46)$$

Le (3.44)-(3.45) risultano verificate se e solo se tutti i coefficienti della serie si annullano, ciò permette di ottenere le relazioni algebriche (3.47) e (3.48).

$$(\lambda^2 + n^2\pi^2)F_n + \lambda R H_n = 0 \quad (3.47)$$

$$(\lambda^2 + \eta + n^2\pi^2)H_n + \lambda H F_n = 0 \quad (3.48)$$

Andando ora a ricavare H_n dalla (3.48), sostituendolo nella (3.47) e semplificando F_n , che si è dunque supposto non nullo, si ottiene la seguente espressione per l'autovalore R

$$R = \frac{(\lambda^2 + n^2\pi^2)(\lambda^2 + \eta + n^2\pi^2)}{\lambda^2} \quad (3.49)$$

Esistono differenti tipi di instabilità, uno per ogni valore di n ; il più basso è quello che si ha per $n = 1$.

Considerando il caso $n = 1$, perturbazioni cilindriche instabili ($\eta > 0$) sono tali che

$$R > \frac{(\lambda^2 + \pi^2)^2}{\lambda^2} \quad (3.50)$$

Si può osservare che il membro destro della disuguaglianza (3.50) equivale all'autovalore R corrispondente al caso di stabilità marginale ($\eta = 0$) per $n = 1$.

Di conseguenza si può intuire che nella figura 3.6 uno stato instabile corrisponderà alla regione soprastante la curva inferiore di stabilità neutrale ($n = 1$) mentre uno stato stabile sarà situato nella regione al di sotto della medesima curva.

Sulla curva a $n=1$ sarà soddisfatta la seguente uguaglianza

$$R = \frac{(\lambda^2 + \pi^2)^2}{\lambda^2} \quad (3.51)$$

Gli stati di non instabilità, invece, insorgeranno quando risulterà soddisfatta la seguente disuguaglianza

$$R < R_{cr} = 4\pi^2 \cong 39.4784 \quad (3.52)$$

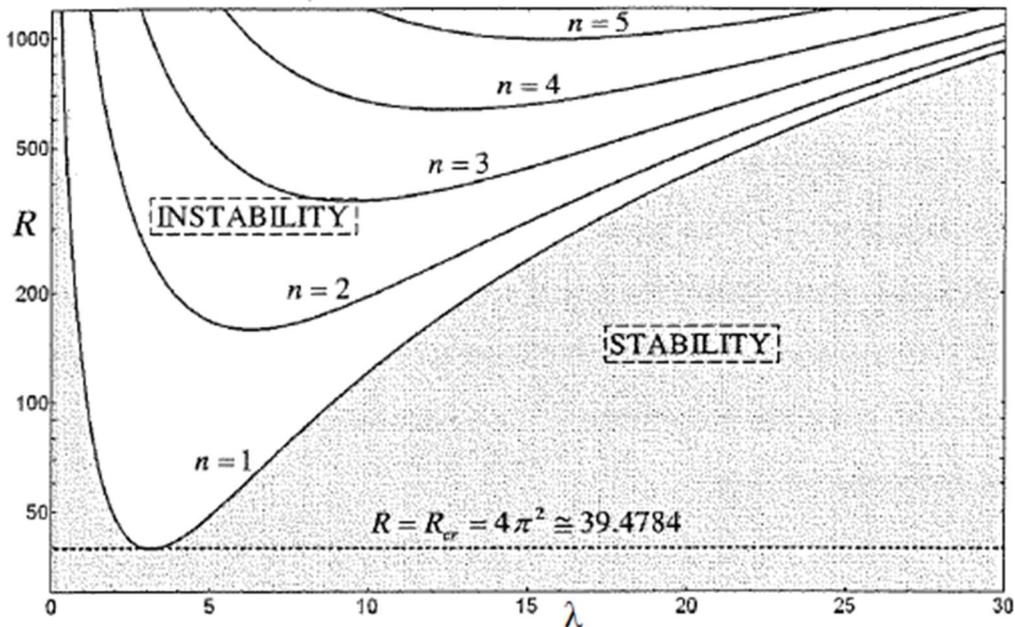


Figura 3.6: Stati stabili ed instabili nel piano (λ, R) per diversi valori di n [14]

Dove il valore $R_{cr} = 4\pi^2$ è determinato come minimo della funzione $R(\lambda)$ definita dall'equazione (3.51), risulta inoltre, in accordo con la figura 3.6, verificato che il minimo $R = R_{cr}$ si ha per

$$\lambda < \lambda_{cr} = \pi \quad (3.53)$$

La curva di stabilità neutrale $n = 1$ in figura 3.6 descrive l'inizio del primo grado di instabilità costituito da una singola fila di celle convettive adiacenti come mostrato in figura 3.7.

Mentre la curva di stabilità neutrale $n = 2$ descrive l'inizio di un regime di instabilità più complesso nel quale si avrà la sovrapposizione verticale di due file di celle convettive adiacenti come mostrato in figura 3.8.

Si può facilmente immaginare che per numeri interi n maggiori si avrà una crescente complessità del regime di instabilità che risulterà costituito da un numero sempre maggiore di file sovrapposte di celle convettive adiacenti.

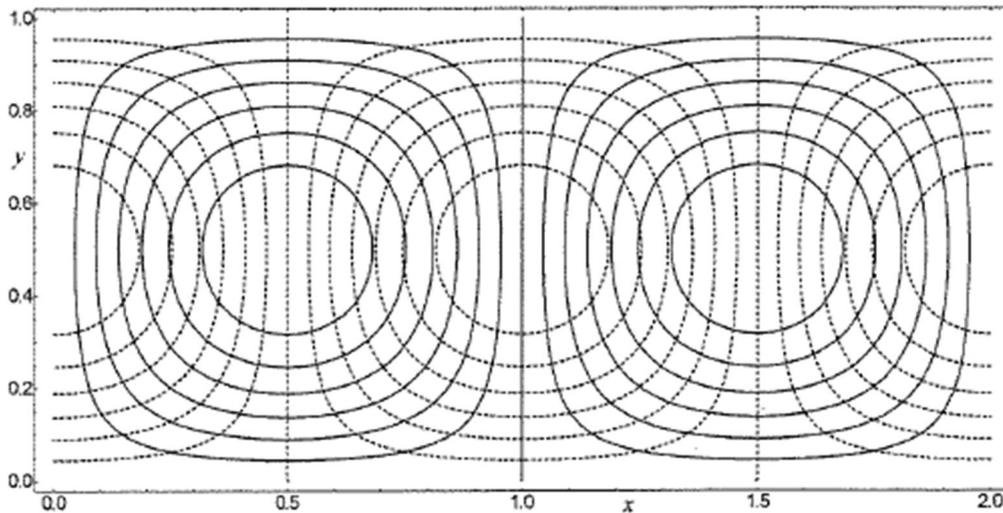


Figura 3.7: Linee di flusso $\psi = \text{cost}$ (linee intere) e linee isoterme $\vartheta = \text{cost}$ (linee tratteggiate) nel caso in cui $\eta = 0, \lambda = \lambda_{cr} = \pi, R = R_{cr} = 4\pi^2$ [14]

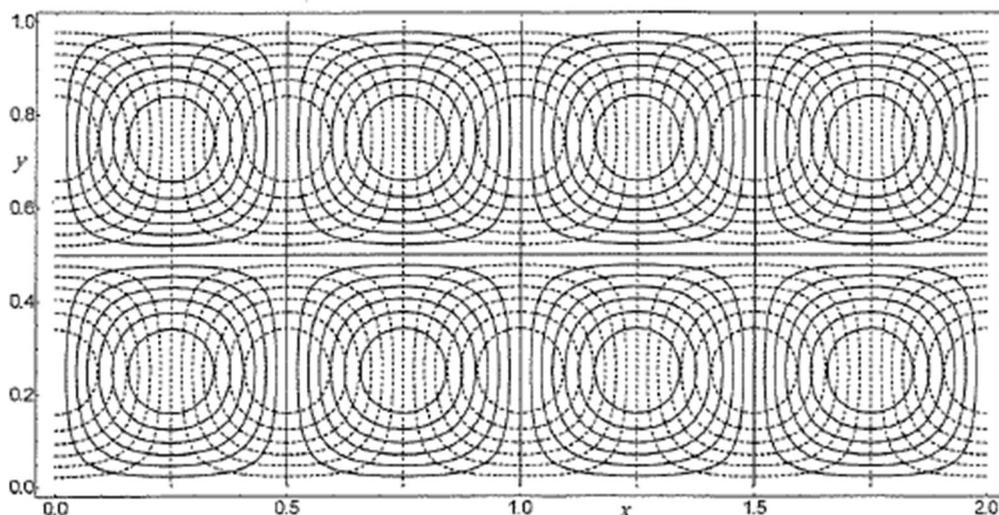


Figura 3.8: Linee di flusso $\psi = \text{cost}$ (linee intere) e linee isoterme $\vartheta = \text{cost}$ (linee tratteggiate) nel caso in cui $\eta = 0, \lambda = \lambda_{cr} = n\pi, R = R_{cr} = 4n^2\pi^2$ con $n = 2$ [14]

Si può dunque affermare che, posto $\eta = 0$, il minimo di ciascuna curva di stabilità neutrale sarà identificato dalla seguente coppia di valori

$$\lambda = n\pi, R = 4n^2\pi^2 \quad n = 1,2,3 \dots \quad (3.54)$$

Il valore del numero intero n varierà al variare della curva considerata.

3.2.3 Caso di studio: modello bidimensionale stazionario e non lineare

Nel corso di questo elaborato verrà analizzato numericamente il modello del problema di Darcy che si ricaverà in questo paragrafo.

A partire dalle equazioni (3.22)-(3.24) con condizioni al contorno (3.25), considerando un regime stazionario si otterrà il set di equazioni (3.55)-(3.57).

$$\nabla \cdot u_i = 0 \quad (3.55)$$

$$u_i = -\nabla P + TR\hat{y} \quad (3.56)$$

$$u_i \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (3.57)$$

Con condizioni al contorno

$$\begin{aligned} y = 0 : v = 0, T = 1 \\ y = 1 : v = 0, T = 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Formulando il problema descritto dalle (3.55)-(3.57) in forma bidimensionale sarà possibile scrivere

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.59)$$

$$U = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.60)$$

$$V = -\frac{\partial P}{\partial y} + RT \quad (3.61)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.62)$$

Dove U e V esprimono le componenti di u_i lungo l'asse x e y ; le condizioni al contorno espresse dalla (3.58) divengono invece

$$y = 0: V = 0, T = 1 ; y = 1: V = 0, T = 0 \quad (3.63)$$

Osservando le equazioni (3.60) e (3.61) si capisce che risulta possibile eliminare la dipendenza da P derivando l'equazione (3.60) rispetto a y e l'equazione (3.61) rispetto a x per poi sottrarle; ottenendo così un'unica equazione non contenente il termine P

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = -R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.64)$$

Introducendo la funzione di corrente adimensionale $\psi(x, y, t)$ già definita dalla (3.33), l'equazione di bilancio della massa (3.59) risulterà identicamente soddisfatta mentre le equazioni (3.64) e (3.62) assumeranno la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.66)$$

Invece, le condizioni al contorno espresse dalla (3.63), mediante l'utilizzo della funzione di corrente, diverranno

$$y = 0: \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, T = 0 ; y = 1: \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, T = 0 \quad (3.67)$$

Sarà considerato un dominio non più infinitamente esteso bensì delimitato da 4 pareti, pertanto, occorrerà applicare anche condizioni al contorno alle pareti verticali che considereremo posizionate ad $x = 0$ ed $x = L$, dividendo per la lunghezza di riferimento H otterremo $x = 0$ e $x = a = \frac{H}{L}$; le quali rappresentano le coordinate adimensionali di posizionamento delle pareti verticali.

Per completare il modello matematico saranno assunte le seguenti condizioni al contorno: la temperatura alla parete inferiore (T_h) e superiore (T_c) sarà mantenuta costante con $T_h > T_c$, mentre le pareti verticali saranno adiabatiche; riguardo la funzione di corrente, tutte le pareti saranno considerate impermeabili al flusso.

Potremo dunque rappresentare il set completo di condizioni al contorno utili alla risoluzione del problema costituito dalle equazioni (3.65)-(3.66) come segue

$$y = 0: \psi = 0, T = 1 ; y = 1: \psi = 0, T = 0$$

$$x = 0, x = a: \psi = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.68)$$

Le equazioni (3.65)-(3.66) con condizioni al contorno (3.68) costituiscono un problema agli autovalori di R , che può essere risolto numericamente mediante la funzione *NDSolve* attraverso il pacchetto software Mathematica 11.1 (© Wolfram, inc.).

Tale studio verrà effettuato nei capitoli seguenti, interesserà ora, invece, condurre un'analisi lineare del problema in esame considerando un dominio infinitamente esteso in direzione orizzontale.

3.3 Revisione della letteratura

Il primo approccio allo studio della convezione naturale in un mezzo poroso riscaldato dal basso è accreditato ad Horton e Rogers (1945) [17] e Lapwood (1948) [18], i quali estesero ad un mezzo poroso i concetti descritti nel problema di Rayleigh-Bénard per la convezione naturale interna ad uno strato orizzontale di fluido chiaro.

Il loro studio, come detto, riguardò uno strato poroso saturo di fluido sottoposto ad un gradiente verticale di temperatura e delimitato da due pareti impermeabili; essi, assumendo la presenza di un equilibrio termico locale e la validità dell'approssimazione di Oberbeck-Boussinesq, eseguirono un'analisi di stabilità lineare utilizzando il modello di flusso di Darcy al fine di prevedere l'insorgenza delle correnti di convezione.

In seguito, molti ricercatori hanno cercato di verificare sperimentalmente l'insorgenza della convezione predetta da tale analisi di stabilità lineare; inoltre hanno cercato di caratterizzare la relazione tra i numeri di Nusselt e Rayleigh in un mezzo poroso.

Questo paragrafo si propone, seguendo i lavori riportati in [11] e [21], di offrire una breve panoramica della letteratura attualmente disponibile a proposito degli argomenti appena citati, mostrando risultati sperimentali ottenuti da vari autori riguardanti la correlazione dei numeri di Nusselt e Rayleigh.

3.3.1 Osservazioni sperimentali

Risultati qualitativi per studi di convezione bidimensionale in celle di Hele-Shaw, ovvero celle costituite da piatti paralleli separati da un gap infinitesimale, furono condotti da Elder (1967) [22]; tali esperimenti confermarono il valore teorico per il numero d'onda critico, riportato nell'equazione (3.68), nonché il fatto che si abbia un aumento del numero d'onda all'aumentare di Ra .

Molti autori hanno eseguito lavori sperimentali in strati delimitati da piatti isoterme utilizzando celle sperimentali convenzionali, in figura 3.10 sono riportati i risultati ottenuti da Schneider (1963) [23], Elder (1967) [22], Kaneko et al. (1974)[24], Yen (1974)[25], Combarnous and Bories (1975) [26], Burette e Berman (1976) [27].

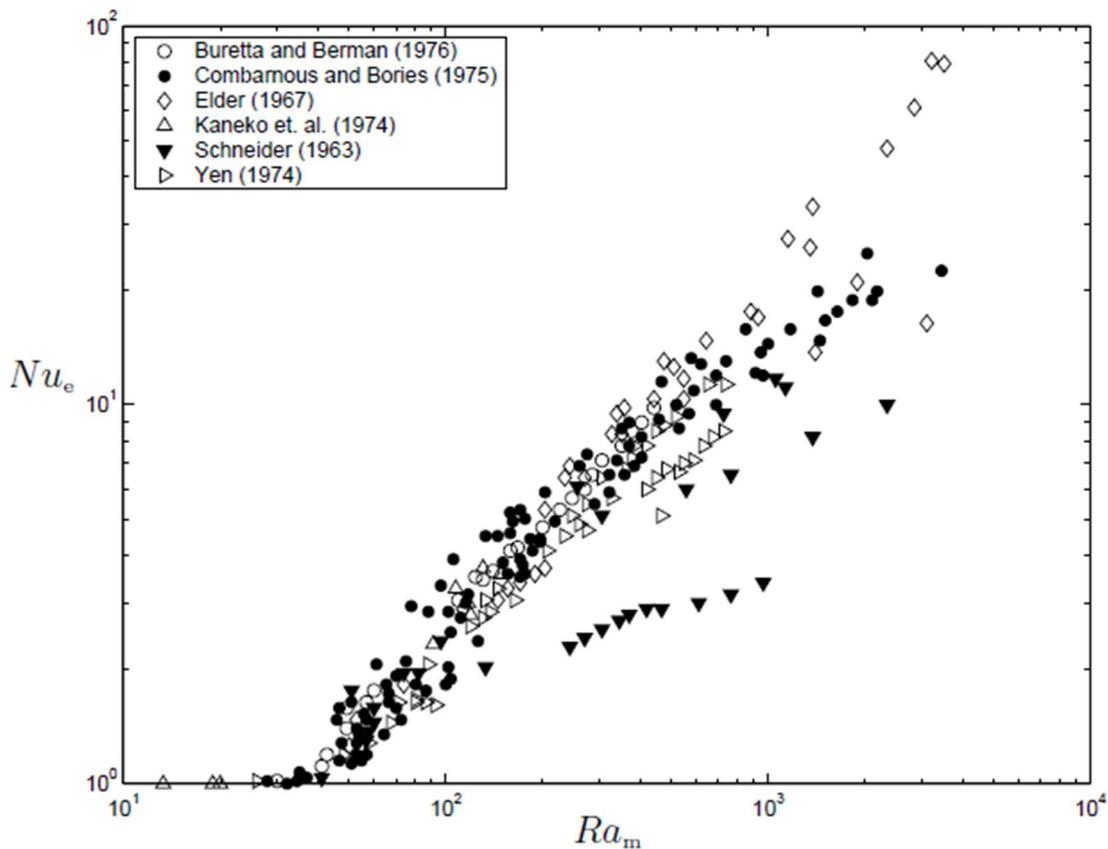


Figura 3.9: Relazioni tra numero di Nusselt e numero di Rayleigh ottenute per mezzi porosi riscaldati dal basso [21]

Notiamo dal grafico che il numero di Rayleigh critico teorico $4\pi^2$ (definito come il valore di Ra per il quale si ha $Nu = 1$) viene confermato da numerosi esperimenti.

Quando Ra diviene leggermente supercritico, Nu aumenta linearmente con esso; per alcuni sistemi (quali ad esempio acqua-vetro) tale linearità si mantiene per un'ampia gamma di valori del numero di Rayleigh.

Per tali sistemi Elder (1967) propose la seguente correlazione tra il numero di Nusselt e il numero di Rayleigh

$$Nu = \frac{Ra}{40} \quad (3.69)$$

Indagini approfondite e successivi esperimenti dimostrarono che quando il numero di Rayleigh raggiunge valori di 240-280 si ottengono notevoli incrementi della pendenza della curva e pertanto l'andamento lineare espresso dalla (3.69) non risulta più corretto.

Vadasz (2010) [28] ha derivato soluzioni analitiche in grado di spiegare la dispersione dei dati sul flusso di calore nei casi di convezione naturale in mezzi porosi, confrontando il suo lavoro con dati sperimentali e numerici esistenti si è in grado di confermare i risultati ottenuti.

Capitolo 4: Discretizzazione mediante metodo agli elementi finiti

4.1 Introduzione

I limiti della mente umana sono tali da non poter cogliere il comportamento fisico di un generico fenomeno in tutta la sua complessità mediante un'unica operazione.

Pertanto, il naturale modo in cui procede un ingegnere è quello di utilizzare un processo di suddivisione del sistema in esame nelle sue singole componenti o elementi, il cui comportamento risulta di più facile comprensione, e la successiva ricostruzione del sistema originale a partire da esse [29].

In alcune situazioni, per la soluzione del problema considerato, si ottiene un modello adeguato mediante l'utilizzo di un numero finito di componenti ben definite, questa tipologia di problemi prende il nome di problemi discreti; tali problemi possono, generalmente, essere risolti facilmente mediante l'utilizzo di calcolatori anche se il numero di elementi è molto elevato.

Nella maggior parte dei casi, invece, i fenomeni fisici sono descritti da problemi aventi un numero infinito di elementi, tali problemi prendono il nome di problemi continui; in questo caso, visto che la capacità di ogni calcolatore risulta limitata, sarà necessaria una manipolazione matematica del problema al fine di discretizzare lo stesso e superare quindi l'intrattabilità del problema.

Vari metodi di discretizzazione sono stati proposti da ingegneri, scienziati e matematici; tutti implicano un'approssimazione del problema che, si spera, si avvicini al limite della vera soluzione continua con l'aumentare del numero di variabili discrete considerate.

In questo capitolo verrà introdotto il metodo di discretizzazione agli elementi finiti, trattandolo sia dal punto di vista teorico sia da quello pratico mediante implementazione sul pacchetto software Mathematica 11.1 (© Wolfram, inc.).

4.1.1 Una introduzione al metodo degli elementi finiti

La descrizione della fisica di problemi dipendenti dallo spazio e dal tempo è solitamente effettuata mediante l'utilizzo di equazioni alle derivate parziali note con l'acronimo PDE (partial differential equation).

Nella maggior parte dei casi, per svariate geometrie e tipologie di problemi, queste PDE non possono essere risolte con metodi analitici, occorre invece costruire un'approssimazione di tali equazioni basata su metodi di discretizzazione.

Tali metodi di discretizzazione approssimano le PDE con equazioni di modello numerico le quali potranno essere risolte mediante l'utilizzo di calcolatori e porteranno ad una soluzione delle equazioni che sarà, a sua volta, una approssimazione della soluzione reale alle PDE.

Un metodo ampiamente utilizzato per calcolare tali approssimazioni prende il nome di metodo agli elementi finiti, noto con l'acronimo FEM (finite element method), tale metodo rappresenta, dunque, una tecnica numerica per ottenere soluzioni approssimate di problemi fisici.

Il FEM è stato originariamente sviluppato per lo studio degli stress applicati in complesse strutture aeronautiche, da allora è stato esteso e applicato nel vasto campo della meccanica dei continui tra cui meccanica dei fluidi e trasferimento di calore [30].

Per dare una breve spiegazione a tale metodo consideriamo, in accordo con [31], che la variabile dipendente nella PDE considerata sia la generica funzione ϕ ; la funzione ϕ potrà essere approssimata da una funzione ϕ_h mediante combinazione lineare di funzioni base Ψ_i

$$\phi \approx \phi_h \quad (4.1)$$

$$\phi_h = \sum_j c_j \Psi_j \quad (4.2)$$

Dove Ψ_j indica le funzioni base mentre c_i denota i coefficienti delle funzioni che approssimano ϕ con ϕ_h .

Questo principio viene illustrato in figura 4.1 per un problema monodimensionale nel quale le funzioni base hanno un valore unitario nei rispettivi nodi e nullo in altri nodi;

in questo caso vi sono sette elementi lungo la porzione dell'asse x considerata in cui è definita la funzione ϕ .

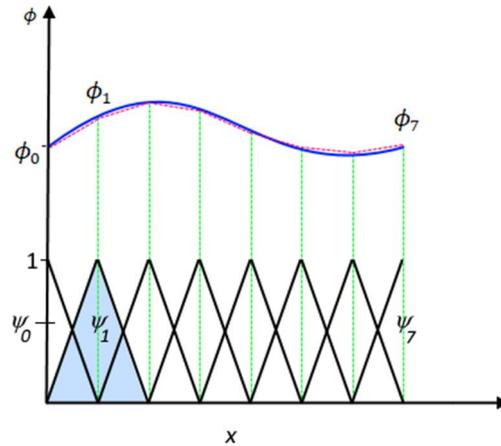


Figura 4.1: Approssimazione della funzione ϕ (linea blu continua) con la funzione ϕ_h (linea rossa tratteggiata) mediante combinazione lineare di funzioni base lineari Ψ_j (linee nere continue) [31]

Uno dei vantaggi dell'utilizzo del metodo degli elementi finiti è costituito dalla grande libertà nella scelta dei nodi che esso offre; in figura 4.1, ad esempio, gli elementi sono distribuiti uniformemente lungo l'asse x , risulta, altresì, possibile applicare elementi più piccoli in una regione nella quale, ad esempio, si abbia un maggiore gradiente della generica funzione ϕ , come illustrato in figura 4.2.

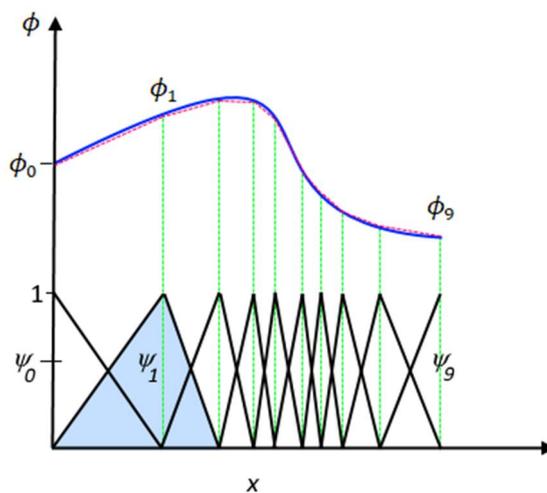


Figura 4.2: Approssimazione della funzione u considerando elementi più fitti nella zona di maggior gradiente [31]

In entrambe le figure sono state considerate funzioni base lineari le quali forniranno una risposta non nulla solo su un intervallo stretto; in funzione del problema in esame è possibile scegliere anche funzioni non lineari.

Il metodo degli elementi finiti prevede che il dominio considerato, indicato in seguito con Ω , sia suddiviso in elementi discreti con la possibilità di scegliere elementi di svariate forme.

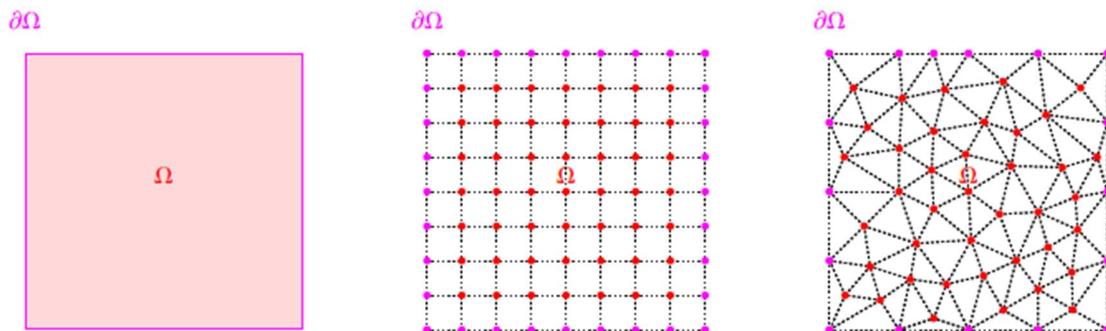


Figura 4.3: Rappresentazione del dominio Ω . Da sinistra, rappresentazione in continuo; rappresentazione discretizzata tramite griglia strutturata costituita da elementi quadrati e tramite griglia non strutturata costituita da elementi triangolari [32]

In figura 4.3 viene rappresentato, a sinistra, il dominio Ω non discretizzato e la sua frontiera $\partial\Omega$, al centro il dominio e la sua frontiera sono suddivisi in elementi discreti da una griglia (linee tratteggiate) mediante discretizzazione strutturata basata su elementi di forma quadrata; mentre a destra è mostrata una discretizzazione non strutturata basata su elementi triangolari irregolari.

La griglia (o mesh) si dice strutturata se costituita da elementi che suddividono il dominio distribuiti con regolarità, mentre si dice non strutturata se gli elementi che costituiscono la griglia sono distribuiti senza una regolarità identificabile; quest'ultimo tipo di griglia si adatta maggiormente a domini complessi.

In figura 4.3 i punti disegnati sulle intersezioni delle linee tratteggiate che costituiscono la griglia sono detti nodi, sono indicati in rosso se appartengono al dominio ed in magenta se appartengono alla sua frontiera.

Il metodo agli elementi finiti oltre a discretizzare il dominio ha lo scopo di creare un sistema di equazioni algebriche che approssimino le PDE che governano il problema in esame, in maniera tale da fornire, come detto, una soluzione approssimata al problema considerato.

4.1.2 Cenni storici

Si possono attribuire ad Archimede Di Siracusa (287-212 a.C) i primi approcci di discretizzazione, infatti egli pensò di affacciarsi al problema di determinazione della circonferenza di un cerchio non considerando un numero infinito di punti ma, bensì, calcolando la somma di un numero finito, sempre maggiore, di corde (metodo di esaustione) sulla circonferenza.

In sostanza, dunque, egli ricorse ad un modello matematico semplificato per risolvere un problema più complesso.

Occorre attendere fino alla pubblicazione delle opere di Lord Rayleigh (1894,1896) e di Walter Ritz (1909) [33], ai quali si attribuisce l'idea di utilizzare una formulazione variazionale per la soluzione numerica di problemi al contorno, per avere opere in grado di costituire le fondamenta di quello che sarà poi chiamato metodo degli elementi finiti (FEM).

Nell'approccio di Ritz, la soluzione approssimata è ricercata come combinazione lineare di finite funzioni, le quali possono essere ad esempio polinomiali [34].

In seguito, con il lavoro di Richard Courant (1943) [35] e l'appoggio della formulazione di Ritz [33] si arrivò all'idea di descrivere il comportamento globale di un sistema complesso unendo funzioni parametriche più semplici, adattate alla geometria del dominio, ciascuna rappresentativa di una parte del sistema stesso; riducendo, quindi, il problema di risoluzione di equazioni differenziali alla determinazione delle incognite di un sistema di equazioni algebriche più semplici.

L'opera di Courant è considerata come il punto di partenza per il metodo degli elementi finiti, anche se lo sviluppo e l'analisi approfondita del metodo si verificherà più avanti.

Altra opera importante è da attribuirsi a Boris Grigorievich Galerkin (1915) [36] Il quale pubblicò un metodo di integrazione approssimata delle equazioni differenziali che è oggi noto con il nome di metodo di Galerkin.

L'utilizzo del metodo degli elementi finiti come metodo computazionale ha origine negli anni '50 quando gli ingegneri si approcciarono all'analisi strutturale nella meccanica del continuo mediante metodi di discretizzazione attraverso i quali la struttura veniva pensata come divisa in elementi sui quali agivano tensioni o stress localmente definiti.

Il nome 'metodo degli elementi finiti' nasce per la prima volta con il lavoro di Clough (1960) [37].

Tale metodo è stato in seguito applicato a svariate classi di problemi e campi ingegneristici grazie soprattutto all'avvento dei calcolatori numerici, un riferimento standard alla letteratura ingegneristica nel campo degli elementi finiti può essere trovata nell'opera di Zienkiewicz [38].

4.2 Risoluzione dell'equazione di Poisson mediante metodo degli elementi finiti

In questo paragrafo verrà Introdotta una trattazione del metodo degli elementi finiti per risolvere numericamente equazioni alle derivate parziali in due dimensioni.

L'approccio adottato prevede la riscrittura in forma debole della originaria PDE considerata e la successiva ricerca di una soluzione approssimata nello spazio di funzioni lineari a tratti continue.

Attraverso questa procedura di discretizzazione si otterrà, a partire da una arbitraria PDE, un sistema di equazioni algebriche risolvibili mediante calcolatore.

Prenderemo in considerazione equazioni alle derivate parziali ellittiche del secondo ordine; più precisamente condurremo questo studio mediante l'utilizzo dell'equazione di Poisson Bidimensionale (4.3), la quale rappresenta l'archetipo delle equazioni ellittiche.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S(x, y, \phi) \quad (4.3)$$

Nella quale $\phi(x, y)$ costituisce un arbitrario campo bidimensionale mentre $S(x, y, \phi)$ costituisce il termine sorgente e può essere funzione sia delle variabili indipendenti (x, y) che di quella dipendente (ϕ) .

Si è scelto di utilizzare l'equazione (4.3) in 2D poichè il problema di interesse in questo scritto, costituito dal sistema di equazioni (3.65)-(3.66) con condizioni al contorno (3.68), è esso stesso riferito ad un dominio bidimensionale.

Questa trattazione verrà eseguita avvalendosi dei testi [39] e [40] citati in bibliografia, nonché a [32] del quale sarà anche seguito il formalismo matematico.

4.2.1 Forma debole: equazione di Poisson

Come detto la formulazione debole è una riformulazione dell'originale PDE (in questo caso l'equazione di Poisson bidimensionale) che costituisce il punto di partenza per questa trattazione del metodo degli elementi finiti.

Per ottenere tale forma occorrerà moltiplicare l'equazione (4.3) per delle funzioni arbitrarie chiamate funzioni test $v(x,y)$ ed in seguito integrando quanto ottenuto sull'intero dominio considerato Ω , si avrà dunque

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi) v d\Omega = \int_{\Omega} S(x, y, \phi) v d\Omega \quad (4.4)$$

Impiegando l'identità matematica

$$\nabla \cdot (v \nabla \phi) = v \nabla^2 \phi + (\nabla v) \cdot (\nabla \phi) \quad (4.5)$$

Risulta possibile riscrivere il membro sinistro della (4.4) come segue

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla \phi) d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (\nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} S(x, y, \phi) v d\Omega \quad (4.6)$$

Ricordiamo che il teorema della divergenza di Gauss permette di scrivere

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.7)$$

Ove si è indicato con Γ il contorno del dominio Ω , ovvero $\partial\Omega$; mentre con n si intende il versore normale esterno a Γ .

Applicando il teorema di Gauss espresso dalla (4.7) al primo integrale del membro sinistro della (4.6) si ottiene

$$\int_{\Gamma} v \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (\nabla \phi) d\Omega = \int_{\Omega} S(x, y, \phi) v d\Omega \quad (4.8)$$

La quale rappresenta la forma debole dell'equazione di Poisson.

4.2.2 Funzioni test e campo ϕ

Per risolvere il problema costituito dalla (4.8) sarà necessario discutere della forma delle funzioni test v e del campo ϕ ; la scelta più semplice è quella di approssimare il campo incognito ϕ con una funzione ϕ_h continua e lineare a tratti.

Si consideri, quindi, che all'interno del dominio Ω considerato il campo ϕ sia suddiviso in tanti piccoli tratti di forma arbitraria il cui andamento risulti lineare e non curvilineo; introducendo ϕ_h al posto di ϕ l'equazione (4.8) diviene

$$\int_{\Gamma} v \nabla \phi_h \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot (\nabla \phi_h) d\Omega = \int_{\Omega} S(x, y, \phi) v d\Omega \quad (4.9)$$

Scriviamo ϕ_h come combinazione lineare di una base di N equazioni lineari a tratti

$$\phi_h = \sum_{j=1}^N c_j \Psi_j(x, y) \quad (4.10)$$

L'indice j della sommatoria varierà da 1 agli N nodi della griglia di discretizzazione spaziale che si è scelta, c_j rappresenta i coefficienti incogniti, infine, Ψ_j rappresenta le funzioni continue lineari a tratti che si sono scelte.

Per quanto riguarda le funzioni test v risulterà conveniente utilizzare le stesse basi impiegate per definire il campo ϕ_h

$$v = \sum_{i=1}^N \Psi_i(x, y) \quad (4.11)$$

L'indice della sommatoria viene indicato con i anziché j per evidenziare che, pur considerando anch'esso un particolare nodo della griglia, i due indici non coincideranno.

Andando a sostituire le equazioni (4.10) e (4.11) nella formulazione debole della equazione di Poisson scritta utilizzando il campo approssimato ϕ_h (4.9) si ottiene il sistema di equazioni (4.12).

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sum_{j=1}^N \Psi_j (\nabla c_j \Psi_j) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (\nabla \Psi_i) \cdot (\nabla c_j \Psi_j) d\Omega \\ = \int_{\Omega} S(x, y, \Psi_i) \Psi_i d\Omega \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.12)$$

Una volta scelta la forma delle funzioni lineari a tratti Ψ_i , la risoluzione del sistema di N equazioni, descritto dalla (4.12), porterà all'ottenimento della soluzione approssimata dell'equazione di Poisson, i termini incogniti saranno i coefficienti c_j .

4.3 Metodo FEM su Wolfram Mathematica

4.3.1 Introduzione a Mathematica

In questa sezione verrà presentata una breve introduzione al pacchetto software Mathematica 11.1 (© Wolfram, inc.) rilasciato nel Marzo 2017, che sarà poi utilizzato in questo elaborato; si faccia riferimento a [41].

La Wolfram research company, fondata da Stephen Wolfram nel 1987 è una delle aziende di software più rispettate al mondo, vettore di innovazione scientifica e tecnica.

Rilasciato per la prima volta nel 1988, Mathematica, prodotto di punta della compagnia con milioni di utenti dedicati in tutto il mondo, rappresenta una miscela unica di importanti innovazioni nella ricerca, progettazione orientata all'utente ed ingegneria del software.

L'obiettivo della compagnia è “rendere possibile il calcolo di tutto ciò che può essere calcolato, ogni volta e ovunque sia necessario, e rendere accessibili le frontiere complete dell'universo computazionale” [41].

Mathematica è un linguaggio utilizzabile sia per il calcolo numerico che per il calcolo simbolico dotato di funzioni grafiche duttili e complete per la rappresentazione grafica bidimensionale e tridimensionale di espressioni e di dati.

Tale software costituisce un potente strumento, completo e versatile per eseguire analisi di dati, sviluppo di metodologie di calcolo e sviluppo di modelli analitici in ambito teorico.

Mathematica è un sistema integrato di calcolo simbolico. Rispetto ad un sistema di calcolo tradizionale, Mathematica è concepito per lavorare con espressioni piuttosto che esclusivamente con dati ed elementi numerici.

a seguito di un'elaborazione Mathematica produce risultati numerici solo se esprimibili in forma esatta (in termini di numeri interi) e restituisce, altrimenti, risultati in notazione simbolica che possono comunque essere considerati esatti.

In alternativa al risultato esatto espresso in notazione simbolica, Mathematica è in grado di produrre il risultato di una qualsiasi elaborazione in termini numerici ricorrendo ad una approssimazione con precisione stabilita dall'utente.

Mathematica risulta, quindi, uno strumento ideale per la rappresentazione e modellazione dei dati ogniqualvolta la precisione di calcolo costituisca una condizione imprescindibile.

L'interfaccia con l'utente è realizzata tramite fogli di lavoro "Notebook" sui quali l'utente scrive i comandi e le stringhe di input che verranno inviate al "Kernel" (core computational engine) il quale esegue l'elaborazione richiesta fornendo un output.

Il *Kernel* è essenzialmente un manipolatore di espressioni simboliche in grado di restituire risultati in termini di simboli, numeri, stringhe, grafici, suoni e animazioni.

Il *Notebook* è organizzato in celle segnalate da parentesi quadre visibili sulla destra del foglio di lavoro. Ogni cella può a sua volta essere divisa in sottocelle.

Celle e sottocelle sono automaticamente generate da Mathematica scrivendo sul *Notebook* un qualsiasi comando generico o stringa. Se si vuole che l'Input sia elaborato dal *Kernel*, con produzione di un Output, è necessario dare l'invio all'espressione di input scritta utilizzando il comando *Shift+Invio*.

Mathematica a questo punto elabora istantaneamente l'espressione inviata e restituisce l'Output risultante.

Gli input inviati e gli output restituiti sono rappresentati e progressivamente numerati sul *Notebook* in coppie di sottocelle *In[n]* e *Out[n]* con *n* numero progressivo di input inviati e output ricevuti nella sessione di lavoro. I risultati ottenuti nel corso di una sessione di lavoro sono salvati in un file *Notebook* con estensione *.nb*.

Ogni notebook che stiamo codificando gira su un singolo *Kernel*, numeri e funzioni sono così memorizzati ed elaborati e vengono cancellati ogni volta che abbandoneremo tale *Kernel*.

Risulta anche possibile attivare più di un *Kernel* nello stesso momento, ciò permette di lavorare contemporaneamente con più *Notebook* e si dimostra molto utile in termini di risparmio temporale nel caso in cui l'elaborazione di un singolo *Kernel* richieda tempi dell'ordine di minuti o maggiori.

Esistono molte risorse per intraprendere lo studio di Mathematica, da un centro di documentazione online raggiungibile mediante <http://reference.wolfram.com/language> all'aiuto di accreditati consulenti all'interno della compagnia stessa.

Una risorsa fondamentale è costituita dalla guida offerta dal programma, infatti durante il tempo di programmazione è possibile evidenziare parte del codice e cliccando *F1* verremo inviati al centro di documentazione inerente che è disponibile anche offline (raggiungibile anche mediante comando *Help* del menù principale).

4.3.2 FEM method

In questo paragrafo verrà fornita una trattazione del metodo agli elementi finiti implementato su Mathematica in riferimento a [41], vedremo come tale metodo è presente implicitamente all'interno del comando *NDSolve*, il quale introduce concetti di metodo agli elementi finiti per risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE).

Il comando *NDSolve*[*eqns*,*u*, {*x*,*xmin*,*xmax*}], il quale permette di trovare una soluzione numerica al sistema di equazioni differenziali *eqns* rispetto alla funzione *u* con la variabile indipendente *x* che varia da *xmin* a *xmax*, verrà utilizzato per la ricerca di una soluzione al problema studiato in questo elaborato.

Le soluzioni esplicite in forma chiusa per equazioni differenziali parziali (PDE) sono raramente disponibili, il metodo degli elementi finiti (FEM) costituisce una tecnica per risolvere numericamente le equazioni alle derivate parziali adattabile su quasi tutte le regioni di forma arbitraria ed utilizzabile per una grande varietà di PDE.

Per risolvere un'equazione alle derivate parziali attraverso il metodo degli elementi finiti sono necessarie, una rappresentazione discreta della regione di spazio analizzata (*mesh*), una PDE od un sistema di PDE e delle condizioni al contorno in grado di collegare le equazioni con la suddetta regione di spazio considerata.

Ai fini di questo elaborato sarà necessario, come visto, applicare delle condizioni al contorno di Dirichlet e di Neumann.

Per ragioni pratiche all'interno del tool *NDSolve* le condizioni di Neumann devono essere fornite come parte dell'equazione attraverso il comando *NeumannValue*.

Le condizioni di Dirichlet (*DirichletCondition*), invece, possono essere inserite a parte.

L'implementazione di entrambe queste condizioni richiede la specificazione della posizione al contorno del regime di spazio studiato nella quale esse vengono applicate.

NDSolve fornisce un'interfaccia ad alto livello per risolvere equazioni differenziali alle derivate parziali con il metodo degli elementi finiti utilizzato implicitamente.

Se, tuttavia, si vogliono controllare i passaggi del processo di soluzione in maniera più dettagliata, occorrerà caricare sul *Notebook* di Mathematica il pacchetto

Needs["NDSolve`FEM`"]

Il quale fornisce un'interfaccia di livello inferiore che permette un controllo completo per ciascuna parte del processo di soluzione, favorisce una migliore comprensione di quello che il comando *NDSolve* elabora internamente e di come trova soluzioni.

Vedremo ora come *NDSolve* risolve un modello agli elementi finiti passo dopo passo.

La soluzione viene trovata in 3 fasi: inizializzazione, discretizzazione e risoluzione.

Durante la fase di inizializzazione, le PDE e le condizioni al contorno vengono analizzate e classificate in componenti diverse e questi risultati vengono immagazzinati rispettivamente negli oggetti *PDECoefficientData* e *BoundaryConditionData*.

Mentre i dati del metodo agli elementi finiti sono impostati e memorizzati nell'oggetto *FEMMethodData*.

Nella seconda fase, le PDE e le condizioni al contorno sono discretizzate ed immagazzinate attraverso *DiscretizedPDEData* e *DiscretizeBoundaryConditionData*; in questa fase essenzialmente le PDE continue e le condizioni al contorno vengono approssimate ad una loro versione discreta rappresentata da cosiddette matrici di sistema.

La terza e ultima fase consiste nell'unire le PDE e le condizioni al contorno discretizzate mediante *DeployBoundaryConditions* ed utilizzare *LinearSolve* per risolvere il sistema di equazioni così ottenuto.

Per analizzare queste tre fasi occorrerà tuttavia, come precedentemente specificato, fornire una PDE, una regione di spazio e delle condizioni al contorno.

Specifichiamo quindi una equazione alle derivate parziali, come può essere ad esempio l'equazione di Poisson bidimensionale

```
In[10]= op = Laplacian[u[x, y], {x, y}] - 1
Out[10]= -1 + u(0,2)[x, y] + u(2,0)[x, y]
```

Creiamo una regione di spazio da analizzare

```
In[11]= Ω = ImplicitRegion[0 ≤ x ≤ 1 && 0 ≤ y ≤ 1, {x, y}]
Out[11]= ImplicitRegion[0 ≤ x ≤ 1 && 0 ≤ y ≤ 1, {x, y}]
```

E settiamo le condizioni al contorno di Neumann e Dirichlet

```
In[12]:=  $\Gamma_D = \text{DirichletCondition}[u[x, y] == -1, x == 0]$ 
```

```
Out[12]= DirichletCondition[u[x, y] == -1, x == 0]
```

```
In[13]:=  $\Gamma_N = \text{NeumannValue}[-1 + u[x, y], x == 1]$ 
```

```
Out[13]= NeumannValue[-1 + u[x, y], x == 1]
```

Per risolvere tale PDE sulla regione di spazio considerata, avendo specificato le condizioni al contorno, il comando *NDSolve* può essere utilizzato direttamente

```
In[14]:= NDSolve[{op ==  $\Gamma_N, \Gamma_D$ }, u, {x, y}  $\in \Omega$ ]
```

```
Out[14]= {{u  $\rightarrow$  InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.}, {0., 1.}} Output: scalar ]}}
```

Tale procedimento rappresenta un tipico flusso di lavoro che utilizza la funzionalità del comando *NDSolve*.

Per comparare tale procedimento con l'uso delle funzioni *NDSolve* 'FEM' possiamo estrarre e ispezionare i dati utilizzati da *NDSolve* durante il procedimento di soluzione

```
In[15]:= {state} = NDSolve`ProcessEquations[{op ==  $\Gamma_N, \Gamma_D$ },  
u, {x, y}  $\in \Omega$ , Method  $\rightarrow$  {"PDEDiscretization"  $\rightarrow$  "FiniteElement"}]
```

```
Out[15]= {NDSolve`StateData[<SteadyState>]}
```

Ottenere i dati degli elementi finiti

```
In[16]:= femdata = state["FiniteElementData"]
```

```
Out[16]= FiniteElementData[<1342>]
```

Ed ispezionare le proprietà

```
In[17]:= femdata["Properties"]
```

```
Out[17]= {BoundaryConditionData, FEMMethodData, PDECoefficientData, Properties, Solution}
```

Passiamo in seguito all'analisi delle 3 fasi precedentemente citate.

La fase di inizializzazione caratterizza tutti i dati che vengono implicitamente creati durante un'esecuzione di *NDSolve*.

Affinchè venga ottenuta una soluzione, è necessario fornire le specifiche della variabile dipendente u , delle variabili indipendenti $\{x, y\}$, della regione di spazio Ω e per le funzioni degli elementi finiti.

La variabile e i dati della soluzione sono memorizzati in elenchi di dati i quali possono essere generati utilizzando *NDSolve`VariableData* e *NDSolve`SolutionData*.

```
In[18]= vd = NDSolve`VariableData["DependentVariables" → {u}, "Space" → {x, y}]
```

```
Out[18]= {None, {x, y}, {u}, {}, {}, {}, {}, {}}
```

```
In[19]= nr = ToNumericalRegion[ $\Omega$ ]
```

```
Out[19]= NumericalRegion[ImplicitRegion[ $0 \leq x \leq 1 \ \&\& \ 0 \leq y \leq 1$ , {x, y}], {{0, 1}, {0, 1}}]
```

```
In[20]= sd = NDSolve`SolutionData["Space" → nr]
```

```
Out[20]= {None, NumericalRegion[ImplicitRegion[ $0 \leq x \leq 1 \ \&\& \ 0 \leq y \leq 1$ , {x, y}], {{0, 1}, {0, 1}}], {}, {}, {}, {}, {}}
```

Definiamo i coefficienti del modello per la PDE studiata

```
In[21]= op
```

```
Out[21]=  $-1 + u^{(0,2)}[x, y] + u^{(2,0)}[x, y]$ 
```

```
In[22]= coefficients = {"DiffusionCoefficients" → {{IdentityMatrix[2]}}, "LoadCoefficients" → {{1}}}
```

```
Out[22]= {DiffusionCoefficients → {{{{1, 0}, {0, 1}}}}, LoadCoefficients → {{1}}}
```

Inizializziamo tali coefficienti

```
In[23]= initCoeffs = InitializePDECoefficients[vd, sd, coefficients]
```

```
Out[23]= PDECoefficientData[<1,2>]
```

I coefficienti inizializzati sono memorizzati nella struttura *PDECoefficientData*, il modulo di visualizzazione mostra la dimensione del sistema, ovvero il numero di variabili dipendenti l e la dimensione dello spazio 2 dei coefficienti inizializzati.

Durante l'inizializzazione i coefficienti sono classificati in differenti categorie

```
In[26]= initCoeffs["Properties"]  
Out[26]= {All, ConservativeConvectionCoefficients, Constraints, ConvectionCoefficients,  
DampingCoefficients, DiffusionCoefficients, Discrete, IndexedDiscrete, LoadCoefficients,  
LoadDerivativeCoefficients, MassCoefficients, Nonlinear, Parametric, Properties,  
ReactionCoefficients, SpatialDimension, Stationary, SystemSize, Transient}
```

Analogamente occorre poi inizializzare le condizioni al contorno

```
In[27]= initBCs = InitializeBoundaryConditions[vd, sd, {{ΓD, ΓN}}  
Out[27]= BoundaryConditionData[<1,2>]
```

I coefficienti delle condizioni al contorno vengono classificati in categorie similmente a quanto avviene ai coefficienti della PDE

```
In[28]= initBCs["Properties"]  
Out[28]= {All, BoundaryTolerance, Constraints, Discrete, IndexedDiscrete,  
Nonlinear, Parametric, Properties, ScaleFactor, Stationary, Transient}
```

Occorre infine inizializzare i dati degli elementi finiti

```
In[31]= methodData = InitializePDEMethodData[vd, sd,  
Method → {"FiniteElement", "MeshOptions" → {"MaxCellMeasure" → 0.1}}]  
Out[31]= FEMMethodData[<53,{2},4>]
```

Nella quale 53 sono i gradi di libertà, 2 rappresenta l'ordine di interpolazione e 4 l'ordine di integrazione.

Durante il metodo di inizializzazione viene creata una *ElementMesh*, la quale sarà immagazzinata mediante il tool *NumericalRegion*.

```
In[33]:= mesh = nr["ElementMesh"]
Out[33]= ElementMesh[{{0., 1.}, {0., 1.}}, {TriangleElement[<20>]}]
```

I gradi di libertà di un sistema di equazioni derivano da una combinazione dei nodi presenti nella *mesh* dell'elemento considerato, dal numero di variabili dipendenti e dell'ordine di interpolazione di queste ultime.

Quando viene fornita una sola variabile dipendente i gradi di libertà corrispondono ai nodi nell'oggetto *ElementMesh*.

L'ordine di integrazione rappresenta l'ordine di accuratezza con il quale sono integrati gli operatori agli elementi finiti.

Riducendo l'ordine di integrazione si otterrà una risoluzione più veloce del problema che potenzialmente può risultare meno accurata rispetto al caso di un ordine di integrazione maggiore che richiede, però, un maggiore tempo di processazione.

Occorre verificare che l'oggetto creato tramite *NDSolve* corrisponda all'oggetto generato mediante *FEMMethodData*

```
In[36]:= {s1} = NDSolve`ProcessEquations[{op ==  $\Gamma_N, \Gamma_D$ }, u, {x, y}  $\in \Omega$ ,
Method -> {"FiniteElement", "MeshOptions" -> {"MaxCellMeasure" -> 0.1}}];

In[37]:= s1["FiniteElementData"]["FEMMethodData"] === methodData
Out[37]= True
```

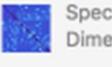
Successivamente occorrerà procedere con la fase di discretizzazione durante la quale le PDE continue e le condizioni al contorno sono approssimate con varianti discrete.

I coefficienti inizializzati della PDE sono trasformati in una forma discreta

```
In[42]:= discretePDE = DiscretizePDE[initCoeffs, methodData, sd]
Out[42]= DiscretizedPDEData[<53>]
```

Il modulo di visualizzazione della *DiscretizePDEData* mostra la prima dimensione delle matrici di sistema.

Risulta possibile estrarre tutte le matrici di sistema

```
In[43]:= {load, stiffness, damping, mass} = discretePDE["SystemMatrices"]
Out[43]:= { SparseArray[ +  Specified elements: 53 Dimensions: {53, 1} ], SparseArray[ +  Specified elements: 509 Dimensions: {53, 53} ], SparseArray[ +  Specified elements: 0 Dimensions: {53, 53} ], SparseArray[ +  Specified elements: 0 Dimensions: {53, 53} ] }
```

Occorre ora ottenere una versione discreta delle condizioni al contorno precedentemente fornite

```
In[48]:= discreteBCs = DiscretizeBoundaryConditions[initBCs, methodData, sd]
Out[48]:= DiscretizedBoundaryConditionData[<53>]
```

Per quanto riguarda le condizioni di Neumann i contributi sono relativi alla matrice di carico del sistema e alla matrice di rigidezza; la matrice di rigidezza ha componenti diverse da zero se *NeumannValue* dipende dalla variabile dipendente

```
In[49]:= {discreteBCs["LoadVector"], discreteBCs["StiffnessMatrix"]}
Out[49]:= { SparseArray[ +  Specified elements: 7 Dimensions: {53, 1} ], SparseArray[ +  Specified elements: 25 Dimensions: {53, 53} ] }
```

La rappresentazione delle *DirichletCondition* viene fornita attraverso una matrice contenente posizioni che specificano quali gradi di libertà devono vedersi applicata la condizione al contorno.

Si ottiene una seconda matrice contenente i valori che devono essere applicati

```
In[50]:= {discreteBCs["DirichletMatrix"], discreteBCs["DirichletValues"]}
Out[50]:= { SparseArray[ +  Specified elements: 7 Dimensions: {7, 53} ], SparseArray[ +  Specified elements: 7 Dimensions: {7, 1} ] }
```

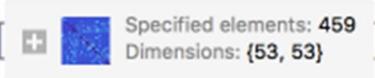
Si passa, infine, alla fase di risoluzione.

Affinché le condizioni al contorno discretizzate abbiano effetto devono essere implementate nelle matrici di sistema precedentemente ottenute attraverso il comando *DeployBoundaryConditions*

```
In[51]:= DeployBoundaryConditions[{load, stiffness}, discreteBCs]
Out[51]= DeployedBoundaryConditionData[<Insert>]
```

Durante tale processo di distribuzione i contributi dispensati mediante *NeumannValue* sono aggiunti alle matrici di carico e rigidezza ed in seguito le matrici di sistema sono modificate in maniera tale che le *DirichletCondition* siano soddisfatte.

In seguito alla distribuzione delle condizioni al contorno, le matrici di sistema cambieranno e conterranno in genere meno elementi

```
In[52]:= {load, stiffness}
Out[52]= { SparseArray[  Specified elements: 53
Dimensions: {53, 1} ], SparseArray[  Specified elements: 459
Dimensions: {53, 53} ] }
```

Generalmente il sistema di equazioni risulta solvibile solamente dopo tale processo di distribuzione.

Per la risoluzione del sistema si utilizza, infine, il comando *LinearSolve*

```
In[53]:= Short[solution = LinearSolve[stiffness, load]]
Out[53]/Short=
{{-1.}, {-1.}, {-1.}, {-1.}, <<46>>, {-0.669126}, {-1.}, {-0.25}}
```

Capitolo 5: Implementazione del problema su Mathematica

In questo capitolo verrà dapprima richiamato il problema considerato in questo elaborato, per poi analizzare il metodo numerico implementato sul pacchetto software Mathematica 11.1 (© Wolfram, inc.) che si è utilizzato per la sua risoluzione.

Verranno, in seguito, riportati i risultati ottenuti: nello specifico si ricercheranno le configurazioni a diverso numero di celle di convezione che si instaurano al variare del numero di Rayleigh, si riporterà la correlazione ottenuta tra i valori del numero di Nusselt a quelli del numero di Rayleigh ed infine si riporterà l'andamento dell'energia cinetica in funzione, sempre, del numero di Rayleigh.

5.1 Modello del problema

Si è considerato uno strato poroso orizzontale saturato di fluido e riscaldato dal basso, si è assunto un regime stazionario e la presenza di non linearità all'interno delle PDE utilizzate.

Considereremo le pareti orizzontali poste a $y=0$ e $y=H$, mentre le pareti verticali saranno posizionate a $x=0$ e $x=L$.

Per completare il modello matematico saranno assunte le seguenti condizioni al contorno: la temperatura alla parete inferiore (T_h) e superiore (T_c) sarà mantenuta costante con $T_h > T_c$, mentre le pareti verticali saranno adiabatiche; riguardo la funzione di corrente, tutte le pareti saranno considerate impermeabili al flusso.

Una volta adimensionalizzate tutte le equazioni ed introdotta la funzione di corrente otterremo il problema costituito dalle (3.65)-(3.66), già descritto precedentemente.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.66)$$

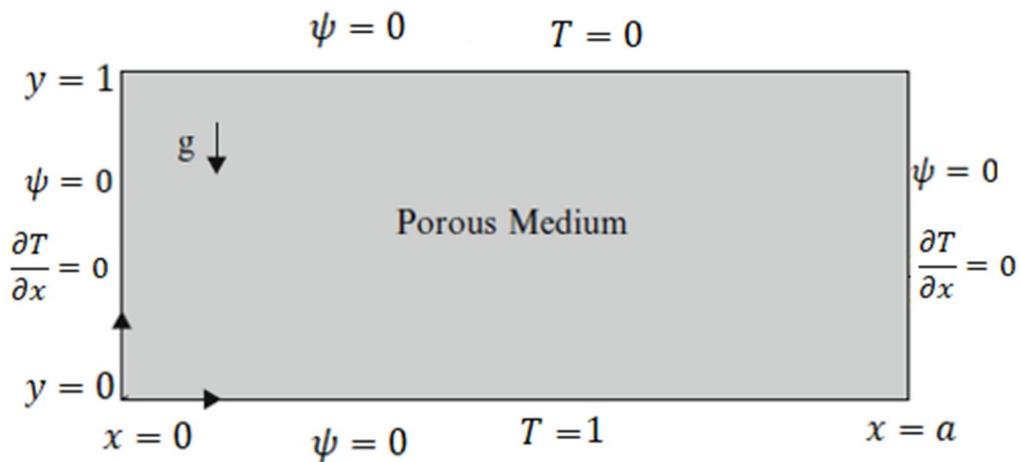
Con condizioni al contorno espresse dalla (3.68)

$$y = 0 : \psi = 0, T = 1 \quad ; \quad y = 1 : \psi = 0, T = 0$$

$$x = 0, x = a : \psi = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.68)$$

Dove con a si è indicato il rapporto tra la lunghezza L dello strato orizzontale e la lunghezza di riferimento utilizzata per adimensionalizzare le equazioni, ovvero H .

Infine, sarà utile riportare lo schema del modello che si è ottenuto



5.2 Implementazione del codice su Mathematica

Si riporta, dapprima, l'intero codice utilizzato per la risoluzione del problema (3.65)-(3.66) con condizioni al contorno (3.68) ed, In seguito, saranno analizzate singolarmente tutte le varie stringhe di codice e se ne spiegherà il funzionamento.

Il codice utilizzato è il seguente

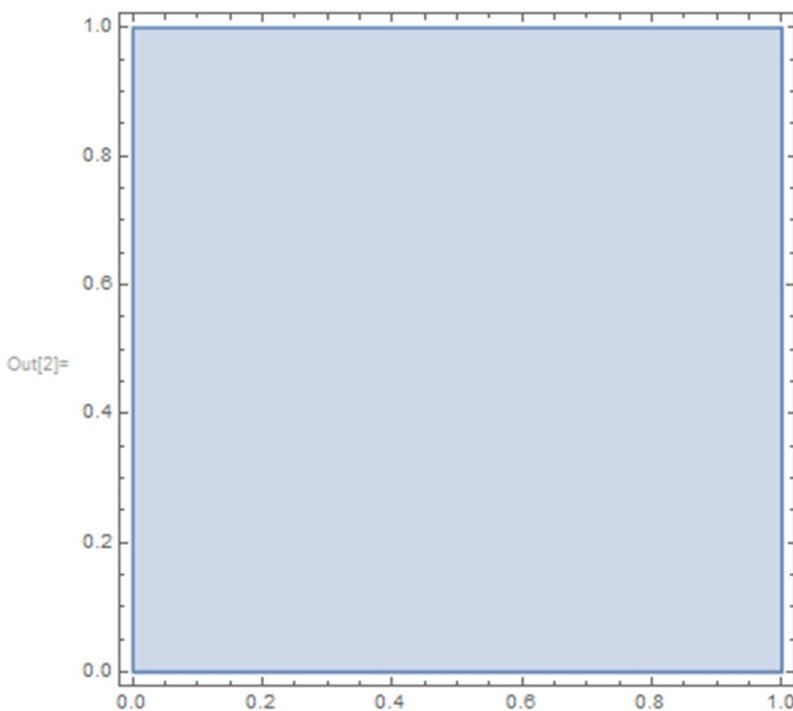
```
Clear[Tsol,  $\psi$ sol,  $\psi$ val, R,  $\psi$ , T];
 $\Omega$  = ImplicitRegion[{0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1},
  {{x, 0, 1}, {y, 0, 1}}];
RegionPlot[ $\Omega$ , AspectRatio → Automatic]
 $\psi$ val[0, x_, y_] = -Sin[ $\pi$  * w * x] Sin[ $\pi$  * y];
R = m;
For[
  i = 0,
  i < 10n,
  i++,
  Tsol =
    NDSolveValue[
      { $\partial_{x,x}$ T[x, y] +  $\partial_{y,y}$ T[x, y] -  $\partial_y$  $\psi$ val[i, x, y]  $\partial_x$ T[x, y] +
         $\partial_x$  $\psi$ val[i, x, y]  $\partial_y$ T[x, y] ==
        NeumannValue[0., x == 0 || x == 1],
      T[x, 0] == 1, T[x, 1] == 0},
      T, {x, y} ∈  $\Omega$ ];
   $\psi$ sol =
    NDSolveValue[{ $\partial_{x,x}$  $\psi$ [x, y] +  $\partial_{y,y}$  $\psi$ [x, y] + R  $\partial_x$ Tsol[x, y] == 0,
       $\psi$ [0, y] == 0,  $\psi$ [1, y] == 0,  $\psi$ [x, 0] == 0,  $\psi$ [x, 1] == 0},
       $\psi$ , {x, y} ∈  $\Omega$ ];
  Print[{i,  $\psi$ sol[0.8, 0.8],  $\psi$ val[i, 0.8, 0.8]}];
   $\psi$ val[i + 1, x_, y_] =  $\psi$ sol[x, y]
]
```

Analizziamo i vari input a partire dal primo in alto

```
Clear[Tsol,  $\psi$ sol,  $\psi$ val, R,  $\psi$ , T];
```

Il comando *Clear* permette di cancellare prima dell'inizio di ogni nuova computazione tutte le variabili che si sono ricavate nell'implementazione precedente, le quali altrimenti interferirebbero con la corretta risoluzione del problema.

```
In[1]:=  $\Omega$  = ImplicitRegion[{0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1}, {{x, 0, 1}, {y, 0, 1}}];  
RegionPlot[ $\Omega$ , AspectRatio → Automatic]
```



Il comando *ImplicitRegion* permette di definire la regione di spazio, che chiameremo Ω , nella quale avverrà la risoluzione del problema, Mentre il comando *RegionPlot* fornirà come output l'immagine della regione di spazio definita attraverso il toll *ImplicitRegion*.

Come si può vedere, è stata scelta una regione di spazio per la quale la variabile indipendente y risulterà compresa tra 0 e 1 mentre la variabile indipendente x varierà, anch'essa, nel range compreso tra 0 e 1.

Si è scelta una estensione dello strato poroso orizzontale pari a 1 in quanto, come si è visto in precedenza, il valore del numero d'onda critico (λ_c) risulta pari a π , e dunque per la lunghezza d'onda critica (ζ_c) si ottiene

$$\lambda_c = \pi \rightarrow \zeta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = 2 \quad (5.1)$$

Occorre, tuttavia, specificare che tale lunghezza d'onda si riferisce ad una intera oscillazione della funzione considerata (ψ_{val}), necessaria all'inizializzazione del processo, e quindi porterebbe alla formazione di due celle di convezione.

Visto che si ricercano configurazioni di instabilità convettiva con, inizialmente, presenza di una sola cella di convezione occorrerà considerare una estensione orizzontale del dominio pari a metà della lunghezza d'onda critica, ovvero pari al numero adimensionale l .

Per inizializzare il processo si utilizzerà la funzione ψ_{val} descritta come in seguito

$$\psi_{val}[0, x_, y_] = -\text{Sin}[\pi * w * x] \text{Sin}[\pi * y];$$

Nella quale con w si è indicato un numero intero positivo, in questo elaborato sono stati effettuati calcoli considerando tale parametro nel range compreso tra 0 e 5 .

La funzione ψ_{val} rappresenta un campo fittizio per la funzione di corrente scelto arbitrariamente per ovviare la presenza delle non linearità; l'idea è stata quella di scegliere, per questa funzione di inizializzazione, una forma che rispecchia l'andamento delle soluzioni ricercate.

In questo modo il processo iterativo porterà all'ottenimento di una soluzione solo se quest'ultima degenererà nella funzione di inizializzazione descritta, in caso contrario non si raggiungerà convergenza del processo iterativo.

Una volta definita la regione di spazio e descritta la funzione che inizializzerà il processo occorre decidere a quale numero di Rayleigh effettuare il procedimento di calcolo

$$R = m;$$

Con tale comando possiamo fissare il numero di Rayleigh che si utilizzerà per ogni procedimento di calcolo.

Con m si è indicato un numero reale positivo o nullo, in questo studio l'analisi è stata condotta mediante calcoli effettuati per R compreso tra 0 e 1000 .

A questo punto è stato definito un procedimento di calcolo iterativo mediante il comando *For* nella forma

```
For [
  i = 0,
  i < 10^n,
  i ++,
  Tsol =
  NDSolveValue[
    {∂x,xT[x, y] + ∂y,yT[x, y] - ∂yψval[i, x, y] ∂xT[x, y] +
      ∂xψval[i, x, y] ∂yT[x, y] ==
      NeumannValue[0., x == 0 || x == 1],
    T[x, 0] == 1, T[x, 1] == 0},
  T, {x, y} ∈ Ω];
  ψsol =
  NDSolveValue[{∂x,xψ[x, y] + ∂y,yψ[x, y] + R ∂xTsol[x, y] == 0,
    ψ[0, y] == 0, ψ[1, y] == 0, ψ[x, 0] == 0, ψ[x, 1] == 0},
  ψ, {x, y} ∈ Ω];
  Print[{i, ψsol[0.8, 0.8], ψval[i, 0.8, 0.8]}];
  ψval[i + 1, x_, y_] = ψsol[x, y]
]
```

La struttura di controllo *For* permette di effettuare un procedimento iterativo, in questo caso a partire dall'iterazione 0

$i = 0,$

Il procedimento iterativo prosegue per un numero di iterazioni dato da

$$i < 10^n,$$

Tale forma sta ad indicare che nel procedimento di calcolo effettuato verranno eseguite $10^n - 1$ iterazioni prima della cessazione del processo stesso.

n rappresenta un numero reale positivo che sarà deciso in base alla difficoltà che il procedimento presenterà a convergere alla soluzione; naturalmente maggiore sarà tale parametro e migliore risulterà la precisione del processo iterativo.

Occorrerà poi specificare l'avanzamento delle iterazioni, mediante

$$i++,$$

Si intende che le iterazioni aumentano progressivamente di un numero intero fino a raggiungere il numero massimo di iterazioni descritto sopra.

Il corpo del ciclo *For* sarà

```

Tsol =
  NDSolveValue[
    { $\partial_{x,x}T[x, y] + \partial_{y,y}T[x, y] - \partial_y\psi_{val}[i, x, y] \partial_xT[x, y] +$ 
       $\partial_x\psi_{val}[i, x, y] \partial_yT[x, y] =$ 
      NeumannValue[0.,  $x = 0 \ || \ x = 1$ ],
       $T[x, 0] = 1, T[x, 1] = 0$ },
    T, {x, y}  $\in \Omega$ ];
 $\psi$ sol =
  NDSolveValue[{ $\partial_{x,x}\psi[x, y] + \partial_{y,y}\psi[x, y] + R \partial_xTsol[x, y] = 0,$ 
     $\psi[0, y] = 0, \psi[1, y] = 0, \psi[x, 0] = 0, \psi[x, 1] = 0$ },
     $\psi$ , {x, y}  $\in \Omega$ ];
  
```

Dove si può osservare che la PDE espressa da *Tsol* rappresenta l'equazione (3.66) del problema analizzato alla quale vengono imposte le condizioni di adiabaticità alle pareti verticali $x=0$ e $x=1$ attraverso il comando *NeumannValue*, in analogia con quelle espresse dalla (3.68).

Mentre le condizioni di Dirichlet per la temperatura alle pareti orizzontali porgono, in accordo con le (3.68), $T=1$ a $y=0$ e $T=0$ a $y=1$.

Mediante il comando *NDSolveValue* avviene la risoluzione di tale PDE rispetto alla variabile dipendente T considerando le variabili indipendenti $\{x,y\}$ appartenenti alla regione di spazio Ω precedentemente definita.

Mentre la PDE espressa da *ψsol* rappresenta l'equazione (3.65) alla quale sono applicate le condizioni al contorno di Dirichlet per la funzione di corrente analoghe a quelle indicate nella (3.68).

Tali condizioni al contorno corrispondono alla situazione di funzione di corrente nulla a tutte le pareti, ovvero $\psi=0$ a $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.

Anche in questo caso tramite il comando *NDSolveValue* avviene la risoluzione dell'equazione differenziale considerando le variabili indipendenti $\{x,y\}$ appartenenti alla regione di spazio Ω precedentemente definita, questa volta, tuttavia, il calcolo è effettuato rispetto alla variabile dipendente ψ .

Si ricorda inoltre che il comando *NDSolveValue* sfrutta implicitamente il metodo degli elementi finiti per la risoluzione del problema attraverso inizializzazione dei coefficienti delle PDE e delle condizioni al contorno, discretizzazione delle stesse e risoluzione del modello ricavato, analogamente al procedimento descritto della sezione 4.3.2 per il comando *NDSolve*.

Risulta interessante specificare che la non linearità del problema è contenuta nei termini $\partial_y \psi val[i, x, y] \partial_x T[x, y]$ e $\partial_x \psi val[i, x, y] \partial_y T[x, y]$ presenti in *Tsol*.

Sarà, a questo punto, necessario verificare i valori della funzione di corrente ottenuta e confrontarli iterazione per iterazione con la funzione *ψval*, lo si farà sfruttando il seguente script

```
Print[{i, ψsol[0.8, 0.8], ψval[i, 0.8, 0.8]}];
```

Nel quale si specifica sia che i valori devono essere stampati per l'iterazione corrente (*i*), sia in quale punto del dominio dovranno essere calcolati.

In questo caso si sono scelti i valori 0.8 per la variabile indipendente x e 0.8 per la y .

Infine, occorrerà rielaborare la funzione ψ_{val} , necessaria all'inizializzazione del processo di calcolo nell'iterazione successiva, eguagliandola alla funzione ψ_{sol} ricavata all'iterazione corrente

$$\psi_{val}[i + 1, x_, y_] = \psi_{sol}[x, y]$$

Chiudendo così il ciclo For.

A questo punto si farà partire la valutazione del codice descritto mediante *Shift+Invio* o tramite il comando *Start Evaluation* e si eseguiranno calcoli per diversi valori dei parametri w, m, n .

Se si osserva che il processo iterativo giunge a convergenza prima del raggiungimento del limite di iterazioni imposto sarà sempre possibile chiudere il processo stesso mediante il comando *Abort Evaluation*.

5.3 Risultati ottenuti

In questo paragrafo verranno riportati in forma di grafico i risultati ottenuti durante le computazioni effettuate con il codice descritto nel paragrafo 5.2.

Verrà dapprima studiato il numero di celle di convezione che si formano all'interno del dominio al variare del numero di Rayleigh.

In secondo luogo, verrà calcolato il numero di Nusselt medio alle pareti orizzontali dello strato, ovvero quelle poste a $y=0$ e $y=1$, per poi riportare un grafico che mostri l'andamento del numero di Nusselt medio alla parete in funzione del numero di Rayleigh, facendo riferimento ad un regime convettivo con un fissato numero di celle formate.

Infine, verrà riportato l'andamento dell'energia cinetica ottenuta al variare del numero di Rayleigh per tutte le configurazioni a diverso numero di celle ottenute in questo elaborato.

5.3.1 Numero di celle di convezione ottenute al variare del numero di Rayleigh

Sono state effettuate valutazioni del codice descritto nel paragrafo 5.2 per valori del numero di Rayleigh compresi tra 0 e 1000, ottenendo, al variare di R , diverse configurazioni di regime convettivo nelle quali si è trovata l'assenza o la presenza di un diverso numero di celle.

I risultati così ottenuti sono stati inseriti nel codice

```
Plot[
{
  If[39.4784176 ≤ x ≤ 315, y = 1, None],
  If[81 ≤ x ≤ 631, y = 2, None],
  If[x ≥ 185, y = 3, None],
  If[x ≥ 501, y = 4, None]},
{x, 0, 1000}, Axes → {True, False}, AxesOrigin → {0, 0},
ImageSize → Large,
PlotLabels →
  Placed[{"1 cella", "2 celle", "3 celle", "4 celle"},
    {Scaled[1], Above}], PlotLabel → "Correlazione Ncelle ed R",
AxesLabel → {R, Ncelle}, Filling → Axis,
PlotStyle → {Blue, Orange, Green, Red}]
```

Il quale ha permesso di ottenere il seguente grafico

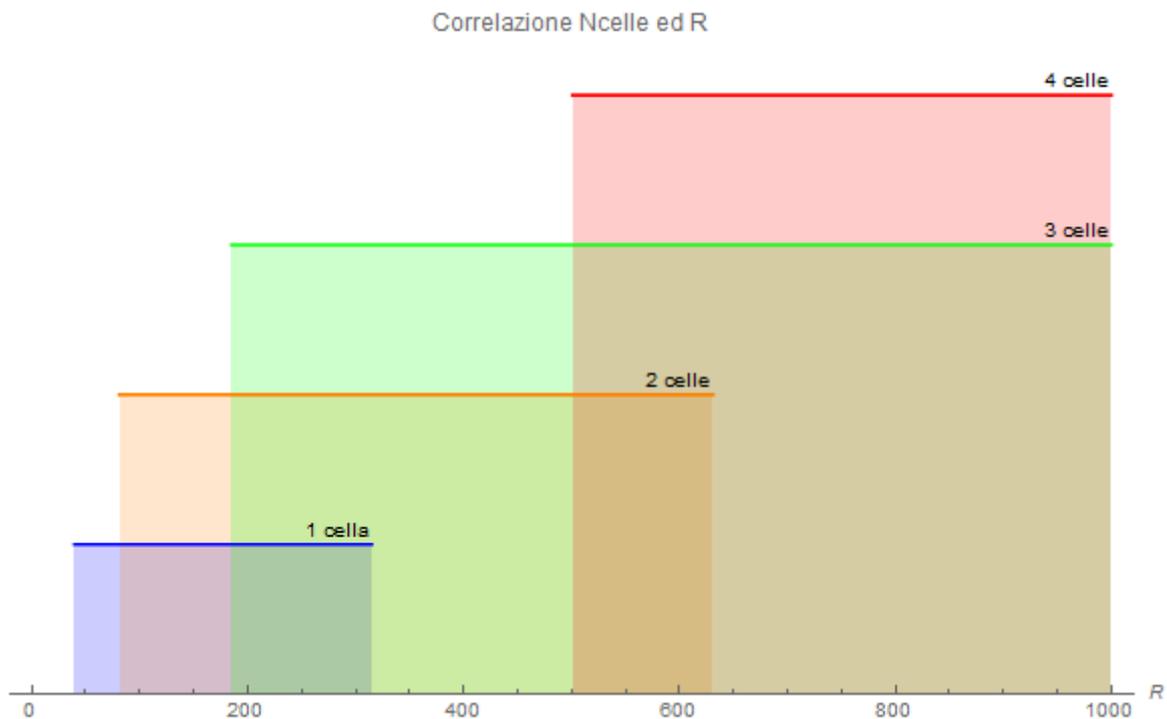


Figura 5.1: Numero di celle convettive ottenute al variare del numero di Rayleigh

Nel grafico 5.1 è stato riportato il numero di celle convettive che si formano al variare del numero di Rayleigh in un range compreso tra 0 e 1000; come si può osservare, per $R < R_c = 4\pi^2$ non si ha formazione di celle di convezione; mentre oltre il valore critico, al crescere del numero di Rayleigh si possono visualizzare, nel grafico, le varie configurazioni possibili.

Nel caso studiato in questo elaborato a $R \geq 4\pi^2$ si ottiene una configurazione di instabilità convettiva ad una cella di convezione, tale configurazione risulterà presente fino a numeri di Rayleigh pari a 315.

Per $81 \leq R \leq 631$ sarà presente la configurazione a 2 celle di convezione; infine a partire da $R = 185$ e $R = 501$, e fino al limite del numero di Rayleigh considerato in questo elaborato ($R = 1000$), si avranno, rispettivamente, le configurazioni a 3 e 4 celle.

Nell'intervallo del numero di Rayleigh considerato non si ottiene mai, per le condizioni descritte dal problema analizzato, la configurazione di regime convettivo con presenza di 5 o più celle di convezione.

Utilizzando il comando *ContourPlot* di Mathematica si può graficare l'andamento della funzione di corrente all'interno del dominio di spazio considerato, tale grafico mostrerà le varie configurazioni con diversi numeri di celle che si sono formate durante le computazioni effettuate.

Si potrà inoltre, mediante lo stesso comando, riportare anche l'andamento del campo di temperatura ottenuto.

Nel caso specifico, i grafici suddetti, si possono ottenere implementando il seguente codice

```
ContourPlot[ψsol[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, PlotLegends → Automatic]
ContourPlot[Tsol[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, PlotLegends → Automatic]
```

Ottenendo, nel caso in cui $R < 4\pi^2$, il seguente risultato

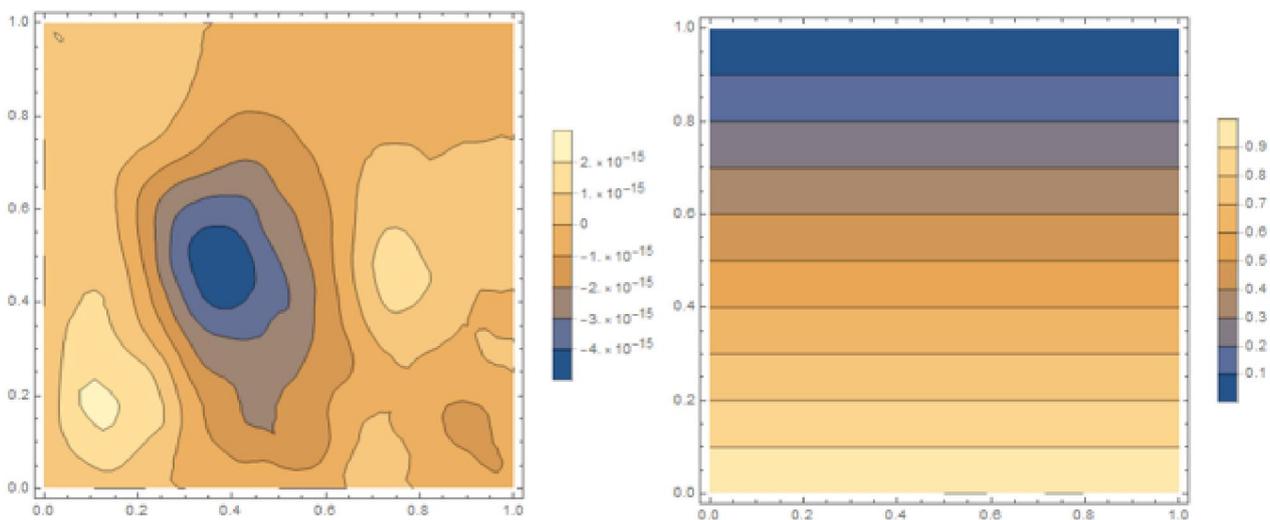


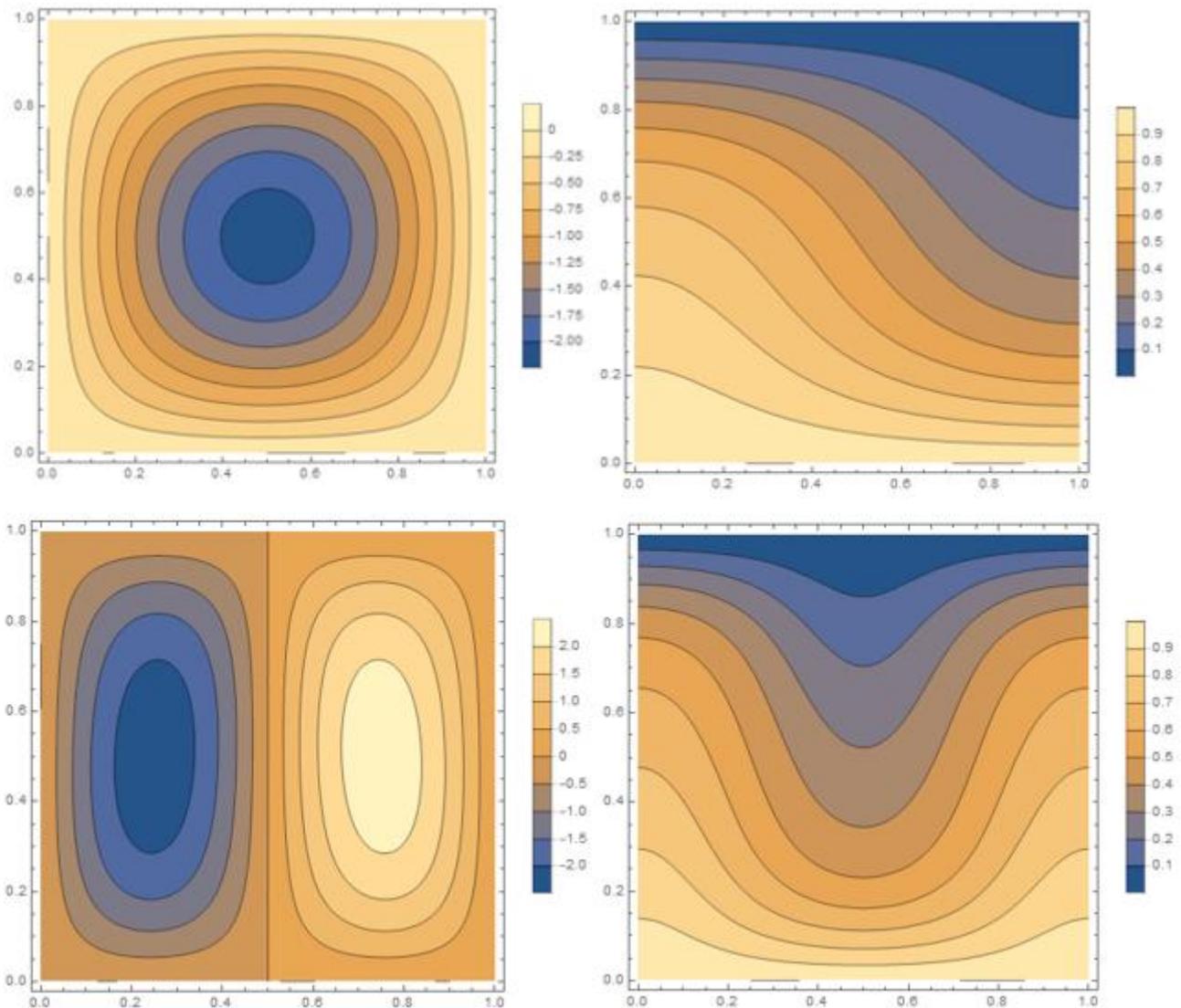
Figura5.2: Andamento della funzione di corrente e del campo di temperatura per $R < R_c$

Nel primo grafico è mostrato l'andamento della funzione di corrente, come si vede non si ha la formazione di celle convettive e il valore della funzione di corrente nelle varie zone è tendente a zero, risultato illustrato, anche, nella leggenda a destra.

Nel secondo grafico si osserva l'andamento del campo di temperatura, visto che il moto del fluido è pressoché nullo, si avrà una stratificazione del campo di temperatura e il calore risulterà scambiato per sola conduzione; i valori della temperatura adimensionale nelle varie zone del dominio sono illustrati dalla legenda a destra.

Quando invece il numero di Rayleigh supera il valore critico si avrà instabilità sottoforma di moto cellulare e il moto del fluido favorirà lo scambio di calore per convezione.

Nel caso in cui $4\pi^2 \leq R \leq 1000$, i seguenti risultati sono stati ottenuti



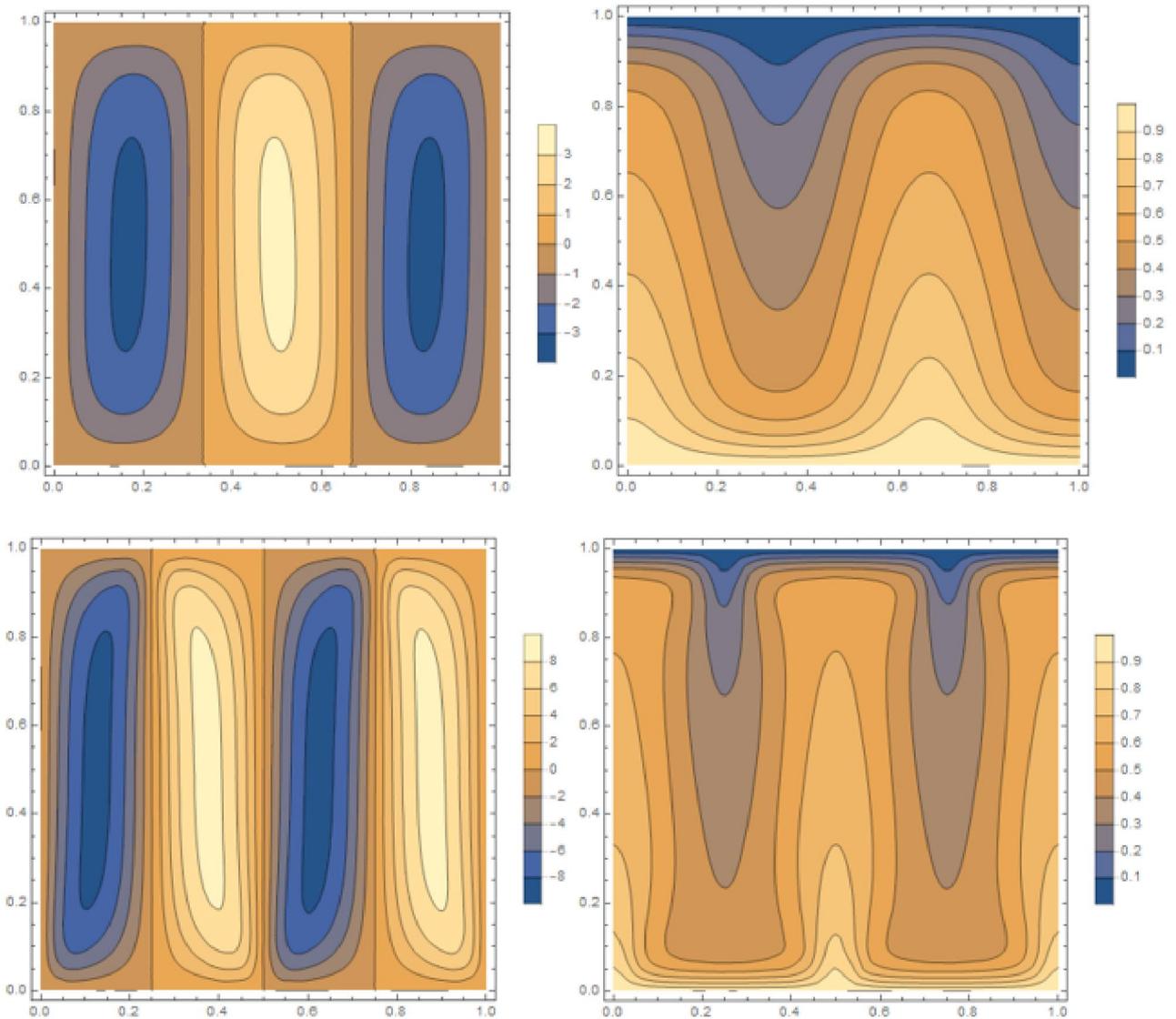


Figura 5.3: Configurazioni di regime convettivo con presenza di diversi numeri di celle convettive e corrispondente andamento del campo di temperatura nell'intervallo $4\pi^2 \leq R \leq 1000$

5.3.2 Correlazione R e Nu

In questo paragrafo verrà ricavata una correlazione tra il numero di Rayleigh compreso nell'intervallo $0 \leq R \leq 1000$ e il numero di Nusselt medio alle pareti orizzontali, ovvero quelle poste ad $y=0$ e $y=1$, considerando il caso di regime convettivo con presenza di 1,2,3 e 4 celle di convezione.

Il numero di Nusselt descrive il rapporto tra il calore scambiato per convezione attraverso lo strato poroso saturato di fluido e quello scambiato per conduzione attraverso il medesimo strato.

Quando il numero di Nusselt ha valore unitario la trasmissione del calore avviene per sola conduzione, all'aumentare del valore di tale parametro risulta sempre più accentuata la trasmissione di calore per convezione.

Il numero di Nusselt alle pareti orizzontali, poste a $y=0$ e $y=1$, è stato calcolato mediante le seguenti relazioni

$$Nu_{y=0} = - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (5.2)$$

$$Nu_{y=1} = - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} \quad (5.3)$$

Ottenendo in questa maniera un numero di Nusselt in funzione della variabile indipendente x per le pareti orizzontali.

Risulta necessario, al fine di ottenere un valore numerico del numero di Nusselt, calcolare il suo valore medio alle due pareti orizzontali, lo si può fare Integrando tale parametro rispetto alla variabile x sulla lunghezza della parete orizzontale, ovvero tra $x=0$ e $x=1$, e poi dividere il risultato ottenuto per la lunghezza dello strato stesso, ovvero 1.

In formule possiamo scrivere

$$Nu_{m,y=0} = \frac{\int_0^1 Nu_{y=0} dx}{1} \quad (5.4)$$

$$Nu_{m,y=1} = \frac{\int_0^1 Nu_{y=1} dx}{1} \quad (5.5)$$

Tale procedimento può essere effettuato su Mathematica, dopo aver calcolato $Tsol$, come in seguito

```
Nu0 = NIntegrate[-∂y Tsol[x, y] /. y → 0, {x, 0, 1}] / 1
Nu1 = NIntegrate[-∂y Tsol[x, y] /. y → 1, {x, 0, 1}] / 1
```

Tale calcolo è stato effettuato per alcuni valori del numero di Rayleigh compresi nel range $0 \leq R \leq 1000$, considerando le configurazioni a 1, 2, 3 e 4 celle di convezione.

I risultati ottenuti sono stati riportati in due grafici, uno per il valore medio del numero di Nusselt alla parete posta a $y=0$ e uno per quella posta a $y=1$.

Considerando il caso di presenza di una singola cella di convezione, ovvero prendendo in esame il range del numero di Rayleigh compreso tra 0 e 315, grazie a calcoli numerici assistiti dal software Mathematica, sono stati ottenuti risultati per il valore medio del numero di Nusselt alla parete $y=0$, ed in seguito riportati in un grafico mediante il seguente codice

```
ListPlot[{{0, 1}, {10, 1}, {20, 1}, {30, 1}, {39.5784176, 1.005},
  {41, 1.076}, {42, 1.123}, {43, 1.170}, {44, 1.214}, {45, 1.258},
  {47.5, 1.361}, {50, 1.457}, {55, 1.633}, {60, 1.789}, {65, 1.931},
  {70, 2.061}, {80, 2.292}, {90, 2.494}, {100, 2.673}, {110, 2.836},
  {120, 2.985}, {130, 3.123}, {140, 3.250}, {150, 3.370}, {160, 3.483},
  {170, 3.589}, {180, 3.690}, {190, 3.786}, {200, 3.878}, {220, 4.049},
  {240, 4.207}, {260, 4.354}, {280, 4.491}, {300, 4.621}, {310, 4.682},
  {315, 4.713}}, ImageSize → Large,
PlotLabel → "Correlazione R e Num,y=0 ad 1 cella", AxesLabel → {R, Nu},
AxesOrigin → {0, 0}, Joined → True, Filling → Axis, PlotStyle → Blue]
```

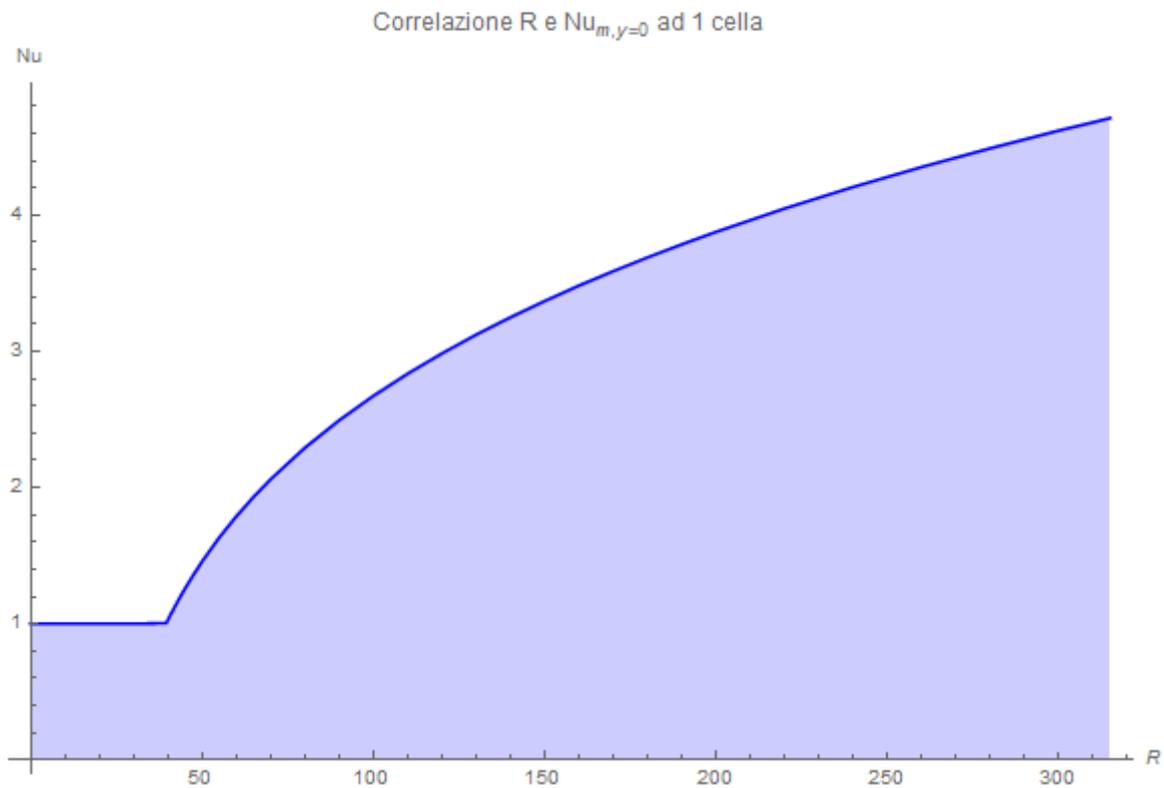


Figura 5.4: Correlazione R e Nu_m calcolato alla parete posta a $y=0$, per la configurazione ad 1 cella di convezione

Mentre per quanto riguarda il numero di Nusselt medio calcolato alla parete superiore, sempre considerando 1 cella di convezione, si è ottenuto

```
ListPlot[{{0, 1}, {10, 1}, {20, 1}, {30, 1}, {39.5784176, 1.005},
  {41, 1.076}, {42, 1.123}, {43, 1.170}, {44, 1.214}, {45, 1.258},
  {47.5, 1.361}, {50, 1.457}, {55, 1.633}, {60, 1.790}, {65, 1.932},
  {70, 2.061}, {80, 2.292}, {90, 2.494}, {100, 2.674}, {110, 2.837},
  {120, 2.986}, {130, 3.124}, {140, 3.252}, {150, 3.372}, {160, 3.484},
  {170, 3.591}, {180, 3.692}, {190, 3.788}, {200, 3.879}, {220, 4.051},
  {240, 4.209}, {260, 4.356}, {280, 4.494}, {300, 4.622}, {310, 4.685},
  {315, 4.715}}, ImageSize → Large,
PlotLabel → "Correlazione R e  $Nu_{m,y=1}$  ad 1 cella", Filling → Axis,
AxesLabel → {R, Nu}, AxesOrigin → {0, 0}, Joined → True, Filling → Axis,
PlotStyle → Blue]
```

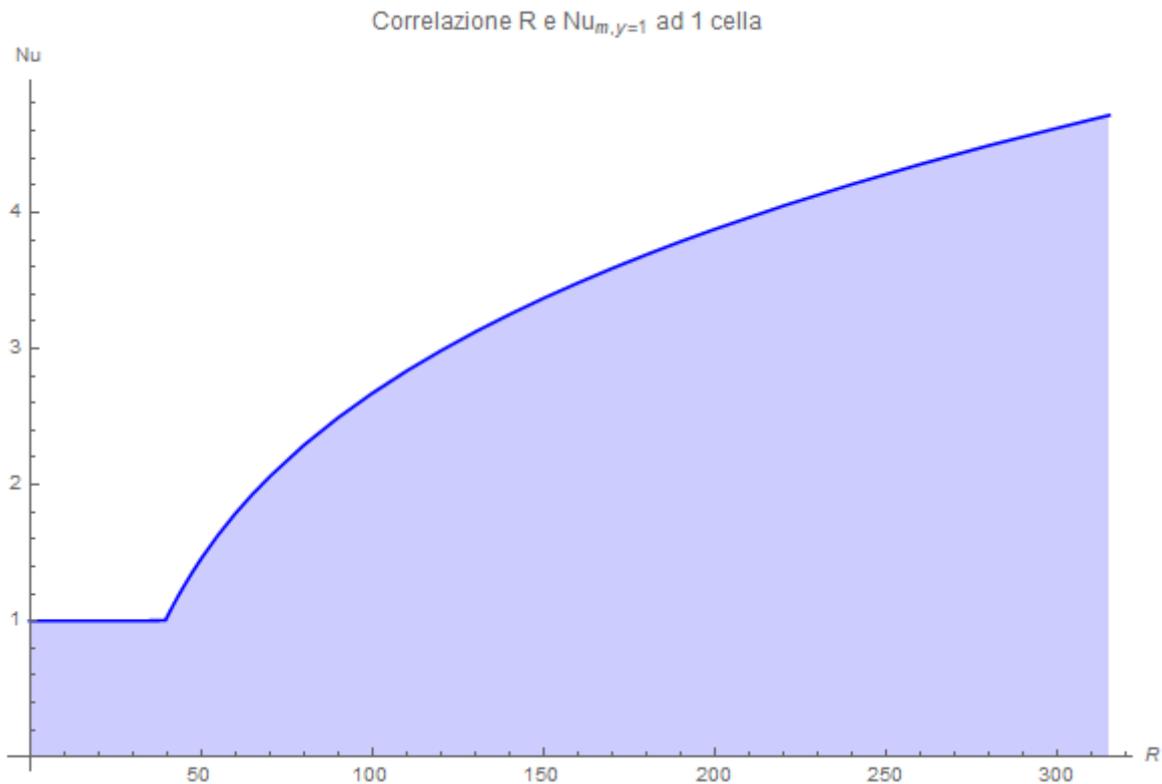


Figura 5.5: Correlazione R e Nu_m calcolato alla parete posta a $y=1$ per la configurazione ad 1 cella di convezione

Confrontando i due grafici, od anche i valori di ascisse e ordinate riportate nel codice utilizzato, si può osservare che i valori dei numeri di Nusselt medi alle due pareti al variare del numero di Rayleigh risultano pressoché coincidenti.

Tale errore numerico, favorito dalla non linearità delle equazioni e osservato nella valutazione del numero di Nusselt medio alle pareti poste a $y=0$ e $y=1$, può essere dovuto ad una non sufficiente potenza di calcolo o precisione del processo iterativo; tuttavia l'errore risulta minimo e pertanto sarà trascurato in seguito.

Tale risultato (errore trascurabile nel calcolo dei valori dei numeri medi di Nusselt alle pareti poste a $y=0$ e $y=1$) si replica anche nelle configurazioni a 2, 3 e 4 celle; per questo motivo in seguito riporteremo soltanto le correlazioni tra il numero di Nusselt medio e il numero di Rayleigh in riferimento alla parete posta a $y=0$.

La presenza della configurazione a 2 celle è limitata all'intervallo $81 \leq R \leq 631$, per il quale sono stati ottenuti i seguenti risultati

```
ListPlot[{{81, 1.606}, {82, 1.636}, {83, 1.666}, {85, 1.723}, {90, 1.874},
  {100, 2.157}, {110, 2.424}, {120, 2.673}, {130, 2.904}, {140, 3.119},
  {150, 3.318}, {160, 3.502}, {170, 3.673}, {180, 3.833}, {190, 3.982},
  {200, 4.122}, {220, 4.376}, {240, 4.604}, {260, 4.810}, {280, 4.998},
  {300, 5.171}, {325, 5.371}, {350, 5.555}, {375, 5.726}, {400, 5.887},
  {425, 6.038}, {450, 6.180}, {475, 6.316}, {500, 6.445}, {525, 6.569},
  {550, 6.687}, {575, 6.801}, {600, 6.911}, {625, 7.017}, {630, 7.038},
  {631, 7.042}}, ImageSize → Large,
PlotLabel → "Correlazione R e Num,y=0 a 2 celle", Filling → Axis,
AxesLabel → {R, Nu}, AxesOrigin → {0, 0}, Joined → True, PlotStyle → Orange]
```

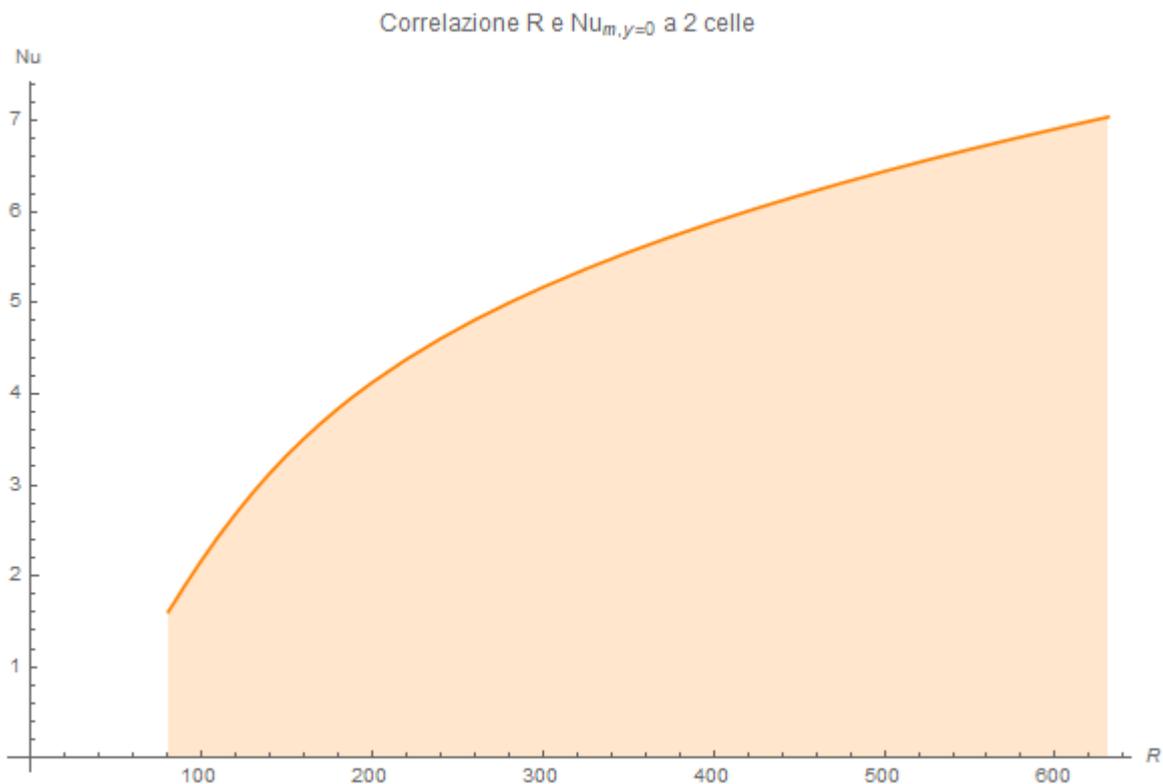


Figura 5.6: Correlazione R e Nu_m calcolato alla parete posta a $y=0$ per la configurazione a 2 celle di convezione

La configurazione a 3 celle di convezione inizia a presentarsi ad $R = 185$ e prosegue fino al resto del dominio analizzato in questo elaborato, ovvero fino a $R = 1000$, Grazie al software Mathematica si è ottenuto

```
ListPlot[{{185, 2.848}, {186, 2.874}, {190, 2.975},
  {200, 3.223}, {220, 3.692}, {240, 4.122}, {260, 4.514},
  {280, 4.872}, {300, 5.197}, {325, 5.565}, {350, 5.894},
  {375, 6.191}, {400, 6.460}, {425, 6.706}, {450, 6.932},
  {475, 7.139}, {500, 7.334}, {525, 7.515}, {550, 7.686},
  {575, 7.846}, {600, 7.988}, {625, 8.142}, {650, 8.283},
  {675, 8.409}, {700, 8.533}, {725, 8.651}, {750, 8.763},
  {775, 8.870}, {800, 8.973}, {825, 9.070}, {850, 9.165},
  {875, 9.255}, {900, 9.343}, {925, 9.429}, {950, 9.513},
  {975, 9.597}, {1000, 9.680}}, ImageSize → Large,
PlotLabel → "Correlazione R e  $Nu_{m,y=0}$  a 3 celle", Filling → Axis,
AxesLabel → {R, Nu}, AxesOrigin → {0, 0}, Joined → True,
PlotStyle → Green]
```

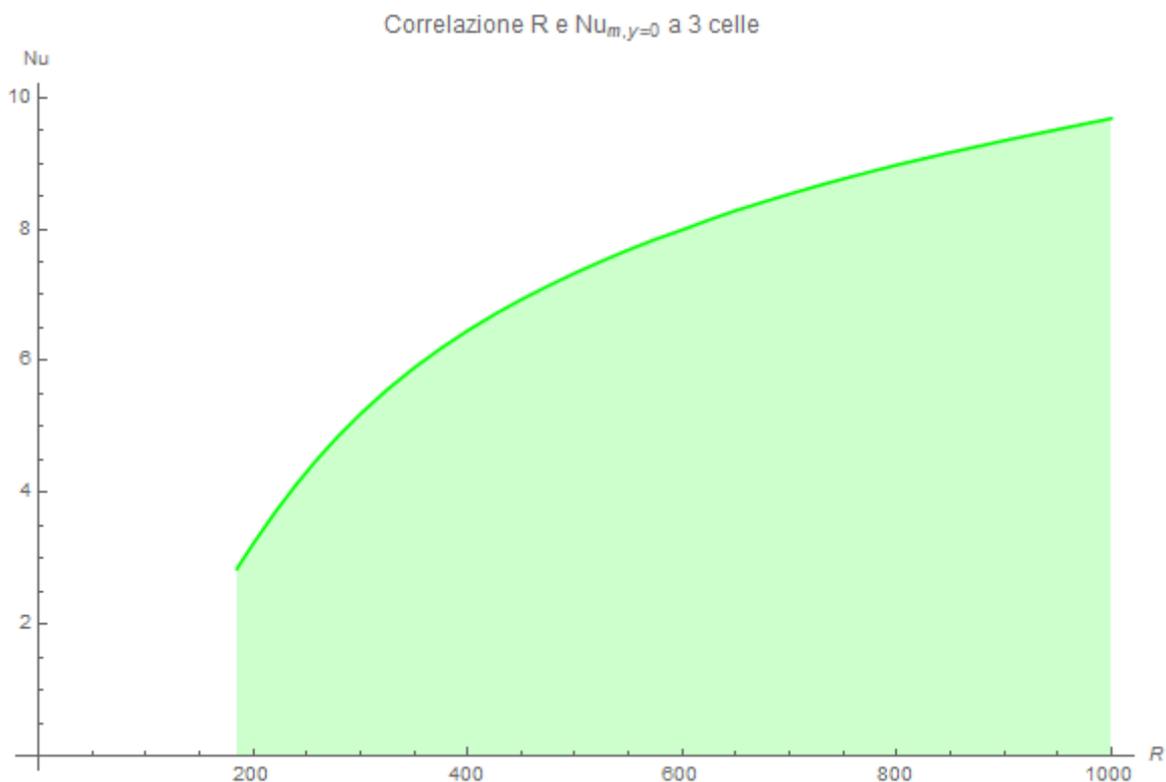


Figura 5.7: Correlazione R e Nu_m calcolato alla parete posta a $y=0$ per la configurazione a 3 celle di convezione

Infine, la configurazione a 4 celle di convezione si realizza a partire da $R = 501$ e prosegue fino al termine del dominio analizzato; graficando, per tale configurazione, l'andamento del numero di Nusselt medio alla parete posta a $y=0$ in funzione del numero di Rayleigh si ottiene

```
ListPlot[{{501, 7.325}, {503, 7.351}, {505, 7.377},
  {515, 7.505}, {525, 7.630}, {550, 7.925}, {575, 8.201},
  {600, 8.459}, {625, 8.701}, {650, 8.930}, {675, 9.145},
  {700, 9.350}, {725, 9.545}, {750, 9.731}, {775, 9.909},
  {800, 10.080}, {825, 10.244}, {850, 10.403}, {875, 10.556},
  {900, 10.704}, {925, 10.847}, {950, 10.985}, {975, 11.119},
  {1000, 11.249}}, ImageSize → Large,
PlotLabel → "Correlazione R e  $Nu_{m,y=0}$  a 4 celle",
Filling → Axis, AxesLabel → {R, Nu}, AxesOrigin → {0, 0},
Joined → True, PlotStyle → Red]
```

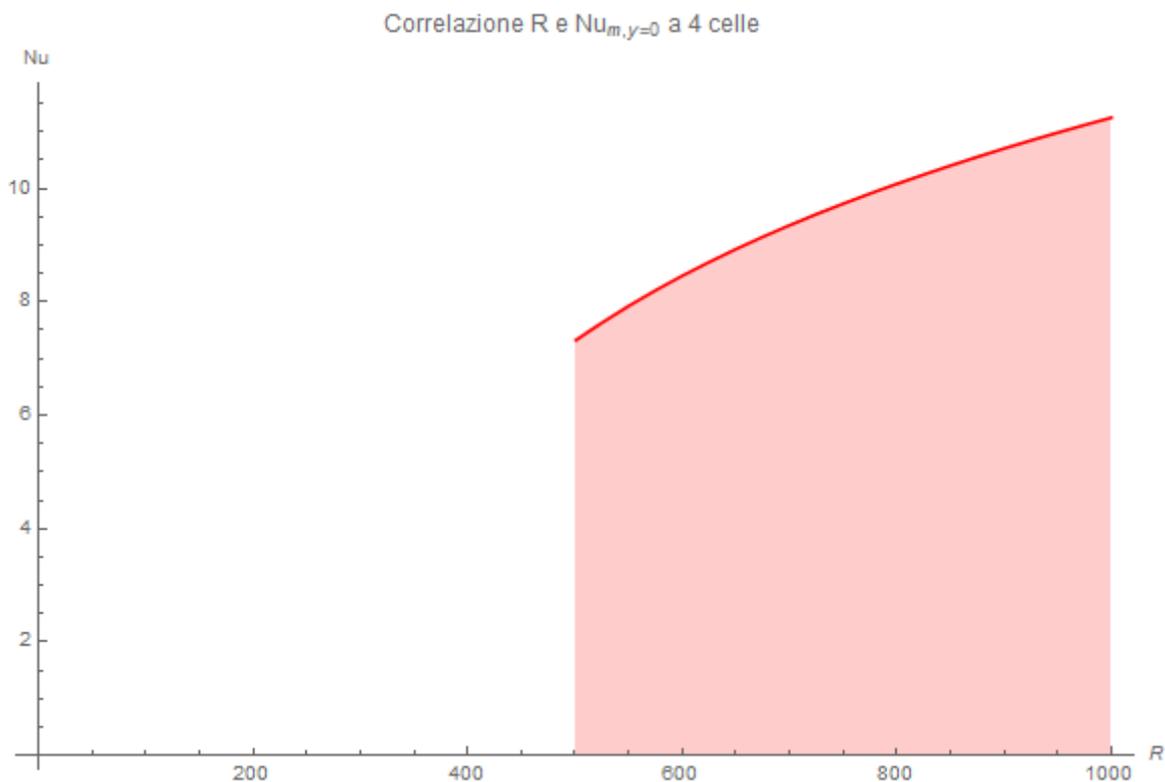


Figura 5.8: Correlazione R e Nu_m calcolato alla parete posta a $y=0$ per la configurazione a 3 celle di convezione

Risulta utile andare a plottare in un unico grafico tutti i risultati ottenuti, in maniera tale da visualizzare l'andamento complessivo del numero di Nusselt medio alla parete in tutto il range del numero di Rayleigh analizzato, il grafico ottenuto è il seguente

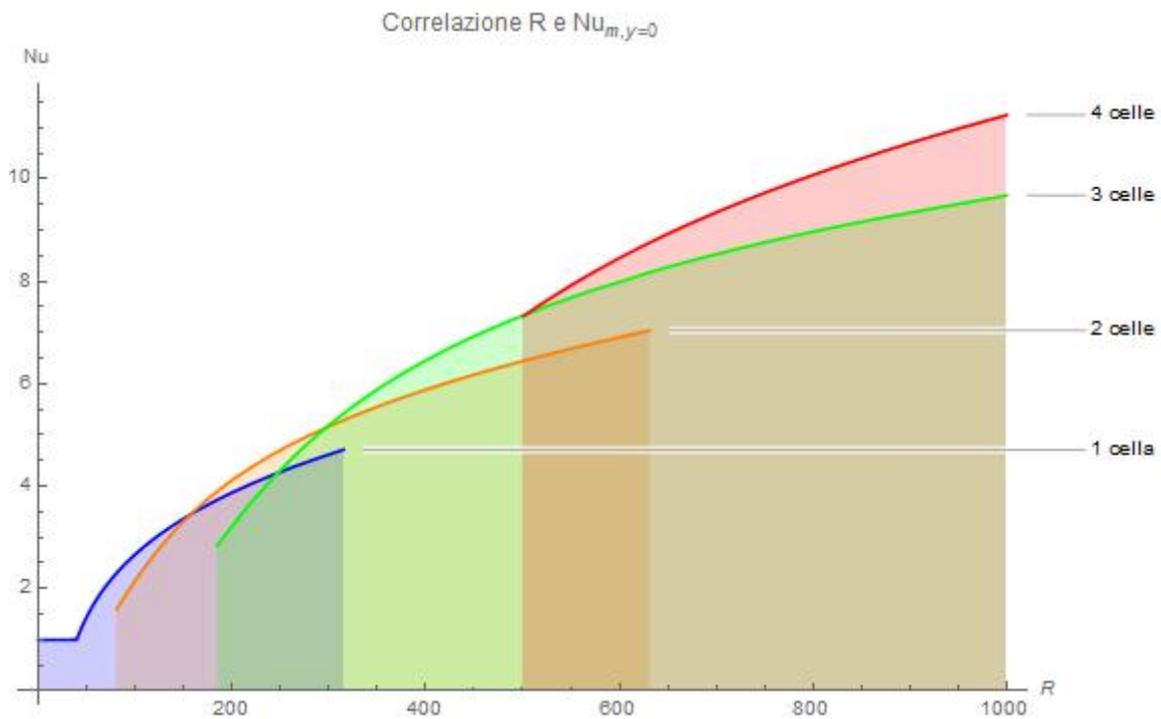


Figura 5.8: Correlazione R e Nu_m calcolato alla parete posta a $y=0$ considerando R compreso nell'intervallo $[0,1000]$

5.3.3 Calcolo dell'energia cinetica al variare di R

Risulta interessante valutare l'andamento dell'energia cinetica al variare del numero di Rayleigh nell'intervallo studiato, per farlo occorre considerare che le componenti della velocità $\{U, V\}$, rispettivamente lungo x e lungo y , sono espresse dalle derivate della funzione di corrente ψ secondo la già citata relazione (3.33)

$$U = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad e \quad V = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (3.33)$$

Esprimendo l'energia cinetica per una massa unitaria come

$$E_c = \frac{|v|^2}{2} \quad (5.6)$$

Nella quale v rappresenta la velocità il cui modulo è ottenuto dalla radice delle componenti lungo x e lungo y elevate al quadrato

$$|v| = \sqrt{U^2 + V^2} \quad (5.7)$$

Si ottiene

$$E_c = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}{2} \quad (5.8)$$

Si può pensare di integrare tale equazione nel dominio Ω considerato ed implementarla sul software di calcolo attraverso il codice

$$E_c = \text{NIntegrate} \left[\frac{(\partial_y \psi_{\text{sol}}[x, y])^2 + (-\partial_x \psi_{\text{sol}}[x, y])^2}{2}, \{x, y\} \in \Omega \right]$$

In seguito, viene riportato il grafico che mette in relazione il valore ottenuto per l'energia cinetica appena descritta al numero di Rayleigh, dopo aver calcolato la funzione ψ_{sol} mediante il codice descritto nel paragrafo 5.2

```
ListPlot[
  Labeled[{{0, 0}, {10, 0}, {20, 0}, {30, 0}, {39.5784176, 0.100}, {41, 1.538},
    {42, 2.568}, {43, 3.612}, {44, 4.670}, {45, 5.742}, {47.5, 8.483}, {50, 11.309},
    {55, 17.206}, {60, 23.412}, {65, 29.912}, {70, 36.688}, {80, 51.009}, {90, 66.262},
    {100, 82.345}, {110, 99.169}, {120, 116.654}, {130, 134.731}, {140, 153.338},
    {150, 172.424}, {160, 191.940}, {170, 211.847}, {180, 232.109}, {190, 252.697},
    {200, 273.580}, {220, 316.149}, {240, 359.659}, {260, 403.374}, {280, 448.990},
    {300, 494.645}, {310, 517.676}, {315, 529.239}}, "1 cella"],
  Labeled[{{81, 9.809}, {82, 10.434}, {83, 11.070}, {85, 12.375}, {90, 15.827},
    {100, 23.483}, {110, 32.017}, {120, 41.281}, {130, 51.147}, {140, 61.505},
    {150, 72.271}, {160, 83.381}, {170, 94.775}, {180, 106.404}, {190, 118.236},
    {200, 130.252}, {220, 154.75}, {240, 179.760}, {260, 205.233}, {280, 231.096},
    {300, 257.383}, {325, 290.649}, {350, 324.489}, {375, 358.796}, {400, 393.545},
    {425, 428.724}, {450, 464.268}, {475, 500.172}, {500, 536.385}, {525, 572.995},
    {550, 609.852}, {575, 647.018}, {600, 684.510}, {625, 722.210}, {630, 729.806},
    {631, 731.320}}, "2 celle"],
  Labeled[{{185, 39.332}, {186, 40.145}, {190, 43.453}, {200, 52.078}, {220, 70.572},
    {240, 90.354}, {260, 111.062}, {280, 132.429}, {300, 154.264}, {325, 182.003},
    {350, 210.092}, {375, 238.391}, {400, 266.806}, {425, 295.346}, {450, 323.923},
    {475, 352.566}, {500, 381.263}, {525, 410.036}, {550, 438.921}, {575, 467.828},
    {600, 496.838}, {625, 525.893}, {650, 555.033}, {675, 584.136}, {700, 613.308},
    {725, 642.580}, {750, 671.443}, {775, 700.489}, {800, 729.369}, {825, 758.332},
    {850, 787.288}, {875, 816.127}, {900, 845.146}, {925, 874.237}, {950, 903.592},
    {975, 933.181}, {1000, 963.177}}, "3 celle"],
  Labeled[{{501, 273.824}, {503, 275.964}, {505, 278.202}, {515, 289.421}, {525, 300.647},
    {550, 328.819}, {575, 357.025}, {600, 385.267}, {625, 413.522}, {650, 441.748},
    {675, 470.110}, {700, 498.407}, {725, 526.770}, {750, 555.247}, {775, 583.738},
    {800, 612.436}, {825, 640.973}, {850, 669.791}, {875, 698.773}, {900, 727.798},
    {925, 756.973}, {950, 786.081}, {975, 815.217}, {1000, 844.547}}, "4 celle"]],
  ImageSize -> Large, PlotLabel -> "Correlazione R ed E_c", Filling -> Axis, AxesLabel -> {R, E_c},
  AxesOrigin -> {0, 0}, Joined -> True, PlotStyle -> {Blue, Orange, Green, Red}]
```

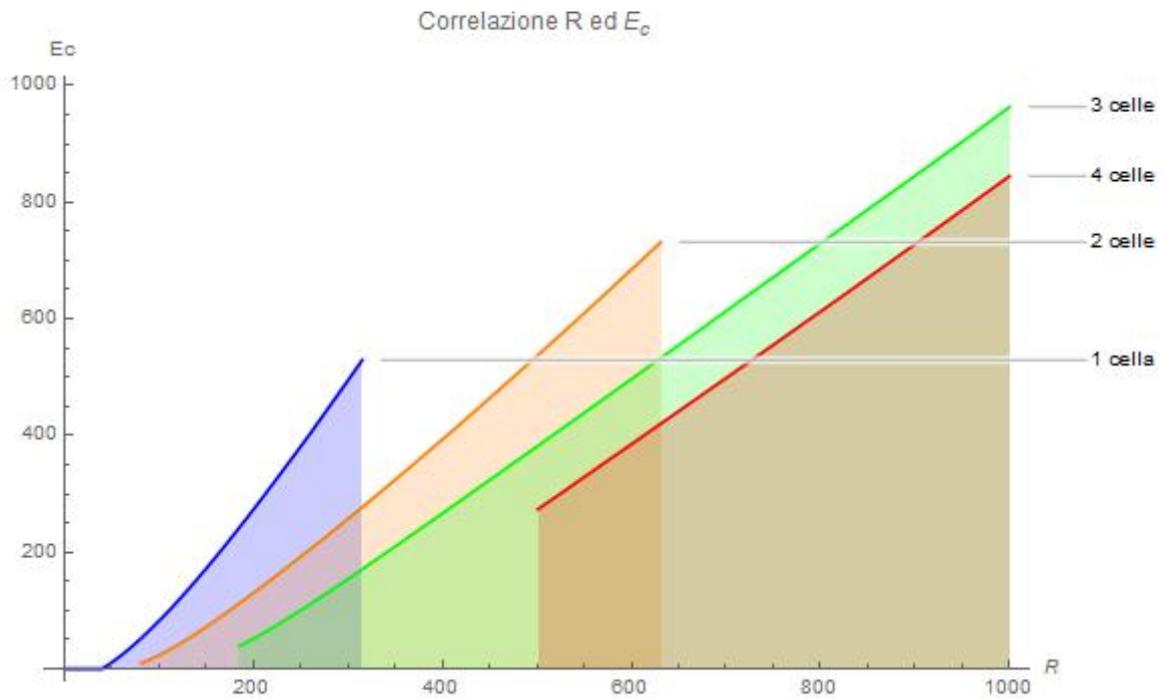


Figura 5.9: Correlazione tra R ed E_c

Interpolando i valori ottenuti dal grafico 5.9, si osserva che la configurazione a 2 celle di convezione diviene più energetica di quella ad 1 cella quando il valore del numero di Rayleigh supera $495,07$; mentre la configurazione a 3 celle di convezione diviene più energetica rispetto a quella a 2 celle per $R=801,68$.

Infine, occorre osservare che la configurazione a 4 celle, nel range di Rayleigh considerato non diviene mai più energetica rispetto a quella a 3 celle; è lecito pensare che tale superamento avverrà a numeri di Rayleigh superiori a 1000 .

Capitolo 6: Analisi dei risultati e conclusioni

L'analisi, come detto, è stata condotta considerando il caso stazionario in presenza di non linearità nelle equazioni.

Proprio questa non linearità ha portato alla necessità della definizione di una funzione ψ_{val} , indispensabile all'inizializzazione del processo, scelta arbitrariamente in maniera tale da rispecchiare l'andamento desiderato della soluzione ricercata.

Tale funzione ha permesso di valutare la convergenza del processo iterativo: la convergenza si è ottenuta nel caso in cui il campo della funzione di corrente ψ_{sol} , soluzione del modello, rispecchi l'andamento della funzione di inizializzazione utilizzata.

L'errore numerico dal quale, seppur in maniera lieve, sono afflitti i risultati ottenuti può essere dovuto ad una non sufficiente potenza di calcolo e potrebbe essere affinato aumentando il numero di iterazioni valutate dal codice utilizzato, nonché la *Working-Precision* del processo.

Risulta interessante confrontare i risultati ottenuti in questo elaborato con l'analisi analitica illustrata nel manoscritto "*Convection in porous media*" [11], qui, Nield e Bejan propongono, nel paragrafo "*Weak nonlinear theory: energy and heat transfer results*", una correlazione teorica tra il numero di Nusselt e il numero di Rayleigh considerando uno strato poroso orizzontale infinitamente esteso delimitato da pareti orizzontali impermeabili e mantenute a temperatura costante (la parete inferiore sarà mantenuta a temperatura maggiore rispetto a quella superiore).

Tale analisi viene condotta mediando le variabili presenti nello strato di fluido, procedura attuabile in quanto eventuali divergenze svaniscono grazie alle condizioni al contorno e al fatto che i contributi laterali possono essere trascurati nel limite di strato infinitamente esteso.

Nield e Bejan ricavano la relazione teorica (6.1), la quale lega il numero di Nusselt al numero di Rayleigh, avendo assunto che le varie configurazioni con diverso numero di celle contribuiscono indipendentemente alla determinazione del numero di Nusselt.

$$Nu = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \left(1 - \frac{Rc_j}{R}\right) \quad (6.1)$$

Nella quale, con j si è indicato il numero di celle presenti nella configurazione considerata e dunque, per Rc_j , si ottiene

$$Rc_j = 4\pi^2 j^2 \quad (6.2)$$

Mentre σ_j sarà pari a 2 quando $R > Rc_j$ e pari a 0 quando $R < Rc_j$, per il caso bidimensionale.

Tale relazione teorica predice valori del numero di Nusselt che risultano generalmente inferiori a quelli osservati dall'analisi non lineare [11].

Risulta possibile graficare la correlazione analitica tra il numero di Nusselt e il numero di Rayleigh, presentata da Nield e Bejan, implementando su Mathematica il seguente codice

```

R = m
If[R < 4 π2, {σ1 = 0, σ2 = 0, σ3 = 0, σ4 = 0, σ5 = 0},
  If[R < 4 π2 22, {σ1 = 2, σ2 = 0, σ3 = 0, σ4 = 0, σ5 = 0},
    If[R < 4 π2 32, {σ1 = 2, σ2 = 2, σ3 = 0, σ4 = 0, σ5 = 0},
      If[R < 4 π2 42, {σ1 = 2, σ2 = 2, σ3 = 2, σ4 = 0, σ5 = 0},
        If[R < 4 π2 52, {σ1 = 2, σ2 = 2, σ3 = 2, σ4 = 2, σ5 = 0},
          If[R ≤ 1000, {σ1 = 2, σ2 = 2, σ3 = 2, σ4 = 2, σ5 = 2}, None] ] ] ] ] ];
Nu = N[1 + σ1 (1 -  $\frac{4 \pi^2}{R}$ ) + σ2 (1 -  $\frac{4 \pi^2 2^2}{R}$ ) + σ3 (1 -  $\frac{4 \pi^2 3^2}{R}$ ) +
  σ4 (1 -  $\frac{4 \pi^2 4^2}{R}$ ) + σ5 (1 -  $\frac{4 \pi^2 5^2}{R}$ ), 5]

```

Sarà, dunque, possibile riportare graficamente la correlazione teorica tra Nu ed R ricavata da Nield e Bejan (6.1).

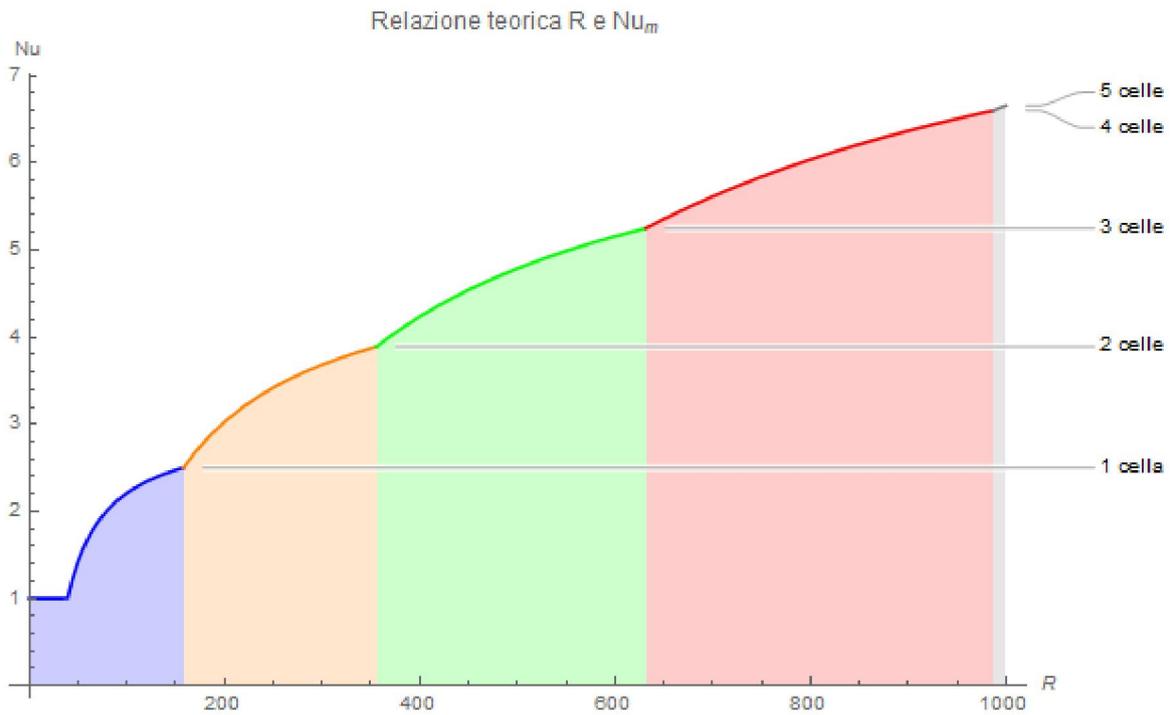


Figura 6.1: Relazione analitica tra Nu e R presentata nel lavoro di Nield e Bejan [11]

Si può pensare di confrontare il grafico 6.1 con il grafico 5.8 tagliato all'intersezione tra configurazioni a diverso numero di celle

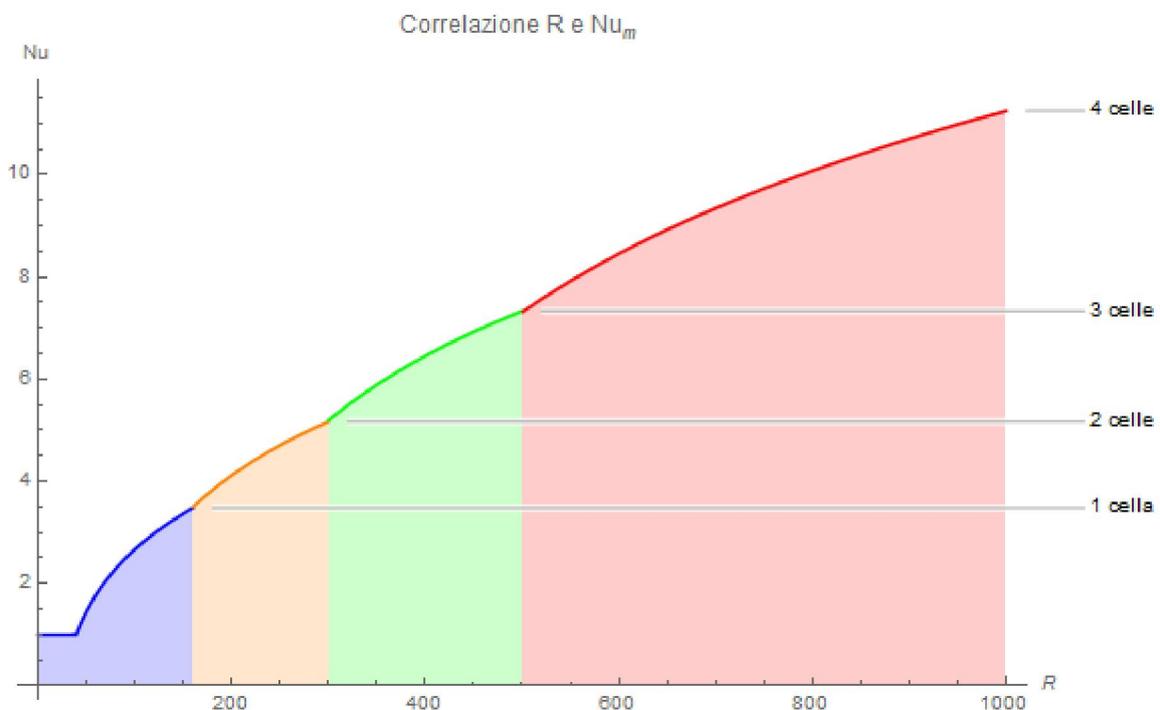


Figura 6.2: Relazione numerica tra Nu e R ottenuta in questo elaborato

Per avere una migliore visione delle differenze tra i due grafici è utile Riportare le figure 6.1 e 6.2 in un unico grafico, si ottiene

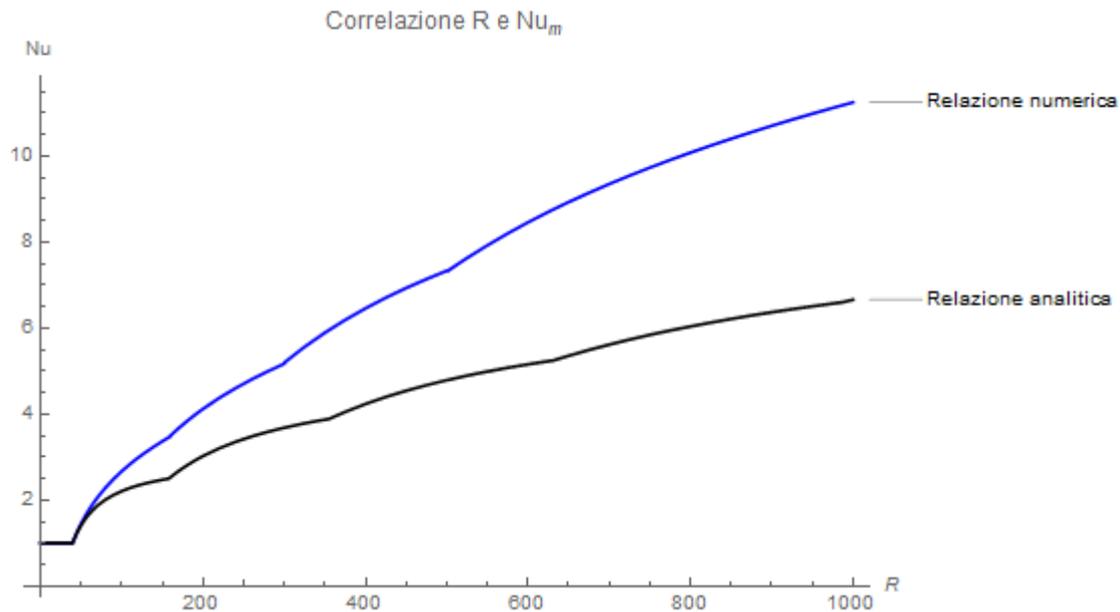


Figura 6.3: Confronto delle correlazioni tra Nu e R presentate in [11] e ottenute attraverso analisi numerica non lineare in questa tesi

Si può concludere che i risultati ottenuti in questo lavoro rispettano il comportamento riscontrato nell'analisi debolmente non lineare proposta da Nield e Bejan.

Infatti, per $R < 4\pi^2$ lo stato conduttivo rimane stabile ed il numero di Nusselt rimane pari a 1, quindi lo scambio termico risulta dovuto alla sola conduzione attraverso lo strato poroso orizzontale.

Per $R > 4\pi^2$ appaiono instabilità convettive in forma di moto cellulare con numero d'onda pari a π , ed all'aumentare del numero di Rayleigh tali instabilità assumono via via più rilevanza aumentando l'entità dello scambio di calore per convezione attraverso lo strato; ciò implica un relativo aumento del numero di Nusselt, espresso dal rapporto del trasferimento di calore con e senza la convezione.

Si osserva inoltre che per alcuni valori di Rayleigh coesistono configurazioni con 2 o più numeri differenti di celle.

Nello specifico, per $0 < R < 81$ vi è la presenza della sola configurazione ad 1 cella di convezione, nell'intervallo $81 \leq R < 185$ coesistono le configurazioni ad 1 e 2 celle convettive mentre nel range $185 \leq R \leq 315$ risultano possibili le configurazioni a 1, 2 e 3 celle.

Quando $315 < R < 501$ risultano presenti le configurazioni a 2 e 3 celle, per $501 \leq R \leq 631$ coesistono le configurazioni a 2,3 e 4 celle di convezione, Infine, per $631 < R \leq 1000$, ovvero fino al limite per il numero di Rayleigh considerato in questo studio, si ha la coesistenza delle configurazioni a 3 e 4 celle convettive.

Il grafico 6.1 è stato ottenuto, anch'esso, considerando il numero di Rayleigh compreso nell'intervallo studiato in questo testo, ovvero $0 < R < 1000$; si osserva che a $R = 4\pi^2 5^2 < 1000$ inizia a svilupparsi la configurazione a 5 celle di convezione, la quale non risulta, invece, presente nello studio condotto in questa tesi.

Tuttavia, visto che i valori del numero di Nusselt ottenuti dalla relazione teorica (6.1) risultano generalmente inferiori a quelli che ci si aspetta di ricavare, si può facilmente giustificare tale fenomeno e pensare che la configurazione a 5 celle nel caso di studio si presenterà per numeri di Rayleigh superiori a *1000*, ovvero al di fuori dal range considerato.

In conclusione, confrontando i due grafici si deduce che, come predetto, i valori del numero di Nusselt ottenuti numericamente risultano maggiori rispetto a quelli ricavati analiticamente nella relazione teorica (6.1); mentre l'andamento della curva ottenuta in questo elaborato rispecchia l'andamento teorico ottenuto da Nield e Bejan.

Bibliografia

1. <https://www.who.edu/files/server.do?id=136304&pt=10&p=85733>[Sulla convezione di Rayleigh-Bénard].
2. Bénard, Henri. "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide-Méthodes optiques d'observation et d'enregistrement." *Journal de Physique Théorique et Appliquée* 10.1 (1901): 254-266.
3. Fonda, Enrico, and Katepalli R. Sreenivasan. "Turbulent Thermal Convection." *Selected Topics of Computational and Experimental Fluid Mechanics*. Springer, Cham, 2015. 37-49.
4. Rayleigh, Lord. "LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side." *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 32.192 (1916): 529-546.
5. Perkins, Adam C., 2011. "Mechanisms of instability in Rayleigh-Bénard convection", tesi di dottorato, Georgia Institute of Technology.
6. <https://thayer.dartmouth.edu/~d30345d/books/EFM/chap7.pdf>[sulla convezione di Rayleigh-Bénard]
7. Oberbeck, Anton. "Über die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen." *Annalen der Physik* 243.6 (1879): 271-292.
8. Boussinesq, Joseph. "Théorie analytique de la chaleur: mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière." Vol. 2. Gauthier-Villars, 1903.
9. Barletta, A. "Local energy balance, specific heats and the Oberbeck-Boussinesq approximation." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.21-22 (2009): 5266-5270.
10. Vafai, Kambiz. *Handbook of porous media*. Crc Press, 2015.
11. Nield Donald A., and Adrian Bejan. *Convection in porous media*. Fifth edition, Springer, 2017.
12. Dodgson, Emily, 2011. "Thermoconvective Instability in Porous Media", tesi di dottorato, Department of Mechanical Engineering, University of Bath.
13. Heinemann, Zoltán E. "Fluid flow in porous media." *Montanuniversität Leoben, Petroleum Engineering Department Textbook Series*, (2005): 65-82

14. Barletta, Antonio, 2017. "Trasmissione del calore e termofluidodinamica", dispense del corso di Termofluidodinamica M, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Bologna.
15. Darcy, Henry. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application*. Victor Dalmont, 1856.
16. Whitaker, Stephen. "Flow in porous media I: A theoretical derivation of Darcy's law." *Transport in porous media* 1.1 (1986): 3-25.
17. Horton, C. W., and F. T. Rogers Jr. "Convection currents in a porous medium." *Journal of Applied Physics* 16.6 (1945): 367-370.
18. Lapwood, E. R. "Convection of a fluid in a porous medium." *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 44. No. 4. Cambridge University Press, 1948.
19. Barletta, A., and D. A. Nield. "Effect of pressure work and viscous dissipation in the analysis of the Rayleigh–Bénard problem." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52.13-14 (2009): 3279-3289.
20. Florio, Brendan J., 2013. "The generation and interaction of convection modes in a box of a saturated porous medium", tesi di dottorato, School of Mathematics and Statistics, The University of Western Australia.
21. Hans T. Aichlmayr, 1999. "The Effective Thermal Conductivity of Saturated Porous Media", master di scienze, University of Minnesota.
22. Elder, John W. "Steady free convection in a porous medium heated from below." *Journal of Fluid Mechanics* 27.1 (1967): 29-48.
23. Schneider, K. J. "Investigation of the influence of free thermal convection on heat transfer through granular material." *Proceedings of the 11th international congress of refrigeration*. Vol. 2. 1963.
24. Kaneko, T., M. F. Mohtadi, and K. Aziz. "An experimental study of natural convection in inclined porous media." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 17.4 (1974): 485-496.
25. Yen, Yin-Chao. "Effects of density inversion on free convective heat transfer in porous layer heated from below." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 17.11 (1974): 1349-1356.
26. Combarous, M. A., and S. A. Bories. "Hydrothermal convection in saturated porous media." *Advances in hydroscience*. Vol. 10. Elsevier, 1975. 231-307.
27. Buretta, R. J., and A. S. Berman. "Convective heat transfer in a liquid saturated porous layer." *Journal of Applied Mechanics* 43.2 (1976): 249-253.

28. Vadasz, Peter. "Heat flux dispersion in natural convection in porous media." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53.17-18 (2010): 3394-3404.
29. Taylor, Robert Leroy, and J. Z. Zhu. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.
30. <https://www.iist.ac.in/sites/default/files/people/IN08026/FEM.pdf> [Sul metodo degli elementi finiti]
31. <https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method> [Sul metodo degli elementi finiti]
32. Celli, Michele, 2017. "Metodi numerici per la soluzione di equazioni differenziali", dispense del corso Laboratorio Computazionale T, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Bologna.
33. Ritz, Walter. "Über eine neue Methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 135 (1909): 1-61.
34. Thomée, Vidar. "From finite differences to finite elements. A short history of numerical analysis of partial differential equations." *Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century*. 2001. 361-414.
35. Courant, Richard. "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations." *Bulletin of the American mathematical Society* 49.1 (1943): 1-23.
36. Galerkin, Boris Grigoryevich. "Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates." *Vestn. Inzh. Tekh* 19 (1915): 897-908.
37. Clough, Ray W. "The finite element method in plane stress analysis." *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960*. 1960.
38. Zienkiewicz, Olgierd Cecil, et al. *The finite element method*. Vol. 3. London: McGraw-Hill, 1977.
39. <http://www.idi.ntnu.no/~elster/tdt24/tdt24-f09/gagan-fem.pdf> [sul metodo degli elementi finiti]
40. Larson, Mats G., and Fredrik Bengzon. "The finite element method: theory, implementation, and practice." *Texts in Computational Science and Engineering* 10 (2010).
41. <http://www.wolfram.com>