

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile – Indirizzo Strutture**

***D.I.S.T.A.R.T.***

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti, delle Acque, del  
Rilevamento e del Territorio  
- SEDE DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI -

**TESI DI LAUREA**

in

Meccanica dei Materiali Innovativi LS

**MODELLAZIONE DELLA PROVA CON MARTINETTI  
PIATTI SU MURATURE E CONFRONTO CON  
RISULTATI SPERIMENTALI**

Tesi di Laurea di  
Michele Pio RAMUNNO

RELATORE:  
Chiar.mo Prof. Ing GIOVANNI PASCALE

CORRELATORE:  
Ill.mo Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI

Anno Accademico 2007/08

Sessione I

# Indice

<b>Introduzione</b> .....	5
<b>1 Le strutture in muratura</b> .....	9
1.1 Vantaggi e sviluppo della muratura portante.....	9
1.2 Cenni storici.....	10
1.3 Alcune tipologie significative.....	11
1.3.1 Le murature di pietra.....	11
1.3.2 Le murature di mattoni.....	16
1.4 Elementi costituenti la muratura.....	21
1.4.1 Mattoni e blocchi.....	21
1.4.2 Malta .....	28
<b>2 Proprietà della muratura</b> .....	33
2.1 Generalità.....	33
2.2 Resistenza a compressione .....	34
2.2.1 Fattori che la riguardano.....	34
2.2.2 Relazione di resistenza fra blocchi, malta e muratura.....	34
2.2.3 Alcuni effetti delle caratteristiche degli elementi.....	36
2.3 Resistenza a compressione e taglio.....	38
2.4 Resistenza a trazione.....	40
2.4.1 Resistenza a trazione diretta.....	40
2.4.2 Resistenza a trazione per flessione.....	41
2.5 Legame tensioni-deformazioni.....	42
2.6 Effetti dell'esecuzione sulla resistenza.....	43

2.6.1 Difetti di esecuzione nella muratura di mattoni.....	43
2.6.2 Difetti di esecuzione nella muratura a blocchi di calcestruzzo.....	45
2.7 Modelli costitutivi.....	46
2.7.1 La muratura come materiale non omogeneo ed anisotropo.....	46
<b>3 Prove e controlli su murature esistenti.....</b>	<b>49</b>
3.1 Introduzione.....	49
3.2 Procedure di indagine per la diagnosi.....	52
3.2.1 Rilievo geometrico e rilievo del quadro fessurativo.....	54
3.2.2 Prove di laboratorio.....	55
3.2.3 Indagini non distruttive su murature.....	58
3.2.3.1 Endoscopia.....	60
3.2.3.2 Termografia.....	61
3.2.3.3 Martinetti piatti.....	62
3.2.3.4 Resistenza allo scorrimento.....	62
3.2.3.5 Prove soniche/ultrasoniche.....	63
3.2.3.6 Indagini sclerometriche.....	65
3.2.3.7 Prove di penetrazione.....	66
3.2.3.8 Prove di Pull-out.....	66
3.2.3.9 Georadar .....	66
<b>4 Prova con martinetti piatti.....</b>	<b>67</b>
4.1 Introduzione.....	67
4.2 Descrizione della prova.....	68
4.2.1 Prova con martinetto singolo.....	71
4.2.2 Prove con martinetto doppio.....	73
4.2.3 Valutazione della resistenza al taglio.....	75
4.3 Criteri per l'esecuzione del taglio.....	78
4.4 Strumentazione di misura.....	79
4.5 Orientamenti.....	79
4.5.1 Difficoltà di misurazione e interpretazione.....	79
4.5.2 Problemi dovuti alle caratteristiche della muratura.....	80
4.6 Osservazioni su alcuni aspetti tecnologici della prova.....	81
4.7 Applicazione pratica della prova.....	83

4.7.1	Descrizione della struttura e punti di indagine.....	83
4.7.2	Strumentazione utilizzata.....	85
4.7.3	Descrizione della metodologia di prova.....	87
4.7.4	Risultati.....	89
<b>5</b>	<b>Modello Matematico.....</b>	<b>111</b>
5.1	Introduzione.....	111
5.2	Descrizione del problema fisico.....	113
5.3	Modello matematico.....	114
5.3.1	Equazioni di campo.....	115
5.3.2	Equazioni al contorno.....	120
5.3.3	Diagramma di Tonti.....	121
5.3.4	Formulazione forte.....	121
5.3.5	Formulazione debole.....	123
5.3.6	Modello semplificato.....	124
5.4	Modelli di continuo per pannelli murari.....	125
<b>6</b>	<b>Applicazioni numeriche.....</b>	<b>129</b>
6.1	Generalità.....	129
6.2	Simulazione in 2D di una prova con martinetto piatto doppio.....	133
6.3	Simulazione in 3D di una prova con martinetto piatto doppio.....	137
6.4	Considerazioni.....	141
6.5	Confronto.....	142
	<b>Conclusioni.....</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliografia.....</b>	<b>147</b>
	<b>Appendice: Processo di discretizzazione.....</b>	<b>149</b>
A.1	Discretizzazione della struttura.....	149
A.2	Elemento rettangolare.....	151
A.2.1	Funzioni di forma.....	151
A.3	Elementi finiti di ordine superiore.....	153



## Introduzione

La muratura risulta essere una delle più antiche tecniche che hanno caratterizzato la storia delle costruzioni. Non per questo però possiamo affermare di conoscerla a pieno. Essa, infatti, è ancora fonte di studio per tecnici e ricercatori, in quanto si cerca in particolare di standardizzare le procedure di calcolo così come è stato fatto per il calcestruzzo armato e per l'acciaio.

Rispetto agli edifici in calcestruzzo armato o in acciaio, gli edifici in muratura si sono sempre pensati, erroneamente, come inadeguati per la realizzazione di costruzioni edilizie, questo a causa soprattutto dei fenomeni sismici succedutisi nel tempo.

Negli ultimi anni, in seguito ad un esame accurato su diverse strutture murarie, sono stati evidenziati svariati motivi, di seguito riportati, che avrebbero determinato l'inadeguatezza ai fenomeni sismici di tali strutture:

- cattiva qualità dei materiali;
- cattiva esecuzione della costruzione;
- cattiva concezione della struttura;
- mancanza di una progettazione accurata;
- ampliamento e modifiche della costruzione senza uno studio accurato.

E' però un dato di fatto che edifici aventi un'ossatura portante in muratura e realizzati in tempi più recenti nel rispetto delle norme costruttive (quelle accumulate con l'esperienza e che rappresentano un punto di riferimento sufficiente per il progettista), unitamente a

opere murarie del passato pervenute fino ai nostri giorni, abbiano dato testimonianza della robustezza e validità della muratura [1].

Infatti tutti quegli edifici costruiti a norma, nei quali neppure gli elementi apparentemente secondari (quali i collegamenti e le ammorsature) sono stati trascurati, hanno resistito per secoli anche alle azioni impreviste, malgrado mancassero ancora le avanzate conoscenze teoriche e i potenti mezzi di calcolo a nostra disposizione e malgrado non fossero stati progettati in previsione di tali evenienze.

E' quindi impensabile l'abbandono di tale tecnica costruttiva, ma è anche opportuno analizzare sia i vantaggi che gli svantaggi ad essa attribuibili. Per i vantaggi, in particolare, si rimanda al paragrafo 1 del primo capitolo in cui vengono spiegati dettagliatamente e in modo esauriente.

Tra gli svantaggi ricordiamo:

- la fragilità, riducibile, in parte, con l'impiego di cordolature e armature;
- la notevole diminuzione della resistenza in presenza di carichi ciclici ripetuti;
- la limitata duttilità che impone la limitazione del numero dei piani per gli edifici siti in zone particolarmente sismiche;
- il valore della resistenza della muratura soggetta a compressione, notevolmente basso rispetto a quello del calcestruzzo armato [2];
- la complessità del comportamento strutturale della muratura, dovuta in parte alla disomogeneità dei materiali che la compongono e in parte per la varietà di schemi statici in cui ci si imbatte.

Riferendomi in particolare a quest'ultimo punto, risulta di particolare importanza per comprendere il comportamento della muratura a livello macroscopico l'utilizzo di metodi basati su modelli discreti.

D'altro canto, risulta difficoltoso procedere con lo studio della muratura considerandola nella sua disomogeneità, in quanto il numero di variabili da gestire sarebbe elevatissimo. Pertanto in questo lavoro si è proceduto innanzitutto ad omogeneizzare la parete in muratura, attraverso tecniche analitiche di omogeneizzazione, questo al fine di poter ottenere un modello semplificato da studiare.

L'oggetto di questa tesi è quindi un lavoro di ricerca svolto per lo studio dei pannelli murari, tramite un'analisi elastico lineare, volto ad approfondire un aspetto, se non essenziale quanto meno preliminare, che consenta di mettere a punto strumenti efficienti per l'analisi delle strutture murarie.

Oggigiorno attraverso delle prove in situ, effettuate con l'ausilio di martinetti piatti, è possibile valutare, con buona attendibilità:

- lo stato di sollecitazione preesistente nella muratura in esame, attraverso prove con martinetto singolo;
- le caratteristiche di resistenza e deformabilità della muratura, attraverso prove con martinetto doppio;

Queste prove permettono una buona identificazione dello stato in cui si trovano gli edifici in muratura controllati, ma purtroppo come quasi tutte le prove di indagine sono costose, e quindi eseguibili in numero limitato.

Risulterebbe sicuramente molto comodo quindi, sia a livello di tempo che a livello di costo, tarare un modello matematico, a partire da poche prove effettuate in sito, per l'identificazione degli apparati murari.

In questo lavoro si è cercato di fare proprio questo. A partire dalla valutazione di alcune caratteristiche meccaniche e geometriche di un apparato murario rilevate in sito, si è creato un modello semplificato che ci permette di ottenere tutte le caratteristiche necessarie per l'identificazione completa di tale apparato.

Di seguito vado ad illustrare l'organizzazione di come si è svolto il lavoro di questa tesi.

Nel primo capitolo viene presentato un quadro generale dei vantaggi offerti dall'utilizzo della muratura nelle opere edilizie, andando ad analizzare innanzitutto i materiali che compongono la muratura ed esponendo quali sono le loro principali caratteristiche, nonché ad illustrare alcune tra le diverse tipologie applicative della muratura;

Nel secondo capitolo vengono descritte le proprietà della muratura nel suo complesso, senza cioè scomporre l'analisi nei diversi elementi che la caratterizzano. Viene inoltre analizzata nel dettaglio la resistenza da essa offerta, soffermandosi sulle diverse esplicitazioni di quest'ultima;

Nel terzo capitolo vado ad illustrare le diverse tipologie di indagini e prove (in laboratorio e in sito) atte a fornire le informazioni necessarie per poter formulare una diagnosi sullo stato attuale in cui si trova una costruzione, o un elemento della costruzione, attraverso la caratterizzazione dei materiali componenti.

Nel quarto capitolo, si prende in esame un determinato tipo di prova, di natura non distruttiva, attraverso la quale è possibile determinare le caratteristiche di resistenza e deformabilità di una muratura in sito: *“la prova con i martinetti piatti”*; vengono riportati inoltre i risultati ottenuti a seguito di prove effettuate in sito.

Nel quinto capitolo viene svolta la simulazione del problema fisico, nel mio caso in particolare *“il comportamento meccanico di una parete in muratura”*, in maniera numerica. Da tale procedimento vengono ottenuti i valori di alcune costanti elastiche ingegneristiche, valori che vengono utilizzati, una volta confrontati e calibrati con quelli sperimentali ottenuti in sito, per caratterizzare il materiale *“muratura”* durante le simulazioni al computer.

Nel sesto e ultimo capitolo sono effettuate delle simulazioni al computer, attraverso il programma ANSYS versione 10 (programma agli elementi finiti per l'analisi strutturale), di una classica prova eseguita in sito con martinetto piatto doppio. Vengono effettuate simulazioni con modelli in 2D e 3D per meglio conoscere lo stato tensionale e deformativo indotti dalla prova con martinetto piatto e successivamente, al fine di verificare l'attendibilità dei risultati ottenuti, viene eseguito un confronto tra le simulazioni e i risultati ricavati in sito.

## Capitolo 1

# LE STRUTTURE IN MURATURA

### 1.1 VANTAGGI E SVILUPPO DELLA MURATURA PORTANTE

Sono indubbiamente innumerevoli i vantaggi offerti dalle costruzioni in muratura: primo fra tutti è la capacità della muratura di adempiere a diverse funzioni e applicazioni pur utilizzando sempre lo stesso elemento.

E' chiaro come tale proprietà semplifichi di molto i dettagli costruttivi rispetto, ad esempio, agli edifici a telaio in acciaio e c.a., nei quali ciascuna funzione necessita di elementi specifici e diversi tra loro. Con la muratura si è invece in grado di svolgere contemporaneamente funzionalità differenti, quali quelle di struttura, di separazione dei vani che compongono un edificio, di isolamento termo-acustico nonché di protezione dagli agenti atmosferici.

A rafforzamento dell'utilità della muratura contribuiscono l'aspetto economico e durevole dei materiali costituenti la stessa, senza dimenticare le rifiniture esterne realizzabili con essa, che conferiscono naturalmente un aspetto gradevole alla costruzione.

A partire dal XX secolo, però, divenne sempre più frequente l'utilizzo di strutture intelaiate in acciaio e in cemento armato, a discapito ovviamente delle strutture in muratura, malgrado queste necessitassero in aggiunta di pannelli di tamponamento realizzati in muratura.

Tale cambiamento sopravvenne nel momento in cui ci si rese conto che le murature portanti comportavano spessori eccessivi delle pareti, senza contare che tali strutture richiedevano un grande impegno di manodopera nonché dispendio di tempo necessario

per la realizzazione degli edifici. Le cause di ciò vennero individuate nel fatto che il dimensionamento delle murature portanti avveniva sulla base di regole empiriche che imponevano determinati valori.

La pratica tecnica, avvalendosi di basi più razionali, ha consentito di ricavare codici strutturali che fornissero spessori delle pareti e resistenze della muratura in grado di adattarsi in modo più obiettivo alle varie esigenze strutturali.

Inizialmente si dedusse, sulla base di ricerche delle esperienze costruttive fino ad allora accumulate, una gamma di codici, limitata ma sufficiente, per il progetto di edifici che richiedessero la realizzazione di più piani.

Naturalmente col passare del tempo l'aumento di attività di ricerca e di esperienza ha consentito un notevole miglioramento dei vari codici, raggiungendo il culmine nell'ultimo ventennio.

Sono state così ottenute, per gli edifici in muratura, norme procedurali ponibili sullo stesso piano di quelle utilizzate per il progetto degli edifici in acciaio o in cemento armato.

## 1.2 CENNI STORICI

Volendo stilare una sorta di graduatoria sulla base del materiale maggiormente impiegato nella storia delle costruzioni, il posto di eccellenza è occupato sicuramente dal legno, segue immediatamente l'utilizzo della muratura, che oltre ad occupare una porzione notevole della storia delle costruzioni, rappresenta nelle sue realizzazioni, una delle più importanti testimonianze delle civiltà che nei secoli si sono succedute.

Quasi in contemporanea con la comparsa del cemento armato, si fece strada intorno al 1840 l'utilizzo del ferro nella realizzazione delle costruzioni.

Ma concentriamoci sulle opere in muratura, ponendo in rilevanza quanto significative risultino tuttora le tecniche costruttive utilizzate nel passato per ogni intervento conservativo sull'eredità architettonica, infatti sarebbe impensabile applicare agli edifici in muratura già esistenti le idealizzazioni strutturali della trave, del telaio e della lastra piana, tipici elementi delle costruzioni moderne.

Importanti contributi volti al progresso realizzativo delle opere in muratura è stato offerto dalle prove sistematiche di resistenza a compressione sulle pietre, che ebbero inizio nel '700, e che, basandosi agli esordi soltanto sull'equilibrio, ricevettero poi un impulso fondamentale abbinando a quest'ultimo la compatibilità delle deformazioni.

Il salto vero e proprio si ebbe però grazie alla tecnica degli elementi finiti, alla quale va il più ampio merito per la comprensione e la verifica delle complesse costruzioni del passato essendo questo un metodo in grado di adattarsi anche alle più complesse geometrie.

E' pur vero, però, che non sarà mai possibile una piena e totale comprensione della muratura poiché ogni modellazione, anche la più complessa, è utile solo in un limitato campo d'applicazione.

Inoltre la tendenza diffusa di considerare la muratura come se fosse costituita da un unico materiale omogeneo ideale, caratterizzato da uno o più parametri, associando ad esso complesse leggi costitutive, risulta spesso un'idealizzazione azzardata se si tiene conto del fatto che le antiche costruzioni sono realizzate con materiali e tecniche aventi caratteri differenti in varie regioni ed epoche, hanno spesso una struttura interna che le specializza e sono associazione di diversi materiali collegati tra loro diversamente.

Ad onor del vero, le idealizzazioni sopraelencate presentano la loro utilità nel modellare una complessa associazione di materiali ed elementi resistenti ma solo per il raggiungimento di obiettivi limitati quali la previsione dei quadri fessurativi, il calcolo delle deformazioni o dei modi di vibrare, la ricerca dei meccanismi di collasso.

Secondo Giangreco [3]: *La stessa parola 'muratura', con la quale si indicano troppe tecniche diverse, dovrebbe essere abbandonata ed essere sostituita da un "dizionario ragionato" per la modellazione numerica dei differenti tipi di muratura. Un'adeguata indagine, caso per caso, dei modi costruttivi deve sempre precedere qualsiasi modellazione.*

## 1.3 ALCUNE TIPOLOGIE SIGNIFICATIVE

### 1.3.1 Le murature di pietra

Le costruzioni di pietra e di conseguenza le murature litoidi sono le più antiche manifestazioni architettoniche delle civiltà umane ubicate in luoghi ove il reperimento dei materiali lapidei era facilitato dall'ambiente geologico.

Dal sistema trilitico dei Dolmen, si è passati attraverso l'architettura micenea ed egiziana alla realizzazione di opere di grande rilevanza e prestigio resa possibile dal progressivo affinamento delle tecniche di lavorazione dei conci lapidei più che da una razionale concezione costruttiva.

Alcuni esempi sono riportati nelle figg. 1.1 , 1.2 , 1.3 e 1.4.

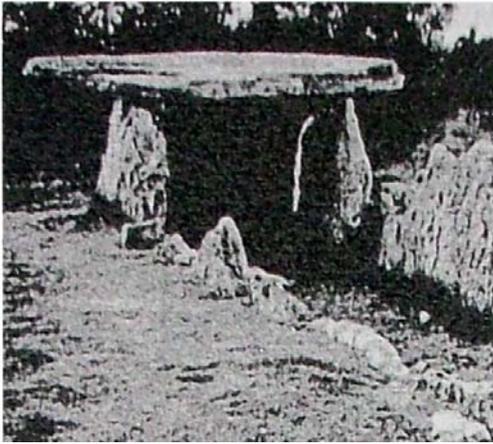


fig. 1.1 – Dolmen di Bisceglie



fig. 1.2 – Mura ciclopiche di Amelia

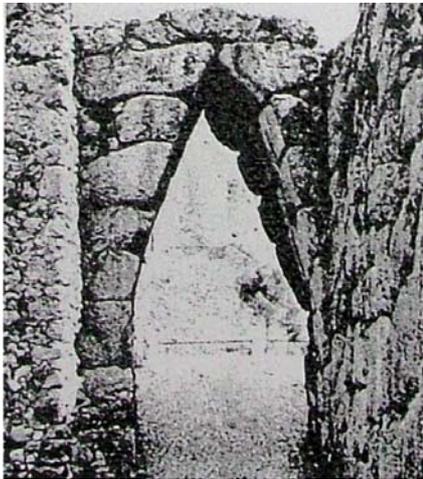


fig. 1.3 – Mura megalitiche di Arpino



fig. 1.4 – Colonnati del tempio di Hera a Paestum

Il grande empirismo che caratterizzò l'architettura romana, consentì di sperimentare con grande spregiudicatezza l'uso contemporaneo di più materiali in relazione alle loro specifiche caratteristiche tecniche e, questo ha prodotto una gamma notevole di tipologie murarie fra le quali sono da annoverare: la muratura a sacco realizzata da un nucleo cementizio (*opus caementicium*) contenuto e da due paramenti esterni collaboranti costituiti da conci di taglio poliedrico (*opus incertum*) o di cubetti di tufo disposti a filari regolari inclinati a 45° sull'orizzontale (*opus mixtum* fig.1.5); la muratura di pietra listata con corsi di mattoni è irrigidita da muratura angolare di mattoni (fig.1.6).



fig. 1.5 – Opus mixtum

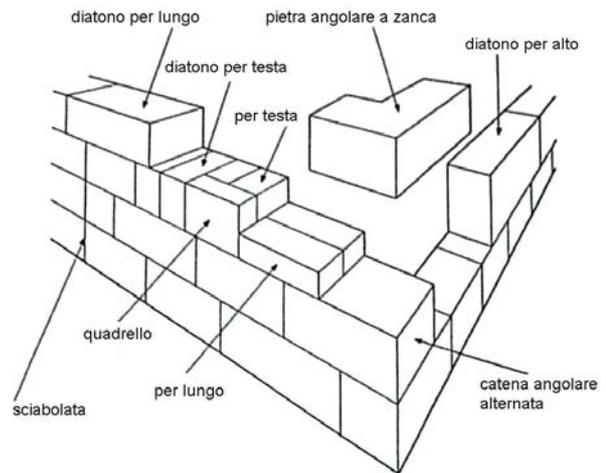


fig. 1.6 –Tecnica romana

In particolare l'opus caementicium è un conglomerato di pietre irregolari legate da malta di calce, è il più comune materiale usato dai romani per i muri più modesti, e per i muri destinati ad essere rivestiti. Se il legante era pozzolana, la malta possedeva buona resistenza e proprietà idrauliche. Nel Medio Evo tale materiale fu spesso realizzato anche con mattoni provenienti da macerie, e con calci aeree o leggermente idrauliche; la sua resistenza era molta bassa.

Quando i muri hanno un notevole spessore, la dimensione delle pietre e delle macerie che formano il conglomerato può essere considerata abbastanza piccola perché sia ragionevole modellare il conglomerato come omogeneo ed isotropo. Come per tutti i conglomerati, le prove di compressione possono mostrare un ramo discendente della curva sforzi-deformazioni con pendenza più o meno moderata; la dilatanza è comunque molto elevata, conseguenza della sensibile fratturazione interna. L'approccio più prudente è quello di considerare il materiale come fragile, senza fare molto affidamento sulla resistenza post-picco. Per tali strutture massicce l'analisi lineare elastica con elementi finiti tridimensionali può dare un'informazione attendibile sullo stato di tensione e sul rischio di un collasso fragile per compressione. La formazione di fessure può essere eventualmente prevista confrontando la tensione principale di trazione con la resistenza a trazione convenzionale del conglomerato.

E' bene inoltre rilevare che la grande rigidità delle strutture massicce (un classico esempio sono i muri romani o medievali) può richiedere la modellazione anche del terreno di fondazione.

Col passare dei secoli, e l'incremento di nuove tecniche costruttive, si è passati a costruzioni con muri di pietra squadrata, che sono realizzati, a secco o con malta, con blocchi rettangolari più o meno perfettamente squadrati che prendono il nome di **conci**.

Essi possono essere formati a piè d'opera o provenire direttamente dalle cave nella forma richiesta.

In un concio si distinguono:

- *I letti*: sono le superficie piane orizzontali di giacitura;
- *I giunti*: sono le due superfici interne verticali di combaciamento;
- *Le facce*: sono le due superfici esterne verticali di *paramento* o di *fronte*.

I conci sono disposti a strati successivi orizzontali sovrapposti detti *filari* o *corsi*; in ogni filare un concio si dice disposto di *fascia* quando la sua maggiore dimensione è parallela al paramento e di *punta* o di *testa* o *in chiave* quando questa maggiore dimensione è normale al paramento.

I conci, a seconda delle loro dimensioni, possono avere diversa sistemazione nella struttura muraria, o, come si dice tecnicamente, diverso assestamento:

- *Assestamento irregolare*: quando i conci hanno dimensioni diverse l'uno dall'altro;
- *Assestamento indentato*: quando i conci, oltre ad avere dimensioni diverse, hanno rientranze e sporgenze che vanno a combaciare con sporgenze o rientranze dei conci vicini;
- *Assestamento pseudo isodomo*: quando i conci di ciascun filare hanno tutti la stessa altezza che è diversa da filare a filare;
- *Assestamento isodomo alterno*: quando i conci di ciascun filare hanno tutti la stessa altezza con alternanza;
- *Assestamento isodomo*: quando i conci di ciascun filare hanno tutti la stessa altezza che è costante in tutti i filari.

Quando grandi blocchi lapidei sono sovrapposti senza interposizione di malta (come tra i rocchi delle colonne classiche), oppure quando tale interposizione deve essere trascurata per deterioramento della malta, un metodo appropriato sia per la verifica dell'equilibrio sia per l'eventuale verifica di resistenza, è quello di considerare i blocchi come corpi rigidi connessi da giunti monolateri che consentono il distacco e la rotazione reciproca e, superato un limite di attrito, anche lo slittamento reciproco dei blocchi.

Gli stati limite ultimi da verificare sono il ribaltamento (fig. 1.7), lo slittamento nei giunti (l'angolo di attrito statico può variare tra 22° e 40°), e la rottura per compressione se il materiale è debole. In dinamica (ad esempio per le verifiche sismiche) le ipotesi di blocchi

rigidi e di assenza di trazione nei giunti corrispondono ad alcuni comportamenti osservati nei terremoti.

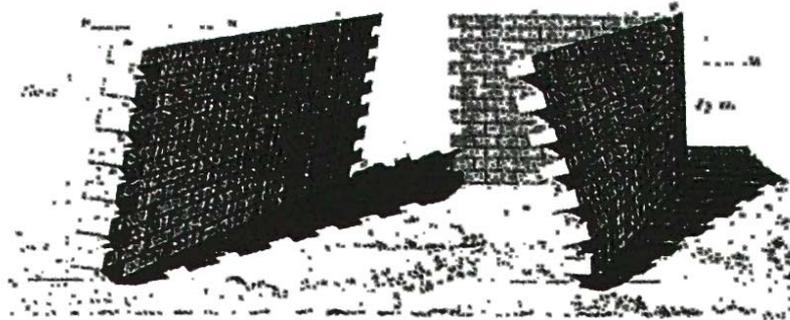


fig. 1.7 – Meccanismi di rottura (ribaltamento) di pareti in muratura di blocchi lapidei

Nella letteratura internazionale la muratura di blocchi lapidei squadrati viene solitamente indicata con il termine inglese “*ashlar*”. Spesso questo tipo di muratura è realizzata con l’interposizione di giunti di malta. In nessun altra tipologia vi sono altrettanti approcci differenti alla verifica di stabilità. La molteplicità è dovuta in parte alla grande varietà di tipi strutturali: da colonne, archi, archi rampanti, cupole ed altre strutture tridimensionali.

Tuttavia, è piuttosto il differente obiettivo della verifica che dà luogo a differenti approcci: ad esempio la verifica in esercizio oppure allo stato-limite ultimo, la considerazione di carichi permanenti oppure delle azioni sismiche.

Un primo insieme di metodi è basato su modelli elastico-lineari, che vennero prima usati per gli archi, e sono ora estesi ad elementi finiti bi- e tridimensionali. Tali metodi devono tener conto di almeno due caratteristiche fondamentali: la presenza di due materiali (pietra e malta) e della scarsa resistenza a trazione della malta. Tali procedure elastico-lineari con parzializzazione consentono di verificare la resistenza, calcolare le deformazioni, prevedere la formazione di fessure e seguire la loro evoluzione per effetto dei carichi, effetti termici o cedimenti differenziali delle fondazioni. Esse consentono di determinare la sezione efficace negli elementi monodimensionali quali ad esempio gli archi; tuttavia, le loro applicazioni a problemi bi- o tridimensionali hanno tutte le difficoltà di ogni micromodello.

L’alternativa dei modelli non reagenti a trazione (“no tension”), in cui in senso generalizzato non si ammettono sforzi di trazione in nessuna direzione, pur essendo di notevole utilità ed efficacia nei problemi monodimensionali ed in alcune classi di problemi bidimensionali, è spesso di scarso aiuto in quelli tridimensionali.

### 1.3.2 Le murature di mattoni

La muratura è un insieme di mattoni posati secondo una specifica tessitura e collegati fra loro con malta. I giunti di posa sono di regola orizzontali, e a tale disposizione si riferiscono le modellazioni moderne correnti.

Nella muratura il mattone o blocco può essere posto: *in foglio o di costa* se lo spessore è normale alla superficie del muro; *in spessore*, di lista o di fascia, se la larghezza è normale alla superficie del muro; *in chiave* se la lunghezza è normale alla superficie del muro.

Si distinguono in relazione alla giacitura dei mattoni i seguenti tipi di muratura:

- Murature in foglio dette anche tavolati, ottenute sovrapponendo i mattoni “in foglio” o di “costa”;
- Murature ad una testa, dello spessore pari alla larghezza del mattone o del blocco, detta anche “in spessore”;
- Murature a più teste, di spessore multiplo della lunghezza e della testa del mattone.

Vedesi le figg 1.8 – 1.15

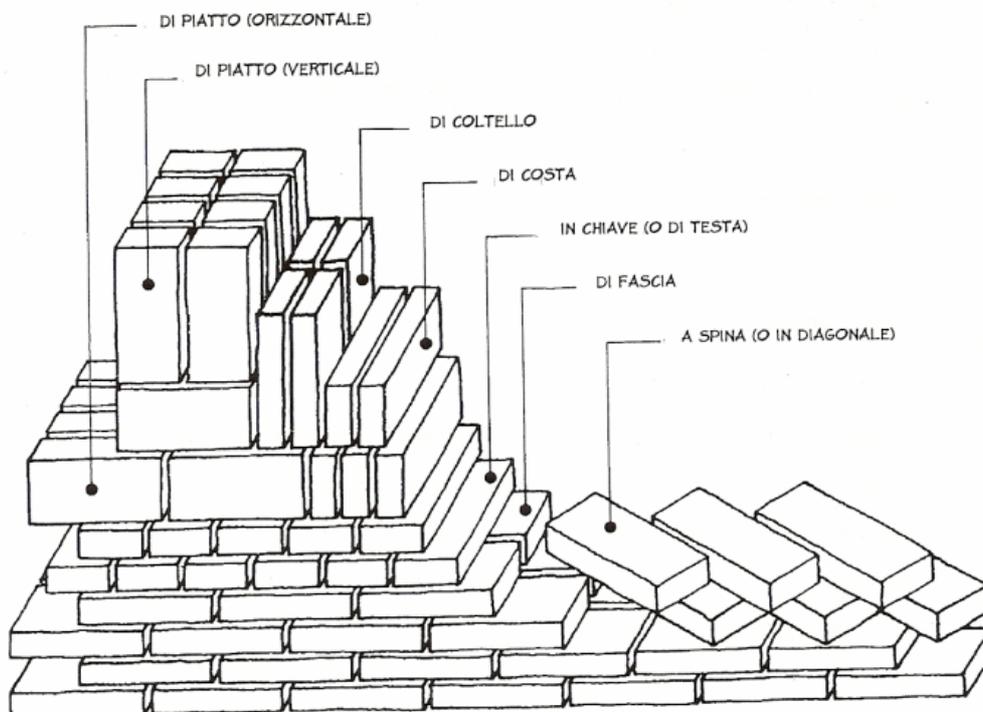


Fig. 1.8 – Rappresentazione grafica delle giaciture principali

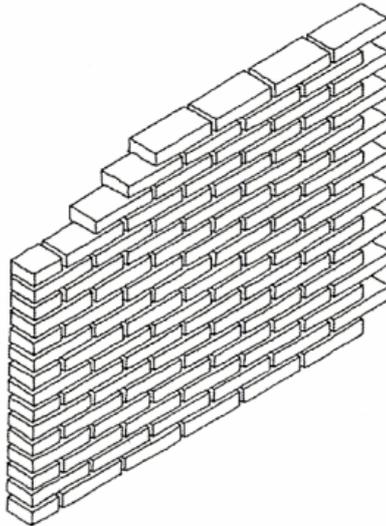


Fig.1.9 – Muro ad una testa, concatenamento a cortina

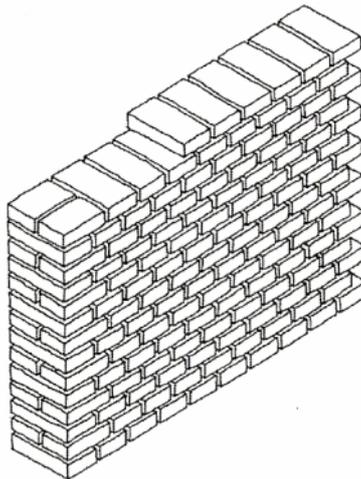


Fig 1.10 – Muro a due teste, concatenamento in chiave

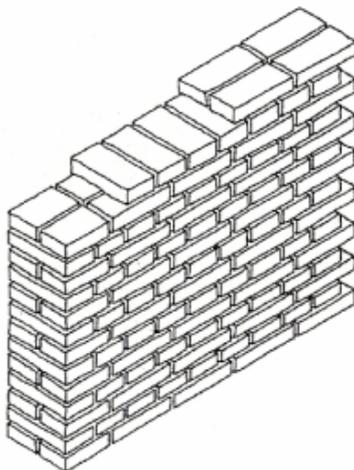


Fig 1.11 – Muro a due teste, concatenamento a blocco

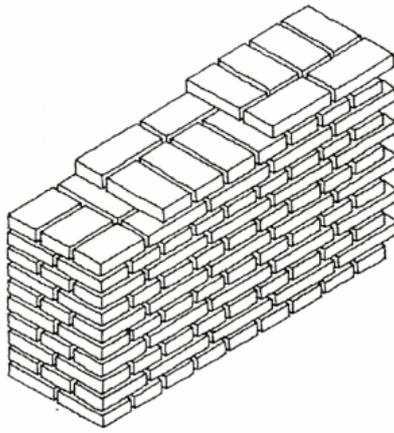


Fig. 1.12 - Muro a tre teste, concatenamento a blocco

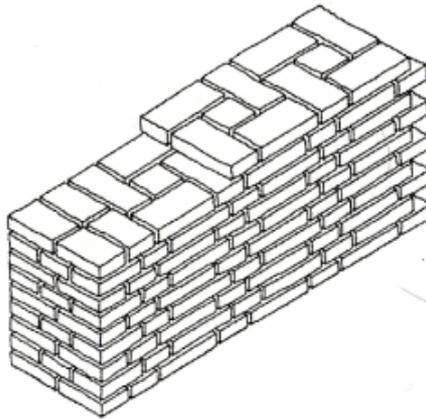


Fig. 1.13 - Muro a tre teste, concatenamento gotico

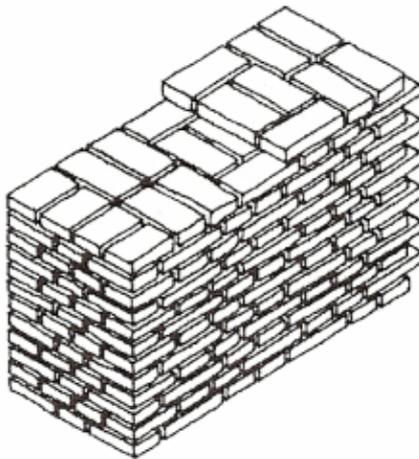


Fig. 1.14 - Muro a quattro teste, concatenamento gotico

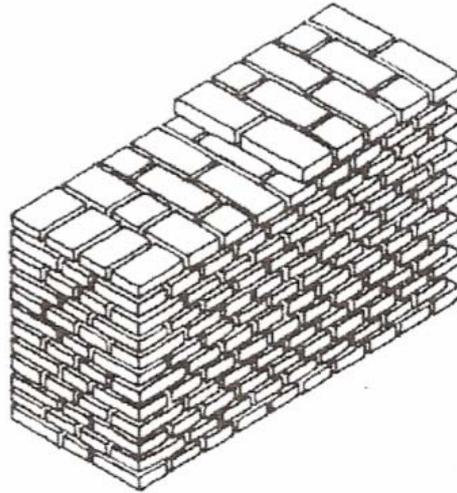


Fig. 1.15 - Muro a quattro teste, concatenamento in chiave

In relazione alla complessità delle prestazioni richieste, le murature sono costituite da uno o più strati funzionali; in relazione al numero di strati funzionali possiamo distinguere le seguenti murature:

1. murature monostrato: sono murature realizzate con mattoni o blocchi che opportunamente disposti realizzano un unico strato di muratura, classica disposizione delle murature portanti interne;
2. murature a doppio strato: sono murature realizzate con due strati distanziati da intercapedine;
3. murature a sacco (mura di Bologna): sono costituite dall'alternanza in verticale e più frequentemente in orizzontale di paramenti murari immersi fra loro e di cavità vuote o riempite di materiale a bassa densità;
4. murature armate: sono costituite da elementi resistenti artificiali semipieni tali da consentire la realizzazione di pareti murarie incorporanti apposite armature metalliche verticali e orizzontali; esse vengono utilizzate in zone sismiche e per realizzare muri di controterra. I getti armati incorporati nella muratura consentono al sistema:
  - di aumentare la resistenza a taglio e a flessione;
  - un comportamento duttile, tale per cui si deforma ampiamente al di là del limite elastico senza rompersi;
  - un comportamento plastico, tale per cui le azioni che sollecitano il sistema provocano in alcune zone delle deformazioni, cerniere plastiche, che non si annullano una volta cessate dette azioni e

questo avviene con un notevole dispendio di energia, lavoro di deformazione che assorbe parzialmente l'energia trasmessa dal sisma.

In relazione alla disposizione dell'armatura si distinguono:

- muratura mista armata o ad armatura diffusa;
- muratura armata ad armatura diffusa (fig1.16);
- muratura armata con armatura concentrata o muratura intelaiata.

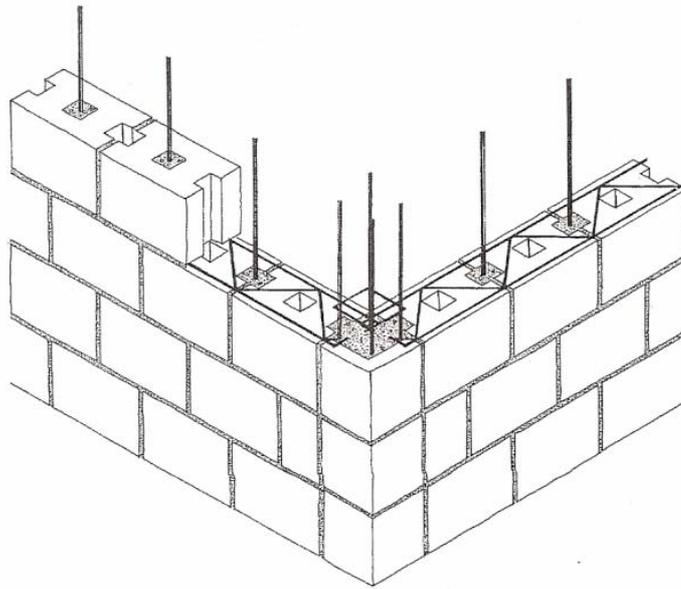


Fig. 1.16 - Muratura armata ad armatura diffusa

La muratura di mattoni è correntemente usata, e criteri generalmente accettati per la modellazione e la verifica di sicurezza sono disponibili e riportati in norme nazionali e internazionali, da cui possono anche essere ricavate indicazioni su deformabilità e meccanismi di rottura.

Malgrado la bassa resistenza a trazione di tale materiale composito, l'analisi strutturale è correntemente effettuata con metodi lineari elastici introducendo valori globali dei moduli elastici  $E$  e  $G$ . Le verifiche vengono effettuate agli stati limite, con meccanismi convenzionali di rottura per compressione, flessione e taglio; le proprietà dei mattoni e della malta sono introdotte nella determinazione delle capacità di resistenza globali del "materiale" muratura.



Le dimensioni dei bimattoni:

12cm x 12cm x 25cm

Le dimensioni dei blocchi di laterizio alveolato:

19cm x 30cm x 50cm

19cm x 25cm x 30cm

9cm x 14cm x 30cm

I mattoni che vengono lasciati a vista possono avere dimensioni leggermente inferiori di quelle del mattone ordinario, in quanto, le superfici da lasciare a vista sono arrotate quando la pasta è ancora fresca o appena dopo la cottura per renderle più lisce.

Alcune tipologie di mattoni sono riportate in fig. 1.17

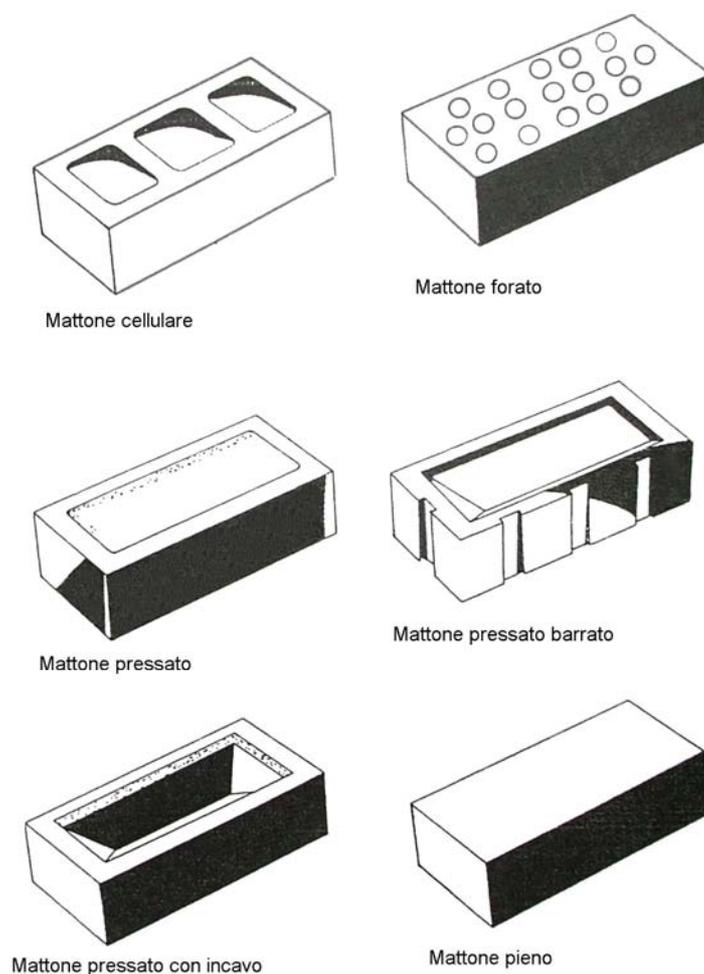


fig. 1.17 – Tipi di mattoni standard [5]

La gamma dimensionale dei mattoni si arricchisce con i pezzi che si ricavano per spacco da quelli normali che vengono impiegati per evitare giunti continui su filari contigui, oppure, negli ammorsamenti all'incrocio di due paramenti. I più noti sono: *il quartino, il mezzo mattone e il tre quarti.*

Il mantenimento delle dimensioni e il contenimento delle tolleranze dimensionali incidono sulla regolarità della muratura e quindi sulla stabilità, sulla resistenza meccanica (planarità dei corsi, verticalità delle murature, quantità di malta, ecc.), sull'operabilità e sull'aspetto formale delle murature a vista.

### Volume:

Secondo il volume gli elementi di laterizio si classificano:

- mattoni: con  $V < 5500 \text{ cm}^3$
- blocchi: con  $V \geq 5500 \text{ cm}^3$
- pezzi speciali

### Percentuale di foratura:

La percentuale di foratura incide considerevolmente sulle prestazioni statiche.

Seconda la percentuale di foratura

$$\varphi = 100 \cdot \frac{F}{\Delta}$$

dove:

F = aree complessive dei fori passanti e di quelli profondi non passanti

$\Delta$  = area lorda della faccia delimitata dal perimetro

possiamo classificare gli elementi di laterizio nei seguenti:

- elementi pieni  $\varphi \leq 15\% - V_{\max \text{ Fori}} = 540 \text{ cm}^3$
- elementi semipieni  $15\% \leq \varphi \leq 45\% - V_{\max \text{ Fori}} = 1620 \text{ cm}^3$
- elementi forati  $45\% \leq \varphi \leq 55\% - V_{\max \text{ Fori}} = 1980 \text{ cm}^3$
- elementi forati non portanti  $\varphi \geq 55\%$

### Geometria e peso specifico:

E' espressa dai seguenti parametri:

- planarità delle facce;
- rettilineità degli spigoli;
- percentuale di foratura;
- peso specifico (di solito pari a  $1800 \text{ kg} / \text{m}^3$ , per laterizio alveolato non deve essere minore di  $1450 \text{ kg} / \text{m}^3$ )

- peso di volume (massa volumica, varia fra  $450\text{kg}/\text{m}^3$  e  $800\text{kg}/\text{m}^3$  a seconda della percentuale di foratura).

### Resistenza a compressione:

Dal punto di vista strutturale, la resistenza a compressione dell'elemento (mattono o blocco) è la grandezza controllata. I mattoni di varia resistenza sono utilizzabili per una vasta serie di applicazioni architettoniche e ingegneristiche. La Tabella 1.1 dà una classificazione dei mattoni a seconda della loro resistenza a compressione.

**Tabella 1.1** Classificazione dei mattoni in laterizio in accordo con la resistenza e la capacità di assorbimento [5]

<i>Designazione</i>	<i>Classe</i>	<i>Resistenza a compressione media non minore (N/mm<sup>2</sup>)</i>	<i>Assorbimento medio non più grande di (% di peso)</i>
Ingegneria	A	70	4,5
	B	50	7,0
Mattono portante		5 - 100	richiesta non specifica
Prova umida corso 1		5	4,5
Prova umida corso 2		5	7,0

Possono essere usati anche i mattoni in silicato di calcio di varia resistenza. La Tabella 1.2 specifica la classe e la resistenza di questi mattoni.

**Tabella 1.2** Classi di resistenza a compressione e richieste per mattoni in silicato di calcio [5]

<i>Designazione</i>	<i>Classe</i>	<i>Resistenza a compressione media di 10 mattoni di (%) (N/mm<sup>2</sup>)</i>	<i>Ritiro non più elevato</i>	<i>Colore di codifica</i>
Mattono portante o a faccia vista	7	48,5	0,04	verde
	6	41,5		blu
	5	34,5		giallo
	4	27,5		rosso
	3	20,5		nero
Mattono a faccia vista o mattone comune	2	14	-	-

I mattoni di calcestruzzo sono utilizzabili con minima o media resistenza, da 21 a  $50\text{N}/\text{mm}^2$ . I blocchi pieni, cellulari e cavi di vari spessori, sono confezionati seguendo le

richieste del progetto. Sia lo spessore, che la resistenza a compressione sono indicati nella Tabella 1.3.

**Tabella 1.3** Resistenza a compressione e spessore dei blocchi di calcestruzzo [5]

<i>Formato 440 x 215 mm</i>		
<i>Tipo</i>	<i>Spessore (mm)</i>	<i>Resistenza minima a compressione per elemento (N/mm<sup>2</sup>)</i>
Pieno	75	
	100	
Pieno o	140	7,0 - 21,0
	150	
Cellulare o	190	
	200	
Forato	215	

**Modulo di elasticità:**

Il modulo di elasticità alla compressione dei laterizi con massa volumica pari a  $1800 - 1900 \text{ kg} / \text{m}^3$  è compreso fra  $70000 - 100000 \text{ kg} / \text{cm}^2$

**Determinazione delle inclusioni:**

Le inclusioni sono decisamente pericolose nei mattoni per murature da lasciare a vista, esse possono essere:

- inclusioni calcaree (una volta immerso il pezzo in acqua bollente per almeno 3 ore i crateri con  $\phi_{medio} \leq 15 \text{ mm}$  non devono essere più di  $3 / \text{dm}^2$  di superficie;
- efflorescenza (dovuta ai solfati di sodio, potassio, magnesio e calcio; ovviamente non tutti si presentano contemporaneamente. L'efflorescenza si presenta sull'opera muraria dopo la costruzione per essiccazione o in conseguenza al fatto che è stata confezionata bagnata. Un incremento normale di solfato di sodio, presente in più del 3% del mattone, può provocare danneggiamento delle superfici.

### Capacità di assorbimento:

I mattoni contengono dei pori; alcuni sono pori <<passanti>>, altri sono <<non passanti>> oppure ancora sigillati ed inaccessibili. I pori <<passanti>> permettono all'aria di uscire nelle 24 h del test di assorbimento e permettono anche il libero passaggio dell'acqua. L'assorbimento è valutato con la quantità di acqua raccolta fino a riempire questi pori in un mattone. Il coefficiente di saturazione è il rapporto di 24 h di assorbimento freddo rispetto al massimo assorbimento in depressione o in ebollizione. L'assorbimento di mattoni in laterizio varia da 4.5 al 21% a seconda del peso, quelli di silicato di calcio dal 7 al 21% e quelli in calcestruzzo dal 7 al 10% a seconda del peso. Il coefficiente di saturazione può essere approssimato considerando i valori dallo 0.2 allo 0.88. Né l'assorbimento, né il coefficiente di saturazione, necessariamente, indicano la tendenza dei mattoni ad essere danneggiati dal freddo o da agenti chimici. Per contro, l'assorbimento non è una richiesta essenziale per mattoni o blocchi in calcestruzzo come non c'è relazione tra l'assorbimento e la durabilità.

### Resistenza al freddo:

La resistenza al freddo dei mattoni è molto variabile e dipende dal grado di esposizione alla pioggia e dalla temperatura. I mattoni da costruzione con un'alta resistenza a compressione e un basso assorbimento, sono confezionati per essere resistenti al freddo. Tuttavia, qualche varietà di mattoni con bassa resistenza e un alto assorbimento, possono essere paragonati nella resistenza al freddo, ai mattoni con alta resistenza e basso assorbimento.

I mattoni possono essere danneggiati soltanto nel caso in cui il 90% dello spazio dei pori sia riempito d'acqua a temperatura di congelamento, dato che l'acqua ghiacciandosi si espande per un decimo in più. Quindi, basso o alto assorbimento dell'acqua non significa, in generale, che tutti i pori risultino riempiti con acqua. I mattoni di silicato di calcio di resistenza pari a  $14 \text{ N/mm}^2$  o superiore, sono resistenti a qualsiasi condizione atmosferica.

La muratura in calcestruzzo è sempre resistente al freddo.

### Variazioni dimensionali:

#### *(a) Movimento termico*

Tutti i materiali da costruzioni si espandono o contraggono con l'aumento o la diminuzione della temperatura.

#### *(b) Movimento dovuto all'umidità*

Una delle cause più comuni di fessurazione e danneggiamento dei materiali da costruzione, è il movimento dovuto all'umidità, che può essere reversibile o, in certi casi, irreversibile. Il progettista deve essere consapevole dell'importanza di questo movimento.

I mattoni in laterizio, provenendo da forni, si espandono a causa dell'assorbimento dell'acqua dall'atmosfera. L'importanza di questa espansione dipende dal tipo di mattoni e dal suo punto di cottura ed è completamente irreversibile, si sviluppa in pochi giorni, come mostrato nella fig. 1.12; la restante parte si sviluppa per un periodo di circa sei mesi. A causa di questo movimento dovuto all'umidità, i mattoni arrivando nuovi dalle fornaci, non devono essere mai disposti in verticale. Generalmente, il tempo per lo sviluppo del movimento è di circa due settimane. Il successivo movimento dovuto all'umidità non va oltre lo 0.02%.

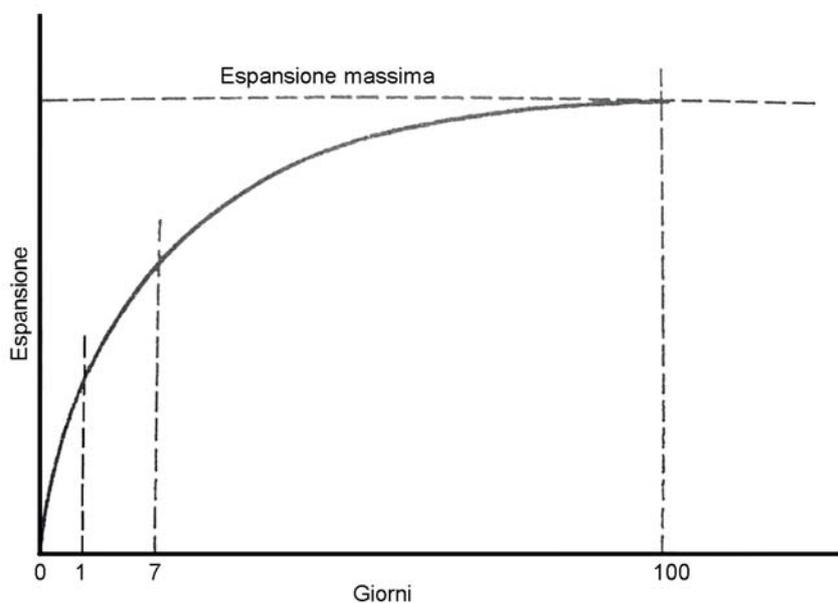


fig. 1.18 – Espansione di mattoni giovani di fornace, dovuta all'assorbimento di umidità dall'atmosfera [5]

Inoltre, anche i mattoni vengono sottoposti ad espansione in parte o completamente reversibili o a contrazioni dovute ad umidità o a siccità. Questo movimento non è molto significativo, eccetto nel caso dei mattoni di silicato di calcio. Normalmente, i giunti di espansione nella muratura di mattoni di silicato di calcio, possono essere disposti ad intervalli da 7.5 a 9.0 m, in dipendenza del contenuto di umidità dei mattoni al tempo di messa in opera. Nella muratura di mattoni in laterizio i giunti di espansione possono essere adottati ad intervalli da 12.2 a 18.3 m per permettere i movimenti termici o altri movimenti.

Il ritiro del calcestruzzo di blocchi o mattoni, confezionati con questo materiale, non dovrebbe superare lo 0.06%. Nella muratura di calcestruzzo, il giunto tecnico dovrebbe essere previsto a 6 m di intervallo come regola generale. Comunque la lunghezza del pannello senza giunto non dovrebbe superare due volte l'altezza.

Alcune indicazioni sui movimenti reversibili e non reversibili dei materiali da costruzione sono riportati nella Tabella 1.4.

L'EC6 dà indicazioni per i valori di progetto delle variazioni dimensionali per muratura non armata.

**Tabella 1.4** Movimento per umidità in differenti materiali da costruzione [5]

<i>Materiali</i>	<i>Movimento (%)</i>	
	<i>Irreversibile</i>	<i>Reversibile</i>
Mattoni di laterizio	0,10 - 0,20 (espansione)	Irrilevante
Silicato di calcio	0,001 - 0,05	0,001 - 0,05
Metallo e vetro	nullo	nullo
Calcestruzzo denso e malta	0,02 - 0,12 (ritiro per essiccamento)	0,01 - 0,055

### Resistenza al fuoco:

I mattoni in laterizio sono soggetti a temperature molto alte durante la cottura che permette loro di essere adeguati anche nel caso di un incendio di edificio. Si può quindi dire che essi presentano eccellenti proprietà per la resistenza al fuoco. I mattoni di silicato di calcio hanno proprietà simili ai mattoni d'argilla. I mattoni di calcestruzzo ed i blocchi presentano dai 30 minuti alle 6 ore di resistenza al fuoco, in relazione allo spessore del muro.

### **1.4.2 Malta**

Il secondo componente nelle opere in muratura è la malta, in generale la malta è una miscela, in proporzioni opportune, di un legante con sabbia e acqua per ottenere un impasto fresco di consistenza adatta all'uso, che ha la capacità di indurire nel tempo più o meno lungo, a seconda della sostanza agglomerante usata nella sua preparazione.

La malta è dunque un conglomerato in cui gli elementi inerti hanno piccole dimensioni, in particolare, quando si usa il cemento come legante si può parlare di "microcalcestruzzo".

Tradizionalmente le malte sono state usate per la realizzazione di murature e degli intonaci, per applicazioni di rivestimenti in genere e per le decorazioni; a questi attualmente si aggiungono le malte da iniezione e consolidamento degli edifici esistenti.

I componenti delle malte hanno un ruolo specifico nella composizione dell'impasto, nella determinazione delle caratteristiche fisico-tecniche e nel processo di indurimento:

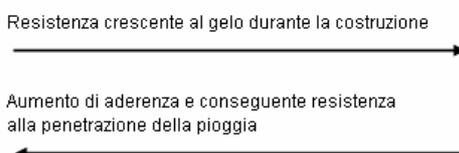
- *la sabbia* ha il compito di aumentare il volume dell'impasto (diminuendo il costo della malta), di facilitare il passaggio dell'anidride carbonica nell'interno della malta stessa, necessario per una buona presa, ed in fine per impedire il ritiro volumetrico con conseguente formazione di screpolature;
- *i leganti* sono quei materiali che per trasformazione fisica e per reazione chimica provocano l'unione delle particelle altrimenti incoerenti, rendendo solidali e compatti i corpi diversi tra loro e conferendo stabilità alle strutture;
- *l'acqua* favorisce le reazioni chimiche e conferisce proprietà legate alla lavorabilità e quindi alla messa in opera della malta;

Vi sono diversi tipi di leganti, quali: le calce, il gesso, gli agglomerati cementiti, la calce plastica, i cementi.

In generale la malta per la muratura portante dovrebbe essere un mix di cemento, calce e sabbia, in una delle proporzioni mostrate in Tabella 1.5. Per mattoni a bassa resistenza una malta debole con proporzioni in volume 1:2:9, può risultare appropriata. Per muratura armata e precompressa, la malta più debole della classe (ii) (1:1/2:4) non è consigliabile.

**Tabella 1.5** Richieste per la malta [5]

Designazione della malta	Tipi di malta (proporzione in volume)			Resistenza a compressione a 28 giorni (N/mm <sup>2</sup> )	
	Cemento: Calce: Sabbia	Cemento per: per muratura: sabbia	Cemento: Sabbia con additivo plastico	Test preliminari (in laboratorio)	Prove in sito
(i)	1:0 a (1/4):3	-	-	16	11
(ii)	1:(1/2):4 a 4 (1/2)	1:2 (1/2) a 3 (1/2)	1:3 a 4	6,5	4,5
(iii)	1:1:5 a 6	1:4 a 5	1:5 a 6	3,6	2,5
(iv)	1:2:8 a 9	1:5 (1/2) a 6 (1/2)	1:7 a 8	1,5	1



I vari tipi di cemento che si usano nelle malte sono i seguenti:

(a) *Cemento Portland*: Viene definito come il prodotto ottenuto per macinazione di clinker con opportuna aggiunta di gesso biidrato, dosato nella giusta quantità. Il cemento a presa rapida può essere utilizzato al posto del cemento Portland quando è richiesta una resistenza superiore, a breve periodo; altrimenti le proprietà sono simili. Il cemento resistente ai solfati dovrebbe essere utilizzato nelle situazioni dove l'opera muraria deve mantenersi a lungo periodo umida e quando può essere attaccata da solfati o il manufatto è a contatto con terreni che portano con sé solfati.

(b) *Cemento per la muratura*: Si può usare una miscela costituita da cemento ordinario Portland al 75%, costituito da inerte minerale fino (filler) e additivo. Il filler minerario è utilizzato per ridurre il contenuto di cemento e l'additivo per migliorare la lavorabilità. La malta che si ottiene permette di avere una minore resistenza se paragonata ad una normale malta di cemento. In effetti, le proprietà di una malta realizzata con cemento per muratura, sono comprese fra quelle di una malta di cemento-calce-sabbia e cemento plastico-sabbia.

(c) *Cemento pozzolanico*: Ottenuto dalla macinazione, senza aggiunta di materie inerti, di una mescolanza di clinker di cemento Portland, di gesso e di pozzolana. Il minor costo della pozzolana rispetto al clinker rende questo cemento più economico del cemento Portland, ma soprattutto è possibile risparmiare sensibilmente il combustibile necessario alla cottura del clinker.

#### Classificazione delle malte in base alla loro resistenza:

In base alle norme tecniche per la progettazione, l'esecuzione e il collaudo degli edifici in muratura e per il loro consolidamento, le malte sono classificate come segue:

- M2,5                       $2,5N / mm^2$        $(25kg / cm^2)$
- M5                          $5,0N / mm^2$        $(50kg / cm^2)$
- M10                       $10,0N / mm^2$       $(100kg / cm^2)$
- M15                       $15,0N / mm^2$       $(150kg / cm^2)$

#### Dosaggio delle malte:

Un sistema per fissare il dosaggio delle malte è quello di esprimere le quantità di tutti i componenti in volume come indicato in Tabella 1.6.

**Tabella 1.6**

TIPO DI MALTA	COMPOSIZIONE				
	CEMENTO	CALCE AEREA	CALCE IDRAULICA	SABBIA	POZZOLANA
Idraulica	-	-	1	3	-
Pozzolonica	-	1	-	-	3
Bastarda	1	-	1	5	-
Bastarda	1	-	1	5	-
Cementizia	1	-	0,5	4	-
Cementizia	1	-	-	3	-

**Prestazioni richieste:**

Nella scelta del tipo di malta, sono necessarie le proprietà di seguito elencate:

- Sviluppo della resistenza in breve tempo;
- Lavorabilità, cioè possibilità di facile spalmatura;
- Capacità di ritenzione, cioè la possibilità di mantenere acqua contro l'assorbimento del mattone. Infatti se non c'è sufficiente capacità di conservazione d'acqua nella malta con rapido assorbimento da parte del mattone, può capitare che non vi sia sufficiente acqua di idratazione del cemento nella malta stessa, con il risultato di un legame modesto ed inefficace aderenza tra mattone e malta;
- Adeguato sviluppo di aderenza con il mattone;
- Resistenza a fessurazione ed all'accesso dell'acqua meteorica;
- Resistenza al ghiaccio ed all'attacco chimico e quindi al solfato solubile;
- Conservazione delle caratteristiche visive nel tempo.

Come già anticipato la malta della muratura portante è una malta di cemento, essa risulta caratterizzata da uno sviluppo rapido delle resistenze e da valori finali delle stesse maggiori di quelle con altri tipi di legante utilizzato.

Alle caratteristiche meccaniche superiori si accompagnano una grande impermeabilità e una lunga durata nel tempo.

Le malte cementizie sono molto adatte agli ambienti umidi e presentano una buona resistenza in ambienti aggressivi.

Per aumentare la scarsa lavorabilità delle malte cementizie si può utilizzare sia una quantità di cemento che sia superiore di quella necessaria ad assicurare la resistenza meccanica (il che produce l'aumento del ritiro idraulico e la possibile formazione di microfessure), sia una piccola quantità di calce aerea con funzione plastificante.

Di seguito riporto la Tabella 1.7 riferita ai requisiti della malta al variare del tipo di legante.

**Tabella 1.7**

LEGANTI	REQUISITI DELLA MALTA											
	RESISTENZA MECCANICA								FISICO-CHIMICI			
	A FLESSIONE				A COMPRESSIONE				Perdita al fuoco	Residuo Insolub.	Contenuto di SO <sub>3</sub>	Contenuto di MgO
<i>kg / cm<sup>2</sup></i>				<i>kg / cm<sup>2</sup></i>								
Cementi normali	24h	3gg	7gg	28gg	24h	3gg	7gg	28gg				
Portland			40	40			175	325	≤ 5	≤ 3	≤ 3.5	≤ 4
Pozzolánico			40	60			175	325	≤ 7	≤ 16	≤ 3	≤ 3
D'alto forno			40	60			175	325	≤ 5	≤ 3	≤ 3.5	≤ 7
<b>Cem. ad alta resistenza</b>												
Portland		40	60	70		175	325	425	≤ 5	≤ 3	≤ 3.5	≤ 4
Pozzolánico		40	60	70		175	325	425	≤ 7	≤ 16	≤ 3	≤ 3
D'alto forno		40	60	70		175	325	425	≤ 5	≤ 3	≤ 3.5	≤ 7
<b>Cem. ad alta resistenza e rapido indur.</b>												
Portland	40	60		80	175	325		425	≤ 5	≤ 3	≤ 3.5	≤ 4
Pozzolánico	40	60		80	175	325		425	≤ 7	≤ 16	≤ 3	≤ 3
D'alto forno	40	60		80	175	325		425	≤ 5	≤ 3	≤ 3.5	≤ 7
<b>Cem. allum.</b>	40	60		80	175	325		425	≤ 5	≤ 3	≤ 3	≤ 3

## Capitolo 2

# PROPRIETA' DELLA MURATURA

### 2.1 GENERALITA'

Per comprendere a pieno, ai fini progettuali, il comportamento del materiale composito mattone o blocco-malta, non bisogna analizzare i singoli elementi in un contesto isolato, bensì valutare le risposte da essi offerte, nel loro insieme, sotto varie condizioni di sollecitazione. Ad esempio, per poter comprendere a pieno quella che sia l'utilità di elementi portanti verticali quali i pannelli in muratura, il fattore da tenere in maggiore considerazione è la resistenza da essi offerta alle tensioni di compressione. La compressione non è naturalmente l'unico tipo di sollecitazione cui tali pannelli possono essere sottoposti: potrebbero essere soggetti a forze orizzontali di tipo sismico o anche a pressioni laterali dovute al vento, cui corrisponderebbero, in risposta, resistenze della muratura cosiddette a taglio ed a trazione rispettivamente, e che non possono essere trascurate in fase di progetto.

Talvolta neanche le norme relative alla muratura sono sufficienti al fine di effettuare una dettagliata analisi della resistenza da essa offerta, in quanto tali norme sono ricavate sperimentalmente mediante prove effettuate su pareti, pilastri o provini di piccole dimensioni, e non valutano quindi i diversi stati di sollecitazione derivanti ad esempio dal dover utilizzare strutture con dimensioni differenti da quelle cui tali norme si riferiscono.

E' dunque opportuno, per un controllo adeguato in termini di sicurezza, valutare il comportamento della muratura sotto diversi stati di sollecitazione. In tal senso si richiede una più dettagliata analisi della resistenza della muratura.

## 2.2 RESISTENZA A COMPRESSIONE

### 2.2.1 Fattori che la riguardano

I fattori influenti sulla resistenza a compressione sono indicati nella Tabella 2.1 di seguito riportata.

**Tabella 2.1** Fattori riguardanti la resistenza a compressione [5]

<i>Caratteristica dei blocchi</i>	<i>Caratteristica della malta</i>	<i>Muratura</i>
<i>Resistenza</i>	Resistenza:	Apparecchio costruttivo
<i>Tipo e geometria:</i>	miscela	<i>Direzione di applicazione carichi</i>
<i>pieni</i>	rapporto acqua/cemento	Sforzi locali
<i>forati</i>	acqua trattenuta	
<i>semipieni</i>	Caratteristiche di deformazione relative al blocco	
rapporto altezza/spessore		
caratteristiche di assorbimento		

### 2.2.2 Relazione di resistenza fra blocchi, malta e muratura

Come scaturito dalle prove di compressione sulla muratura e da prove standard sui materiali, la muratura, quando è sottoposta a compressione uniforme può arrivare a rottura sviluppando fessure parallele all'asse di carico o può subire rottura a taglio lungo linee di debolezza. Il tipo di rottura dipende in realtà dalla differenza tra la resistenza offerta dalla malta e quella offerta dai mattoni o dai blocchi.

In particolare si è visto nelle prove standard di compressione che, a compressione la resistenza offerta dalla muratura è minore di quella nominale offerta dai mattoni o dai blocchi, così come può risultare di gran lunga maggiore rispetto a quella cubica offerta dalla malta se sottoposta a schiacciamento.

In termini generali si è quindi dedotto che la resistenza offerta dalla muratura in risposta alla compressione, varia, approssimativamente, tra la radice quadrata di quella del blocco in risposta allo schiacciamento,  $f_b$ , e la radice terza o quarta della resistenza cubica offerta dalla malta,  $f_m$ .

Una formula empirica per determinare la resistenza a compressione della muratura, a partire da quelle del mattone e della malta, largamente utilizzata ai fini progettuali è la seguente:

$$f_k = 0.6 \cdot f_b^{0.75} \cdot f_m^{0.25}$$

In conclusione sono state estrapolate le osservazioni di seguito riportate:

1. Le tensioni secondarie a trazione che causano il tipo di rottura a scorrimento sono dovute al contenimento della deformazione dei letti di malta della muratura;
2. La resistenza allo schiacciamento che, in una prova standard, offre il blocco preso singolarmente, è diversa da quella del blocco considerato all'interno della muratura;
3. la malta oppone una maggiore resistenza alle tensioni di compressione nella muratura di blocchi a ricorsi di malta perché la sua deformazione laterale è contenuta dai blocchi stessi.

Le teorie formulate sulla resistenza a compressione della muratura segnano principalmente due tipi di approcci:

- nel primo approccio si valuta la resistenza sulla base della congruenza delle deformazioni laterali tra il blocco e la malta in corrispondenza dell'interfaccia che tra essi sussiste, e si ipotizza che la deformazione a trazione sia contenuta nell'elemento stesso.
- nel secondo approccio si misura la resistenza tramite prove biassiali e triassiali dei materiali costituenti.

Nessuno dei due approcci è però riuscito a superare le difficoltà che si presentano nel tentativo di determinare a pieno le proprietà dei materiali, ragioni per cui, in fase di progetto, si continua a far riferimento alle relazioni ricavate in via sperimentale tra la resistenza tipica dei singoli elementi e quella della muratura nel suo complesso.

In fig. 2.1 è indicata una tipica relazione sperimentale di valutazione della resistenza simile a quelle riportate nell'Eurocodice 6.

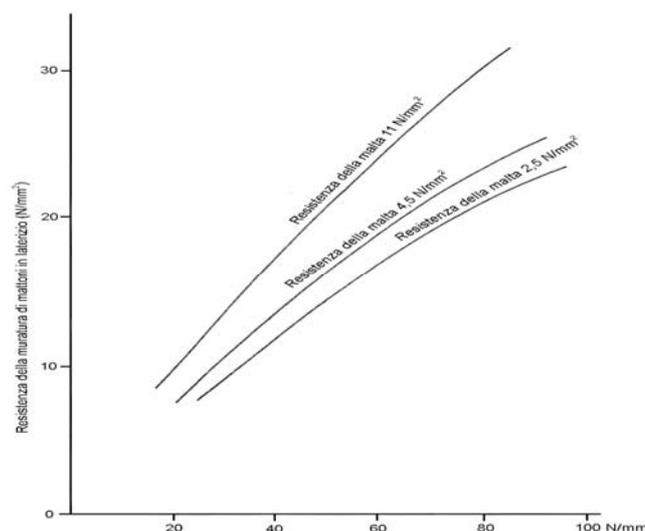


fig. 2.1- Relazione sperimentale fra resistenza a schiacciamento del mattone e resistenza della muratura di mattoni per varie resistenze della malta [5]

### 2.2.3 Alcuni effetti delle caratteristiche degli elementi

A causa dell'attrito offerto dalle piastre che compongono la macchina mediante la quale si effettuano le prove sulla deformazione laterale dell'elemento, si potrebbe essere indotti a pensare che la resistenza di un elemento di un dato materiale sottoposto a compressione sia inversamente proporzionale all'altezza dell'elemento stesso, che sia esso blocco o mattone. Tenendo presente che gli elementi nella muratura resistono alle tensioni di trazione causate dalle deformazioni laterali della malta, ciò che in realtà avviene per tali materiali collegati insieme attraverso giunti di malta è che più grande è l'altezza dell'elemento più elevata è la resistenza della muratura a compressione.

Come conseguenza immediata di tale affermazione, per un dato blocco avente una certa altezza, incrementando lo spessore del giunto di malta diminuisce la resistenza della muratura. Tale effetto è significativo nel caso in cui il rapporto fra gli spessori dei giunti e l'altezza degli elementi da essi separati è alquanto rilevante, come nel caso in cui tali elementi siano mattoni (vedesi fig. 2.2); viceversa è un dato irrilevante.

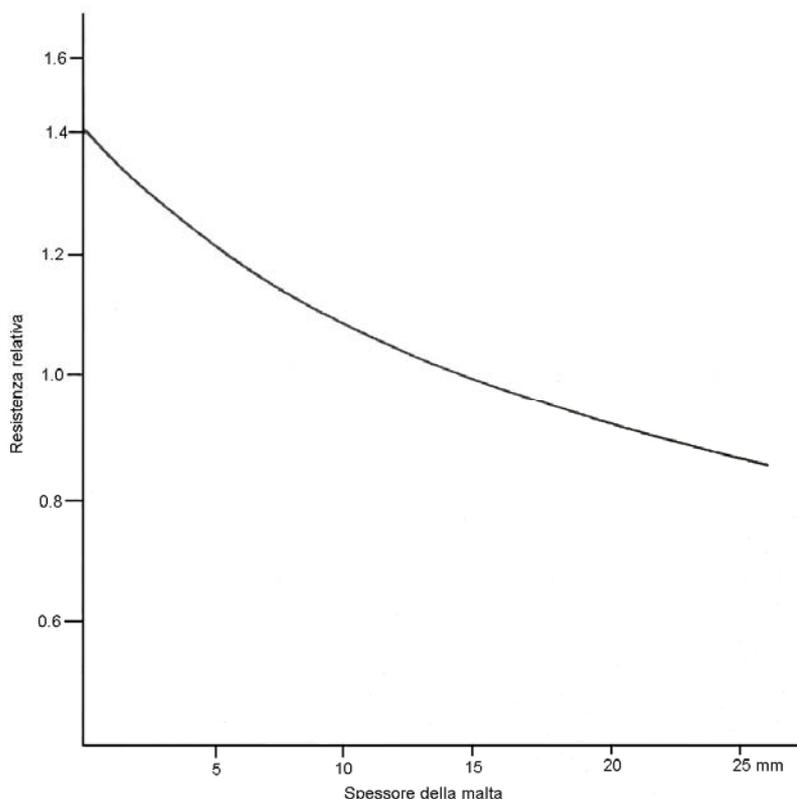


fig. 2.2- Effetto dello spessore del letto di malta sulla resistenza della muratura i mattoni di laterizio [5]

Da quanto detto finora ne segue anche che la deformata dell'elemento ha influenza sulla resistenza della muratura.

Infatti, la resistenza della muratura sarà diversa a seconda che gli elementi siano posti sul lato lungo o su quello corto di coltello o siano posti in piano. La resistenza della muratura dipende anche dal tipo di blocco utilizzato: la resistenza risulta minore, ad esempio, in un blocco che presenta un gran numero di fori rispetto ad uno che ne presenta un numero minimo.

Nella Tabella 2.2 sono riportati alcuni risultati ottenuti per murature costruite con vari tipi di mattoni. Dalla tabella si può vedere che, benché ci sia una sostanziale riduzione della resistenza della muratura quando è sollecitata in direzione diversa dalla normale, essa non è proporzionale alla resistenza del blocco compresso nella direzione corrispondente. Quindi non può essere data nessuna regola generale che metta in relazione la resistenza del blocco e la resistenza della muratura secondo la direzione del carico.

**Tabella 2.2** Resistenza a compressione e preismi compressi in differenti direzioni\*.

(a) Resistenza del mattone (N/mm<sup>2</sup>) [5]

Tipo di mattone	Prove		
	in piano	di lista	di testa
14 fori	74.3 (100)	26.2 (35)	10.4 (14)
10 fori	70.2 (100)	29.5 (42)	21.7 (31)
3 fori	82.0 (100)	53.2 (65)	40.2 (49)
5 fori	64.1 (100)	51.8 (81)	13.8 (22)

(b) Resistenza di prismi (N/mm<sup>2</sup>)

Mattone	Giacitura		
	in piano	di lista	di testa
14 fori	28.9 (100)	08.5 (35)	14.6 (14)
10 fori	22.0 (100)	15.0 (42)	20.0 (31)
3 fori	37.6 (100)	30.5 (65)	21.8 (49)
5 fori	34.1 (100)	29.0 (81)	13.9 (22)

\*Fra parentesi le resistenze relative. Malta con composizione 1:1/4:3.

Prima di proseguire è opportuno precisare che, relativamente alla muratura costruita con blocchi forati, le cavità possono anche non essere riempite di calcestruzzo. Inoltre il giunto di malta può coprire l'intera faccia del letto di blocco o solo fasce esterne: nel primo caso

la resistenza della muratura è data dal rapporto tra il massimo carico di prova e l'area lorda del blocco, cosicché la resistenza venga calcolata come se il mattone fosse pieno; nel secondo caso, invece, essa dovrebbe essere calcolata sulla base dell'area coperta dalla malta.

Convenzionalmente, la resistenza a compressione della muratura a blocchi con grandi fori costruita con le pareti riempite di calcestruzzo è data dalla somma delle resistenze dei blocchi forati e delle parti riempite di calcestruzzo, prese separatamente.

Comunque, visto che il materiale di riempimento tende a separarsi dal blocco, questa regola non è sempre applicabile, poiché può esserci una differenza nelle deformazioni laterali del blocco e dei materiali di riempimento, e questo vale anche quando i materiali hanno approssimativamente la stessa resistenza nominale.

Per calcolare la resistenza della muratura con blocchi a giunti completi sono state determinate varie formule, come per esempio la seguente formula che in particolare fornisce la resistenza cilindrica ( $f'_m$ ) di questo tipo di muratura:

$$f'_m = 0.3f_b + 0.1f_{mr} + 0.25f_c$$

dove  $f_b$  è la resistenza a compressione del blocco,  $f_{mr}$  è la resistenza a compressione della malta e  $f_c$  è la resistenza a compressione della parte riempita.

## 2.3 RESISTENZA A COMPRESSIONE E TAGLIO

La resistenza della muratura a compressione e taglio è importante se posta in relazione con quella offerta, nelle costruzioni, dalle forze laterali. Diverse prove sono state condotte su pannelli di muratura soggetti a questo tipo di carico per stabilire i valori limite da usare nel progetto e nella fig. 2.3 ne sono riportati alcuni esempi tipici.

E' stata così trovata una legge simile a quella di Coulomb che pone in relazione la resistenza a taglio e la tensione di compressione partendo da una resistenza al taglio iniziale dipendente dall'adesione fra i blocchi e la malta; tale valore iniziale viene poi incrementato con una componente di attrito proporzionale alla tensione di compressione. Tutto ciò può essere espresso dalla formula:

$$\tau = \tau_0 + \mu\sigma_c$$

dove  $\tau_0$  è la resistenza a taglio a compressione nulla,  $\mu$  è l'apparente coefficiente d'attrito e  $\sigma_c$  è la tensione verticale di compressione.

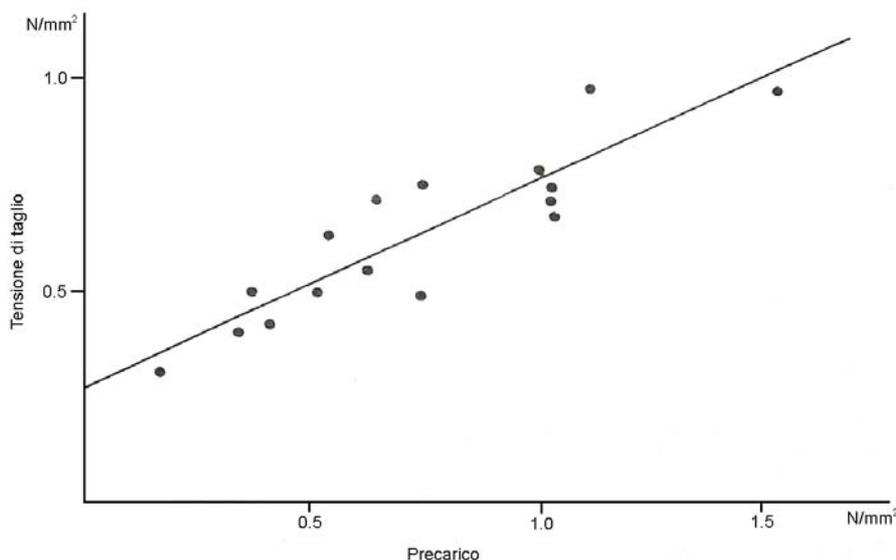


fig. 2.3- Tipico legame costitutivo fra resistenza a taglio della muratura e compressione verticale ottenuto da risultati di prove sperimentali [5]

Questa relazione è verificata sperimentalmente sino ad un certo valore limite della tensione verticale oltre il quale la rottura dei giunti rappresentata dall'equazione di Coulomb è sostituita dalla fessurazione degli elementi. Per gli elementi in laterizio questo limite è circa  $2.0 \text{ N/mm}^2$ . La resistenza al taglio dipende in particolare dalla resistenza della malta. Per la muratura con blocchi di resistenza a compressione fra  $20$  e  $50 \text{ N/mm}^2$ , disposti con una malta forte ( $1:\frac{1}{4}:3$ ) il valore di  $\tau_0$  è approssimativamente pari a  $0.3 \text{ N/mm}^2$ , mentre per le malte a media resistenza ( $1:1:6$ ) si ha un valore pari a  $0.2 \text{ N/mm}^2$ . Il valore medio di  $\mu$  è compreso fra  $0.4$  e  $0.6$ .

La resistenza al taglio indicata in precedenza rappresenta un valore medio per muri che hanno un rapporto altezza/lunghezza  $\geq 1.0$  e la resistenza del muro è calcolata sulla sezione piana del muro nel piano della forza di taglio.

Ciò significa che, se un muro incontra altri muri ad angolo retto in direzione della forza di taglio, l'area dei muri di risvolto non viene considerata nel calcolo della resistenza a taglio del muro.

## 2.4 RESISTENZA A TRAZIONE

### 2.4.1 Resistenza a trazione diretta

Le tensioni di trazione diretta possono sorgere nella muratura come risultato di sollecitazioni nel piano. Queste possono essere causate dal vento, da carichi gravitazionali eccentrici, da movimenti per variazione di umidità, da movimenti per dilatazioni termiche o da cedimenti delle fondazioni.

La resistenza a trazione della muratura risulta bassa e variabile e perciò, generalmente, non se ne tiene conto nel progetto strutturale.

Tuttavia, è essenziale che ci sia una certa adesione fra malta ed elementi che conduca allo sviluppo di una malta aderente dalla quale dipende in gran misura la resistenza a trazione.

Il meccanismo di adesione blocco-malta non è completamente compreso, ma è noto che per avere un'elevata adesione non conviene che la sabbia presente nella malta sia molto fine.

Nel caso di muratura con mattoni in laterizio, il contenuto di umidità del mattone al momento della posa è importante: gli elementi molto asciutti e quelli completamente saturi, portano entrambi ad una resistenza con adesione bassa. Ciò è illustrato in fig. 2.4, dove vengono mostrati i risultati delle prove di trazione per adesione in base al contenuto di umidità degli elementi considerando sia quelli essiccati al forno o completamente saturi.

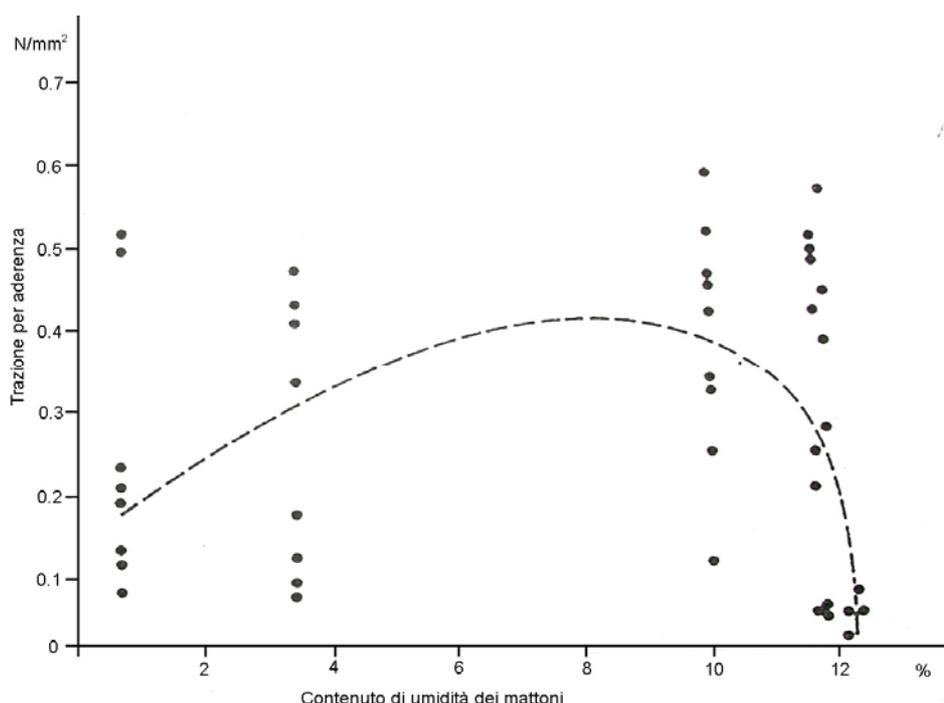


fig. 2.4 – Variazione dell'adesione fra elementi e malta in funzione del contenuto di umidità (mattoni in laterizio) al momento della posa [5]

Questo diagramma indica anche la grande varietà di resistenza a trazione per aderenza e suggerisce che è di solito elevata per un contenuto di umidità pari a circa tre quarti della completa saturazione.

La resistenza massima a trazione diretta della muratura è di circa  $0.4 \text{ N/mm}^2$ , ma la variabilità dei risultati illustrati in fig. 2.4 deve essere tenuta in considerazione, e quindi i valori di resistenza a trazione diretta devono essere utilizzati nel progetto con grande cautela.

### **2.4.2 Resistenza a trazione per flessione**

I pannelli di muratura di tamponamento nelle costruzioni, oppongono resistenza alla pressione laterale del vento con le risorse di resistenza a flessione. Una certa stabilità deriva dallo stesso peso del muro ma, generalmente, questo è insufficiente per un'efficace resistenza alla forza del vento. Perciò è necessario fare affidamento sulla resistenza a trazione per flessione della muratura.

Gli stessi fattori che influenzano la resistenza a trazione diretta per aderenza, discussi nel precedente paragrafo, si applicano alla resistenza a trazione per flessione.

Se un muro è vincolato solo alla base ed alla sommità, la sua resistenza laterale dipenderà dalla resistenza a trazione per flessione che si sviluppa attraverso i giunti di malta orizzontali. Se la parete è anche sostenuta ai lati verticali, la resistenza laterale dipenderà anche dalla resistenza a flessione della muratura in direzione ortogonale ai giunti di malta orizzontali. La resistenza in questa direzione è circa tre volte più grande di quella attraverso i giunti di malta orizzontale. Se l'adesione fra blocchi-malta è buona, il diagramma della resistenza nella direzione parallela ai giunti sarà limitato dalla resistenza a trazione per flessione dei blocchi. Se l'adesione è bassa, questa resistenza sarà limitata principalmente alla resistenza a trazione dell'interfaccia blocco-malta nei giunti orizzontali di malta.

La resistenza a trazione per flessione della muratura di mattoni di laterizio varia da  $2.0 \text{ N/mm}^2$  a circa  $0.8 \text{ N/mm}^2$  nella direzione più resistente, e la resistenza in direzione normale ai giunti di malta è pari a circa un terzo. Come nel caso della trazione diretta, la resistenza sviluppata è dipendente dalle caratteristiche di assorbimento dei blocchi e anche dal tipo di malta usata.

La muratura di mattoni di silicato di calcio o quella con blocchi di calcestruzzo ha una bassa resistenza a trazione per flessione rispetto alla muratura in mattoni; la resistenza

della muratura di blocchi di calcestruzzo dipende dalla resistenza a compressione del blocco e dallo spessore del muro.

## 2.5 LEGAME TENSIONI-DEFORMAZIONI

La muratura è generalmente considerata un materiale linearmente elastico, benché le prove sperimentali indichino che il legame costitutivo fra tensioni e deformazioni è approssimativamente parabolico, come mostrato in fig. 2.5. Sotto le condizioni di servizio la muratura è soggetta solo ad una frazione del suo carico ultimo, e quindi l'assunzione di una curva lineare tensioni-deformazione è accettabile per le deformazioni usuali.

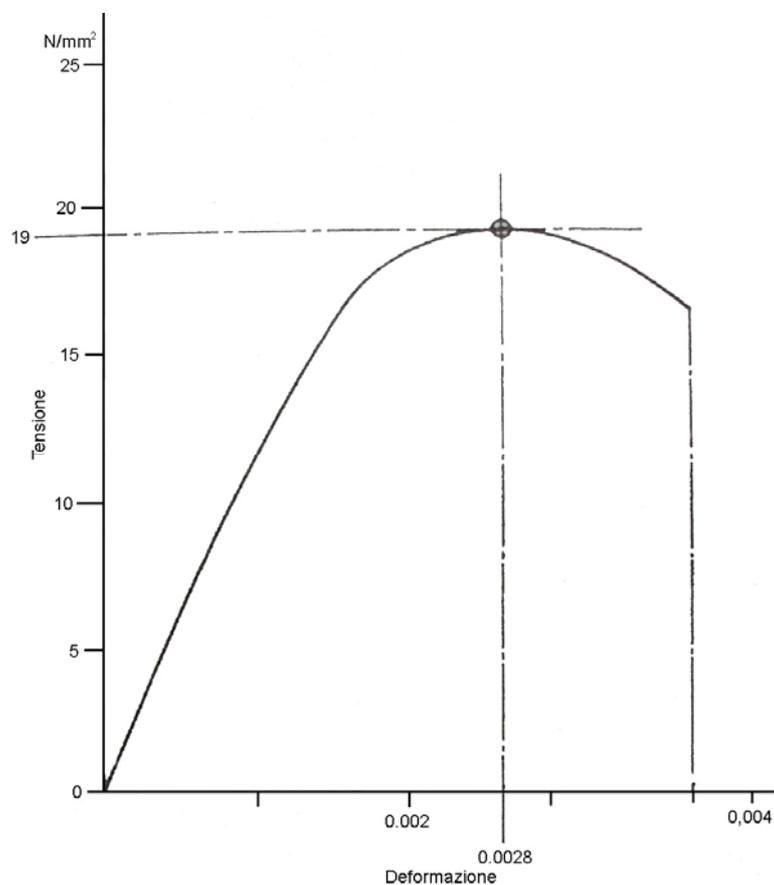


fig. 2.5- Tipica curva tensione-deformazione per muratura di mattoni [5]

Varie formule sono state suggerite per la determinazione del modulo di Young.

Questo parametro è comunque piuttosto variabile perfino per provini nominalmente identici; in modo approssimato si può assumere:

$$E = 700\sigma_c (N / mm^2)$$

dove  $\sigma_c$  è la resistenza a compressione della muratura. Questo valore è utilizzabile sino a valori di tensione pari a circa il 75% della resistenza ultima.

Per stimare le deformazioni a lungo termine dovrebbe essere usato un valore ridotto di  $E$ , in ragione di un mezzo sino a un terzo di quello dato dall'equazione sopra citata.

## 2.6 EFFETTI DELL'ESECUZIONE SULLA RESISTENZA

Come si è spesso detto la muratura occupa una fetta non irrilevante nella storia delle costruzioni, però molte delle opere realizzate in muratura non si sono avvalse di una supervisione ingegneristica come invece è avvenuto per le costruzioni in cemento armato. Non essendo perciò considerata come materiale utilizzato per strutture portanti, i coefficienti di sicurezza sono molto più alti rispetto a quelli del cemento armato. E' importante, comunque, progettare e costruire in muratura valutando gli effettivi coefficienti di sicurezza.

### 2.6.1 Difetti di esecuzione nella muratura di mattoni

#### *(a) Rottura per parziale riempimento dei giunti di letto*

E' essenziale che i letti di malta nella muratura di mattoni siano completamente riempiti. Le aperture nei giunti di malta orizzontali possono essere causate da semplice negligenza o da una pratica non corretta quale ad esempio l'esecuzione di un solco con la cazzuola al centro del letto di malta. Le prove mostrano che un incompleto riempimento dei giunti di malta può ridurre la resistenza della muratura anche del 33% [5]. Il non completo riempimento dei giunti verticali ha un effetto molto più contenuto sulla resistenza a compressione della muratura, ma comporta una riduzione della resistenza a flessione. Il non riempimento dei giunti verticali è indesiderabile anche dal punto di vista dell'isolamento termico ed acustico ed è generalmente indicativo della cura nell'esecuzione.

#### *(b) Giunti orizzontali di eccessivo spessore*

E' stato indicato in precedenza che l'incremento dello spessore dei giunti ha l'effetto di ridurre la resistenza della muratura perché genera più alte tensioni di trazione nei blocchi rispetto al caso con giunti sottili. Infatti, con uno spessore dei giunti 16-19mm si ha una

riduzione della resistenza a compressione superiore al 30% se comparata con uno spessore del giunto di 10mm[5].

*(c) Deviazione della verticalità o dell'allineamento*

Un muro che è costruito fuori piombo, che è incurvato o che è fuori allineamento rispetto al muro del piano superiore o sottostante, farà sorgere un carico eccentrico e conseguentemente una riduzione di resistenza. Si è stimato che un muro contenente un difetto di questo tipo, dell'ordine di 15-20mm, è di circa il 13-15% più debole di un muro che non presenta tale difetto[5].

*(d) Esposizione ad avverse condizioni atmosferiche dopo la posa in opera*

Una muratura giovane dovrebbe essere protetta da condizioni di eccessivo riscaldamento o da condizioni di raffreddamento eccessivo finchè la malta non ha raggiunto la maturazione.

Un'eccessiva perdita di umidità per evaporazione o per esposizione ad elevate temperature può impedire la completa idratazione del cemento con un conseguente insuccesso nello sviluppo della normale resistenza della malta. Per tale motivo, la resistenza del muro può essere ridotta del 10%[5].

L'azione del ghiaccio invece può causare lo spostamento del muro dall'asse verticale e la conseguente riduzione di resistenza.

Un'appropriata cura può essere ottenuta coprendo il lavoro con dei teloni di polietilene e, se è particolarmente freddo, può essere anche necessario riscaldare i materiali prima della posa in opera.

*(e) Rottura per regolazione dell'assorbimento dei blocchi*

Un difetto può sorgere se muri snelli sono costruiti usando blocchi altamente assorbenti. La ragione di ciò è illustrata nella fig. 2.6, la quale suggerisce come un giunto di malta possa diventare a forma di <<pillola>> se i mattoni sopra di esso sono stati ruotati quando sono stati messi in opera. Se l'acqua è stata rimossa dalla malta per l'assorbimento dei mattoni, la malta può essere troppo asciutta, e ciò può impedire al giunto di recuperare la sua originale forma piatta. Il muro può risultare ovviamente privo di stabilità come risultato della forma convessa dei letti di malta e potrebbe anche essere il 50% più debole rispetto a quello che ci si aspetta considerando la resistenza degli elementi e della malta[5]. Il

rimedio principale sta nel bagnare gli elementi prima della loro posa in opera, in modo da ridurre la velocità di assorbimento sotto  $2 \text{ Kg}/\text{m}^2/\text{min}$ , e mettere della calce nella miscela della malta che permette di mantenere l'acqua opponendosi all'assorbimento dei blocchi.

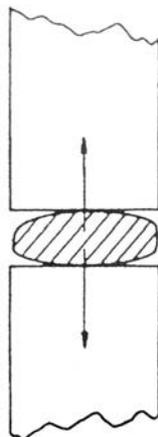


fig. 2.6 – Effetto dell'assorbimento dell'umidità dai letti di malta.  
Movimento dei blocchi dopo la posa in opera a causa di  
deformata “a pillola” dei letti di malta [5]

#### (f) *Proporzioni non corrette dei componenti nella malta*

L'effetto della resistenza della malta sulla resistenza della muratura può essere apprezzato dalla fig. 2.1 nella quale si vede che con elementi aventi una resistenza a schiacciamento di  $30 \text{ N}/\text{mm}^2$ , diminuendo la resistenza della malta da  $11 \text{ N}/\text{mm}^2$  a  $4.5 \text{ N}/\text{mm}^2$ , ci si può aspettare una riduzione della resistenza della muratura da  $4 \text{ N}/\text{mm}^2$  a  $11 \text{ N}/\text{mm}^2$ . Ciò corrisponde a un cambiamento nella miscela della malta da una proporzione di 1:3 del cemento e sabbia a 1:4.5 cioè con circa il 30% in meno di cemento nella miscela. Una riduzione della resistenza della malta potrebbe risultare anche in conseguenza di un alto rapporto acqua-cemento adottato per ottenere una miscela più lavorabile. E' perciò importante fare in modo che la resistenza della malta sia rispettata benché ci sia una certa tolleranza per tener conto dei piccoli errori di proporzionamento della miscela. L'uso eccessivo di un componente di plasticizzazione come la calce, produce una malta porosa e probabilmente debole da cui bisogna guardarsi.

#### **2.6.2 Difetti di esecuzione nella muratura a blocchi di calcestruzzo**

La muratura presenta sicuramente molti vantaggi, ma possono comunque presentarsi dei problemi nel momento in cui la muratura stessa viene sottoposta a compressione. In

particolare l'esecuzione della stessa può presentare dei difetti realizzativi che, come finora discusso, si riversano inevitabilmente sulla resistenza. Gli effetti di tali difetti sulla resistenza a compressione sono rilevanti soprattutto per la muratura di mattoni in laterizio. Alcuni inconvenienti però hanno degli effetti, se pur meno rilevanti, come nel caso di giunti eccessivamente spessi, anche sulla muratura di calcestruzzo, nei quali è ugualmente importante e necessario riempire i giunti di malta, costruire i muri con precisione in termini di verticalità, planarità ed allineamento nonché rispettare una determinata miscela o resistenza.

Al fine ultimo, poi, di una realizzazione corretta della muratura non bisogna comunque tralasciare la protezione di questa dagli agenti atmosferici.

## 2.7 MODELLI COSTITUTIVI

### 2.7.1 La muratura come materiale non omogeneo ed anisotropo

Le più importanti caratteristiche della muratura dal punto di vista del comportamento meccanico sono:

- la *disomogeneità*;
- l'*anisotropia*;
- l'*asimmetria* di comportamento
- la *non linearità* del legame sforzi-deformazioni.

La *disomogeneità* è dovuta al fatto che gli elementi e la malta di cui è costituita la muratura possono avere caratteristiche meccaniche fortemente diverse. Inoltre, spesso non è sufficiente conoscere le caratteristiche dei materiali componenti presi singolarmente per prevedere il comportamento meccanico dell'insieme, in quanto un ruolo fondamentale è giocato dall'interfaccia ovvero dall'unione fra i componenti, che per particolari fenomeni chimico-fisici tende a sviluppare un comportamento meccanico non necessariamente riconducibile a quello dei singoli componenti.

L'*anisotropia* è dovuta alla direzionalità intrinseca della muratura, legata alla forma ed alle proporzioni degli elementi ed al modo con cui vengono disposti, nonché all'eventuale presenza di fori e alla loro direzione. La quasi totalità delle murature moderne presentano

elementi regolari disposti per corsi orizzontali, con giunti orizzontali di malta continui, laddove i giunti verticali sono invece sfalsati per “legare” meglio la muratura.

L’*asimmetria* di comportamento meccanico è la diretta conseguenza del fatto che sia gli elementi, sia la malta, sia l’interfaccia malta-elemento presentano un comportamento asimmetrico nei riguardi della trazione e della compressione. Un particolare ruolo in questo fenomeno è giocato dall’interfaccia, che in molti casi presenta una resistenza a trazione più bassa e più aleatoria di quella dei singoli componenti. E’ su queste basi che la muratura viene modellata frequentemente come materiale non reagente a trazione.

Infine, la *non linearità*, che può essere vista in parte come un risultato di alcune caratteristiche sopra elencate, caratterizza in modo marcato il comportamento della muratura sia in compressione, sia in trazione.

Non è detto però che sia sempre possibile tener conto di tutte le caratteristiche sopra elencate viste le complicazioni realizzative che ne deriverebbero. Al fine dunque, di una semplificazione del progetto sul piano pratico si è soliti trascurare quelle caratteristiche che, oltre a creare delle difficoltà, non risultano strettamente necessarie.

Un particolare riferimento, a tal riguardo, è rivolto alla disomogeneità del mezzo: è possibile infatti, senza togliere eccessivamente alla muratura le proprietà di base, idealizzare il materiale come un continuo omogeneo che risulti essere “equivalente” al materiale non omogeneo di riferimento.

Un’altra caratteristica non strettamente necessaria risulta essere l’anisotropia, che viene di solito considerata in modo molto semplificato e, talvolta, trascurata. In diversi casi, in funzione del tipo di applicazione e del livello di sollecitazione, può anche essere lecito trascurare la non linearità del materiale utilizzando i modelli dell’elasticità lineare.

Si ritiene opportuno comunque sottolineare un importante conseguenza del carattere non omogeneo della muratura. Tale conseguenza consiste nella necessità di distinguere fra le grandezze meccaniche *macroscopiche* o *medie*, e le grandezze *locali*, laddove fra le grandezze di interesse si possono far rientrare in particolare gli sforzi, le deformazioni e i parametri del legame costitutivo. Nonostante questa distinzione sia stata evidenziata sin dai primi studi sulla muratura non infrequenti sono i modelli che fanno uso di grandezze medie o macroscopiche unite a criteri di rottura di tipo locale, cioè riferiti a proprietà dei singoli materiali costituenti. Recenti studi (si citano, fra altri, Papa e Nappi [6], Gambarotta e Lagomarsino, [7]) hanno cercato di affrontare il problema applicando alla muratura le tecniche sviluppate per lo studio dei materiali compositi (tecniche di omogeneizzazione). In generale l’approccio matematico all’omogeneizzazione non è unico e i diversi approcci

presentano un diverso grado di complessità matematica (si rimanda ad Anthoine [8], per una discussione dettagliata in riferimento alla muratura). La definizione di un materiale omogeneo equivalente ha senso quando il campione di materiale ha dimensioni tali per cui in esso sono contenute parecchie eterogeneità, e la dimensione delle stesse, rapportata alle dimensioni del campione, è quindi molto piccola. Indicando con  $\eta$  la dimensione relativa delle eterogeneità rapportata alle dimensioni del campione, il campo locale di sforzo  $\sigma^\eta$  e di deformazione  $\varepsilon^\eta$  nel corpo eterogeneo sarà dipendente dalla dimensione relativa delle eterogeneità  $\eta$ . Definendo come  $\sigma^0$  e  $\varepsilon^0$  i campi di sforzo e deformazione del materiale omogeneo equivalente, risulta naturale cercare di definire il materiale equivalente in modo che valgano le seguenti uguaglianze:

$$\sigma^0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sigma^\eta$$

$$\varepsilon^0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon^\eta$$

Gli sforzi e le deformazioni del materiale omogeneo equivalente assumono il significato di sforzi medi o macroscopici. Nella muratura, la definizione di quale fra i componenti (malta o elementi) debba essere considerato come “eterogeneità” è abbastanza arbitraria, tuttavia si comprende come:

- l’uso di grandezze macroscopiche abbia senso quando si considerano campioni di muratura sufficientemente grandi in rapporto alle dimensioni dei mattoni o dei blocchi, e con gradienti di sforzo macroscopico non eccessivamente elevati;
- salvo casi particolari, lo stato tensionale e deformativo macroscopico, non coincide con gli stati tensionali o deformativi nella malta e negli elementi.

Risulterà evidente a questo punto della discussione come operazioni relativamente semplici e consuete, quale l’interpretazione di una prova di compressione su un prisma di muratura, si basano su una più o meno dichiarata operazione di omogeneizzazione del materiale.

## Capitolo 3

# Prove e controlli su murature esistenti

### 3.1 INTRODUZIONE

L'intervento di conservazione di un edificio storico, qualunque sia il suo valore architettonico e/o artistico, è, in generale, tanto più appropriato, quanto più profonda è la conoscenza della costruzione, dalla sua evoluzione dall'origine allo stato odierno, dai materiali, alle tecniche costruttive ed alla struttura portante.

Le esperienze maturate negli ultimi decenni nel campo della conservazione e del recupero dell'edilizia storica mettono in evidenza la necessità di disporre, oltre che della conoscenza visiva, anche di adeguate tecniche di valutazione delle sue caratteristiche costruttive e dell'effettivo stato di danno della struttura, prima di adottare qualsiasi tecnica di intervento. Questa necessità vale anche nel caso di interventi preventivi (ad es. in zona sismica) contro eventi eccezionali, ed anche quando si debbano predisporre progetti di intervento su interi centri storici o parte di essi. La fase diagnostica non è solo importante per la scelta di soluzioni appropriate, ma anche per la definizione di tempi e costi di intervento.

In molti casi gli interventi riguardano edifici lasciati per un lungo periodo in uno stato di abbandono o, comunque, senza una effettiva manutenzione.

La problematica tipica della **sicurezza strutturale** di un fabbricato esistente (in muratura come in calcestruzzo o in acciaio) è sostanzialmente collegata alla valutazione del **grado di sicurezza** che l'opera presenta nella situazione in cui si trova.

$$\text{grado di sicurezza} = \frac{\text{tensione di rottura}}{\text{tensione di esercizio}}$$

Tale grado di sicurezza può infatti essersi via via ridotto (o potrà ridursi nel tempo) a causa di:

- situazioni di degrado progressivo delle strutture;
- manifestazioni di traumi improvvisi che possano aver comportato dissesti strutturali;
- mutamenti di destinazioni d'uso;
- richiesta di adeguamento della resistenza dell'opera in relazione a prevedibili eventi futuri, anche di carattere eccezionale (per esempio "adeguamenti sismici");
- adeguamenti a nuovi criteri normativi connessi anche con particolari destinazioni d'uso.

Dall'individuazione del margine di sicurezza residuo nasce o meno l'esigenza di provvedere ad un consolidamento strutturale dell'opera (anche di antica costruzione) che non deve mai essere assunta in partenza come "scontata", ma che invece deve derivare, casomai, a seguito di una serie di operazioni conoscitive del manufatto.

Tali operazioni, tutte rivolte alla conoscenza dell'oggetto sul quale probabilmente si dovrà intervenire in tempi successivi, sono:

### **1) Indagine storica**

L'indagine storica può fornire notizie importanti sulle tipologie edilizie, sui metodi di lavorazione e sulle scelte progettuali utilizzate in fase costruttiva.

Le vicende di edificazione, la vita della struttura, precedenti interventi di restauro, perizie e giudizi sul comportamento strutturale, costituiscono tutti elementi di estremo interesse per configurare un quadro di base, dal quale partire per caratterizzare il comportamento globale della struttura.

## **2) Rilievo geometrico e tipologico**

Il rilievo architettonico costituisce una delle prime operazioni da attuare nella fase conoscitiva di qualunque manufatto.

La geometria dei tipi costruttivi, il rilievo degli elementi geometrici fondamentali (fili verticali ed orizzontali, andamento dei corsi di muratura), il rilievo delle orditure di copertura e dei solai, la tessitura delle murature, il rilievo del quadro fessurativo, forniscono un panorama di informazioni di grandissima utilità, anche relativamente all'accumulo nel tempo di spostamenti e degradi strutturali dell'opera analizzata.

## **3) Indagini sulle caratteristiche strutturali dei materiali (diagnostica)**

Costituiscono un complesso di operazioni, in genere di notevole impegno, atte ad individuare il comportamento dei materiali ai quali è demandata la funzione strutturale, nonché di constatarne i degradi, valutare le sollecitazioni in atto e determinare quindi la resistenza residua.

## **4) Analisi e verifiche statiche**

È il lavoro conclusivo, sul quale convergono tutti i dati raccolti nelle prime fasi, dalla sintesi delle quali deve emergere la risposta ai seguenti due quesiti:

- 1.) *quale sicurezza offre l'opera nella situazione in cui si trova ?*
- 2.) *è necessario un intervento di consolidamento strutturale ?*

Tale studio richiede una approfondita conoscenza delle caratteristiche meccaniche dei materiali, studio che si presenta poi particolarmente difficile nel caso di murature in laterizio e pietra, le quali implicano in genere una marcata eterogeneità, essendo costituite da materiali di elevate caratteristiche meccaniche, alternati a strati di malta con caratteristiche decisamente più scadenti.

Nella fig.3.1 sono riportate le possibilità fornite all'operatore nella scelta del tipo di modello di calcolo strutturale, da quello elastico-lineare a quello non lineare o agli stati limiti, nell'ipotesi che si disponga di soddisfacenti informazioni provenienti dall'indagine conoscitiva.

Dato che ogni indagine ha un costo, da un punto di vista sia temporale sia soprattutto economico, è importante che ogni singola operazione sia progettata adeguatamente per le finalità richieste; l'indagine diagnostica non deve essere considerata come una confusa e generica richiesta di prove, ma, al contrario, deve

essere programmata e gestita accuratamente, in conformità alle esigenze di conoscenza dell'edificio.

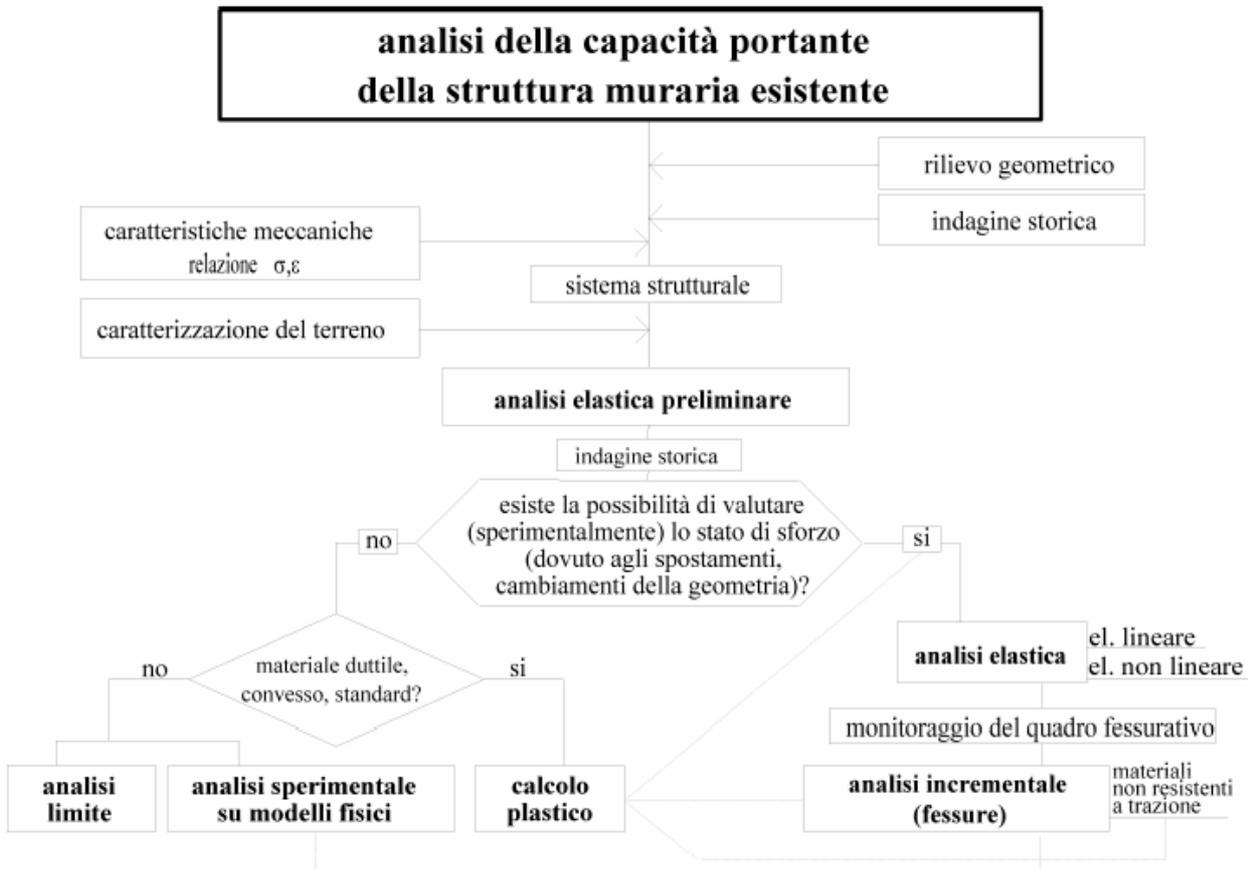


Fig.3.1 – Schematizzazioni delle fasi delle analisi numeriche su edifici esistenti [9]

### 3.2 PROCEDURE DI INDAGINE PER LA DIAGNOSI

Negli ultimi 15 anni sono state proposte molte tecniche di indagine; la tendenza è quella di utilizzare, nel modo più diffuso possibile, tecniche diagnostiche di tipo non distruttivo (ND) o leggermente distruttivo. Tuttavia, al momento solo per poche sono possibili correlazioni dirette tra i risultati delle tecniche non distruttive, generalmente di tipo qualitativo, ed i parametri quantitativi di comportamento strutturale della muratura.

Ove possibile, sarebbe opportuno affiancare alle prove tramite tecniche di tipo non o leggermente distruttivo, alcune prove eseguite tramite tecniche di tipo distruttivo, le quali però, risultano più invasive

Nella fig. 3.2 si riassume il legame tra alcune prove e le finalità delle indagini. In particolare, segnala i tipi di informazione ricavabili dalle varie prove effettuate in situ ed in laboratorio e come queste possano costituire dati di ingresso per eventuali indagini strutturali.

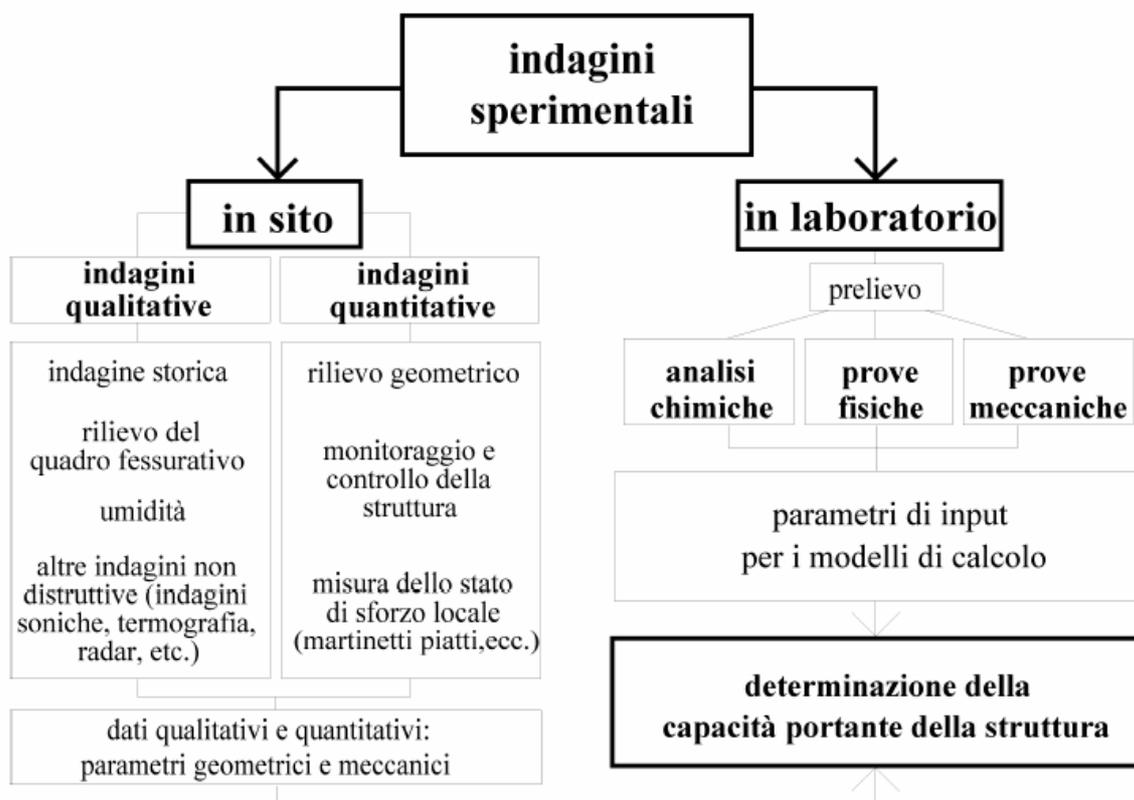


Fig. 3.2 – Finalità dell'indagine sperimentale e dell'analisi strutturale [9]

Nei casi in cui il progetto dell'indagine sia disponibile, le conclusioni delle prove sperimentali e numeriche forniscono un'affidabile valutazione dello stato di conservazione della struttura. La verifica dell'integrità strutturale o della capacità portante di un edificio in muratura coinvolge diversi aspetti:

1. la valutazione del coefficiente di sicurezza (per esempio, prima e/o dopo un terremoto, o in seguito ad eventi eccezionali come uragani, incendi, ecc.);
2. cambi d'uso o ampliamenti dell'edificio;
3. valutazione dell'efficienza delle tecniche di riparazione applicate alla struttura o ai singoli materiali
4. monitoraggio del comportamento dei materiali e della struttura per lunghi periodi.

Il diagramma di fig. 3.3 rappresenta schematicamente alcune tra le più frequenti problematiche nelle indagini diagnostiche sperimentali e i campi di azione delle singole tecniche.

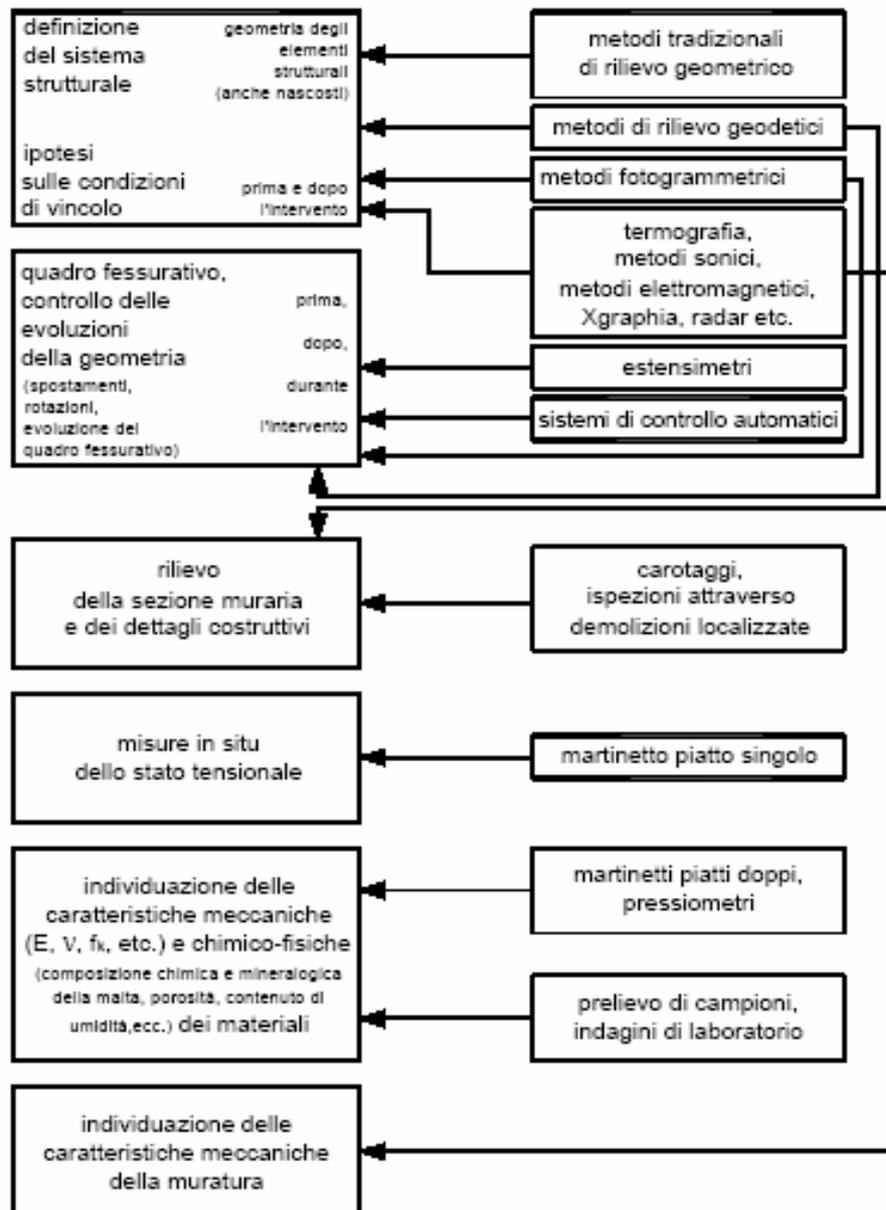


Fig.3.3 – Informazioni richieste e corrispondenti tecniche di indagine [9]

### 3.2.1 Rilievo geometrico e rilievo del quadro fessurativo

Un rilievo geometrico preliminare è essenziale nelle operazioni diagnostiche, perché fornisce dettagli strutturali ed identifica elementi su cui eventualmente concentrare indagini più accurate.

Seguendo le tracce generali del primo rilievo, l'indagine può essere condotta in forma più raffinata localmente, controllando irregolarità, deviazioni della verticalità o rotazioni.

Questa fase deve essere accompagnata contemporaneamente da una analisi

dell'evoluzione storica della struttura, per giustificare eventuali discontinuità, disomogeneità o eventuali danneggiamenti osservati sulla struttura.

L'analisi storica può fornire importanti notizie generali e/o di dettaglio.

Il rilievo del quadro fessurativo è di fondamentale importanza per l'identificazione dell'assetto strutturale dell'edificio. Infatti, l'interpretazione delle lesioni può consentire la comprensione dello stato di danno della struttura, ma anche le sue possibili cause e condiziona la scelta del tipo di indagine da eseguire successivamente e la localizzazione di prove più dettagliate.

In alcuni casi, gli stati di danno possono essere studiati ed interpretati per analogia dei quadri fessurativi e distribuzione delle lesioni, con quelli di casi noti.

### 3.2.2 Prove di laboratorio

La fase di prelievo di campioni di materiale per le prove di laboratorio deve essere svolta in modo da bilanciare le esigenze di significatività dei risultati e l'esigenza di non distruttività del campionamento.

La stessa tecnica di prelievo è importante; infatti, il campione prelevato, deve essere il più possibile non disturbato per essere effettivamente rappresentativo della situazione in situ.

L'estrazione di questi campioni può essere realizzata mediante:

- **carotaggi**, con macchine carotatrici ad avanzamento manuale che forniscono provini cilindrici di diverso diametro e lunghezza (fig.3.4);



Fig.3.4 – Esecuzione di carotaggio su struttura in muratura

- **taglio** - secondo piani ortogonali - di provini prismatici di dimensioni corrispondenti ad alcuni corsi della tessitura;
- **taglio e successiva imbracatura** di contenimento (per limitare il rilassamento del provino e la modifica delle sue caratteristiche di deformabilità), di provini di grande dimensione, possibilmente da pareti da demolire.

Si tratta di tecniche di prelievo piuttosto sofisticate ed onerose, che non sempre forniscono campioni "indisturbati". La conseguenza più grave di quest'ultimo aspetto, non sempre controllabile, è la scarsa attendibilità per sottostima, delle caratteristiche meccaniche ottenute su campioni alterati durante la fase di prelievo.

La metodologia di campionamento dipende direttamente dalle caratteristiche del singolo materiale. In linea generale, possono essere espressi alcuni principi guida:

1. il prelievo deve essere condotto nel rispetto dell'integrità dell'edificio;
2. la quantità di materiale prelevato deve essere compatibile con lo scopo della prova e le richieste in termini di affidabilità della tecnica sperimentale;
3. se il fine delle prove è la caratterizzazione e la verifica dell'estensione del danno, il prelievo di materiale deve essere effettuato su diverse parti dell'edificio; in questo modo è possibile individuare l'eventuale presenza di vari tipi di degrado;
4. il campionamento deve riguardare porzioni dell'edificio non soggette all'azione della pioggia o a precedenti riparazioni, specialmente se il fine dell'indagine è la caratterizzazione dei leganti e degli aggregati delle malte;
5. il numero di campioni deve essere sufficientemente alto, perché il risultato sia statisticamente significativo e rappresentativo della condizione della muratura.

Data la difficoltà di campionamento di prismi di muratura di dimensioni significative, generalmente il prelievo interessa solo singoli elementi (malta, pietre o mattoni) o assemblaggi di limitate dimensioni.

Le finalità di queste prove possono essere molteplici. Possono interessare:

- la caratterizzazione dei materiali da un punto di vista chimico fisico o meccanico;
- l'individuazione dell'origine stessa del materiale, per impiegarne di simili nell'intervento di riparazione;
- la conoscenza della composizione della muratura;
- la misura del degrado e della durabilità o comunque della resistenza ad agenti aggressivi di nuovi materiali da impiegare nel restauro.

Riporto qui di seguito alcune prove di laboratorio usualmente effettuate per la caratterizzazione, da un punto di vista meccanico, dei materiali costituenti la muratura, nonché su campioni stessi di muratura, esse sono:

**a) per il materiale lapideo:**

- **prova di resistenza a compressione assiale**, rispetto all'asse del provino cilindrico, che a seconda della direzione di carotaggio (orizzontale, verticale o inclinata) può non coincidere con l'asse di sollecitazione della muratura in opera (fig.3.5);



Fig.3.5 - Prova di compressione su carota

- **prova di resistenza a trazione indiretta (brasiliiana);**
- **prova di trazione diretta;**
- **determinazione del modulo elastico E e del coefficiente di Poisson  $\nu$ ;**
- **prove di qualificazione fisica del materiale** (peso specifico apparente e reale, permeabilità, ecc.);

**b) per la malta:**

- **prova di resistenza a compressione assiale;**
- **prova di resistenza a taglio diretto** del giunto di malta compreso tra i due mattoni, (con la quale si determinano i parametri di resistenza, l'angolo di attrito interno e la coesione).

Le prove di laboratorio, usualmente effettuate sui provini di muratura di dimensioni relativamente grandi (almeno aventi dimensioni pari allo spessore del muro in direzione trasversale ed a 2/3 conci in direzione longitudinale e verticale) tanto da essere rappresentativi dei comportamenti meccanici della muratura, sono:

- prova di resistenza a compressione assiale;
- determinazione dei moduli apparenti di elasticità assiale E e tangenziale G del sistema di muratura.

Questi campioni, come detto, devono essere sufficientemente rappresentativi del comportamento medio globale della struttura, per cui ci si trova spesso nella necessità di sottoporre a prove meccaniche campioni di muratura di notevoli dimensioni, che non sempre possono essere prelevati dalle strutture murarie.

Nel caso di edifici di interesse storico e monumentale è solitamente impensabile il prelievo anche di campioni di piccole dimensioni.

Nel caso di murature a sacco è impossibile estrarre o carotare materiale indisturbato.

L'esigenza quindi di caratterizzare in modo corretto la muratura attraverso prove meccaniche di tipo distruttivo su campioni rappresentativi, trova un ostacolo spesso insuperabile nelle difficoltà del prelievo.

A tal fine può quindi risultare molto interessante pensare di eseguire una campagna di indagini di tipo “**non distruttivo**” in sito.

### **3.2.3 Indagini non distruttive su murature**

*Per indagini non distruttive si intendono l'insieme dei metodi di individuazione, di prova e di controllo, eseguiti in cantiere sull'intero edificio o su parti di esso, che non arrecano alcun danneggiamento al manufatto o che arrecano un danneggiamento locale solitamente accettato.*

Molte delle prove che nel settore dell'edilizia tradizionale vengono comunemente considerate come non distruttive, non risultano tali se applicate al settore monumentale per il quale sono necessari livelli più elevati di attenzione.

D'altra parte una prova che preveda un prelievo di materiale, non necessariamente è da considerarsi distruttiva: un prelievo per carotaggio è certamente invasivo nel caso di una

parete affrescata, mentre può non esserlo se effettuato su una muratura di non particolare rilevanza storica.

Le tecniche non distruttive (ND) possono essere impiegate con diverse finalità:

1. individuazione degli elementi strutturali nascosti, come strutture di solai, archi, pilastri, ecc.
2. qualificazione della muratura e dei materiali componenti, individuando zone non omogenee nella muratura, come per esempio l'uso di differenti mattoni nello stesso edificio;
3. valutazione dell'estensione del danno meccanico in strutture fessurate;
4. individuazione del degrado superficiale;
5. verifica delle proprietà meccaniche e fisiche di malte, mattoni o pietre;
6. controllo di alcune tecniche di riparazione (iniezioni, ristilatura dei giunti).

I più comuni controlli non distruttivi applicabili alle murature sono:

- ENDOSCOPIA
- TERMOGRAFIA
- MARTINETTI PIATTI
- RESISTENZA ALLO SCORRIMENTO
- PROVE SONICHE / ULTRASONICHE
- INDAGINI SCLEROMETRICHE
- PROVE DI PENETRAZIONE
- PROVE DI PULL-OUT
- GEORADAR

Tali prove hanno avuto negli ultimi tempi uno sviluppo notevole, grazie agli enormi progressi avuti nel campo della strumentazione e dei software.

Pertanto oggi rappresentano un supporto indispensabile per il controllo di strutture in muratura.

### 3.2.3.1 ENDOSCOPIA

*L'endoscopio è uno strumento utilizzato per visionare cavità altrimenti inaccessibili all'osservazione diretta.*

Possono essere di tipo rigido ("boroscopi") o di tipo flessibile, con il vantaggio di poter visionare anche cavità con andamento non rettilineo (fig.3.6), ed hanno diametri da qualche centimetro a pochi millimetri.

Sono costituiti da un sistema ottico che può essere di tipo tradizionale (a prismi e gruppi ottici che trasportano l'immagine dall'obiettivo all'oculare esterno) o da un sistema a fibre ottiche. Sono dotati di un sistema autonomo di illuminazione dell'area ispezionabile, e di un sistema di riferimento per la stima dimensionale dell'oggetto inquadrato.

Di norma all'oculare dell'endoscopio, sia esso a fibre ottiche, sia tradizionale, è sempre applicabile la macchina fotografica o una videocamera.

**Utilizzo:** L'endoscopio, soprattutto nella versione a fibre ottiche, è uno strumento assai utile per effettuare una serie di verifiche nel corso di indagini non distruttive, in quanto con fori di diametro inferiore al centimetro, è possibile controllare ed ispezionare condutture, intercapedini, strutture nascoste, sezioni di murature, carotaggi.

**Limiti:** Sono sostanzialmente legati alla profondità di indagine, che è chiaramente limitata dalla lunghezza dello strumento (i flessibili arrivano fino a qualche metro di profondità, ma esistono endoscopi particolari con lunghezze d'indagine anche di alcuni metri), e dal fatto che se l'indagine non è localizzata ma viene condotta in grosse cavità, l'illuminazione perde la sua efficacia.



Fig.3.6 – Endoscopio flessibile utilizzato per la visione interna di un foro di carotaggio

### 3.2.3.2 TERMOGRAFIA

*Il termografo è uno strumento in grado di misurare a distanza la temperatura dei corpi, senza alcun contatto fisico tra l'apparecchiatura di misura e la superficie investigata.*

Ogni materiale emette con continuità energia sotto forma di radiazioni elettromagnetiche, in maniera proporzionale alla sua temperatura superficiale, a sua volta funzione della conducibilità termica e del calore specifico.

Differenze tra i valori di questi parametri, relativi ai diversi componenti di una muratura (pietre, mattoni, malta) portano i componenti stessi ad assumere temperature differenti.

L'esempio più tipico è quello di una struttura composta da mattoni e pietre (queste ultime caratterizzate da una conducibilità termica più elevata del laterizio, e da un calore specifico generalmente più basso): in seguito al riscaldamento dovuto all'irraggiamento solare, le pietre raggiungeranno rapidamente una temperatura maggiore dei mattoni, e viceversa, una volta terminato l'irraggiamento, si raffredderanno più velocemente dei mattoni adiacenti.

Lo schema di funzionamento è il seguente: una camera ad infrarossi trasforma le radiazioni termiche emesse dall'oggetto investigato, in segnali elettrici, che vengono riportati su un monoscopio e convertiti in immagini monocromatiche o in falso colore, in funzione della temperatura superficiale.

**Utilizzo:** La tecnica termografica si è dimostrata assai utile e flessibile nella diagnostica; essa può essere applicata con successo nelle seguenti indagini:

- rilievi sulla morfologia delle strutture nascoste: forme preesistenti, modifiche strutturali ed anomalie costruttive (ad esempio aperture tamponate), presenza di cavità;
- rilievi del degrado: stato fessurativo, rilievo dell'umidità, dispersioni termiche;
- controlli in fase di intervento: visualizzazione continua dei percorsi preferenziali del materiale iniettato in operazioni di consolidamento, ed immediata segnalazione del formarsi di sacche e di distacchi.

Tali indagini sono praticamente le uniche (assieme ai controlli radar) praticabili su pareti affrescate.

**Limiti:** L'apparecchiatura termografica è delicata e piuttosto costosa; l'interpretazione delle immagini richiede esperienza e preparazione specifica, tenendo conto che le condizioni al contorno possono a volte portare ad interpretazioni errate.

### 3.2.3.3 MARTINETTI PIATTI

La tecnica è stata originariamente applicata per determinare in situ i livelli di sforzo nella muratura. Successivamente il metodo è stato calibrato per rilevare le caratteristiche di deformabilità della muratura stessa. Già dalle prime applicazioni su monumenti storici [10], sono apparse chiaramente le notevoli potenzialità del metodo.

Si tratta di una tecnica, forse l'unica disponibile al momento, in grado di fornire informazioni attendibili sulle principali caratteristiche meccaniche di una struttura muraria in termini di deformabilità, stato di sforzo e resistenza.

Si parlerà più approfonditamente di tale tecnica nel capitolo 4.

### 3.2.3.4 RESISTENZA ALLO SCORRIMENTO (taglio $\tau$ )

In parallelo alla prova con i martinetti piatti, utilizzando un apposito pistone cilindrico, sempre in opera, si determina la resistenza allo scorrimento della muratura (taglio  $\tau$ ) in presenza di carichi verticali.

La prova consiste nel verificare la forza occorrente per far scorrere i provini (mattoni) della muratura, nel piano dei giunti di malta orizzontale ed in presenza del carico verticale precedentemente misurato (fig. 3.7).

Nelle zone sismiche questa metodologia di prova è ampiamente utilizzata quando si interviene su murature esistenti, al fine di misurare i reali comportamenti in presenza di forze di taglio.

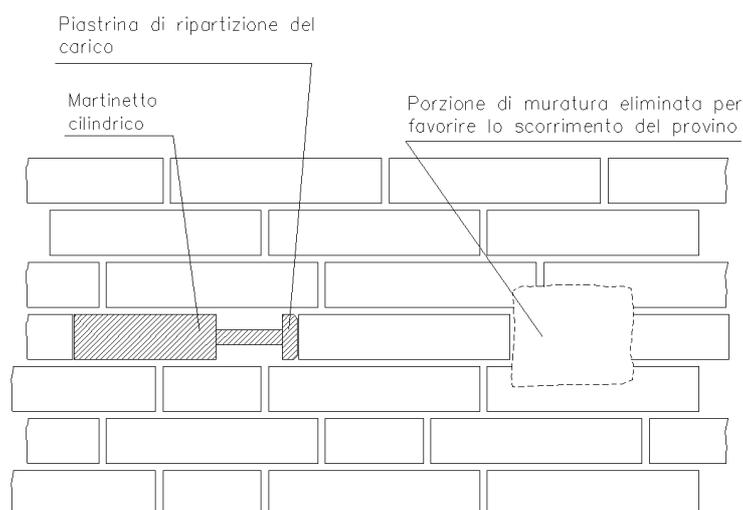


Fig. 3.7 - Schema rappresentativo della prova di taglio su una muratura

### 3.2.3.5 PROVE SONICHE/ULTRASONICHE

*Queste indagini consistono nel misurare ed analizzare le caratteristiche di propagazione delle onde elastiche all'interno dei solidi murari.*

Scopo delle prove è:

- Verificare l'omogeneità di un elemento strutturale;
- Valutare qualsiasi mutamento delle proprietà dei materiali a causa di fenomeni di degrado;
- Esaminare i difetti in elementi strutturali (cavità, fessurazioni, strati superficiali danneggiati, ...).
- Stimare l'ordine di grandezza della resistenza dei materiali utilizzati.

La strumentazione di prova (fig.3.8) è costituita da:

- una sorgente di emissione di onde elastiche (martello strumentato, vibrodina elettromagnetica o ad aria compressa);
- un captatore dell'energia sonora (velocimetro, accelerometro);
- un'apparecchiatura di rilevazione e registrazione dei segnali.

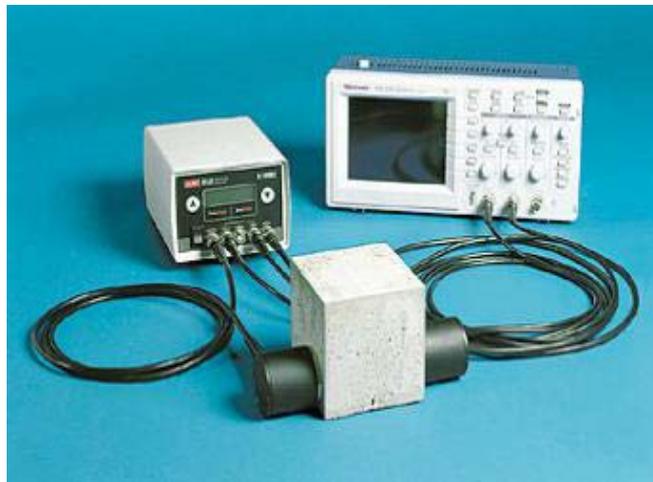


Fig.3.8 – Strumentazione ad ultrasuoni

Le prove soniche sono basate sulla misura del tempo di propagazione di un impulso meccanico tra la sonda trasmittente e la sonda ricevente. Tale velocità dipende dall'elasticità e dalla resistenza del materiale: maggiore è la velocità, maggiore sarà il modulo elastico e quindi la resistenza, essendo infatti causa di un ritardo del segnale la presenza di vuoti o eterogeneità del materiale in esame.

La velocità delle onde elastiche in un mezzo omogeneo, isotropo e perfettamente elastico, è legata al modulo elastico dinamico  $E_d$ , dalla seguente relazione:

$$E_d = v^2 \cdot d \cdot \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$$

dove:

$E_d$  = modulo di elasticità dinamico in Pa ( $N/m^2$ )

$v$  = velocità dell'onda in m/s

$\nu$  = modulo dinamico di Poisson

$d$  = densità del mezzo in  $kg/m^3$

Nel suo propagarsi l'onda elastica perde energia, e ciò è dovuto ad una diminuzione dell'intensità legata alla legge di propagazione dell'onda di tipo sferico, mentre un'altra diminuzione avviene alle interfaccia tra discontinuità, dove l'energia viene in parte riflessa ed in parte rifratta.

E' così possibile misurare il tempo di propagazione dell'onda (e nel contempo verificare frequenze ed attenuazioni), calcolare la velocità conoscendo la distanza reciproca tra la sonda trasmittente e la sonda ricevente, e risalire quindi al modulo elastico dinamico.

Sperimentazioni condotte su edifici in pietra hanno fornito valori della velocità variabili entro ampi limiti: da 1200 m/s per l'inferiore a 2500 m/s per il superiore, con medie intorno ai 1700 m/s. Il valore di 1400 m/s viene poi considerato come soglia al di sotto della quale si è in presenza di un fenomeno di degrado delle murature.

Queste misure vengono solitamente eseguite per trasparenza (ossia con emettitore e captatore posizionati su due punti speculari delle facce della muratura), secondo una maglia regolare.

I moduli elastici dinamici che si ricavano da questa relazione sono di valore superiore a quelli ottenibili con prove statiche, e si discostano sempre più man mano che si passa da un mezzo perfettamente omogeneo ed isotropo, ad uno disomogeneo ed anisotropo.

**Utilizzo:** Il principale utilizzo del metodo consiste nella possibilità di estendere, mediante misure di confronto, le valutazioni ottenute con le prove di tipo statico, ricavando informazioni qualitative sulle variazioni delle caratteristiche elastiche.

Un secondo utilizzo consiste nel valutare l'incremento di densità delle muratura durante un intervento di consolidamento, potendo quindi formulare un giudizio sulla riuscita o meno dello stesso.

Un ultimo utilizzo è legato alla stima della resistenza a compressione delle murature, applicando la seguente formula:

$$R_{compressione} = E_d / 1250$$

la quale fornirebbe valori approssimati del 10÷15%

**Limiti:** I limiti della metodologia sono sostanzialmente legati alla variabilità di valori che si ottengono nelle strutture in muratura a causa dell'estrema varietà mineralogica, tipologica e tecnologica presente in esse. Una ulteriore causa di indeterminatezza è poi legata alla possibile alterazione della misura indotta dalla presenza di alte percentuali di umidità nel materiale.

Tali cause consentono quindi solo una valutazione di tipo qualitativo dei parametri meccanici: notevoli errori possono essere infatti compiuti qualora si pretenda di utilizzare le sole misure soniche per una valutazione quantitativa di detti parametri.

#### 3.2.3.6 INDAGINI SCLEROMETRICHE

*Scopo della prova è la valutazione della resistenza locale e della qualità superficiale delle murature.*

Pur non avendo nel campo delle indagini su edifici in muratura l'importanza che rivestono nelle strutture in c.a., le indagini sclerometriche forniscono utili elementi di conoscenza.

Lo sclerometro è essenzialmente costituito da una massa in acciaio che viene lanciata, (grazie ad una molla posta in tensione), contro la superficie da investigare. La massa rimbalzando, trasporta con sé un indicatore che scorre su una scala graduata

Il valore di rimbalzo risulta essere in relazione con l'elasticità del materiale ed implicitamente con la sua resistenza.

**Utilizzo:**Tali indagini forniscono l'indice di durezza della superficie di muratura, che risulta essere indicativo del degrado superficiale e della bontà del legame tra i conci e la malta. Si utilizza quindi l'indagine sclerometrica per procedere velocemente alla mappatura delle zone di distacco tra i materiali, e, nei paramenti a sacco, per verificare l'unione tra muratura esterna e riempimento, o per stimar, tramite curva di taratura dello strumento, la resistenza.

**Limiti:** Sono sostanzialmente legati alla limitata profondità d'indagine che riguarda solo gli strati superficiali.

Per ottenere dei valori significativi è poi necessario provvedere preventivamente alla rimozione degli intonaci ed alla regolarizzazione superficiale delle zone di prova.

### 3.2.3.7 PROVE DI PENETRAZIONE

Le prove di penetrazione, da svolgere con differenti apparecchiature, si basano su correlazioni tra la profondità di penetrazione di sonde e le proprietà meccaniche del materiale. In realtà la correlazione diretta con la resistenza delle malte è quasi sempre impossibile. Da qui nasce anche la difficoltà di effettuare una calibrazione adeguata delle prove.

### 3.2.3.8 PROVE DI PULL-OUT

La prova di pull-out, utilizzata particolarmente per mattoni e pietre, è raramente impiegata per studiare giunti di malta, tranne nel caso di giunti alti.

### 3.2.3.9 GEORADAR

Il georadar è nato come metodo non invasivo di esplorazione geofisica, tecnica di acquisizione ed elaborazione dati per l'individuazione di superfici sepolte. Sviluppato per localizzare oggetti sepolti come cavità, tubi, tunnel e miniere. Solamente in un secondo momento (alla fine degli anni '80) la tecnica georadar inizia ad essere utilizzata anche per localizzare e definire strutture archeologiche sepolte e le associate unità stratigrafiche.

La tecnica georadar si basa sulla trasmissione di impulsi elettromagnetici ad alta frequenza, ad intervalli di tempo regolari e sulla misura del tempo trascorso tra la trasmissione e la ricezione in superficie degli impulsi stessi man mano che le antenne sono trascinate lungo la linea di rilievo.

Un'antenna trasmittente emette il segnale, quindi l'onda si propaga nel mezzo indagato, e, quando incontra una discontinuità, parte di essa è riflessa e parte trasmessa subendo variazioni di velocità di propagazione che dipendono dalle caratteristiche fisiche, elettriche e magnetiche degli strati attraversati. Dalla misura del tempo di viaggio di un impulso, se la velocità di propagazione nel mezzo indagato è nota, la profondità di interfacce nascoste può essere stimata in maniera accurata.

## Capitolo 4

# Prove con martinetti piatti

### 4.1 INTRODUZIONE

La tecnica di prova dei martinetti piatti è stata messa a punto dall'ISMES sul finire degli anni '70, prendendo spunto dalle metodologie applicate allo studio del comportamento meccanico degli ammassi rocciosi.

Il primo utilizzo in ambito strutturale è avvenuto durante la campagna di indagini condotta sul Palazzo della Ragione a Milano, nell'anno 1979 [11].

Da quella prima applicazione, la tecnica, ormai diffusa in tutto il mondo e normata da ASTM (raccomandazioni sviluppate negli Stati Uniti nel 1991) e da RILEM (raccomandazioni europee del 1990), ha subito con il passare degli anni notevoli miglioramenti e sviluppi, cosicché oggi può essere considerata come una delle metodologie di indagine quantitativa delle caratteristiche meccaniche di murature in laterizio e pietra, più affidabili.

Tale metodologia consente di:

- misurare lo stato di sollecitazione esistente nelle murature;
- valutare il modulo elastico in direzione verticale e orizzontale;
- stimare la resistenza a compressione della muratura;
- stimare la resistenza al taglio.

I martinetti piatti utilizzati sono realizzati mediante sottili lamine d'acciaio (di spessore circa 0.6 mm) saldate sul contorno, ed hanno spessori inferiori al centimetro (solitamente intorno ai 3/5 millimetri).

Hanno forme e dimensioni varie, per adattarsi ad ogni tipologia di muratura ed a ogni sezione strutturale.

Le forme più utilizzate sono le seguenti:

- quadrato 120x120x5 mm o rettangolare 120x240x5, utilizzate nel caso di elementi strutturali con dimensioni limitate come pilastri, colonne, archi;
- rettangolare 200x400x5, da adottarsi su murature regolari con giunti di malta tra corso e corso;
- semicircolare 350x275x3, da impiegarsi su murature irregolari.

Nella fig.4.1, vengono riportate alcune tipologie:

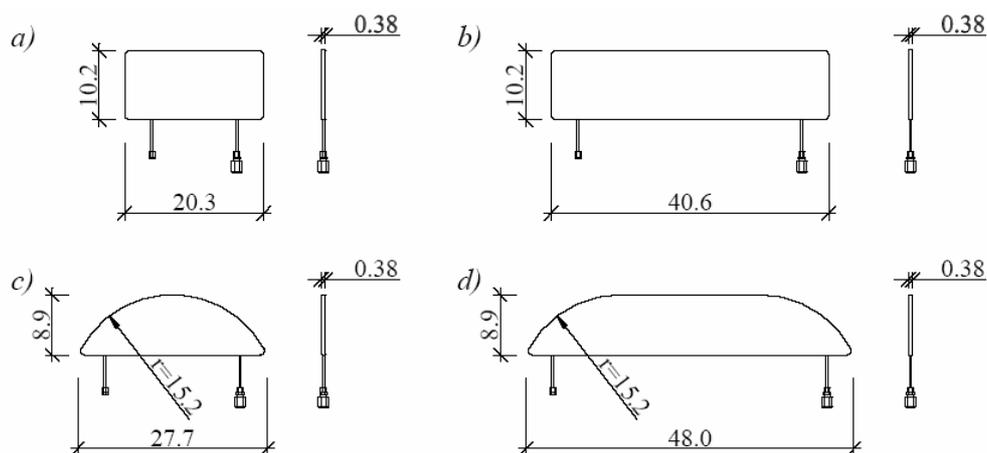


Fig. 4.1 – Ddifferenti configurazioni di martinetti [12]

La strumentazione di misura e le attrezzature di carico sono estremamente semplici, e la loro rapida installazione permette di eseguire una prova con martinetto semplice o doppio in circa 4/5 ore.

## 4.2 DESCRIZIONE DELLA PROVA

Il metodo di prova, in origine applicato per rilevare lo stato di sforzo agente localmente nelle strutture murarie in situ, venne in seguito esteso alla determinazione delle caratteristiche di deformabilità.

Da tenere presente, che in entrambe le prove, quella con martinetto singolo e quella con martinetto doppio, la pressione esercitata dal martinetto sulla muratura è considerata uniformemente distribuita sull'area di contatto. Ciò non è del tutto vero a causa delle asperità presenti sulla superficie della muratura prodotte nella fase di taglio.

A causa di tali asperità ci saranno dei punti della superficie in cui le lamine di acciaio non saranno a diretto contatto della muratura, a causa dell'elevata rigidità della lamina di acciaio, e quindi si avranno punti in cui nasceranno delle concentrazioni di sforzo (fig.4.2).

Tale problema può essere ridimensionato nel caso in cui al posto delle tradizionali lamine di acciaio, si usassero delle lamine in gomma (Flat-jack Rubber), le quali avendo una rigidità nettamente inferiore a quelle di acciaio, si adattano maggiormente alla superficie sagomata, quindi l'ipotesi di pressione uniforme aumenterebbe di validità, inoltre in tal caso il coefficiente  $K_m$  del martinetto, che dipende dalla sua geometria e dalla sua rigidità, si avvicina maggiormente ad 1 come mostrato nelle figg. 4.3 e 4.4.

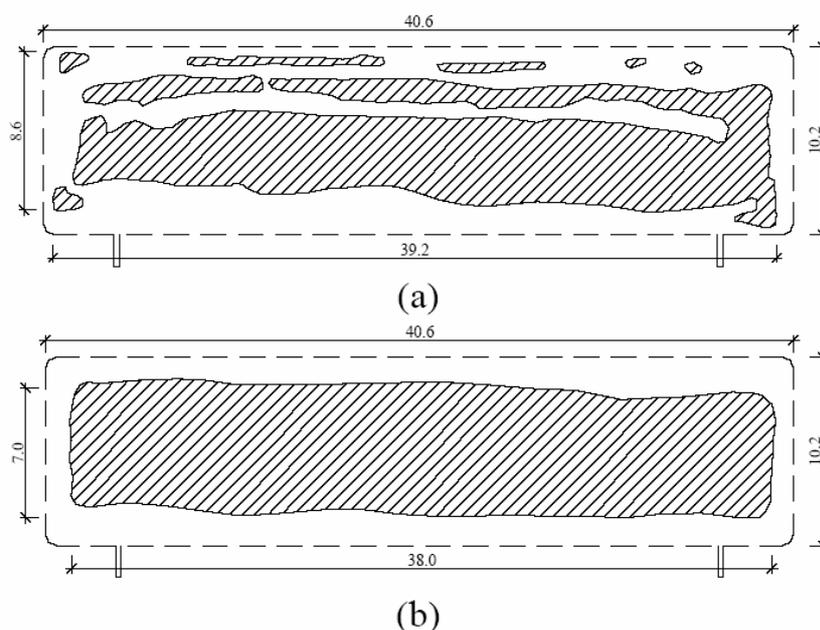


Fig. 4.2 – Contorni di contatto.

Nella figura 4.5 viene mostrato un esempio dei contorni di pressione generati sulla superficie dal martinetto piatto. Si può notare da questa figura che utilizzando un martinetto con lamine in gomma la distribuzione di stress generata risulta più uniforme.

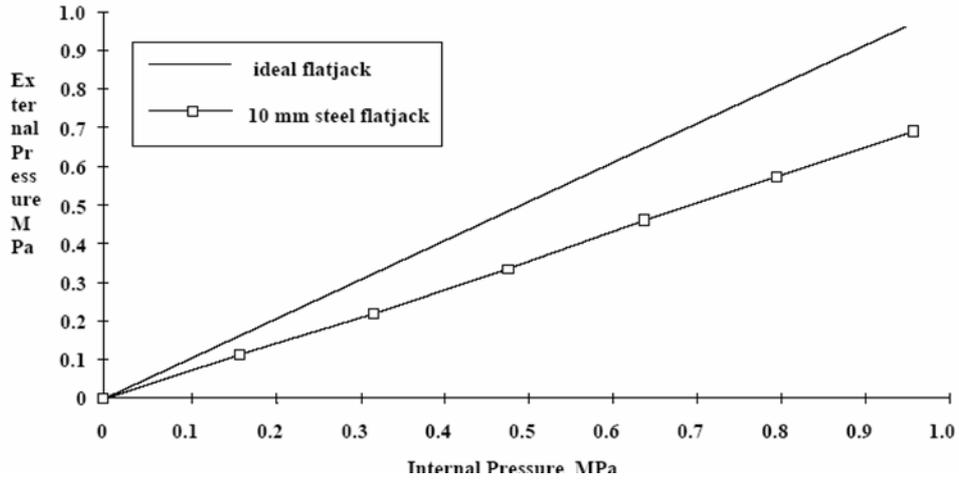


Fig. 4.3 – Curva di calibrazione per steel flat-jack

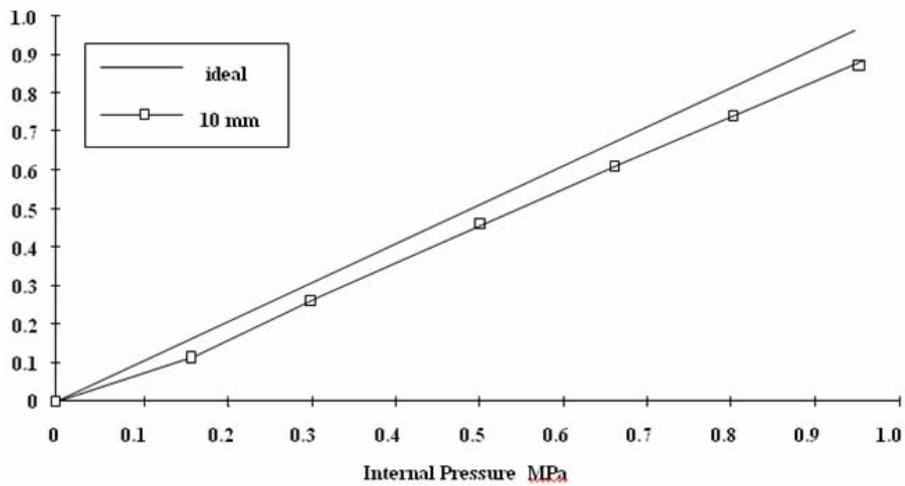


Fig. 4.4 – Curva di calibrazione per rubber flat-jack

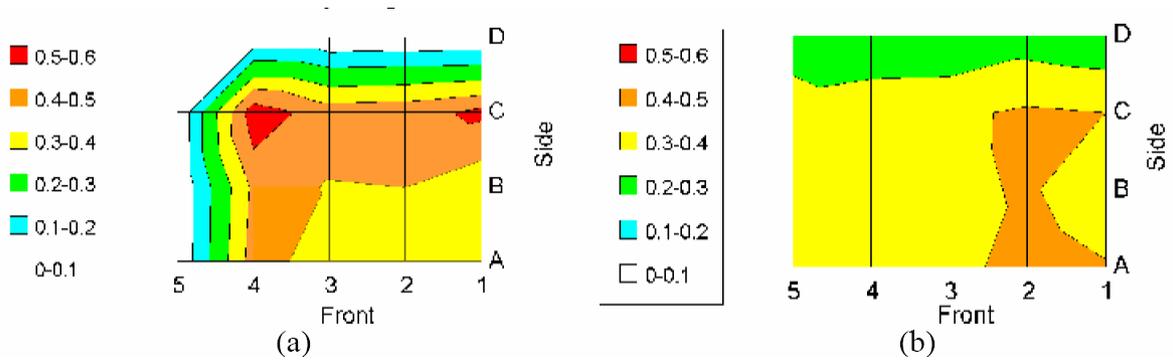


Fig. 4.5 - Pressure Contours for: (a) Steel Flat-jack and (b) for Rubber Flat-jack [13].

#### 4.2.1 Prova con martinetto singolo

Tale indagine, consente di misurare lo stato di sollecitazione locale, esistente in un punto della struttura muraria, in base al rilascio tensionale causato da un taglio piano, eseguito normalmente alla superficie della muratura, generalmente praticato lungo un corso di malta (fig.4.7).

Il valore dello stato di sforzo è calcolato come segue secondo la ASTM D 4729 – 04 [14]:  
“continuare ad esercitare la pressione finchè si ottengono le distanze originali. La deviazione media ammissibile dalla distanza originale non dovrebbe essere maggiore di  $\pm 0,0005$  in micron o  $1/20$  della massima deviazione originale. Nessuna singola deviazione dovrebbe essere  $>\pm 0,0010$  in micron o di  $1/10$  della deviazione massima.

*Prove per le quali questi limiti sono superati devono considerarsi non valide”.*

Nella fig. 4.6 vengono riassunte le fasi della prova. Prima cosa da fare è applicare, con resina sulla superficie della muratura, a cavallo della zona che sarà interessata dal taglio, tre coppie di basi di riferimento; vengono quindi misurate preventivamente le tre distanze, con un estensimetro meccanico rimovibile (fig. 4.6b).

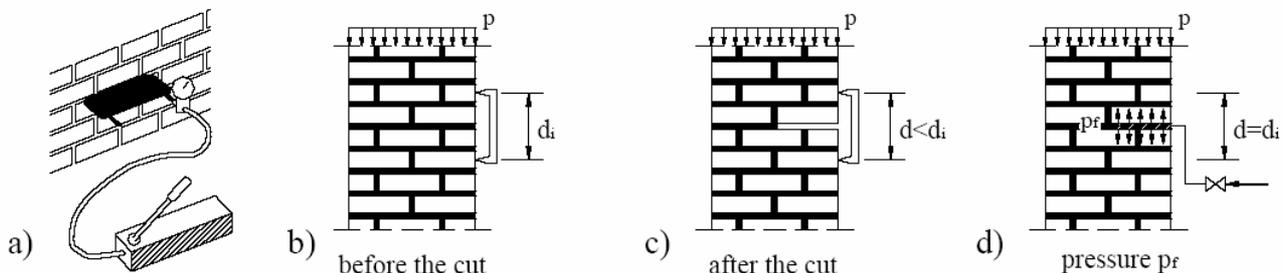


Fig. 4.6 – Fasi della prova con martinetto piatto

Viene quindi praticato il taglio perpendicolarmente alla superficie (mediante serie di fori paralleli eseguiti con trapano se in presenza di un giunto di malta, o mediante sega circolare a disco diamantato se in presenza di muratura irregolare), il quale provoca un rilascio delle tensioni con conseguente chiusura parziale della fessura praticata (fig.4.6c).

Si inserisce il martinetto piatto (fig 4.6a), lo si collega alla pompa dell'olio e si inizia ad aumentare la pressione all'interno del circuito, fintanto che non si sia annullata la deformazione in precedenza misurata (fig.4.6d): *in tale condizione la pressione interna del martinetto letta al manometro, è uguale in prima approssimazione, alla sollecitazione presente nella muratura in direzione normale al piano del martinetto stesso.*

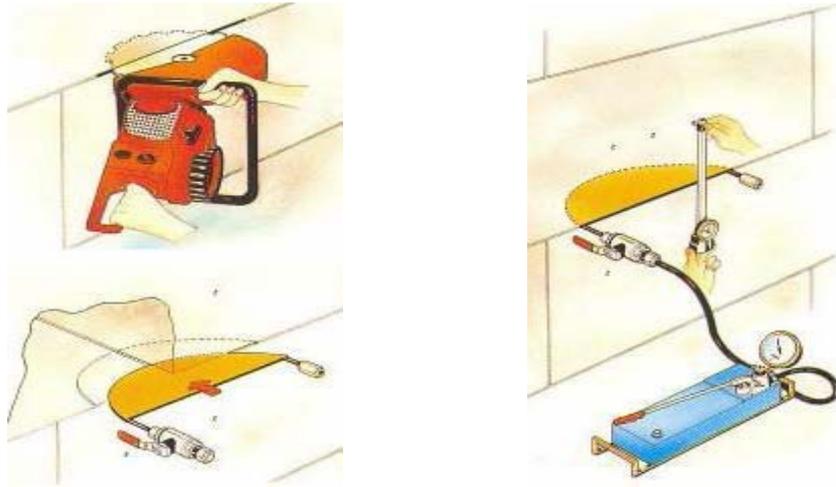


Fig. 4. 7 - Apparecchiatura per la prova di martinetto semplice

Il valore ricavato deve poi essere corretto per tener conto della rigidità intrinseca del martinetto (dovuta al bordo di saldatura presente sul contorno), e per tener conto della "superficie utile" dello stesso (rapporto tra l'area del martinetto e l'area del taglio, necessariamente maggiore per problemi d'inserimento), tali correzioni vengono effettuate attraverso due costanti adimensionali, rispettivamente  $K_m$  e  $K_a$ .

Il riferimento a  $K_m$  va precisato che esso non risulta costante, ma varia al variare della pressione del martinetto e a seconda dell'estensione da questo raggiunta durante la prova, pertanto vanno effettuate periodicamente delle procedure di calibrazione [15].

Ne risulta così che il valore di sollecitazione  $\sigma$ , di compressione, nella muratura è uguale a:

$$\sigma = p \cdot K_a \cdot K_m$$

dove:

$p$  = pressione letta al manometro

$K_m$  = costante del martinetto (varia tra 0.8 e 0.95), determinata mediante prove di taratura di laboratorio, dipende dalla geometria e dalla rigidità del martinetto

$K_a$  = rapporto tra l'area del martinetto e l'area del taglio (valore sempre < 1)

Al termine della prova il martinetto può essere rimosso e la muratura può essere facilmente "restaurata".

Le prove con martinetti a volte comportano la perdita dello strumento, anche se nella maggior parte dei casi il recupero è possibile.

Nel caso di installazione fissa, il martinetto viene cementato nella fessura e servirà al rilevamento a medio e lungo termine delle misure di pressione nel punto di installazione, utili per una fase di monitoraggio della struttura.

#### 4.2.2 Prova con martinetto doppio

Consente la valutazione delle caratteristiche di deformabilità e di resistenza delle murature.

Per fare ciò, vengono inseriti nella muratura due martinetti piatti ad una distanza di circa 50/60 cm, e tra essi vengono applicate le tre coppie di basi di riferimento per la misura delle deformazioni assiali (fig. 4.8).

Vengono collegati entrambi i martinetti alla pompa dell'olio, e viene iniziata la messa in pressione del circuito: in questo modo viene eseguita una prova di compressione mono-assiale su un campione di grandi dimensioni, sufficientemente rappresentativo del comportamento globale della struttura ed "indisturbato".

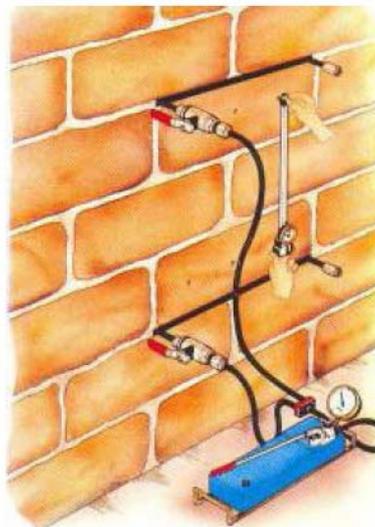


Fig. 4. 8 - Apparecchiatura per la prova di martinetto doppio

Vengono eseguiti alcuni cicli di carico e scarico (incrementando gradualmente la sollecitazione) per determinare i valori del modulo di deformabilità a vari livelli di carico (fig 4.9).

Il modulo d'elasticità E si può quindi calcolare come:

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

dove:

$\Delta\sigma$  = intervallo di carico considerato

$\Delta\varepsilon$  = deformazione assiale corrispondente

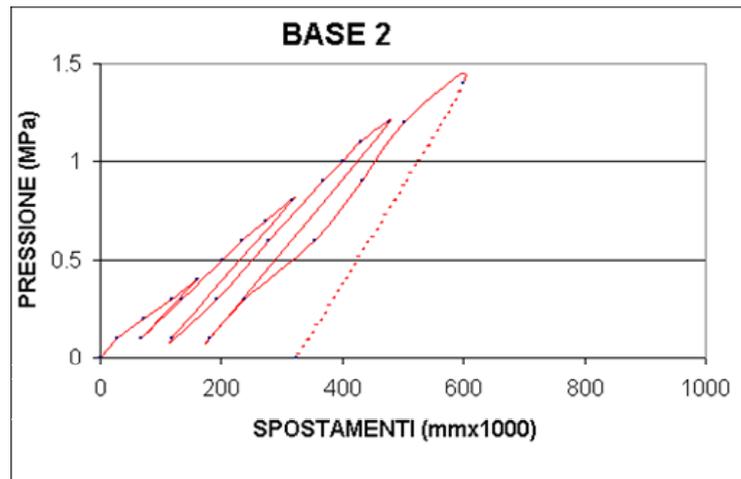


Fig. 4.9 - Esempio di curva pressione/spostamento rilevata durante una prova di carico eseguita con martinetti doppi

Il valore di carico può essere incrementato fino alla comparsa delle prime fessurazioni ottenendo così il valore della tensione di prima fessurazione.

Per provini realizzati in laboratorio, rappresentativi della muratura in sito, il valore di carico può essere incrementato anche fino al collasso del provino, determinando così la resistenza ultima a compressione.

Il rapporto tra la tensione limite così determinata e il valore della tensione d'esercizio, individuata con la prova del martinetto piatto singolo, fornisce un coefficiente di sicurezza relativo al maschio murario in esame.

Lo scopo della prova è quello di:

- distinguere la fase essenzialmente elastica da quella caratterizzata da deformazioni irreversibili;
- individuare il modulo elastico della muratura
- individuare la tensione di prima fessurazione;
- individuare la tensione di collasso del blocco murario.

Il valore della pressione effettivamente applicata alla muratura viene definito mediante la seguente formula:

$$\sigma = p \cdot K_m \frac{A_m}{A_t}$$

dove:

$p$  = pressione erogata dai martinetti

$K_m$  = valore medio dei 2 coefficienti di taratura dei martinetti

$A_m$  = area del martinetto

$A_t$  = valore medio delle 2 aree di taglio

Per l'esecuzione delle prove di deformabilità devono essere utilizzati solo i martinetti di dimensioni maggiori, in quanto l'esperienza ha dimostrato che quelli con dimensioni medio-piccole, sovrastimano notevolmente il modulo elastico.

#### 4.2.3 Valutazione della resistenza a taglio

È possibile ottenere ulteriori informazioni sottoponendo contemporaneamente la muratura ad una tensione tangenziale e ad una compressione verticale. I dati ottenuti sono particolarmente significativi nel caso di verifiche relative a strutture in zona sismica.

La prova prevede l'utilizzo di un martinetto idraulico di ridotte dimensioni in grado di esercitare spinte orizzontali su una parte del prisma soggetto a compressione. Estratto un mattone (in una zona laterale rispetto al prisma soggetto a compressione) si posiziona nel vano risultante un martinetto a pistone di ridotte dimensioni. Quest'ultimo agisce contro il mattone adiacente (già soggetto a compressione) inducendo una sollecitazione tangenziale nella malta di allettamento. Notiamo che il mattone prescelto deve essere preventivamente isolato rimuovendo la malta dei giunti verticali, sia dietro che lateralmente (vedi fig. 37). Mantenendo costante, a diversi livelli, la tensione verticale di compressione, viene incrementata la forza laterale in modo da ottenere una tensione tangenziale nella malta e quindi uno scorrimento del mattone.

La tensione tangenziale viene valutata come  $T = T/2A$  dove  $T$  è la forza applicata ed  $A$  è l'area del mattone.

È possibile pertanto determinare il valore dell'angolo di attrito interno e il valore della

coesione della malta, riferiti alla resistenza a taglio, ottenendo relazioni del tipo:

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg}(\phi)$$

Questa relazione può essere ottenuta sia per valori di "picco" che per valori "residui" della tensione tangenziale, vale a dire prima e dopo l'inizio dello scorrimento.

Nei casi in cui sia possibile, risulta molto più rapido adottare uno o più martinetti piatti, inseriti nei due tagli verticali, anche per esercitare la spinta laterale. Questa modalità di prova, proposta recentemente dal Prof. Jurina del Politecnico di Milano, è stata sperimentata nel borgo-cantiere di Laino Castello.

La prova consiste nell'isolare completamente una porzione di muratura, di dimensione circa 40x80cm, e di applicare poi dei sistemi di forza sia verticali che orizzontali mediante 6 martinetti piatti, 2 orizzontali e 4 verticali (fig. 4.11). L'obiettivo è quello di valutare, al variare della tensione verticale, la resistenza a taglio della muratura.

In particolare, una volta effettuati i 2 tagli orizzontali nella muratura, inseriti i martinetti piatti e posizionate le basi di misura, si procede mantenendo costanti il valori della tensione verticale (nei martinetti 1-2) e applicando una azione tangenziale attraverso l'azione di una delle due coppie di martinetti verticali (3-4 oppure 5-6). Al generico ciclo, fissata la tensione verticale, una delle due coppie verticali di martinetti laterali viene rimossa, l'altra invece viene utilizzata per incrementare la tensione tangenziale. Alla fine del ciclo generico, quando cioè la muratura ha superato la resistenza di picco, si incrementa la tensione verticale e si inserisce la seconda coppia di martinetti verticali, assenti nel ciclo precedente (fig.4.10). In sostanza al crescere della sollecitazione verticale si alterna la direzione di spinta orizzontale e si valuta l'incremento di resistenza a taglio. La tensione verticale viene controllata con una pompa collegata alla coppia di martinetti 1 e 2.

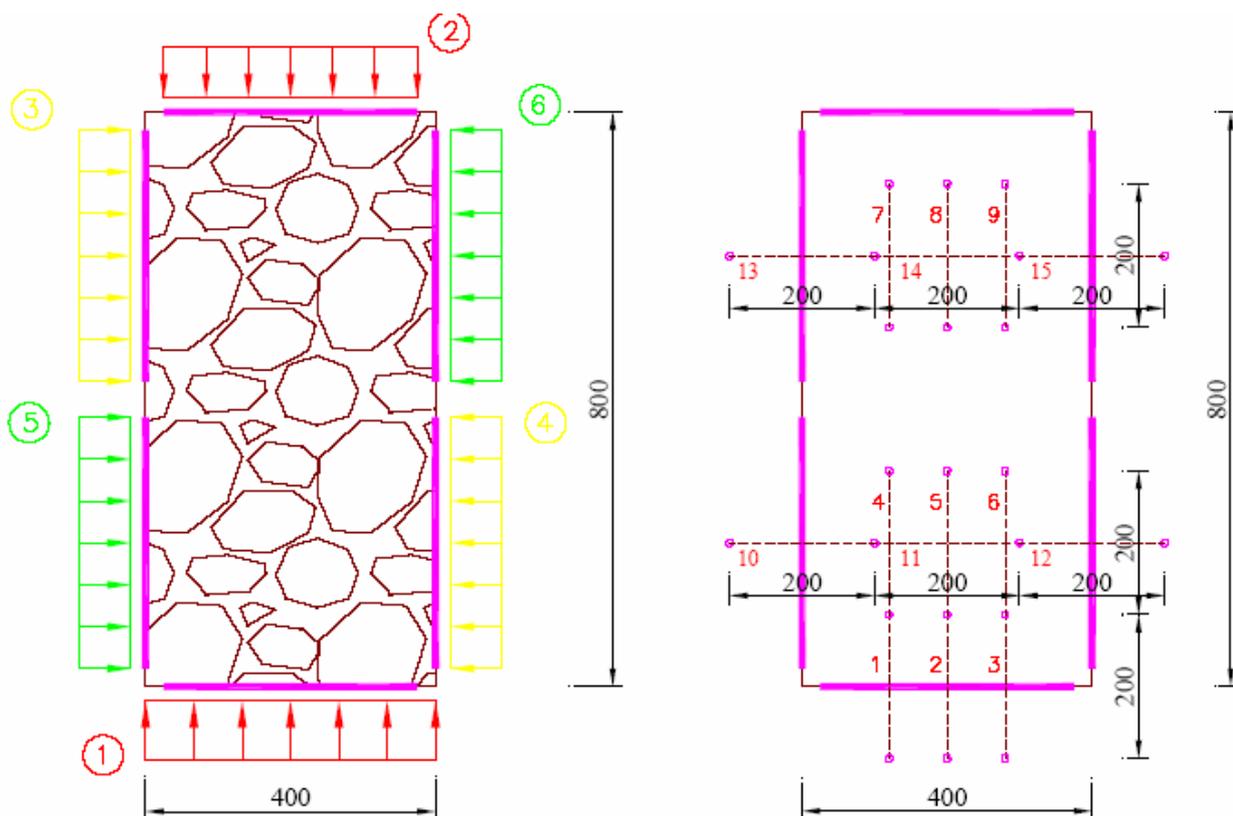


Fig. 4.10 - Prova con 6 martinetti piatti, geometria



Fig. 4.11 - Prova a taglio con 6 martinetti piatti

La tensione tangenziale viene incrementata attraverso un'altra pompa collegata, alternativamente, alla coppia di martinetti verticali (3-4 oppure 5-6). Le deformazioni vengono valutate attraverso letture sistematiche delle basi deformometriche con giacitura orizzontale, posizionate all'inizio della prova.

Nella fig. 4.12 sono riportati i grafici della tensione tangenziale residua al variare dello spostamento orizzontale ed è possibile verificare come al variare della tensione verticale applicata dai martinetti 1 e 2 si ottenga un aumento della resistenza a taglio con

una variazione sostanzialmente lineare.

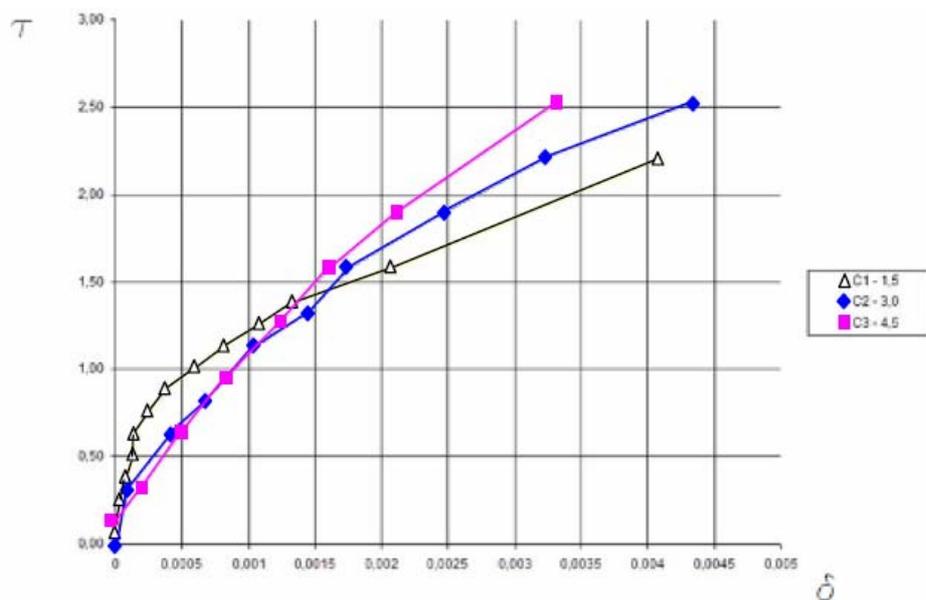


Fig. 4.12 – Prova a taglio con martinetti piatti, diagrammi  $t - \delta$

### 4.3 CRITERI PER L'ESECUZIONE DEL TAGLIO

Il taglio della muratura deve essere eseguito in maniera tale da non danneggiare le parti circostanti della muratura stessa e generalmente viene eseguito con particolari seghe (troncatrici eccentriche) a lama diamantata che producono una incisione di ampiezza leggermente superiore allo spessore del martinetto (fig 4.13).



Fig 4.13 – Troncatrice a nastro diamantato

Nelle murature di mattoni il taglio per l'inserimento del martinetto viene solitamente (ma non sempre) eseguito in corrispondenza dei corsi di malta. Nelle murature in pietra di pezzatura eterogenea l'applicazione della tecnica è complicata dalla difficoltà di individuare giunti di malta regolari.

Il taglio a secco, ma anche il taglio con raffreddamento ad acqua della lama, comporta sempre inconvenienti per lo strato di malta. Infatti, in particolari murature, per effetto del riscaldamento localizzato si possono manifestare variazioni dimensionali, mentre l'acqua usata per il raffreddamento può causare dilavamenti.

L'orizzontalità del taglio praticato può essere assicurata montando le attrezzature di taglio su appositi telai rigidi di supporto.

#### 4.4 STRUMENTAZIONE DI MISURA

In entrambe le prove, le deformazioni possono essere misurate mediante comparatori centesimali rimovibili che individuano le variazioni di distanza tra le piastrine metalliche (basi) ancorate alla muratura. Risultati più affidabili e rapidi si ottengono utilizzando trasduttori di spostamento collegati ad una apparecchiatura di registrazione automatica. Alla stessa centralina vengono collegati anche i trasduttori che rilevano la pressione dell'olio nella pompa e nei martinetti. E' possibile così ottenere, in tempo reale, i grafici di tensione-deformazione, facilitando l'interpretazione delle prove.

Riguardo alle basi per gli estensimetri, risulta certamente consigliabile disporle a metà circa di un mattone in modo da essere meno influenzati da disturbi locali.

Nella prova con martinetto singolo, ossia nella determinazione della tensione in situ, vengono generalmente usate due o tre basi estensimetriche poste a cavallo del taglio. In questo modo si ottiene una misura diretta della convergenza tra i due bordi del taglio, e del suo annullamento, quando viene imposta nuovamente la tensione in situ.

Nella prova con martinetto doppio, dove si utilizzano due martinetti, è opportuno disporre almeno tre basi estensimetriche verticali ed almeno una orizzontale, per individuare le deformazioni trasversali.

#### 4.5 ORIENTAMENTI [16]

##### 4.5.1 Difficoltà di misurazione e interpretazione

Una delle difficoltà maggiori, come per tutte le prove in situ, è l'interpretazione ed elaborazione dei risultati.

La determinazione di un valore della pressione di equilibrio è il requisito di prova fondamentale, indipendentemente dalle particolarità di ogni singola applicazione.

E' necessario quantificare l'effetto del contenimento della muratura circostante quando andiamo a determinare il modulo elastico e il carico di rottura. A tal proposito, prove condotte da Rossi [18], confermano che il modulo elastico ottenuto mediante martinetti piatti medio-grandi ( $E_m$ ) risulta molto prossimo a quello ottenuto con prove di compressione monoassiale ( $E_c$ ), parliamo di variazioni intorno all'8%, il che evidenzia la scarsa influenza del contenimento laterale; mentre utilizzando martinetti piccoli si ha una sovrastima di circa l'80% della rigidità; si ricorda che l'ASTM [14], per martinetti semicircolari, fissa errori possibili dell'ordine del 24%.

Informazioni contrastanti dovute all'effetto di concentrazioni di sforzo e/o a deformazioni anelastiche oppure ancora alla presenza di un livello di sollecitazione molto basso (per esempio in edifici di uno o due piani) richiedono una componente significativa di giudizio soggettivo, che può compromettere l'attendibilità dell'intera procedura.

#### **4.5.2 Problemi dovuti alle caratteristiche della muratura**

A causa della disomogeneità della muratura durante e dopo l'esecuzione del taglio si possono verificare distribuzioni non costanti dello stato di sforzo. Al termine della fase di taglio i valori di spostamento misurati sulle basi di misura di riferimento non sono uguali, ma tendono ad essere maggiori al centro del taglio a causa della redistribuzione dello stato di sforzo. Ci sarà quindi una concentrazione di sforzi di trazione al centro del taglio mentre valori più elevati di compressione saranno alle estremità.

Molte delle difficoltà di interpretazione e valutazione dei risultati sono dovute alle condizioni di prova e alle caratteristiche della muratura. Quando, dopo l'esecuzione del taglio, la distanza dei punti di riferimento tende a crescere, è possibile che la causa sia una sollecitazione di trazione. In tal caso la continuità della muratura deve essere ripristinata velocemente risterando con malta il giunto tagliato. La presenza di fessure o movimenti della pietra deve scoraggiare dall'eseguire la prova in quelle posizioni.

Quando il giunto è particolarmente sottile e/o il muro è di rilevante importanza storica bisogna porre attenzione alle operazioni di taglio. In queste circostanze si deve ricorrere ad una sega circolare.

In caso di giunti di malta di elevato spessore (per esempio i giunti bizantini), la scelta della posizione del taglio in entrambe le prove è molto importante. Se il giunto è di

spessore superiore a 2 cm la scelta migliore consisterebbe nell'effettuare il taglio nel corso di mattoni, ma solo se si tratta di edifici di rilievo.

Nelle murature in pietra irregolari il taglio non può essere effettuato nei giunti di malta, discontinui e poco resistenti, deve essere invece realizzato attraverso le pietre.

La scelta del punto di prova è molto importante perché l'irregolarità della muratura può influenzare molto i risultati.

#### 4.6 OSSERVAZIONI SU ALCUNI ASPETTI TECNOLOGICI DELLA PROVA

Oltre alle difficoltà intrinseche della prova e ai problemi in sé che portano la natura stessa della muratura, ci sono altre considerazioni da tener presenti:

1. la prima considerazione si riferisce alla deformabilità dei martinetti. Per ottenere tensioni uniformemente applicate alla muratura è opportuno infatti che la deformabilità sia la più elevata possibile e quindi che i martinetti siano realizzati con lamierino in acciaio, o altro materiale, di spessore il più ridotto possibile, ma in grado di contenere olio in forte pressione.
2. il rapporto tra le pressione misurata al manometro e quella effettivamente applicata alla muratura, denominato  $K_m$ , è pari mediamente a 0.92–0.98, per martinetti nuovi con saldature ben eseguite e per spessori del taglio prossimi a quelli del martinetto. Tale rapporto tende tuttavia a ridursi a seguito di un uso ripetuto del martinetto, soprattutto quando i tagli praticati sono di spessore elevato e forma non regolare. Si generano pertanto delle deformazioni irreversibili nel martinetto che obbligano la sostituzione anche frequente.
3. la precisione del taglio risulta determinante al fine di ottenere un campione indisturbato di muratura. In tale ottica, risulta più efficace l'adozione di una sega circolare a disco diamantato montata su un sostegno a colonna ad avanzamento regolabile. Al fine di ridurre il danno statico ed estetico arrecato, sarebbe opportuno ripristinare la muratura utilizzando malta additivata con prodotti antiritiro o debolmente espansivi [17].
4. riguardo alla strumentazione di misura, risultano preferibili trasduttori di spostamento collegati ad una centralina di acquisizione dati in grado di operare di continuo durante la prova.

Secondo Jurina [17], sarebbe opportuno estendere la fase di lettura delle misure

anche al periodo di esecuzione delle operazioni di taglio.

Questo, però, implica la impossibilità di effettuare letture di spostamento a cavallo del taglio. Per ovviare a ciò è possibile misurare invece, separatamente, gli spostamenti assoluti di punti posti sia sopra che sotto il taglio, mediante trasduttori piuttosto lunghi, circa 40-50cm.

Una disposizione minima, per ottenere adeguata quantità di informazioni, prevede l'utilizzo di 6 trasduttori, 3 sopra e 3 sotto il taglio, con il vantaggio di poter interpretare separatamente i risultati della zona superiore (che risulta soggetta ad una debole trazione al termine del taglio) e, quelli della zona inferiore (sempre compressa). Questo tra l'altro consente di non dover spostare alcun sensore passando dalla prova con singolo martinetto a quella con doppio martinetto. Sarebbe opportuno comunque utilizzarne in numero maggiore data la frequenza di anomalie che costringono a scartare talune delle letture.

5. a causa dell'anisotropia del materiale e della presenza del confinamento laterale, per una corretta determinazione del modulo elastico verticale e del coefficiente di Poisson è necessario effettuare una analisi dei risultati che tenga conto della impedita deformabilità trasversale. Questo è possibile sia mediante prove sperimentali condotte in laboratorio, sia mediante il confronto con un modello numerico che simuli la situazione esaminata. In questo modello vengono fatti variare i parametri di deformabilità del materiale fino a trovare quelli che al meglio giustificano i risultati sperimentali. (si tratta di una tecnica di "back analysis")  
Rispetto a quanto descritto, una semplice variante consiste nel praticare i due tagli orizzontali e successivamente anche due *tagli verticali*, in modo da delimitare un prisma quasi totalmente isolato dal contorno murario.

Il collegamento rimane presente, infatti, solo sulla faccia più nascosta, parallela alla superficie esterna. Questa variante elimina pressoché totalmente l'effetto del contenimento laterale e quindi fornisce risultati più facilmente interpretabili in quanto più prossimi a quelli ottenibili da prove monodimensionali. È evidente che questa modalità di prova danneggia maggiormente il paramento murario e pertanto usualmente non viene consentita dagli organi di tutela e controllo quando si operi su edifici monumentali.

## 4.7 APPLICAZIONE PRATICA DELLA PROVA

### 4.7.1 Descrizione della struttura e punti di indagine

La struttura su cui sono state effettuate le prove è una struttura realizzata negli anni '30 ed è composta da due corpi di fabbrica:

- corpo A – edificio scolastico;
- corpo B – edificio accanto.

L'ossatura di tutti i corpi di fabbrica è a struttura mista di muratura ordinaria e telaio in cemento armato con tamponature in laterizi forati. I muri perimetrali sono tutti portanti, costruiti con mattoni bolognesi (dimensioni  $28,1 \times 13,4 \times 5,6$  cm) e malta di cemento (con giunti verticali e orizzontali di spessore medio 1,5 cm).

Nell'ambito di una campagna diagnostica commissionata dall'Amministrazione Comunale di Forlì al DISTART, è stato affidato alla ditta Boviar s.r.l. l'incarico di eseguire alcune prove con martinetti piatti sulle strutture in muratura.

In figura 4.14 è riportata la pianta del piano tipo dell'edificio scolastico preso in esame.

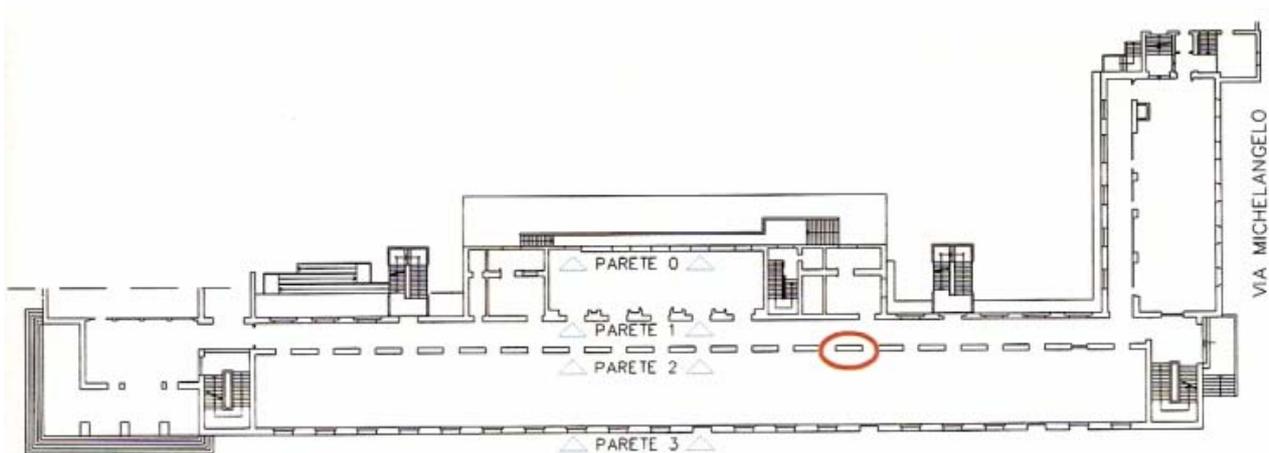


Fig. 4.14 – Pianta del piano tipo. Il cerchio rosso mette in evidenza la parete oggetto delle prove

Alcuni particolari delle pareti stonacate su cui sono state effettuate le prove sono riportati nelle figg. 4.15 - 4.17.



Fig. 4.15 – particolare della muratura di tamponatura in laterizi forati



Fig. 4.16 – Area di prova stonacata

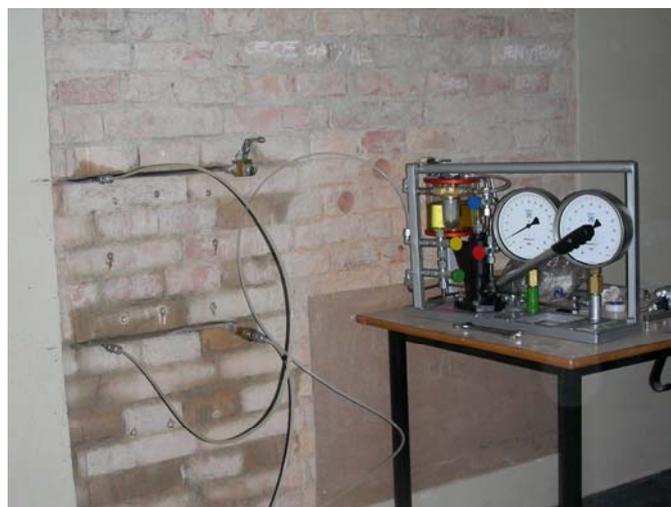


Fig. 4.17 – Area di prova e posizionamento dei martinetti

Le pareti in muratura, su cui sono state effettuate le prove, presentano i seguenti spessori:

- terzo piano: muro a tre teste – spessore 45 cm circa;
- secondo piano: muro a quattro teste – spessore 60cm circa;
- piano interrato: muro a cinque teste – spessore 75cm circa.

Le posizioni di esecuzione delle prove, con martinetto singolo, sono riportate di seguito:

- **MS1** – terzo piano dell'edificio scolastico;
- **MS2** – secondo piano dell'edificio scolastico;
- **MS3** – piano interrato dell'edificio scolastico;
- **MS4** – piano interrato dell'edificio accanto;
- **MS5** – piano interrato dell'edificio accanto ma con una verticalità diversa;

N.B. Le prime tre posizioni sono allineate sulla stessa verticale.

Le posizioni di esecuzione delle prove, con martinetto doppio, risultano:

- **MD1** – terzo piano dell'edificio scolastico;
- **MD2** – secondo piano dell'edificio scolastico;
- **MD3** – piano interrato dell'edificio scolastico;

#### **4.7.2 Strumentazione utilizzata**

L'attrezzatura utilizzata per l'esecuzione delle prove è la seguente:

- *Piastrine circolari metalliche* come riferimento delle distanze;
- *Deformometro centesimale* per la lettura degli spostamenti;
- *Pompa Glotz* per fornire la pressione ai martinetti che permette di gestire con particolare cura gli incrementi di carico oltre a mantenere costante la pressione;

- *Martinetto Boviari in acciaio* di forma semicircolare ed avente le seguenti caratteristiche:

- superficie  $778,55 \text{ cm}^2$  ;
- spessore  $4,0 \text{ mm}$ ;
- diametro semicircolo  $35 \text{ cm}$ ;
- profondità  $26 \text{ cm}$ ;
- press. max esercizio  $100 \text{ bar}$ .

Dopo ogni prova il martinetto viene tarato in laboratorio per verificarne lo stato d'esercizio. Mediante il coefficiente "Km" si determina la riduzione della sezione di spinta del martinetto, tenuto conto dell'influenza della maggiore rigidità del bordo e dello stato di affaticamento e deformazione dello strumento.

- *Sega Partner circolare* per eseguire i tagli nella muratura: il taglio che ne deriva, grazie alla particolare caratteristica della sega che utilizza una trasmissione eccentrica, oltre a disturbare in maniera molto ridotta la struttura non modificandone le caratteristiche meccaniche, è netto e di dimensioni quasi uguali a quelle del martinetto.



Fig. 4.18 - Particolari della strumentazione: basette deformometriche



Fig. 4.19 - Particolari della strumentazione: martinetto piatto

### 4.7.3 Descrizione della metodologia di prova

#### Prova con martinetto singolo

La prova per la determinazione dello stato tensionale è basata sul rilascio tensionale causato da un taglio piano, normale alla superficie della muratura, praticato tramite sega circolare. Prima del taglio si sono misurate le distanze fra 3 coppie di riferimenti poste a cavallo della sezione dove si sarebbe effettuato il taglio (fig. 4.20).

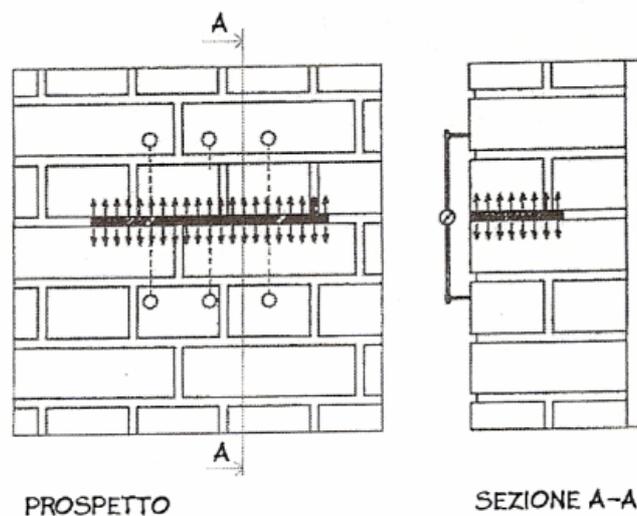


Fig. 4.20 – Disposizione del martinetto e delle basi di misura per la determinazione della tensione verticale in sito

Una volta praticato il taglio si è passati alla misura della convergenza (parziale chiusura) delle due facce su cui si è effettuato il taglio, e al relativo spostamento.

Inserito il martinetto piatto, si è proceduto gradualmente (con incrementi di 1 bar alla volta), all'annullamento dello spostamento, causato dal taglio, e al ripristino della situazione iniziale.

La validità del principio permane fino a quando, nell'intorno della discontinuità prodotta, il corpo resta in regime elastico lineare. L'eventuale plasticizzazione di alcune zone, causate da tensioni troppo elevate, porterebbe alla sopravvalutazione dello stato di stress.

Il valore dello stato di stress è stato ricavato con la sopra citata relazione:

$$\sigma = p \cdot K_a \cdot K_m$$

dove, nel nostro caso, si aveva:

$p$  = pressione erogata dal martinetto

$K_m$  = 0.85 costante del martinetto (fornito dalla casa costruttrice)

$K_a$  = 0.80 rapporto tra l'area del martinetto e quella del taglio

### Prova con martinetto doppio

Nella prova con martinetto doppio, è stato isolato un elemento semicilindrico di muratura di dimensioni circa 40x50 cm e profondità 26cm, per mezzo di 2 tagli orizzontali praticati in corrispondenza dei due giunti di malta.

Sulla superficie libera del campione sono state posizionate 3 coppie di basi di misura verticale ed una coppia orizzontale, le quali permettono di misurare le deformazioni assiali e trasversali del campione di muratura (fig. 4.21).

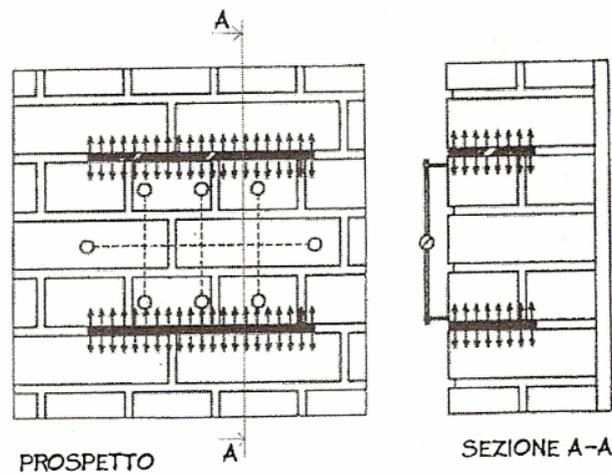


Fig. 4.21 – Disposizione dei martinetti e delle basi di misura per la determinazione delle caratteristiche del campione

L'elemento campione è stato sottoposto, per mezzo di 2 martinetti inseriti nei 2 tagli e collegati alla stessa pompa, a cicli di carico e scarico, il primo dei quali è portato, per tutte le prove eseguite, fino a 6 bar, il secondo invece è portato fino alla comparsa della prima fessura.

Lo stress a cui è stato sottoposto l'elemento è determinato tramite la relazione:

$$\sigma = p \cdot K_m \cdot \frac{A_m}{A_t}$$

dove:

$p$  = pressione erogata dai martinetti

$K_m$  = valore medio dei 2 coefficienti di taratura dei martinetti = 0.85

$\frac{A_m}{A_t} = \frac{\text{area del martinetto}}{\text{valore medio delle 2 aree di taglio}} = 0.87$  (per le prove MD1 e MD3)

$\frac{A_m}{A_t} = \frac{\text{area del martinetto}}{\text{valore medio delle 2 aree di taglio}} = 0.73$  (per la prova MD2)

Nella curva carico deformazione si evidenzia il punto di non linearità degli spostamenti che individua la sollecitazione di prima fessurazione dell'elemento murario. Quanto detto presuppone che siano state realizzate due condizioni:

1. le analisi sono state condotte ipotizzando un comportamento elastico lineare;
2. la sconnessione realizzata non provochi ampie plasticizzazioni sull'elemento di controllo.

In tali condizioni, possiamo affermare che le modalità della prova approssimano in maniera soddisfacente un regime di compressione assiale; da tenere comunque presente che i risultati ottenuti risentono delle condizioni di vincolo dell'elemento sottoposto a controllo.

#### 4.7.4 Risultati

##### Prove con martinetto singolo

Nella Tabella 4.1, viene riportata, per ogni prova eseguita, le tensioni di esercizio della muratura, pari alla tensione di ripristino della configurazione muraria precedente al taglio.

<b>Tabella 4.1 PROVA CON MARTINETTO SINGOLO</b>			
<b>Prova</b>	<b>Identificazione</b>	<b>Tensioni</b>	
		<b>di ripristino</b> [Bar]	<b>in esercizio</b> [ daN / cm <sup>2</sup> ]
MS1	Terzo piano V1	3.50	2.38
MS2	Secondo piano V1	3.75	2.55
MS3	Piano interrato V1	5.50	3.74
MS4	Piano interrato V2	5.98	4.07
MS5	Piano interrato V3	6.22	4.23

Di seguito si riportano i valori in dettaglio delle letture registrate durante le prove, con i rispettivi diagrammi pressione-spostamento.

**Prova MS1 – Edificio scolastico Terzo Piano:**

Prima fase: taglio iniziale della muratura e letture degli spostamenti

Basi di riferimento			
1	2	3	media
0,015	0,045	0,037	0,032
- 0,088	- 0,023	- 0,002	- 0,038

Nella prima riga è riportata la lettura prima del taglio, nella seconda dopo il taglio.

Seconda fase: inserimento del martinetto e ripristino dello stato tensionale iniziale.

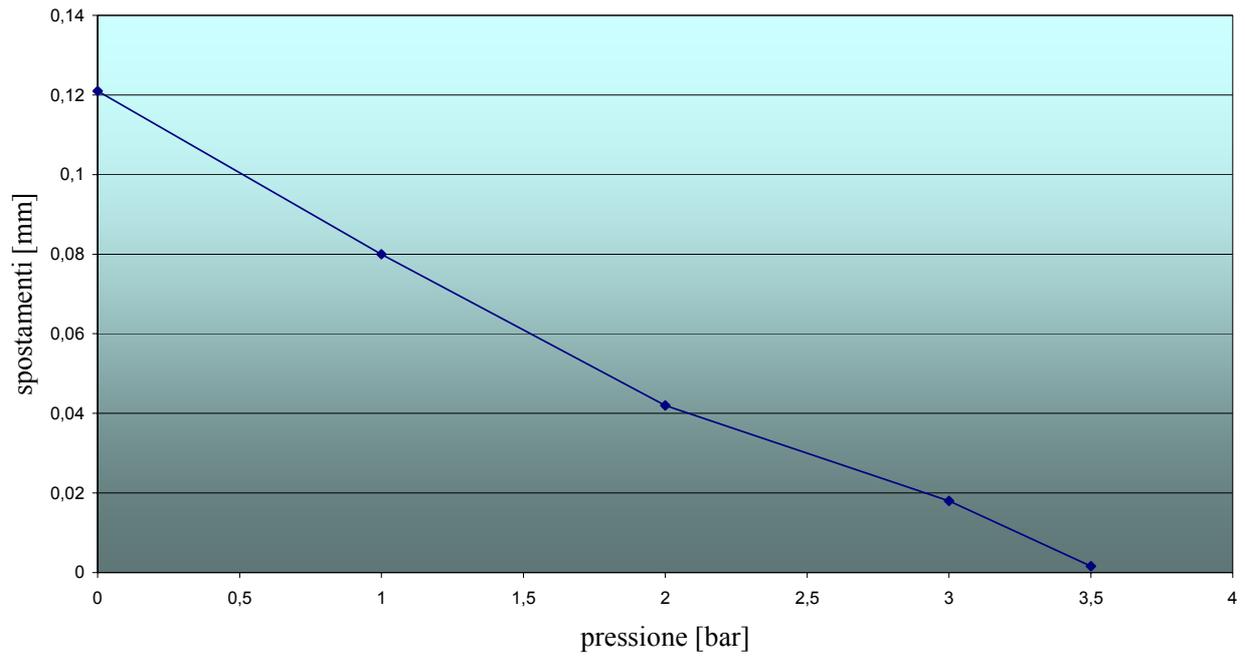
Basi di riferimento					
Pressione [bar]	1	2	3	Media	Spostamento [mm]
0,0	- 0,088	- 0,023	- 0,002	- 0,038	0,1121
1,0	- 0,045	- 0,012	0,004	- 0,018	0,080
2,0	- 0,01	0,02	0,009	0,006	0,042
3,0	0,012	0,034	0,018	0,021	0,018
3,5	0,017	0,044	0,033	0,031	0,0016

Risultati ottenuti:

<b>Pressione di ripristino</b>	(p)	<b>3,50 bar</b>
<b>Tensione in sito</b>	$(\sigma_e = p \cdot K_a \cdot K_m)$	<b>2,38 daN / cm<sup>2</sup></b>
<b>Grado di sicurezza</b>	$\frac{f_k}{\sigma_e}$	<b>25,21</b>

# PROVA MS1

curva carico-spostamento



**Prova MS2 – Edificio scolastico Secondo Piano:**

Prima fase: taglio iniziale della muratura e letture degli spostamenti

Basi di riferimento			
1	2	3	media
0,016	0,011	0,028	0,018
- 0,09	- 0,011	0,001	- 0.030

Nella prima riga è riportata la lettura prima del taglio, nella seconda dopo il taglio.

Seconda fase: inserimento del martinetto e ripristino dello stato tensionale iniziale.

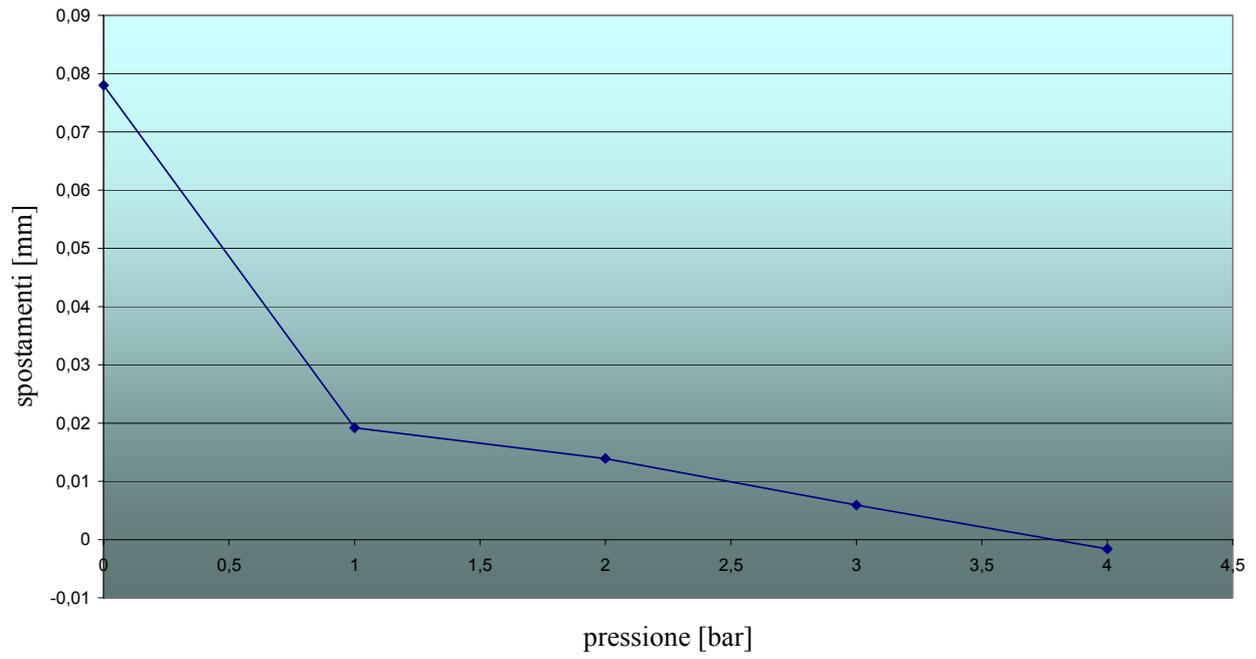
Basi di riferimento					
Pressione [bar]	1	2	3	Media	Spostamento [mm]
0,0	- 0,090	- 0,011	- 0,01	- 0,030	0,0780
1,0	0,004	- 0,003	0,018	- 0,0063	0,0192
2,0	0,006	0,005	0,018	0,0097	0,0139
3,0	0,012	0,009	0,023	0,0147	0,0059
4,0	0,015	0,016	0,027	0,0193	- 0,0016
5,0	0,023	0,023	0,032	0,026	- 0,0123

Risultati ottenuti:

<b>Pressione di ripristino</b>	(p)	<b>3,75 bar</b>
<b>Tensione in sito</b>	$(\sigma_e = p \cdot K_a \cdot K_m)$	<b>2,55 daN / cm<sup>2</sup></b>
<b>Grado di sicurezza</b>	$\frac{f_k}{\sigma_e}$	<b>23,52</b>

# PROVA MS2

## curva carico-spostamento



**Prova MS3 – Edificio scolastico Piano Interrato:**

Prima fase: taglio iniziale della muratura e letture degli spostamenti

Basi di riferimento			
1	2	3	media
0,064	0,074	0,087	0,075
0,044	0,042	0,074	0,053

Nella prima riga è riportata la lettura prima del taglio, nella seconda dopo il taglio.

Seconda fase: inserimento del martinetto e ripristino dello stato tensionale iniziale.

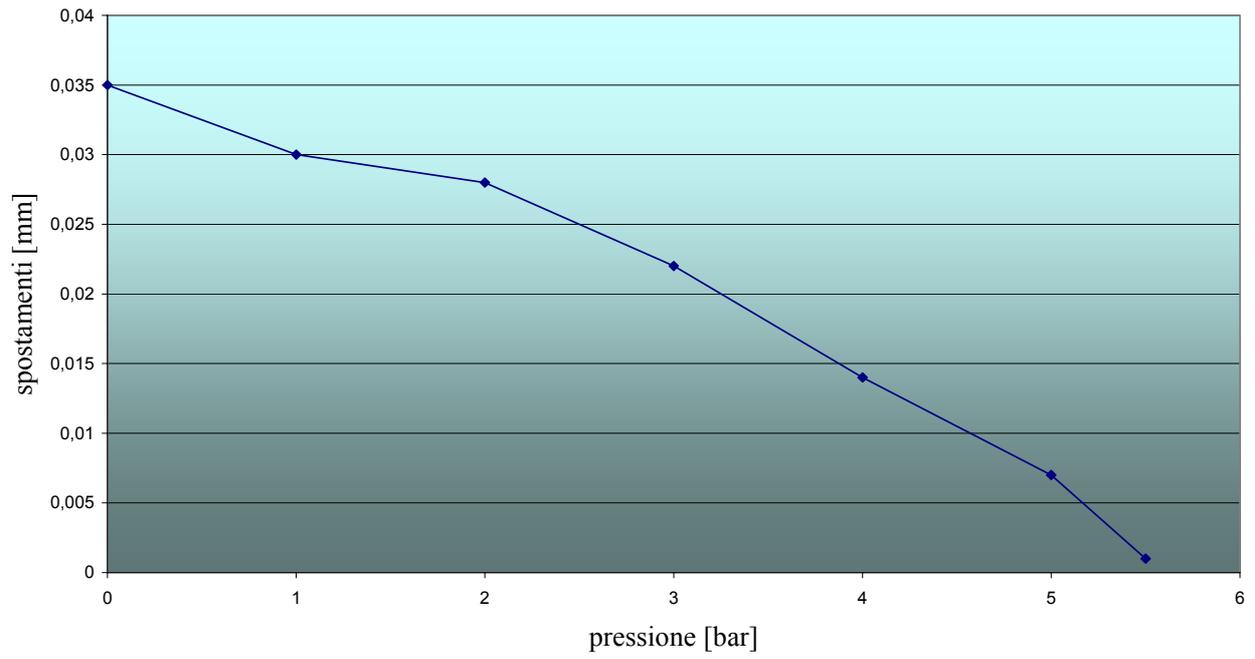
Basi di riferimento					
Pressione [bar]	1	2	3	Media	Spostamento [mm]
0,0	0,044	0,042	0,074	- 0,053	0,035
1,0	0,047	0,044	0,077	- 0,056	0,030
2,0	0,05	0,046	0,077	0,058	0,028
3,0	0,053	0,05	0,08	0,061	0,022
4,0	0,056	0,06	0,082	0,066	0,014
5,0	0,06	0,066	0,085	0,070	0,007
5,5	0,065	0,071	0,088	0,075	0,001

Risultati ottenuti:

<b>Pressione di ripristino</b>	(p)	<b>5,50 bar</b>
<b>Tensione in sito</b>	$(\sigma_e = p \cdot K_a \cdot K_m)$	<b>3,81 daN / cm<sup>2</sup></b>
<b>Grado di sicurezza</b>	$\frac{f_k}{\sigma_e}$	<b>15,75</b>

# PROVA MS3

curva carico spostamento



**Prova MS4 – Edificio accanto Piano Interrato:**

Prima fase: taglio iniziale della muratura e letture degli spostamenti

Basi di riferimento			
1	2	3	media
0,016	0,011	0,028	0,018
- 0,09	- 0,011	0,01	- 0,030

Nella prima riga è riportata la lettura prima del taglio, nella seconda dopo il taglio.

Seconda fase: inserimento del martinetto e ripristino dello stato tensionale iniziale.

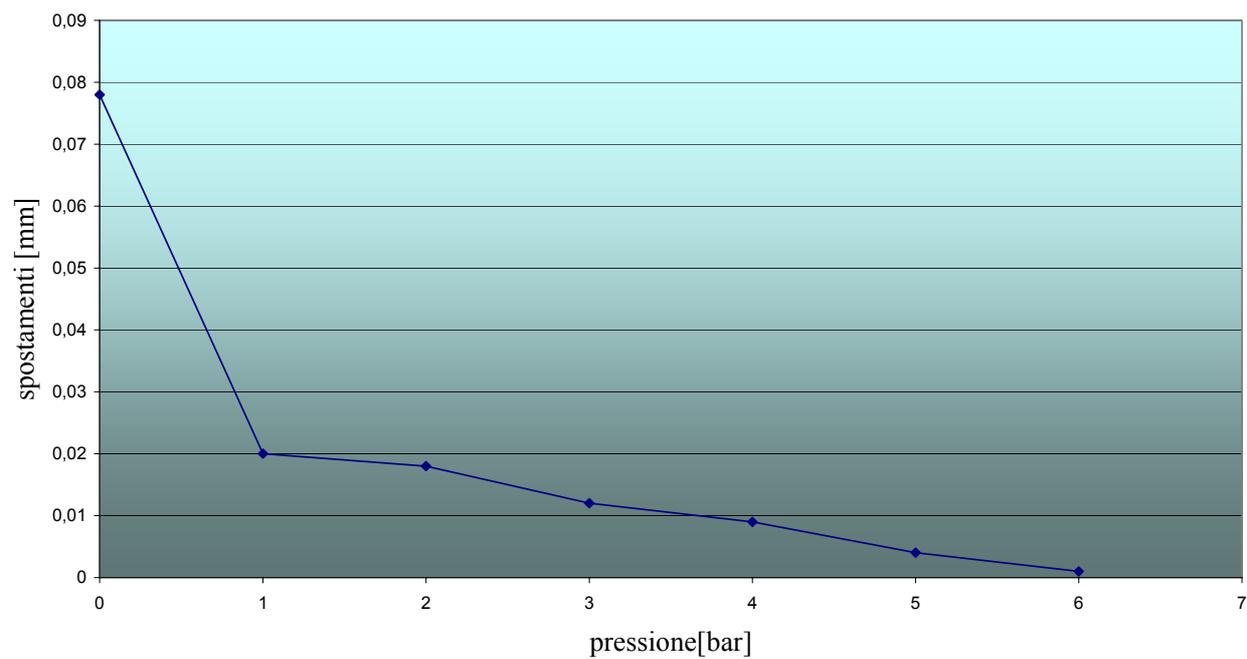
Basi di riferimento					
Pressione [bar]	1	2	3	Media	Spostamento [mm]
0,0	- 0,09	- 0,011	0,01	- 0,030	0,078
1,0	0,004	0,002	0,011	0,006	0,020
2,0	0,005	0,003	0,013	0,007	0,018
3,0	0,011	0,004	0,017	0,011	0,012
4,0	0,012	0,006	0,02	0,013	0,009
5,0	0,014	0,009	0,024	0,016	0,004
6,0	0,015	0,011	0,028	0,018	0,001

Risultati ottenuti:

<b>Pressione di ripristino</b>	(p)	<b>5,98</b> bar
<b>Tensione in sito</b>	$(\sigma_e = p \cdot K_a \cdot K_m)$	<b>4,07</b> daN / cm <sup>2</sup>
<b>Grado di sicurezza</b>	$\frac{f_k}{\sigma_e}$	<b>14,74</b>

# PROVA MS4

curva carico-spostamento



**Prova MS5 – Edificio accanto Piano Interrato:**

Prima fase: taglio iniziale della muratura e letture degli spostamenti

Basi di riferimento			
1	2	3	media
0,014	0,013	0,022	<b>0,016</b>
- 0,07	- 0,010	0,002	<b>- 0.026</b>

Nella prima riga è riportata la lettura prima del taglio, nella seconda dopo il taglio.

Seconda fase: inserimento del martinetto e ripristino dello stato tensionale iniziale.

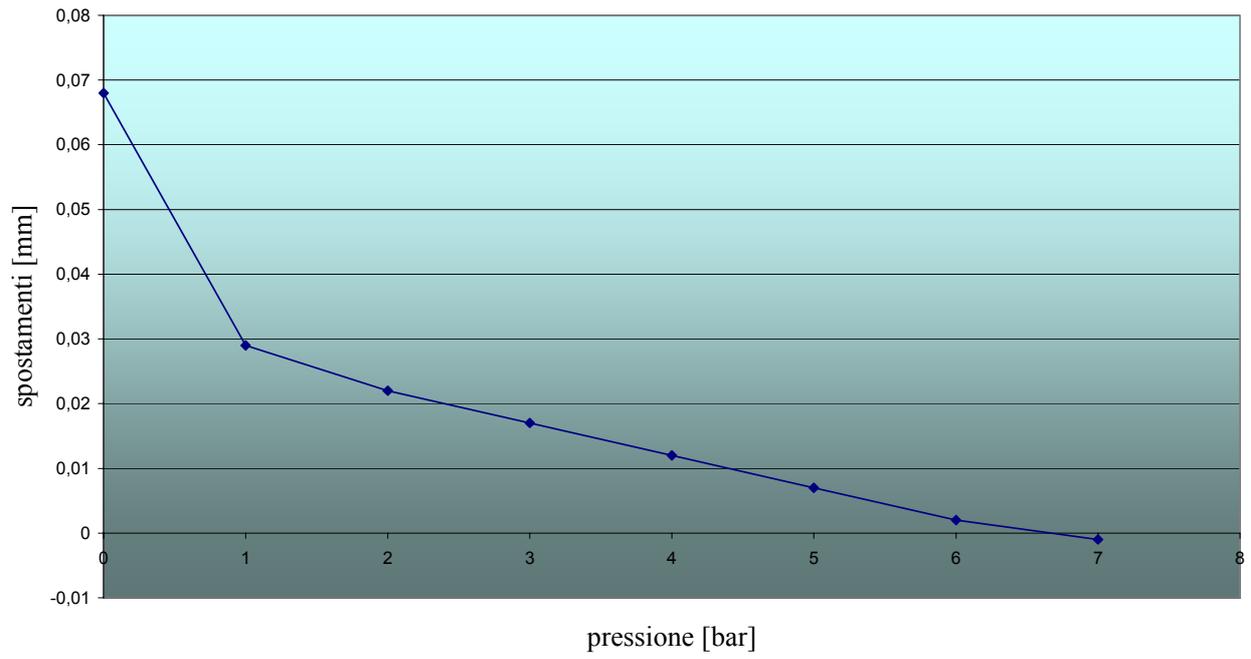
Basi di riferimento					
Pressione [bar]	1	2	3	Media	Spostamento [mm]
0,0	- 0,07	- 0,01	0,002	<b>- 0,026</b>	0,068
1,0	- 0,007	- 0,004	0,005	<b>- 0,002</b>	0,029
2,0	- 0,003	0,002	0,009	<b>0,003</b>	0,022
3,0	0,003	0,004	0,010	<b>0,006</b>	0,017
4,0	0,006	0,006	0,014	<b>0,009</b>	0,012
5,0	0,009	0,009	0,018	<b>0,012</b>	0,007
6,0	0,012	0,011	0,022	<b>0,015</b>	0,002
7,0	0,014	0,013	0,023	<b>0,017</b>	- 0,001

Risultati ottenuti:

<b>Pressione di ripristino</b>	(p)	<b>6,65</b> bar
<b>Tensione in sito</b>	$(\sigma_e = p \cdot K_a \cdot K_m)$	<b>4,49</b> daN / cm <sup>2</sup>
<b>Grado di sicurezza</b>	$\frac{f_k}{\sigma_e}$	<b>13,36</b>

# PROVA MS5

## curva carico spostamento



### Allegato alle prove con martinetto singolo

Il grado di sicurezza riportato nelle tabelle dei risultati, come già accennato in precedenza, è dato dal rapporto tra la tensione di rottura che porta al collasso della struttura, o dell'elemento ( $f_k$ ) e la tensione in esercizio in cui si trova la struttura, o l'elemento ( $\sigma_e$ ).

La tensione di rottura non è stata ricavata in sito, a causa dell'impossibilità di portare a collasso il campione, ma è stata ricavata numericamente, a partire dalle caratteristiche ricavate dagli elementi prelevati in sito e sottoposti a prove in laboratorio.

Tali prove, sono state eseguite dal LaRM dell'Università di Bologna, e consistono precisamente in:

- prove di compressione su provini prelevati dai laterizi;
- prove di doppio punzonamento su provini prelevati dai giunti di malta.

### Laterizi

Sui laterizi sono state eseguite prove di compressione su due tipologie di provini:

- provini cilindrici di diametro nominale 45 mm, prelevati in situ;
- provini cubici con spigolo nominale di 50 mm, ricavati da mattoni prelevati in situ;

I provini cubici sono stati provati in tre direzioni ortogonali, come si può vedere nella fig.4.22.

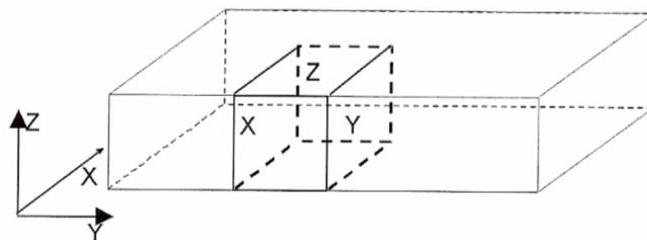


Fig. 4.22 – direzioni di prova per i cubetti prelevati dai laterizi

I provini cilindrici potevano essere estratti solo nelle direzioni X e Y, e solo in tali direzioni era possibile provarli. Poiché la caratterizzazione meccanica dei mattoni si basa su prove di compressione in direzione ortogonale al piano di posa, i risultati delle prove sui provini cilindrici vengono corretti in base al rapporto, determinato sui provini cilindrici, tra i risultati forniti dalle prove in direzione ortogonale e parallela al piano di posa.

L'elaborazione ha fornito i risultati riassunti nella Tabella 4.2.

<b>Tabella 4.2 valori stimati della resistenza a compressione dei laterizi</b>			
Piano	Resistenza media del piano [MPa]	Resistenza media dell'edificio [MPa]	Resistenza caratteristica dell'edificio [MPa]
Int.	29,20		
I	27,93	27,89	19,53
III	26,55		

Possiamo affermare quindi che i laterizi dell'edificio presentano, in media, una resistenza caratteristica  $f_{bk} = 20MPa(200Kg / cm^2)$

### Malta

I valori risultanti dalle prove a doppio punzonamento, riportati nel certificato, sono piuttosto dispersi e forniscono i valori riassunti nella Tabella 4.3

<b>Tabella 4.3 valori stimati delle resistenza per le malte</b>		
Piano	Resistenza media del piano [MPa]	Resistenza media dell'edificio [MPa]
Int.	3,32	
I	1,41	2,08
III	1,77	

La malta quindi presenta proprietà meccaniche piuttosto scadenti e può essere assimilata a una malta M2.5 secondo il D.M. 14/09/2005

### Muratura

Partendo dai valori risultanti dalle prove sui laterizi e sulle malte, utilizzando la Tabella 11.9VI del D.M. 14/9/2005, si può stimare una resistenza caratteristica a compressione della muratura pari a:

$$f_k = 6MPa(60Kg / cm^2)$$

**Prova MD1 – Edificio scolastico Terzo Piano:**

**Calcolo delle costanti elastiche:**

Il modulo d'elasticità E si può calcolare come:

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = 35975 \text{Kg} / \text{cm}^2$$

Dove, prendendo a riferimento la tabella sottostante:

$\Delta\sigma$  = intervallo di carico considerato (tra 1 e 5 bar)

$\Delta\varepsilon$  = deformazione assiale corrispondente a tale intervallo

Il coefficiente di Poisson viene calcolato attraverso la relazione:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{trasy}}{\varepsilon_{long}} = 0.19$$

**Risultati ottenuti:**

<b>Modulo di elasticità</b>	(E)	35975Kg / cm <sup>2</sup>
<b>Coefficiente di Poisson</b>	( $\nu$ )	0,19
<b>Tensione di prima fessurazione</b>	( $\sigma_f$ )	13,28Kg / cm <sup>2</sup>

**Basi di misura:**

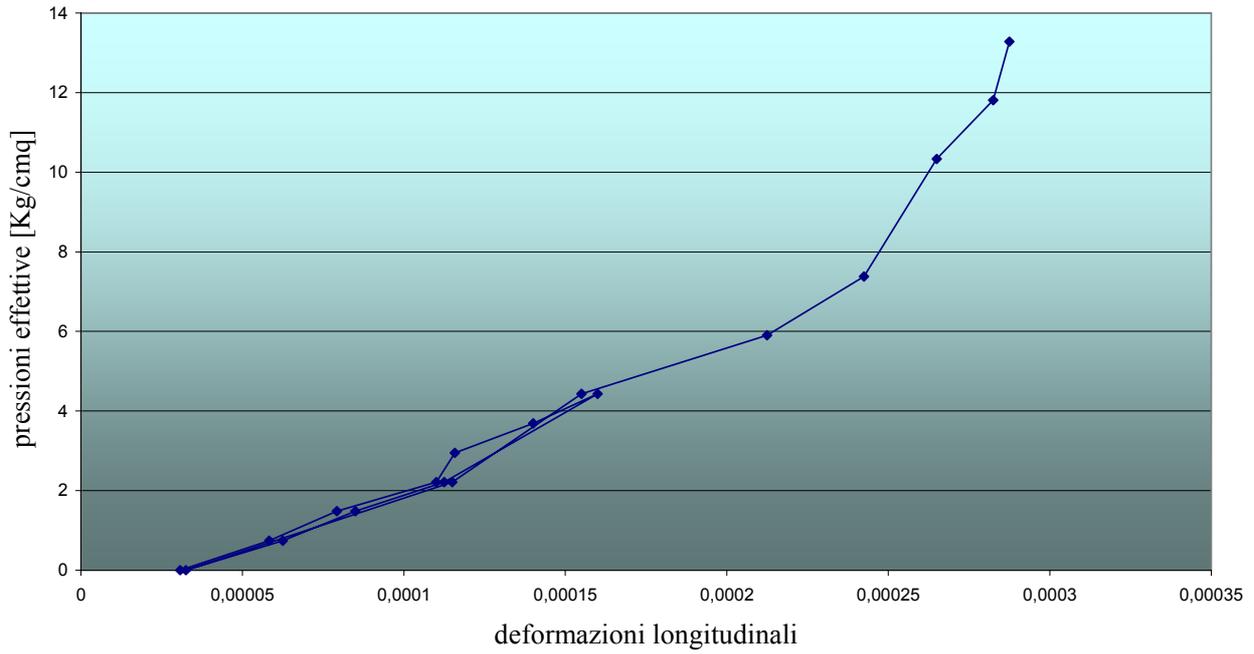
<b>Basi di misura verticali</b>			
1	2	3	Media
0,153	0,187	0,135	<b>0,158</b>

<b>Base di misura orizzontale</b>
<b>0,074</b>

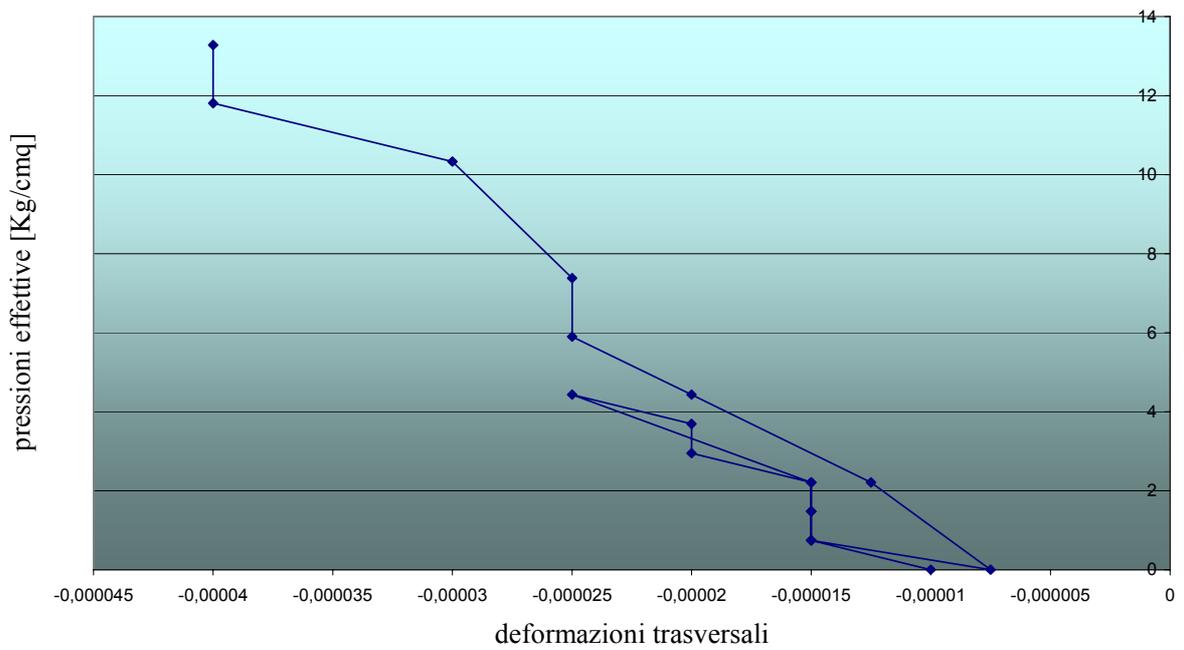
Esecuzione della prova:

lettura delle deformazioni								
Pressione P [bar]	Pressione Effettiva $\sigma$	Basi di riferimento				Deformazione Verticale	Letture	Deformazione orizzontale
		1	2	3	Media			
0	0,00	0,144	0,174	0,119	0,1457	3,075E-05	0,078	-1,00E-05
1	0,74	0,133	0,166	0,105	0,1347	5,825 E-05	0,080	-1,50 E-05
2	1,48	0,124	0,152	0,103	0,1263	7,925 E-05	0,080	-1,5 E-05
3	2,21	0,112	0,138	0,092	0,1140	1,100 E-04	0,080	-1,5 E-05
4	2,95	0,110	0,137	0,088	0,1117	1,157 E-04	0,082	-2,00 E-05
5	3,69	0,097	0,128	0,080	0,1020	1,400 E-04	0,082	-2,00 E-05
<b>6</b>	<b>4,43</b>	<b>0,085</b>	<b>0,118</b>	<b>0,079</b>	<b>0,0940</b>	<b>1,600 E-04</b>	<b>0,084</b>	<b>-2,50 E-05</b>
3	2,21	0,111	0,136	0,091	0,1130	1,125 E-04	0,080	-1,50 E-05
2	1,48	0,122	0,150	0,101	0,1240	8,500 E-05	0,080	-1,50 E-05
1	0,74	0,131	0,165	0,103	0,1330	6,250 E-05	0,080	-1,50 E-05
0	0,00	0,142	0,172	0,120	0,1450	3,250 E-05	0,077	-7,50E-06
3	2,21	0,110	0,135	0,090	0,1120	1,150 E-04	0,079	-1,25 E-05
6	4,43	0,088	0,119	0,081	0,0960	1,550 E-04	0,082	-2,00 E-05
8	5,90	0,054	0,112	0,054	0,0730	2,125 E-04	0,084	-2,50 E-05
10	7,38	0,048	0,085	0,050	0,0610	2,425 E-04	0,084	-2,50 E-05
14	10,33	0,044	0,074	0,038	0,0520	2,650 E-04	0,086	-3,00 E-05
16	11,81	0,040	0,065	0,030	0,0450	2,825 E-04	0,090	-4,00 E-05
<b>18</b>	<b>13,28</b>	<b>0,040</b>	<b>0,060</b>	<b>0,030</b>	<b>0,0430</b>	<b>2,875 E-04</b>	<b>0,090</b>	<b>-4,00 E-05</b>

**grafico: pressioni-deformazioni longitudinali**



**grafico: pressioni-deformazioni trasversali**



**Prova MD2 – Edificio scolastico Secondo Piano:**

**Calcolo delle costanti elastiche:**

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = 36102 \text{Kg} / \text{cm}^2$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_{trasv}}{\varepsilon_{long}} = 0.235$$

**Risultati ottenuti:**

<b>Modulo di elasticità</b>	(E)	36102Kg / cm <sup>2</sup>
<b>Coefficiente di Poisson</b>	(ν)	0,235
<b>Tensione di prima fessurazione</b>	(σ <sub>f</sub> )	11,23Kg / cm <sup>2</sup>

**Basi di misura:**

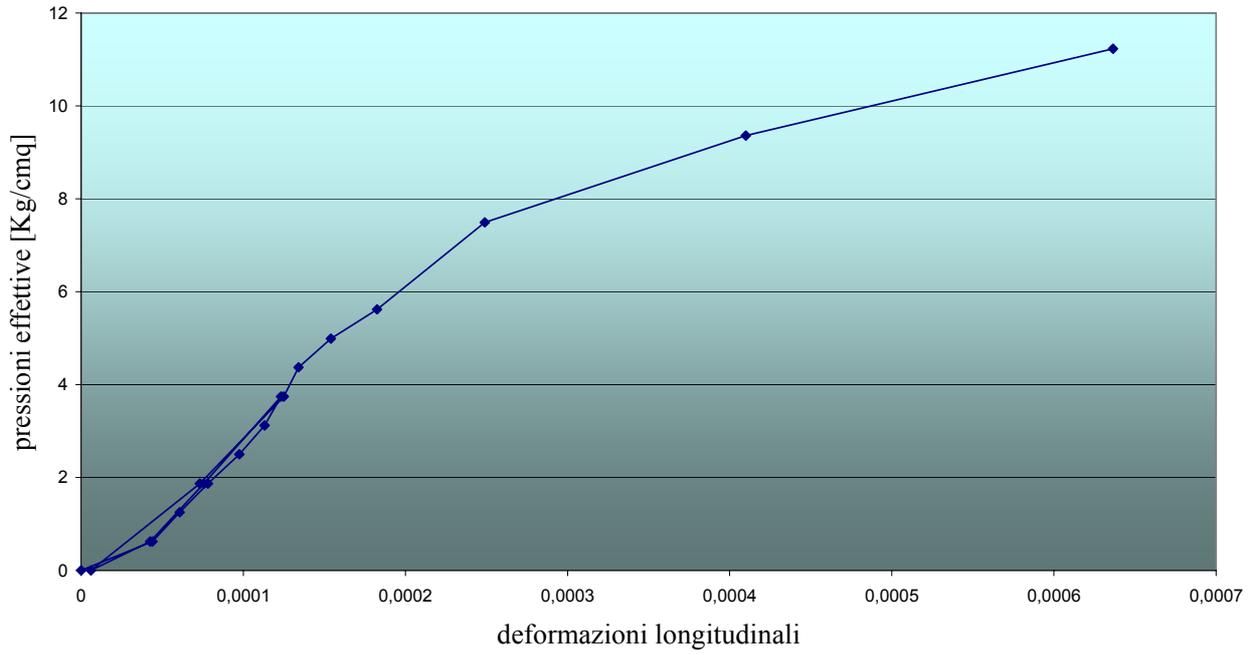
<b>Basi di misura verticali</b>			
1	2	3	Media
0,098	0,113	0,120	<b>0,110</b>

<b>Base di misura orizzontale</b>
<b>0,060</b>

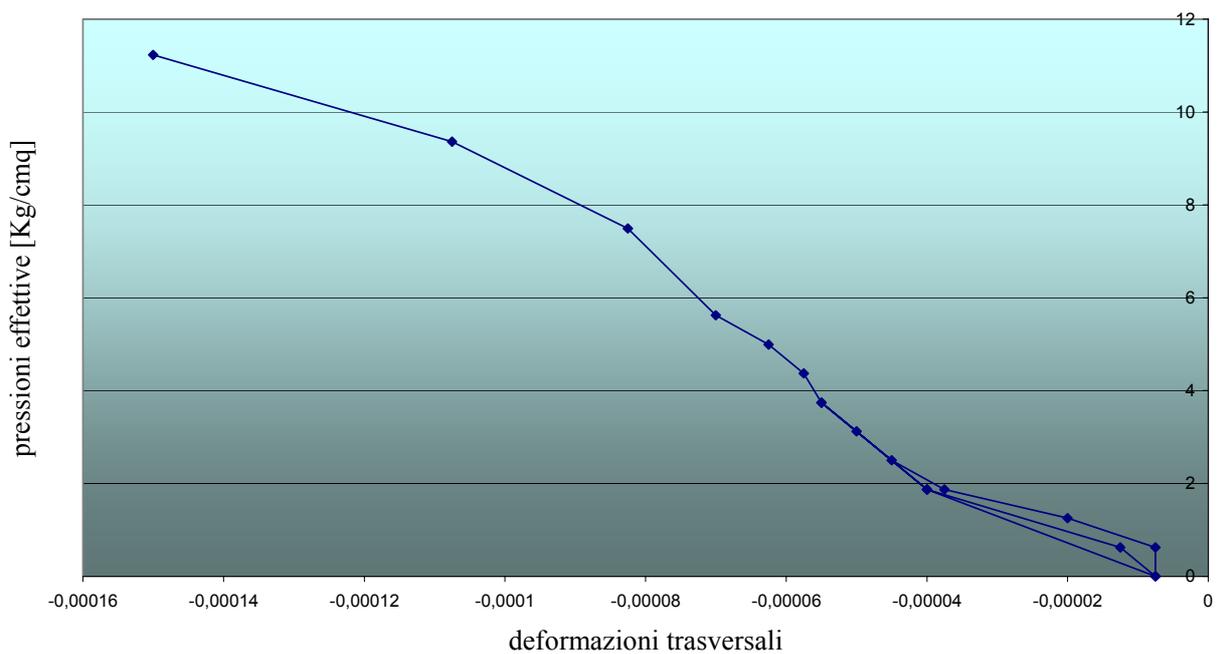
Esecuzione della prova:

lettura delle deformazioni								
Pressione P [bar]	Pressione Effettiva $\sigma$	Basi di riferimento				Deformazione Verticale	Lecture	Deformazione orizzontale
		1	2	3	Media			
0	0,00	0,098	0,113	0,120	0,1103	0,00E+00	0,063	-7,50E-06
1	0,62	0,077	0,091	0,091	0,0927	4,40E-05	0,063	-7,50E-06
2	1,25	0,073	0,086	0,099	0,0860	6,07 E-05	0,068	-2,00 E-05
3	1,87	0,066	0,080	0,091	0,0790	7,82 E-05	0,075	-3,75 E-05
4	2,50	0,055	0,072	0,087	0,0713	9,75 E-05	0,078	-4,50 E-05
5	3,12	0,051	0,068	0,076	0,0650	1,13 E-04	0,080	-5,00 E-05
<b>6</b>	<b>3,74</b>	<b>0,048</b>	<b>0,063</b>	<b>0,072</b>	<b>0,0610</b>	<b>1,23 E-04</b>	<b>0,082</b>	<b>-5,50 E-05</b>
3	1,87	0,068	0,078	0,094	0,0800	7,57 E-05	0,076	-4,00 E-05
1	0,62	0,078	0,092	0,110	0,0933	4,25 E-05	0,065	-1,25 E-05
0	0,00	0,100	0,114	0,124	0,1127	6,00 E-06	0,063	-7,50E-06
3	1,87	0,070	0,078	0,095	0,0810	7,32 E-05	0,076	-4,00 E-05
6	3,74	0,048	0,060	0,073	0,0603	1,25 E-04	0,082	-5,50 E-05
7	4,37	0,047	0,053	0,070	0,0567	1,34 E-04	0,083	-5,75 E-05
8	4,99	0,042	0,041	0,063	0,0487	1,54 E-04	0,085	-6,25 E-05
<b>9</b>	<b>5,62</b>	<b>0,038</b>	<b>0,022</b>	<b>0,052</b>	<b>0,0373</b>	<b>1,82 E-04</b>	<b>0,088</b>	<b>-7,00 E-05</b>
12	7,49	0,006	0,004	0,022	0,0107	2,49 E-04	0,093	-8,25 E-05
15	9,36	-0,07	-0,07	-0,02	-0,0537	4,10 E-04	0,103	-1,07 E-04
18	11,23	-0,18	-0,18	-0,08	-0,1443	6,36 E-04	0,120	-1,50 E-04

**grafico: pressioni-deformazioni longitudinali**



**grafico: pressioni-deformazioni trasversali**



**Prova MD3 – Edificio scolastico Piano Interrato:**

**Calcolo delle costanti elastiche:**

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = 36875 \text{Kg} / \text{cm}^2$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_{\text{trav.}}}{\varepsilon_{\text{long}}} = 0.215$$

**Risultati ottenuti:**

<b>Modulo di elasticità</b>	(E)	36875Kg / cm <sup>2</sup>
<b>Coefficiente di Poisson</b>	(ν)	0,215
<b>Tensione di prima fessurazione</b>	(σ <sub>f</sub> )	18,45Kg / cm <sup>2</sup>

**Basi di misura:**

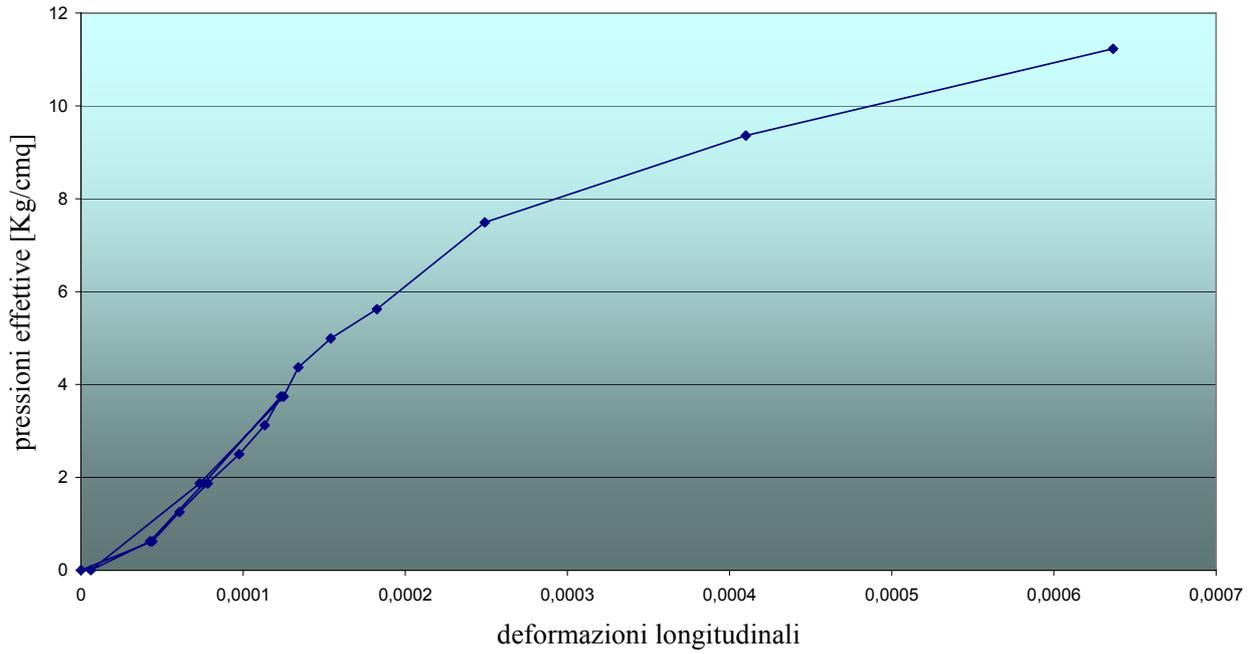
<b>Basi di misura verticali</b>			
1	2	3	Media
0,145	-0,163	0,087	<b>0,023</b>

<b>Base di misura orizzontale</b>
<b>0,063</b>

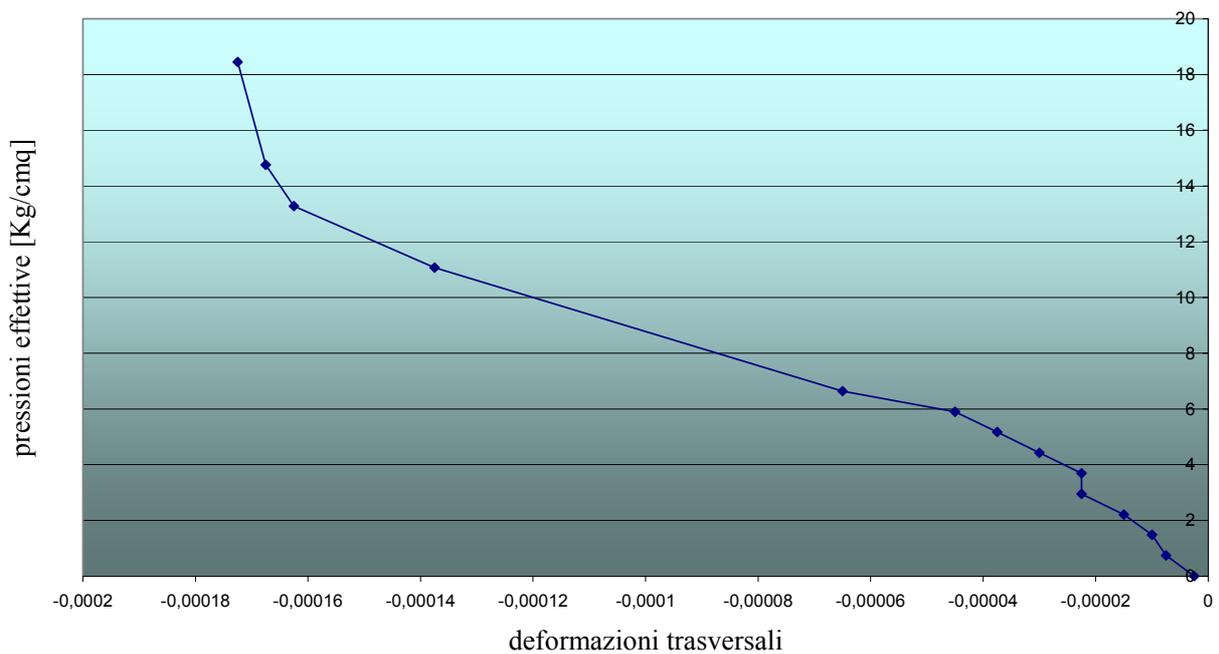
Esecuzione della prova:

lettura delle deformazioni								
Pressione P [bar]	Pressione Effettiva $\sigma$	Basi di riferimento				Deformazione Verticale	Letture	Deformazione orizzontale
		1	2	3	Media			
0	0,00	0,145	-0,163	0,087	0,023	0,00E+00	0,064	-2,50E-06
1	0,74	0,133	-0,181	0,075	0,009	3,50E-05	0,066	-7,50E-06
2	1,48	0,122	-0,197	0,057	-0,006	7,25E-05	0,067	-1,00E-05
3	2,21	0,117	-0,201	0,045	-0,013	9,00E-05	0,069	-1,50E-05
4	2,95	0,108	-0,206	0,037	-0,020	1,07E-04	0,072	-2,25E-05
5	3,69	0,104	-0,208	0,034	-0,023	1,15 E-04	0,072	-2,25E-05
<b>6</b>	<b>4,43</b>	<b>0,094</b>	<b>-0,216</b>	<b>0,029</b>	<b>-0,031</b>	<b>1,35 E-04</b>	<b>0,068</b>	<b>-1,25E-05</b>
3	2,21	0,118	-0,203	0,048	-0,012	8,75 E-05	0,067	-1,00E-05
3	2,21	0,119	-0,195	0,048	-0,015	9,50 E-05	0,065	-5,00E-06
2	1,48	0,124	-0,197	0,059	-0,010	8,25 E-05	0,069	-1,50E-05
1	0,74	0,135	-0,183	0,078	0,010	3,25 E-05	0,071	-2,00E-05
0	0,00	0,145	-0,159	0,090	0,025	5,00 E-05	0,073	-2,50E-05
3	2,21	0,119	-0,199	0,048	-0,011	8,50 E-05	0,073	-2,50E-05
6	4,42	0,089	-0,222	0,028	-0,035	1,45 E-04	0,075	-3,00E-05
7	5,17	0,078	-0,226	0,026	-0,041	1,60 E-04	0,078	-3,75E-05
8	5,90	0,073	-0,222	0,024	-0,042	1,62 E-04	0,081	-4,50E-05
9	6,64	0,068	-0,249	0,022	-0,053	1,90 E-04	0,089	-6,50E-05
15	11,07	0,020	-0,308	0,002	-0,095	2,95 E-04	0,118	-1,37E-04
18	13,28	-0,008	-0,350	-0,06	-0,141	4,10 E-04	0,128	-1,62E-04
20	14,76	-0,024	-0,375	-0,09	-0,162	4,62 E-04	0,130	-1,67E-04
25	18,45	-0,099	-0,466	-0,15	-0,238	6,52 E-04	0,132	-1,72E-04

**grafico: pressioni-deformazioni longitudinali**



**grafico: pressioni-deformazioni trasversali**



## Capitolo 5

# Modello matematico

### 5.1 INTRODUZIONE

In generale, la simulazione si svolge in una successione di passi, che ci portano ad una soluzione che può essere più o meno attendibile a seconda del grado di accuratezza con cui viene svolto lo studio del fenomeno fisico.

Per prima cosa, bisogna passare dalla realtà del problema ad un suo **modello matematico**, ovvero lo studio del fenomeno viene ricondotto allo studio di determinate equazioni che rappresentano il modello fisico. Questa traduzione porta necessariamente a perdere dei dettagli, in quanto in questa fase vengono introdotte delle ipotesi che limitano il campo di funzionamento del modello matematico; stiamo quindi **idealizzando** il problema fisico, idealizzazione che porta di conseguenza a commettere il primo errore, quello più importante, detto **errore di modellazione**.

Il problema a questo punto è risolvere il modello matematico, che può essere composto da un sistema di equazioni più o meno complesse.

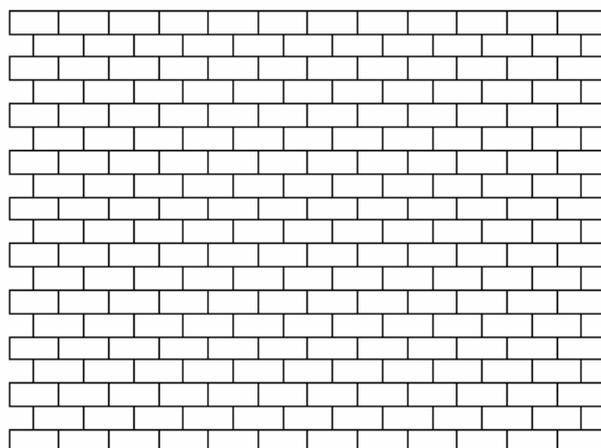


Fig. 5.1: Schematizzazione del pannello in muratura

L'idea iniziale è quella di suddividere il problema in esame, in parti più semplici (fig.5.2). Questo processo (trattato nell'appendice), detto di **discretizzazione**, ci permette di passare dal modello matematico al **modello discreto**, in tale passaggio si introduce una seconda fonte di errore, detto **errore di discretizzazione**. Tale errore è tanto più piccolo quanto maggiore è la discretizzazione effettuata.

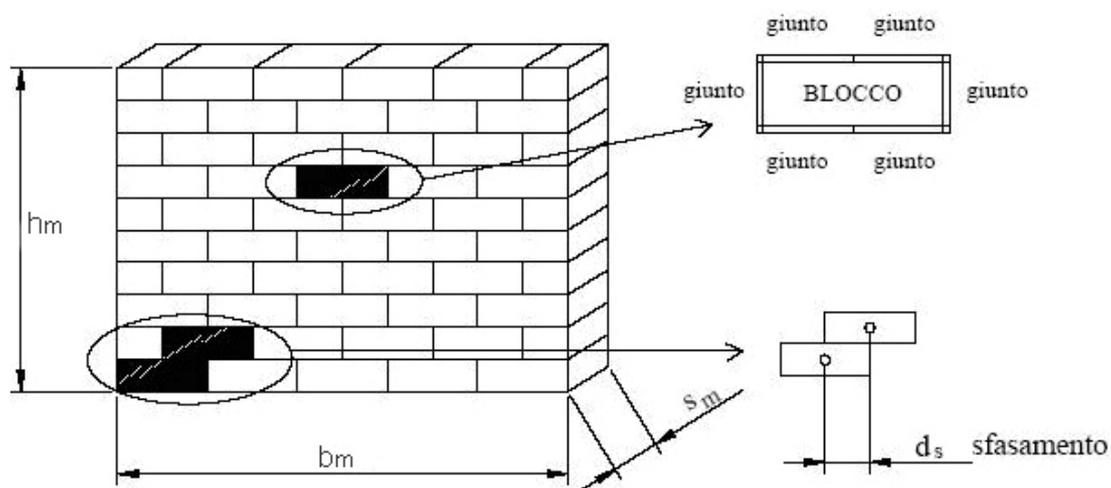
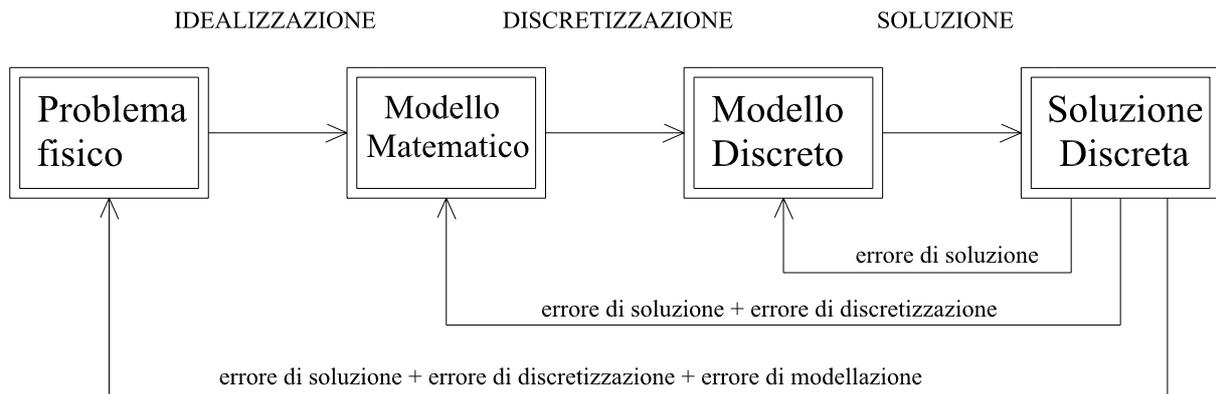


Fig. 5.2: Discretizzazione del pannello in muratura

Una volta ottenuto il modello discreto, lo si risolve. **La risoluzione** del modello discreto può essere fonte di una ulteriore fonte di errore, detto **errore di soluzione**. Tale errore è legato principalmente alla precisione di macchina.

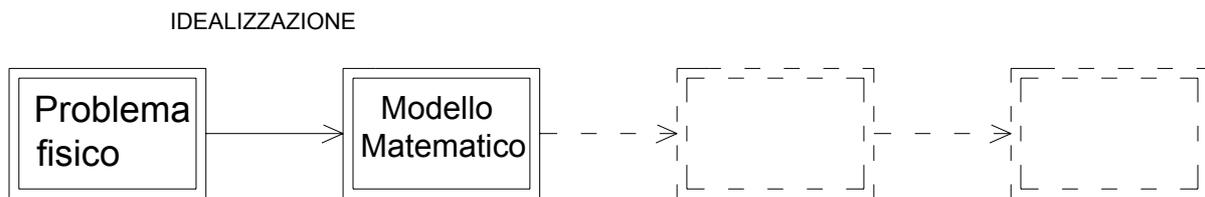
A questo punto, abbiamo ricavato la soluzione della simulazione, quella che ci dovrebbe permettere di interpretare il fenomeno fisico.

Affinché la soluzione trovata sia effettivamente aderente al fenomeno fisico da cui si è partiti, è necessario tenere sotto controllo tutte e tre le tipologie di errore introdotte, infatti, basta la perdita di anche una sola delle tre, affinché la soluzione ricavata non rispecchi il fenomeno.



In particolare l'attenzione verrà appuntata soltanto sul primo passaggio, in quanto, i successivi vengono effettuati direttamente dal programma agli elementi finiti scelto per l'analisi strutturale.

Pertanto il diagramma si riduce al seguente:



## 5.2 DESCRIZIONE DEL PROBLEMA FISICO

La descrizione è stata già ampiamente trattata nel capitolo 2, di seguito si riportano solo alcune significative osservazioni già annunciate.

La muratura dal punto di vista del comportamento meccanico presenta le seguenti caratteristiche:

- la *disomogeneità*;
- l'*anisotropia*;
- l'*asimmetria* di comportamento
- la *non linearità* del legame sforzi-deformazioni.

Non è però possibile tener conto di tutte le caratteristiche sopra elencate viste le complicazioni realizzative che ne deriverebbero. Al fine dunque, di una semplificazione del progetto sul piano pratico si è soliti trascurare quelle caratteristiche che, oltre a creare delle difficoltà, non risultano strettamente necessarie.

### 5.3 MODELLO MATEMATICO

In notazione del tutto generale, indico con  $\Omega$  il dominio di un generico corpo continuo (dove per corpo continuo s'intende *il modello matematico della materia, la cui struttura discontinua viene sostituita da una distribuzione continua di punti materiali, descritta dalla funzione densità di massa*) di dimensione  $n$  ( $n \in [2,3]$ ), sia  $\partial\Omega$  il suo contorno su cui sono assegnate condizioni statiche e/o cinematiche, in particolare ho indicato con  $\partial\Omega_v$  la porzione di superficie dove sono assegnate le condizioni cinematiche e con  $\partial\Omega_p$  quella in cui sono assegnate le condizioni statiche.

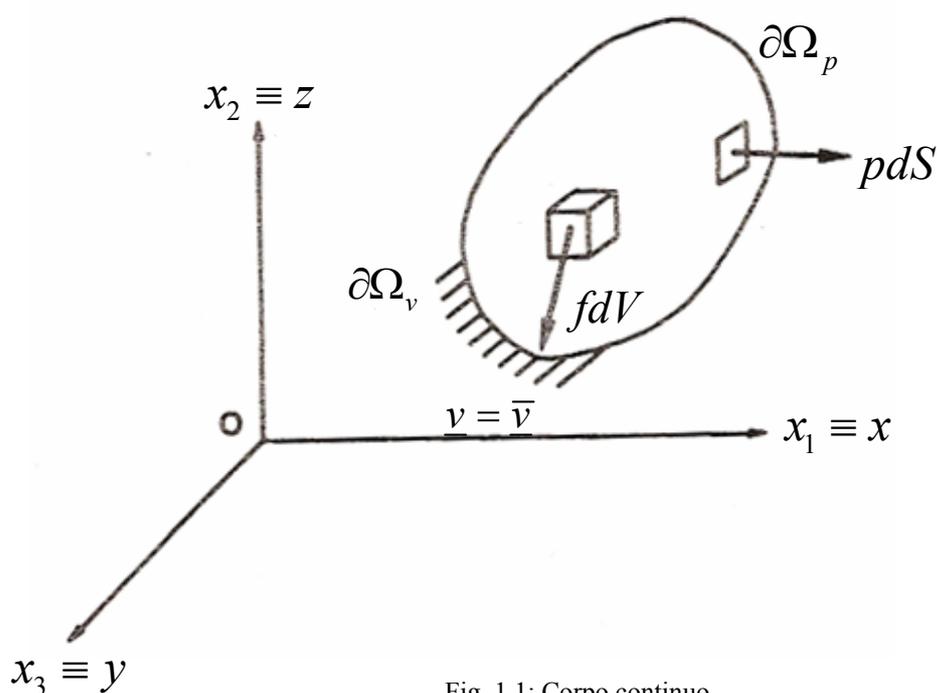


Fig. 1.1: Corpo continuo

Il modello matematico si presenta come un sistema di equazioni di due insiemi:

- equazioni (differenziali) di *campo*, valide in ogni punto del dominio:

$$\underline{A}(\underline{u}) = \underline{0} \quad \text{in } \Omega$$

(sono quelle che reggono il problema);

- equazioni al contorno, valide in ogni punto della frontiera del dominio:

$$\underline{B}(\underline{u}) = \underline{0} \quad \text{su } \partial\Omega$$

Dove:

- $\underline{A}, \underline{B}$  sono degli operatori differenziali;
- $\underline{u} = \underline{u}(x)$  è il vettore delle incognite, che esprime la configurazione del nostro sistema in ogni punto  $x \in \Omega$ .

Vorrei far notare che  $\underline{u}$  è in funzione della sola componente spaziale  $x$ , ciò significa che è stata assunta l'indipendenza dal tempo  $t$  (*regime stazionario*).

Lavorando in ambito **lineare** le equazioni possono essere riscritte nella forma:

$$\underline{A}(\underline{u}) = \underline{L}\underline{v} + \underline{f}$$

$$\underline{B}(\underline{u}) = \underline{M}\underline{v} + \underline{p}$$

con  $\underline{f}, \underline{p}$  vettori dei termini noti.

### 5.3.1 Equazioni di Campo.

Le equazioni di campo che governano il problema sono:

- **Le equazioni di congruenza** che legano gli spostamenti (variabile primaria) alle deformazioni (variabile intermedia);
- **le equazioni di equilibrio** che legano le forze esterne (variabile sorgente) alle tensioni interne (variabile intermedia);
- **le equazioni costitutive** che legano le due variabili intermedie.

#### Equazioni di congruenza

La deformazione nell'intorno di un punto, di un corpo continuo deformabile, è descritta dalle seguenti sei relazioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \gamma_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

dove:  $u_1$  è lo spostamento in direzione  $x_1$

$u_2$  è lo spostamento in direzione  $x_2$

$u_3$  è lo spostamento in direzione  $x_3$

$\varepsilon_{11}$  è la dilatazione in direzione  $x_1$

$\varepsilon_{22}$  è la dilatazione in direzione  $x_2$

$\varepsilon_{33}$  è la dilatazione in direzione  $x_3$

$\gamma_{12}$  è lo scorrimento angolare tra le direzioni  $x_1$   $x_2$

$\gamma_{13}$  è lo scorrimento angolare tra le direzioni  $x_1$   $x_3$

$\gamma_{23}$  è lo scorrimento angolare tra le direzioni  $x_2$   $x_3$

Le suddette relazioni tra componenti di spostamento e componenti di deformazione sono dette *equazioni di congruenza*, *equazioni di definizione* oppure *relazioni cinematiche*. Esse possono scriversi nella notazione matriciale estesa:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

che in notazione compatta:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D} \cdot \underline{u}$$

L'operatore differenziale  $\underline{D}$  è detto *operatore di congruenza*, *operatore di definizione* oppure *operatore cinematico*.

### Equazioni di equilibrio

Le equazioni indefinite di equilibrio sono tre relazioni differenziali valide in tutti i punti interni del corpo continuo. Esse esprimono l'equilibrio alla traslazione, secondo tre direzioni ortogonali, di un volume elementare sollecitato dalle forze di volume  $f_1, f_2, f_3$  e dalle forze di superficie associate alle componenti di tensione  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ .

Nel caso statico le *equazioni indefinite di equilibrio* assumono la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0 \end{aligned}$$

dove:  $\sigma_{11}$  è la componente normale di tensione lungo la direzione  $x_1$

$\sigma_{22}$  è la componente normale di tensione lungo la direzione  $x_2$

$\sigma_{33}$  è la componente normale di tensione lungo la direzione  $x_3$

$\tau_{12}$  è la componente tangenziale di tensione ortogonale alla direzione  $x_3$

$\tau_{13}$  è la componente tangenziale di tensione ortogonale alla direzione  $x_2$

$\tau_{23}$  è la componente tangenziale di tensione ortogonale alla direzione  $x_1$

Nelle relazioni è stata considerata la proprietà di simmetria delle tensioni tangenziali

$$\tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{23} = \tau_{32}.$$

Riscrivendole nella notazione matriciale estesa:

$$-\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

che in forma compatta:

$$\underline{D}^* \underline{\sigma} = \underline{f}$$

L'operatore differenziale  $\underline{D}^*$  è detto *operatore di equilibrio* oppure *operatore di bilancio*.

Dal punto di vista formale l'operatore di congruenza  $\underline{D}$  e l'operatore di equilibrio  $\underline{D}^*$  sono legati dalla relazione:

$$\underline{D}^* = -\underline{D}^T$$

In altre parole l'operatore di equilibrio  $\underline{D}^*$  risulta essere l'aggiunto formale dell'operatore di congruenza  $\underline{D}$ , ossia il trasposto cambiato di segno.

### Equazioni costitutive

Definito lo stato di sforzo e deformazione generalizzato al caso tridimensionale, la relazione tra le due, detta *equazione costitutiva*, può essere ottenuta dall'espressione della densità di energia elastica espansa in serie di Taylor.

Per descrivere il comportamento meccanico di un solido elastico si richiede quindi, in generale, la determinazione di un tensore del quart'ordine, che implica  $3^4 = 81$  parametri. Per la condizione di simmetria del tensore, tuttavia, il numero dei parametri indipendenti si riduce a 36:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui il materiale risulta essere *ortotropo*, esso presenta un grado di simmetria più elevato; questo tipo di simmetria è caratterizzato da tre piani di simmetria mutuamente perpendicolari tra di loro. In questo caso le costanti elastiche indipendenti si riducono a 9:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

dove le costanti elastiche  $[C]$  in termini di costanti “ingegneristiche”  $[E, G, \nu]$ , rispettivamente, modulo di Young, modulo di taglio, coefficiente di Poisson, risultano:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= E_1 \left[ 1 - \left( \frac{E_3}{E_2} \right) \nu_{23}^2 \right] J & C_{13} &= E_3 [\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}] J \\
 C_{22} &= E_2 \left[ 1 - \left( \frac{E_3}{E_1} \right) \nu_{13}^2 \right] J & C_{12} &= [E_3 \nu_{13} \nu_{23} + E_2 \nu_{12}] J \\
 C_{33} &= E_3 \left[ 1 - \left( \frac{E_2}{E_1} \right) \nu_{12}^2 \right] J & C_{23} &= \left( \frac{E_3}{E_1} \right) [E_2 \nu_{12} \nu_{13} + E_1 \nu_{23}] J \\
 C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12}
 \end{aligned}$$

in cui:

$$J = \frac{1}{1 - 2 \left( \frac{E_3}{E_1} \right) \nu_{12} \nu_{23} \nu_{13} - \nu_{13}^2 \left( \frac{E_3}{E_1} \right) - \nu_{23}^2 \left( \frac{E_3}{E_2} \right) - \nu_{12}^2 \left( \frac{E_2}{E_1} \right)}$$

Le costanti elastiche sono dunque completamente determinate se sono note le seguenti nove costanti ingegneristiche:

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

Nel nostro caso, abbiamo a che fare con un materiale “trasversalmente isotropo”, con piano di isotropia 1-3, in cui le costanti ingegneristiche da determinare si riducono a 5, grazie alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_3 \\
 G_{12} &= G_{23} \\
 \nu_{12} &= \nu_{23} \\
 G_{13} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_{13})}
 \end{aligned}$$

Pertanto le costanti elastiche indipendenti risultano  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}$

Le equazioni di legame costitutivo tra le componenti di tensione e le componenti di deformazione, possono esprimersi nella forma matriciale compatta:

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon}$$

E' possibile ricavare anche le relazioni costitutive inverse di quelle citate in precedenza, cioè quelle che legano le componenti di deformazione alle componenti di tensione, invertendo la matrice costitutiva  $\underline{C}$ , avendo così in forma compatta:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{C}^{-1} \underline{\sigma}$$

L'operatore  $\underline{C}^{-1}$  è denominato *matrice delle cedevolezza* del materiale.

### 5.3.2 Equazioni al Contorno

Le equazioni al contorno per il caso in esame sono:

- Per la porzione di superficie vincolata  $\partial\Omega_v$ ,

$$\underline{u}(x) = \underline{\hat{u}}(x) \quad \forall x \in \partial\Omega_v$$

ovvero per ogni punto appartenente alla superficie vincolata, gli spostamenti sono uguali agli spostamenti assegnati.

- Per la porzione di superficie  $\partial\Omega_p$ , ove sono applicate le forze esterne di superficie, di componenti  $p_1, p_2, p_3$ , devono essere soddisfatte le *condizioni al contorno o ai limiti*:

$$\sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 = p_1$$

$$\tau_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 = p_2$$

$$\tau_{13}n_1 + \tau_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = p_3$$

dove  $n_1, n_2, n_3$ , sono i *coseni direttori della normale esterna*.

Le condizioni possono anche scriversi nella forma matriciale estesa:

$$\begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

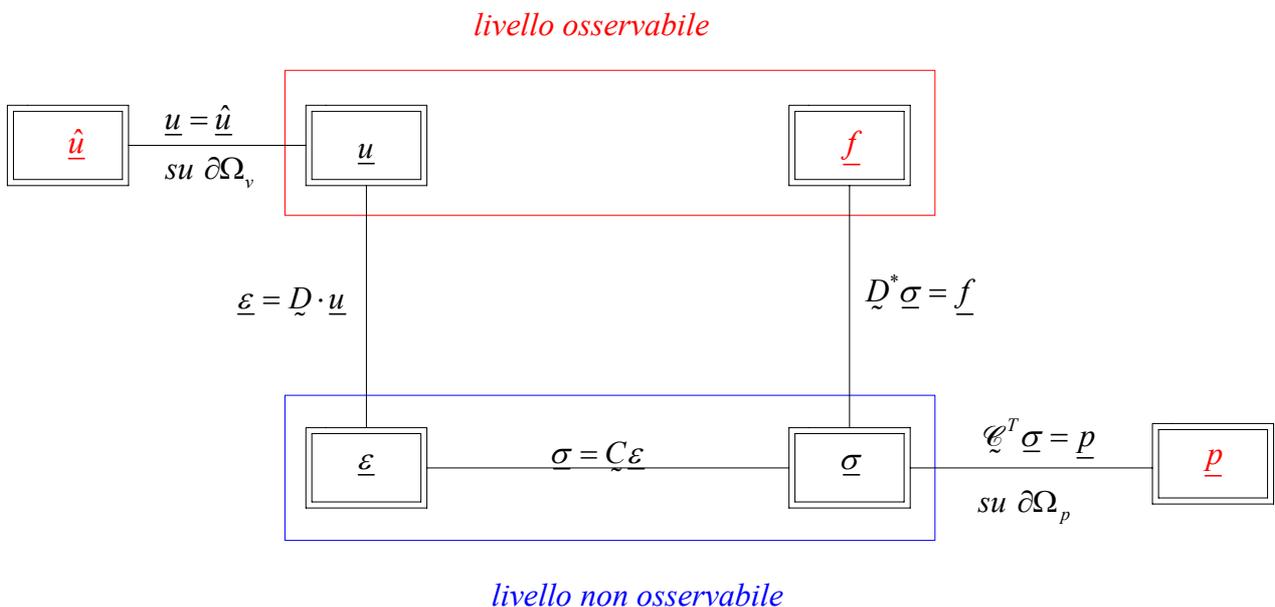
In forma compatta risulta pertanto:

$$\underline{\mathcal{C}}^T \underline{\sigma} = \underline{p}$$

indicando con  $\underline{\mathcal{C}}^T$  la *matrice dei coseni direttori*

### 5.3.3 Diagramma di Tonti.

Utilizzando tutte le equazioni di Campo e al Contorno, ricaviamo il seguente diagramma, detto *Diagramma di Tonti*:



Le variabili indicate in rosso sono delle quantità note.

### 5.3.4 Formulazione forte.

Presentata come un sistema di equazioni differenziali, ordinarie o parziali, nello spazio e/o nel tempo, complementate da appropriate condizioni al contorno. Occasionalmente questa forma può essere ridotta a delle equazioni algebriche.

Tale sistema di equazioni, lega direttamente gli spostamenti (variabile primale) alle forze di volume (variabile sorgente).

Per prima cosa, andiamo a inserire nelle relazioni costitutive le relazioni di congruenza, ovvero, esprimiamo le componenti di deformazione in termini di componenti di spostamento, così da legare le componenti di tensione alle componenti di spostamento.

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \sigma_{22} &= C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_{23} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \sigma_{33} &= C_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + C_{23} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + C_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \tau_{12} &= C_{66} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{13} &= C_{55} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{23} &= C_{44} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)\end{aligned}$$

riscritte in notazione compatta:

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{D} \underline{u}$$

Inserendo le relazioni costitutive, così riscritte, all'interno dell'equazione di equilibrio, otteniamo:

$$\begin{aligned}\left( C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{13} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \left( C_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \left( C_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + C_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + f_1 &= 0 \\ \left( C_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + \left( C_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{23} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \left( C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + C_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + f_2 &= 0 \\ \left( C_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + C_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) + \left( C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + \left( C_{13} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + C_{23} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + f_3 &= 0\end{aligned}$$

Tali relazioni costituiscono il *sistema fondamentale*, sistema che lega gli spostamenti direttamente con le forze di volume. Scritte in notazione matriciale compatta si presentano come:

$$\underline{D}^* \underline{C} \underline{D} \underline{u} = \underline{f}$$

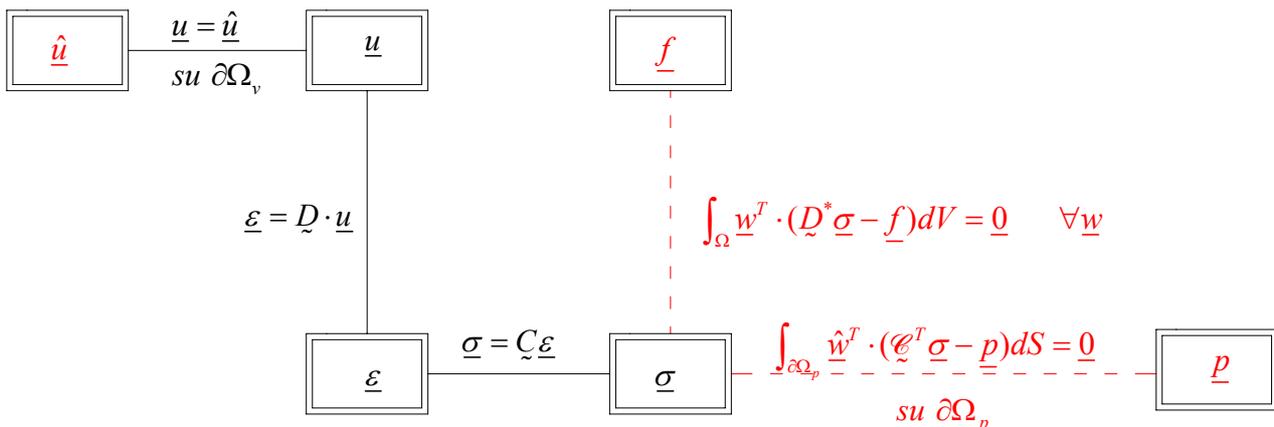
Che introducendo l'*operatore fondamentale*, detto anche *operatore di elasticità* oppure *operatore di rigidezza del sistema*  $\underline{L} = \underline{D}^* \underline{C} \underline{D}$  diventa:

$$\underline{L} \underline{u} = \underline{f}$$

### 5.3.5 Formulazione debole.

Una volta definita la formulazione forte e costruito il modello matematico rappresentativo del problema fisico, si può ricavare la *formulazione debole*, indebolendo i legami.

I legami vengono indeboliti moltiplicando le equazioni di bilancio e le equazioni di equilibrio ai limiti, per un apposito vettore dei pesi, rispettivamente  $\underline{w}$  e  $\hat{w}$ , e integrando sui rispettivi domini.



$$\int_{\Omega} \underline{w}^T \cdot (\underline{D}^* \underline{\sigma} - \underline{f}) dV + \int_{\partial\Omega_p} \hat{\underline{w}}^T \cdot (\underline{C}^T \underline{\sigma} - \underline{p}) dS = 0 \quad \forall \underline{w}, \hat{\underline{w}}$$

che considerando le relazioni costitutive e le relazioni di congruenza, può essere riscritta come:

$$\int_{\Omega} \underline{w}^T \cdot (\underline{D}^* \underline{C} \underline{D} \underline{u} - \underline{f}) dV + \int_{\partial\Omega_p} \hat{\underline{w}}^T \cdot (\underline{C}^T \underline{C} \underline{D} \underline{u} - \underline{p}) dS = 0$$

valida  $\forall \underline{w}, \hat{\underline{w}}$  e con  $\underline{u}$  che soddisfi a priori le condizioni essenziali ai limiti  $\underline{u} = \hat{\underline{u}} \quad su \partial\Omega_v$ .

Abbiamo ricavato a questo punto la prima formulazione debole del problema, tale formulazione è detta debole perché rispetto alla formulazione forte, i requisiti di regolarità sono di meno, in particolare la variabile  $\underline{u}$  (vettore delle incognite), non deve essere necessariamente di classe  $C^2$  (derivabile due volte con derivata continua) ma basti che sia continua a tratti, cioè, di classe  $C^1$ .

Integrando per parti la prima formulazione debole, si ottiene la seconda formulazione debole, nella quale sia il vettore degli spostamenti sia il vettore dei pesi presentano gli stessi requisiti di regolarità, ad entrambi infatti è richiesto che siano di classe  $C^0$  (semplicemente continue).

### 5.3.6 Modello semplificato.

Essendo il pannello un elemento in cui le lunghezze in due direzioni risultano predominanti rispetto la terza, l'analisi viene eseguita nel piano in cui giacciono le lunghezze predominanti, ed essendo il pannello caricato nel suo piano, avremo una situazione di stato elastico piano di tensione; ciò si traduce nel considerare assenti tutti gli effetti fuori del piano.

Avremo quindi, lavorando ad esempio nel piano 1-2, le seguenti variabili:

$$\underline{\hat{u}}^T = [\hat{u}_1, \hat{u}_2]$$

$$\underline{u}^T = [u_1, u_2]$$

$$\underline{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}]$$

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}]$$

$$\underline{f}^T = [f_1, f_2]$$

$$\underline{p}^T = [p_1, p_2]$$

$$\underline{n}^T = [n_1, n_2]$$

Pertanto le equazioni finora viste assumeranno la seguente forma:

#### Equazioni di congruenza

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

#### Equazioni di equilibrio

$$-\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

### Equazioni costitutive

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 E_2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} & \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} & \frac{E_2^2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

### Equazioni al contorno

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \quad \text{su } \partial\Omega_v$$

$$\begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \text{su } \partial\Omega_p$$

### Sistema fondamentale

$$\begin{aligned} & \left( \frac{E_1 E_2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + G_{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + f_1 = 0 \\ & \left( \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{E_2^2}{(E_2 - \nu_{12}^2 E_1)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + G_{12} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + f_2 = 0 \end{aligned}$$

## 5.4 MODELLO DI CONTINUO PER PANNELLI MURARI

Riguardo alla caratterizzazione del comportamento meccanico della muratura ci sono essenzialmente due modalità di approccio a cui fare riferimento.

Da un lato è possibile concentrarsi sulla caratterizzazione di modelli discreti della muratura facendo uso di tecniche ad elementi finiti. A tal proposito preciso che per “modelli discreti” si fa riferimento a tutti quei modelli ottenuti ad esempio mediante la discretizzazione ad elementi finiti della muratura vista come un continuo di Cauchy disomogeneo, il cui legame costitutivo varia per regioni (malta/mattone). Gli elementi finiti utilizzati sono di tipo standard. Questo modo di procedere può risultare conveniente nel caso di opere in muratura non eccessivamente complesse né di dimensioni troppo elevate, nelle quali può essere opportuno evidenziare i dettagli.

Il secondo tipo di approccio è quello di considerare il materiale muratura (di sua natura disomogeneo) come un continuo omogeneo equivalente, in modo tale da ridurre i costi computazionali associati ad un'eccessiva discretizzazione del materiale, e favorendo in compenso la possibilità di analizzare interi edifici reali.

La trattazione si articola nel modo seguente:

1. Scelta di un modello dettagliato (o fine) della muratura;
2. Scelta di un modello continuo (o rado);
3. Utilizzo della tecnica di identificazione costitutiva per caratterizzare costitutivamente il modello rado a partire dalla conoscenza costitutiva del modello fine.

In questo lavoro mi riallaccio al lavoro effettuato nella mia tesi triennale, in cui si era scelto di seguire il secondo tipo di approccio, utilizzando *l'algoritmo di identificazione compatibile*, basato sull'induzione di una micro-deformazione compatibile in un VER (volume elementare di riferimento) a partire da un'espansione affine del campo di spostamenti al continuo. Esso ha come obiettivo la salvaguardia della compatibilità del sistema lagrangiano nell'operazione di imitazione che il continuo sommario, nel nostro caso quello di Cauchy, effettua dal modello microscopico. Infatti nelle operazioni che si effettuano per ricavare il legame costitutivo sommario, l'equazione di compatibilità cinematica del modello microscopico risulta automaticamente soddisfatta, mentre altrettanto non può dirsi dell'equilibrio del sistema lagrangiano, soddisfatto solo in casi particolari. Tale algoritmo, come tutti i metodi di approssimazione compatibili, produce una sovrastima dei coefficienti elastici, così come riportato in [19].

Utilizzando la seguente notazione:

### Modello Fine

$\sigma$  : microtensione

$\varepsilon$  : microdeformazione

$$\int_{P_F} \sigma \cdot \varepsilon : \text{lavoro meccanico delle azioni di contatto}$$

$\sigma(p) = C(p) \varepsilon(p)$  con  $p \in P_F$  : Legame costitutivo elastico lineare non omogeneo

### Modello Sommario

$S$  : macrotensione

$E$  : macrodeformazione

$$\int_{P_S} S \cdot E : \text{Lavoro meccanico delle azioni di contatto}$$

$S(p) = DE(p)$  con  $p \in P_S$  : Legame costitutivo omogeneo, da determinare

I passi dell'algoritmo compatibile sono i seguenti:

1. Si impone:

$$P_F = P_S = P$$

e sia  $P$  sufficientemente piccolo in modo da considerare  $E(p)$  e, conseguentemente  $S(p)$ , omogeneo su  $P$ .

2.  $\forall p \in P$  si definisce un legame fra la deformazione fine e quella sommaria, ossia:

$$\varepsilon(p) = A(p) \cdot E$$

3. Si impone che il lavoro delle azioni di contatto relativamente alla regione  $P$  sia lo stesso per il modello fine e per il modello sommario:

$$\int_P \sigma \cdot \varepsilon = \int_P S \cdot E \quad \forall (\varepsilon, E)$$

4. Sostituendo si ha:

$$\int_P \sigma \cdot A(p) \cdot E = \int_P S \cdot E \quad \forall E \neq 0$$

da cui:

$$\int_P A^T(p) \cdot \sigma(p) \cdot E = S \cdot E \cdot v \quad \forall E \neq 0 \text{ e } v = \text{volume di } P$$

Poiché  $E$  è costante in  $P$ , si otterrà:

$$S = \frac{1}{v} \int_P A^T(p) \cdot \sigma(p)$$

Applicando tale operazione, con le caratteristiche geometriche della parete in muratura, riportate nella Tabella 5.1, in cui sono state effettuate le prove con martinetti piatti in sito, si ottengono le seguenti costanti elastiche per il continuo equivalente:

$$E_2 = 38061 \text{Kg} / \text{cm}^2; \quad E_1 = 17504 \text{Kg} / \text{cm}^2; \quad G_{12} = 21961 \text{Kg} / \text{cm}^2$$

<b>Tabella 5.1</b> Caratteristiche geometriche della parete			
W	=	281 mm	→ lunghezza mattone
T	=	134 mm	→ altezza mattone
B = H	=	15 mm	→ spessore malta
$d_s$	=	50 %	→ sfasamento

## Capitolo 6

# Applicazioni numeriche

### 6.1 GENERALITA'

Al fine di ottenere una prima valutazione del livello di accuratezza fornito dal modello descritto, vengono presentate alcune applicazioni numeriche. Tali test hanno lo scopo di verificare la bontà delle scelte effettuate, e sono quindi solo una sorta di verifica del modello costruito. Infatti, essendo le analisi svolte elastico-lineari, esse non hanno la pretesa di ricostruire a pieno il comportamento reale della muratura.

Per tutti i test riportati le caratteristiche costitutive del modello continuo sono identificate a partire dalle effettive caratteristiche geometriche della muratura in sito.

In particolare dal modello matematico siamo riusciti ad ottenere 3 costanti elastiche,  $E_1, E_2, G_{12}$ , mentre dai dati sperimentali siamo riusciti ad ottenere 2 costanti elastiche  $E_2, \nu_{12}$ . Andando a confrontare il modulo di Young, lungo la direzione verticale ( $E_2$ ), ottenuto tramite modello matematico con la media dei 3 moduli di Young, lungo la stessa direzione ( $\bar{E}_2$ ), ottenuti dalle 3 prove in sito, si nota che i valori risultano essere abbastanza simili, e, come ci aspettavamo quello ottenuto in sito risulta essere leggermente inferiore, nell'ordine del 6,5%.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 = 38848 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ \bar{E}_2 = \frac{35975 + 36102 + 36875}{3} = 36317 \text{Kg} / \text{cm}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow E_2 \cong \bar{E}_2$$

In conseguenza di ciò, i valori ottenuti dal modello matematico sono sufficientemente rappresentativi della parete in muratura, e pertanto utilizzabili per le applicazioni numeriche.

Quindi, tra il modello matematico e i dati sperimentali, ho ottenuto 4 costanti elastiche. Essendo la muratura un materiale che possiamo definire trasversalmente isotropo, con piano di isotropia 1-3 (piano orizzontale), per poter definire a pieno il materiale abbiamo bisogno di un'altra costante,  $\nu_{13}$ . Per semplicità assumiamo tale costante pari a 0,15, un valore comunemente usato nella pratica per la muratura.

Da queste 5 costanti elastiche e dalle seguenti relazioni che caratterizzano i materiali trasversalmente isotropi:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_3 \\ G_{12} &= G_{23} \\ \nu_{12} &= \nu_{23} \\ G_{13} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_{13})} \end{aligned}$$

otteniamo le seguenti 9 costanti elastiche da inserire nel programma agli elementi finiti per l'analisi strutturale:

$$\begin{aligned} E_1 &= 16364 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ E_2 &= 38848 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ E_3 &= 16364 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ G_{12} &= 20530 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ G_{13} &= 16890 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ G_{23} &= 20530 \text{Kg} / \text{cm}^2 \\ \nu_{12} &= 0,21 \\ \nu_{13} &= 0,15 \\ \nu_{23} &= 0,21 \end{aligned}$$

Nel mio caso specifico ho eseguito i seguenti test:

- Test 1: simulazione di una prova con martinetto doppio, con un modello 2D;
- Test 2: simulazione di una prova con martinetto doppio, con un modello 3D.

Per eseguire tali test ho utilizzato il programma ANSYS versione 10, un programma agli elementi finiti per l'analisi strutturale, sia a livello statico che a livello dinamico. Tramite l'interfaccia grafica è possibile modellare, analizzare e visualizzare la geometria della struttura, le proprietà degli elementi e l'analisi dei risultati.

La procedura di calcolo di una qualsiasi struttura si può dividere in tre parti principali:

- **Pre-processing:** è la fase in cui prende forma la nostra struttura, in quanto vengono inserite tutte le informazioni inerenti la scelta delle unità di misura, la definizione della geometria della struttura e delle sezioni, la definizione delle proprietà dei materiali, l'assegnazione delle sezioni agli elementi componenti la struttura, la definizione del tipo e dell'intensità dei carichi e per finire l'assegnazione dei vincoli sia interni che esterni. E' questa la parte in cui abbiamo "costruito" il materiale "omogeneo" muratura, con dei propri coefficienti elastici ottenuti nel lavoro della tesi.
- **Solving:** in questa fase il programma assembla e risolve il sistema che si è costruito nella fase precedente. Nel modello 2D, avendo a che fare con una struttura piana (realizzata nel piano XZ), prima di avviare l'analisi si sono imposte alcune specifiche condizioni: le rotazioni intorno agli assi X e Z e le traslazioni lungo Y sono state impedito;
- **Post-processing:** in questa ultima fase, una volta ottenuti i risultati dall'analisi del punto precedente è possibile visualizzare la deformata della struttura e le varie sollecitazioni.

Per i test, non si è presa in considerazione tutta la parete in muratura in cui sono state effettuate le prove in sito, ma solo parte di essa, in particolare si è creato un pannello delle dimensioni 160x160x60 cm nell'intorno delle zone in cui erano stati effettuati i tagli (fig. 6.1) realizzati a 40 cm di distanza l'uno dall'altro ed entrambi spessi 8 mm. Successivamente per simulare meglio la situazione in sito, in modo da soppiantare l'assenza della restante muratura, ho eseguito due modelli, diversi tra loro in termini di vincoli e di carichi esterni.

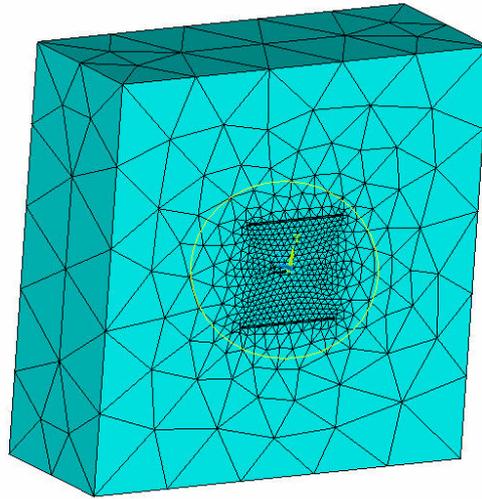


Fig. 6.1 – Schematizzazione del pannello murario

Nel primo modello si è proceduto ad incastrare tutti e 4 i lati, mentre i carichi presi in gioco sono le pressioni esercitate dai martinetti e il peso proprio del pannello creato.

Nel secondo modello, utilizzato solo nel caso 2D, invece, ho posizionato degli incastri nella base inferiore, mentre lungo i bordi laterali ho inserito dei carrelli in modo che lasciassero libere di verificarsi solo le traslazioni lungo z, per quanto riguarda i carichi, oltre al peso proprio del pannello e alle pressioni esercitate dai martinetti all'interno delle fessure, ho posizionato lungo la base superiore del pannello, libero da vincoli, un carico distribuito rappresentante il peso di tutta la parte muraria presente al di sopra della zona di indagine, come pressione ho quindi preso il valore della tensione in esercizio valutata precedentemente tramite prova con martinetto singolo e pari a  $2,38Kg/cm^2$ .

Per entrambi i test, e per entrambi i modelli del primo test, la pressione esercitata dai due martinetti, applicata uniformemente sulle 2 facce dei tagli, così come riportato in fig.6.2, è stata considerata pari a  $P=8bar$ , che si traduce sulla muratura in una  $\sigma = 5,90Kg/cm^2$ .

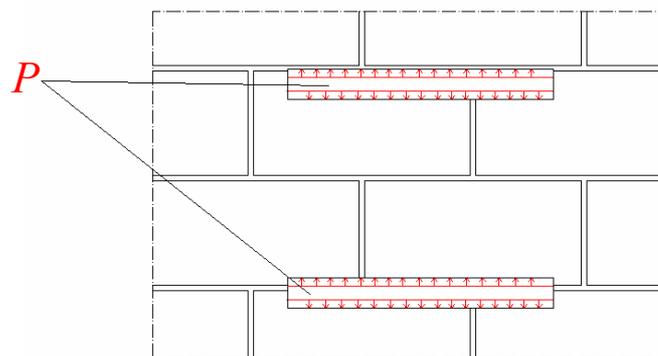


Fig. 6.2 – Schema dimostrativo dell'applicazione delle pressioni da parte dei martinetti

## 6.2 SIMULAZIONE IN 2D DI UNA PROVA CON MARTINETTO DOPPIO

- *Primo modello: Pressione di carico 8 bar e pannello tutto incastrato*

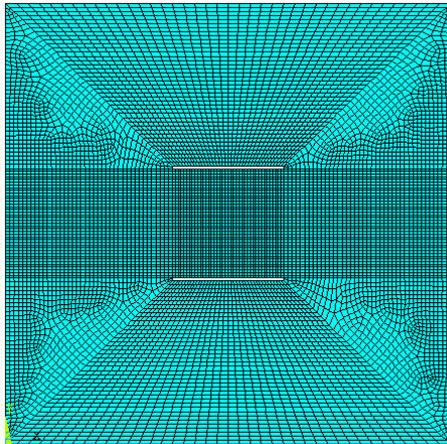


Fig. 6.3: Mesh

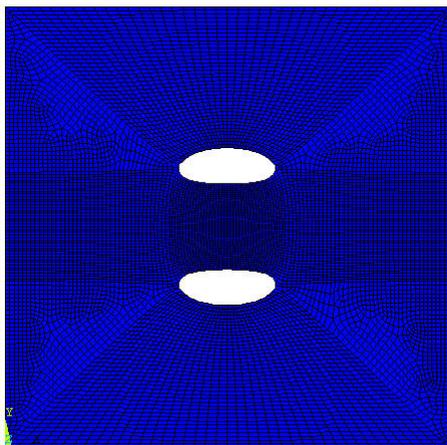


Fig. 6.4: Deformata

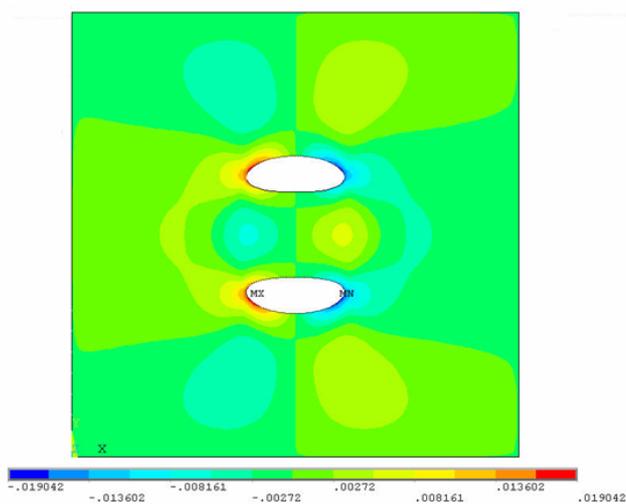


Fig. 6.5: Spostamenti  $u_x$

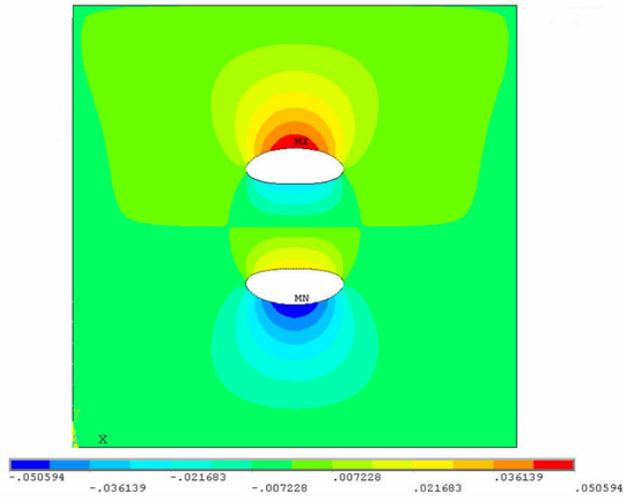


Fig. 6.6: Spostamenti  $u_z$

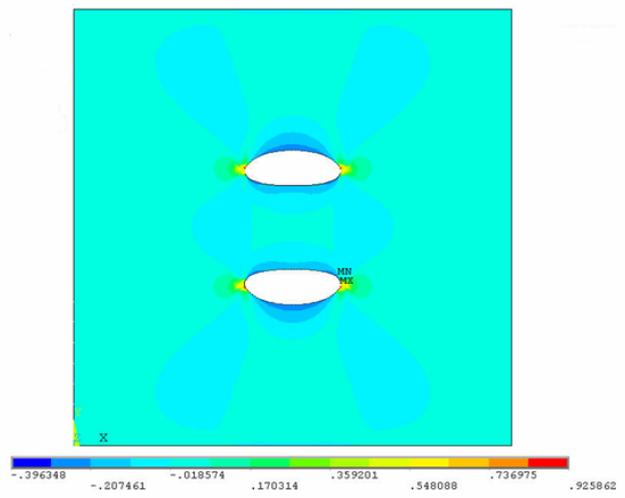


Fig. 6.7: Tensione  $S_x$

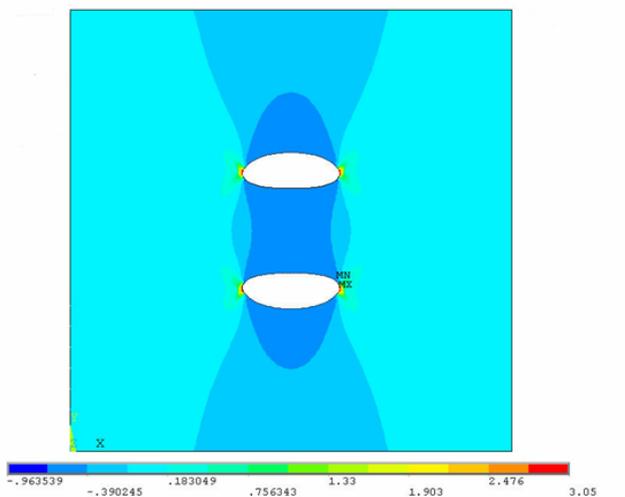


Fig. 6.8: Tensione  $S_z$

- *Secondo modello:* Pressione 8 bar con presenza di carrelli e incastri

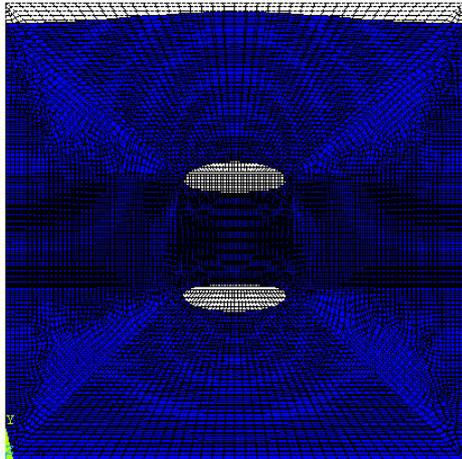


Fig. 6.9: Deformata

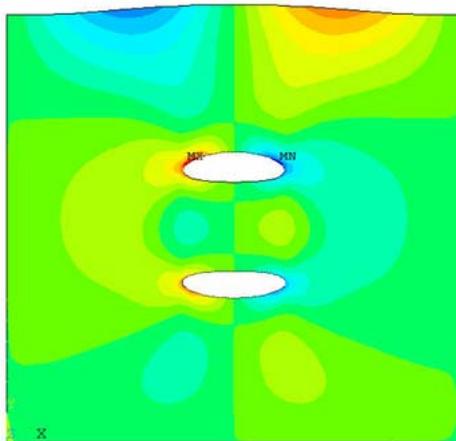


Fig. 6.10: Spostamenti  $u_x$

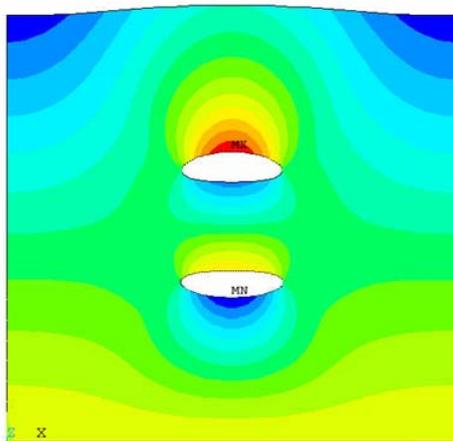


Fig. 6.11: Spostamenti  $u_z$



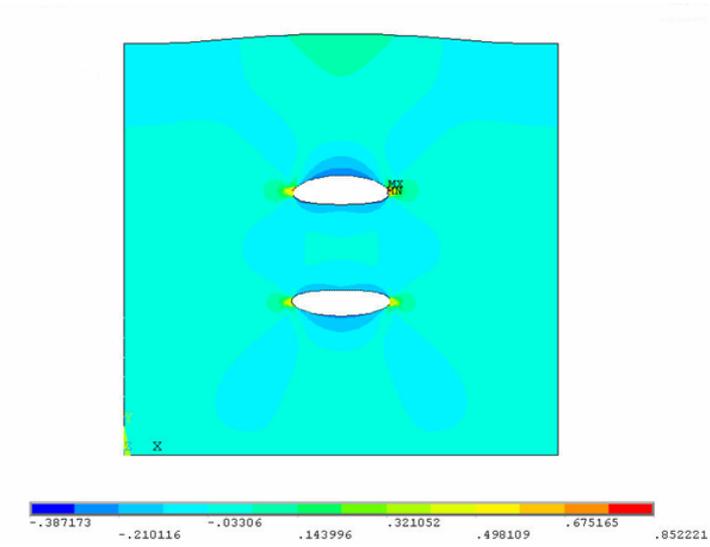


Fig. 6.12: Tensione  $S_x$

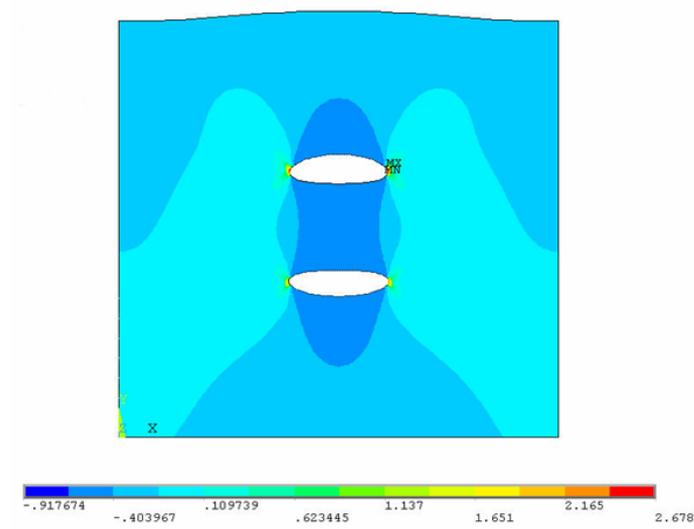


Fig. 6.13: Tensione  $S_z$

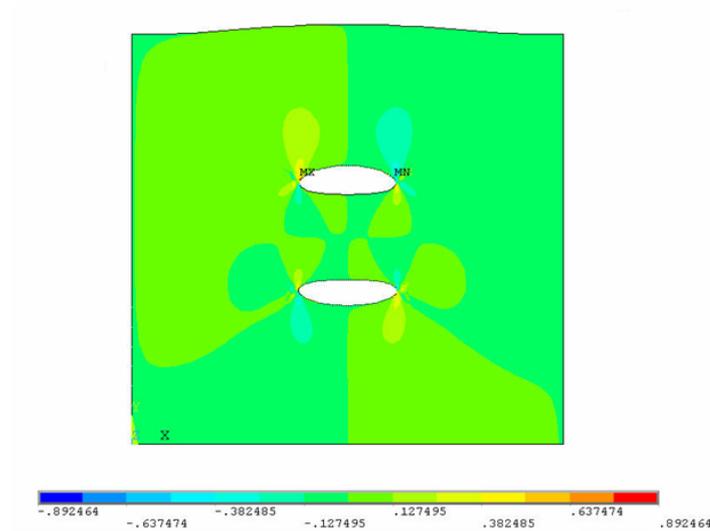


Fig. 6.14: Tensione  $S_{xz}$

### 6.3 SIMULAZIONE IN 3D DI UNA PROVA CON MARTINETTO DOPPIO

- Pressione di carico 8 bar e pannello tutto incastrato

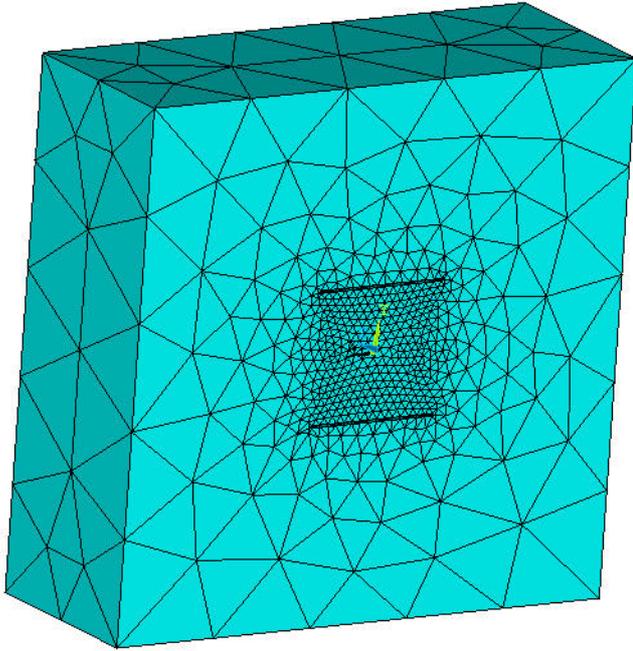


Fig. 6.15: Mesh in 3D

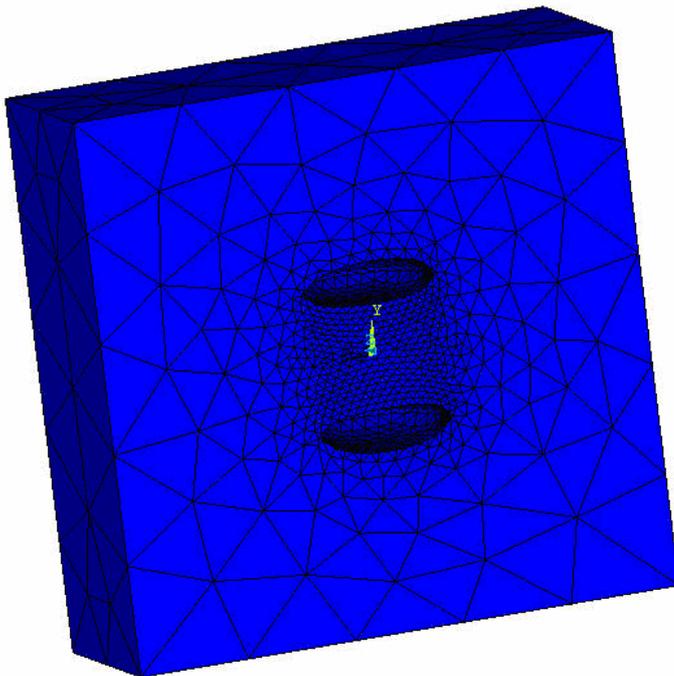


Fig. 6.16: Deformata

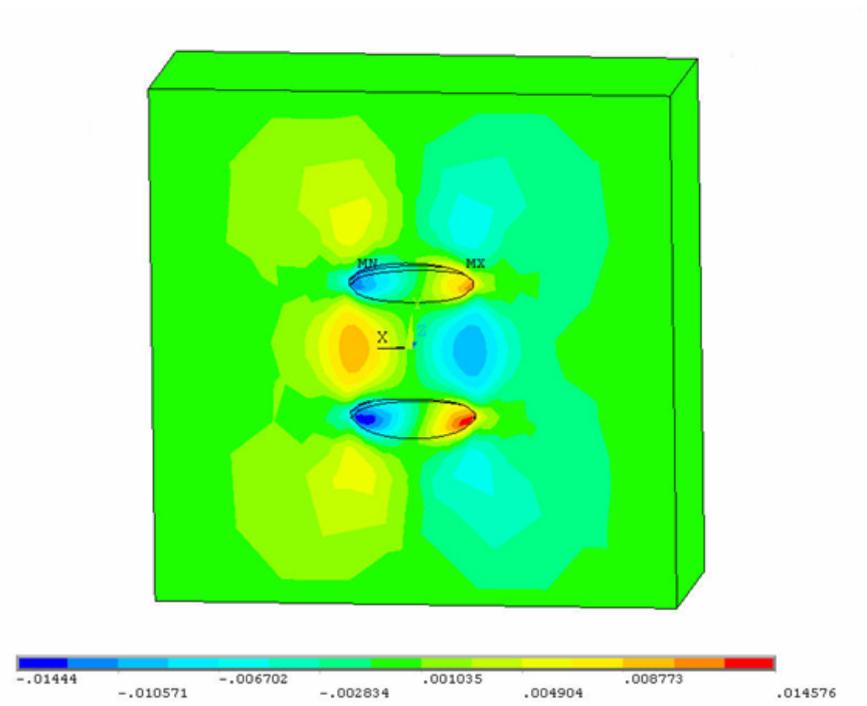


Fig. 6.17: Spostamenti  $u_x$

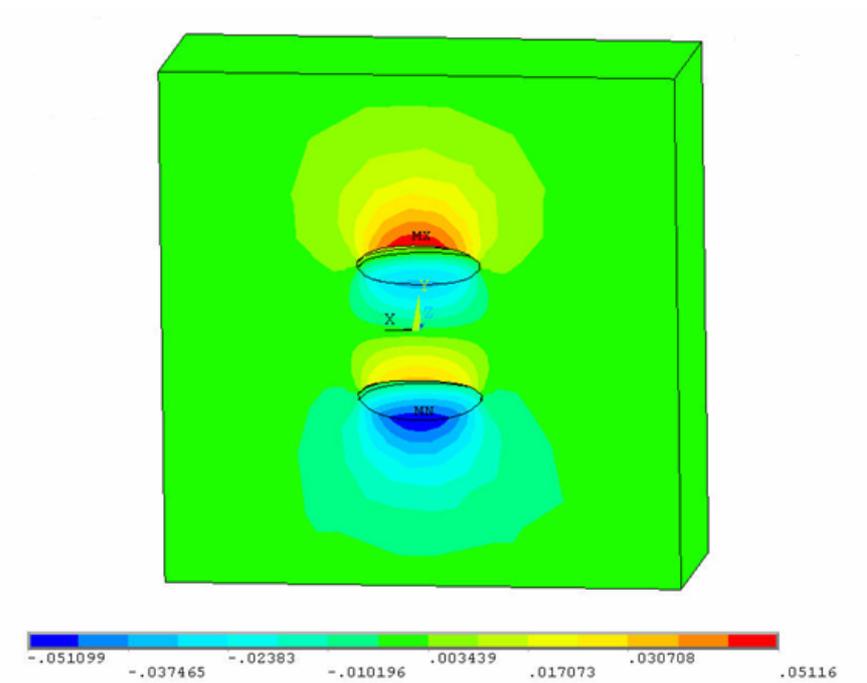


Fig. 6.18: Spostamenti  $u_z$

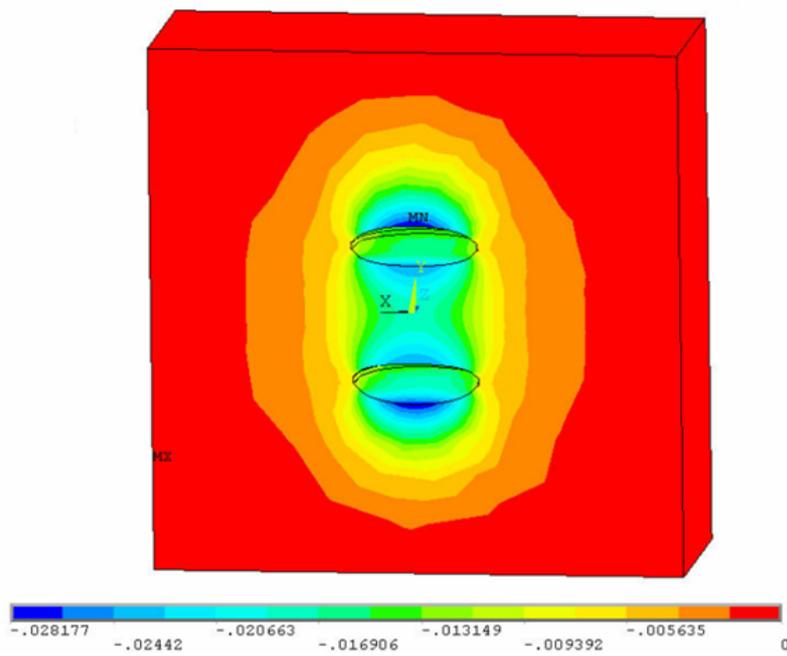


Fig. 6.19: Spostamenti  $u_y$

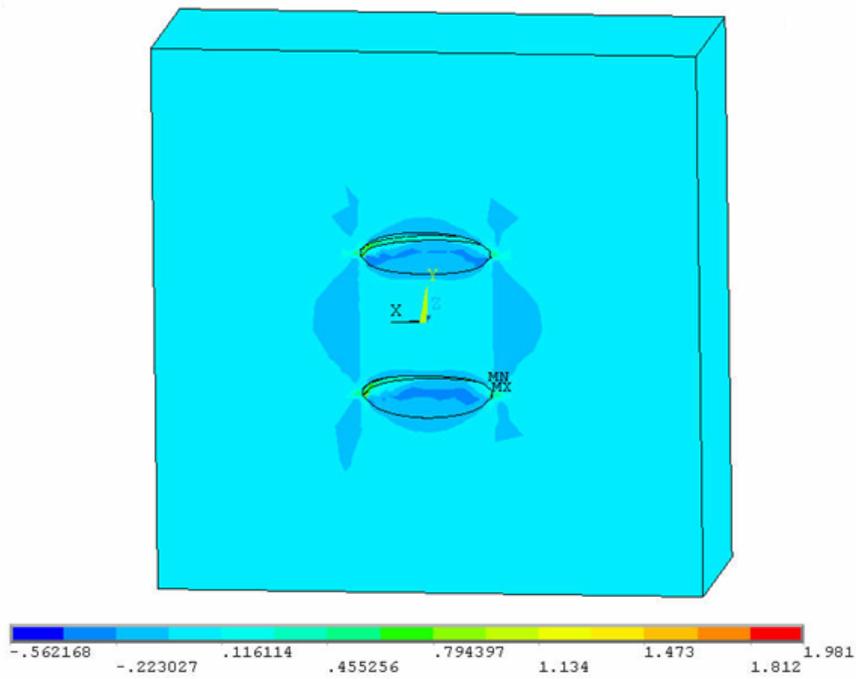


Fig. 6.20: Tensione  $S_x$

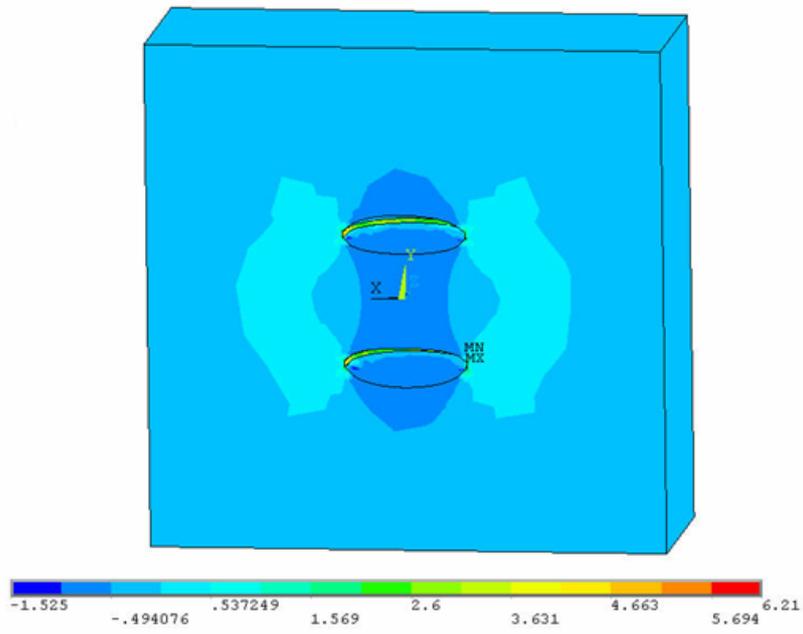


Fig. 6.21: Tensione  $S_z$

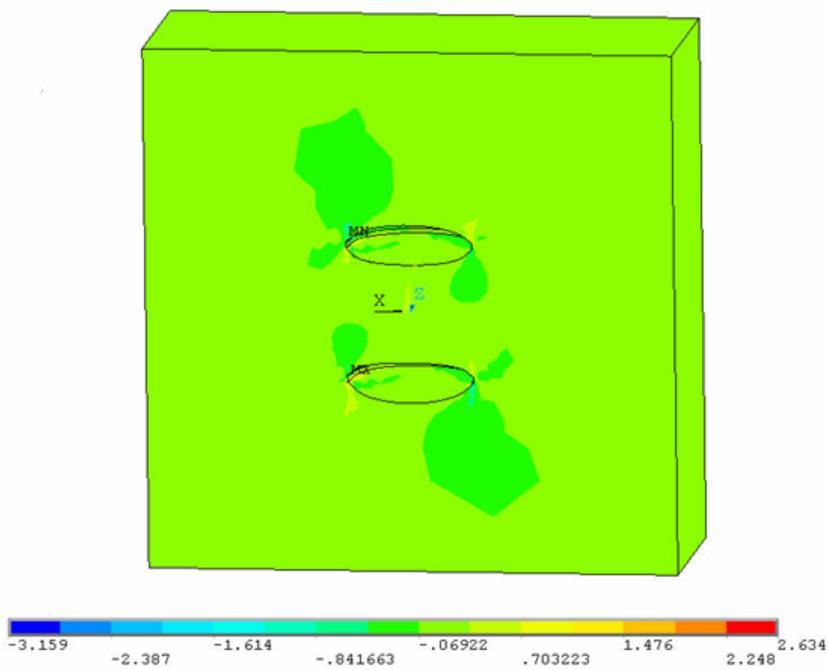


Fig. 6.22: Tensione  $S_{xz}$

## 6.4 CONSIDERAZIONI

Per non rendere computazionalmente molto pesante il modello, si è realizzata, come si può notare dalla fig.6.3 per il modello in 2D e dalla fig.6.15 per il modello in 3d, una mesh molto fitta nelle zone in cui erano stati praticati i tagli e sempre più rada man mano che ci si allontanava da tali zone.

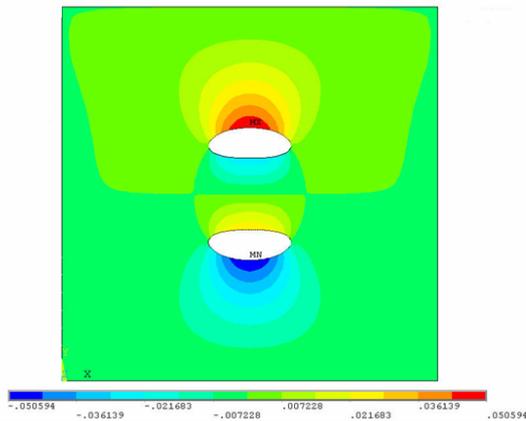
Nella fig.6.4 è rappresentata la deformata del pannello in 2D vincolato da soli incastri a seguito dell'applicazione delle pressioni tramite martinetti, naturalmente il fattore di scala dell'apertura è stato ampiamente ampliato per far notare meglio gli effetti. Si vede, da tale figura, come nella zona compresa tra le due fessure l'apertura risulta più schiacciata rispetto alle zone esterne, questo perché vi è un contrasto tra le pressioni esercitate dai 2 martinetti nella zona centrale. A conferma di ciò basti osservare i valori degli spostamenti nei diagrammi delle figg. 6.5 e 6.6. Stessa cosa, anche se in maniera meno accentuata, la si può dire della deformata del pannello in 3D, rappresentata in fig. 6.16. Prendendo, invece, in considerazione la deformata di fig.6.9, riferita al pannello in cui erano stati posizionati i carrelli lungo i lati, naturalmente le cose cambiano, in essa infatti si nota come, a seguito dell'applicazione del carico uniforme raffigurante la muratura al di sopra della zona di prova, il pannello subisca una compressione, compressione che viene in parte contrastata nella zona centrale dalle pressioni prodotte dal martinetto superiore, in conseguenza di ciò le aperture delle fessure risultano minori rispetto all'altra modellazione.

In termini di tensioni, così come mi aspettavo e come si può facilmente notare in tutti i diagrammi riferiti alle tensioni, i pannelli risultano essere quasi interamente compressi con valori di tutto rispetto nelle zone centrali, i quali vanno, man mano che ci allontaniamo verso le zone periferiche, attenuandosi sino a più o meno annullarsi. Le uniche zone in cui si incontrano tensioni di trazione sono negli angoli delle fessure, tensioni che presentano però valori del tutto non trascurabili, come ci aspettavamo d'altronde visto i risultati in sito.

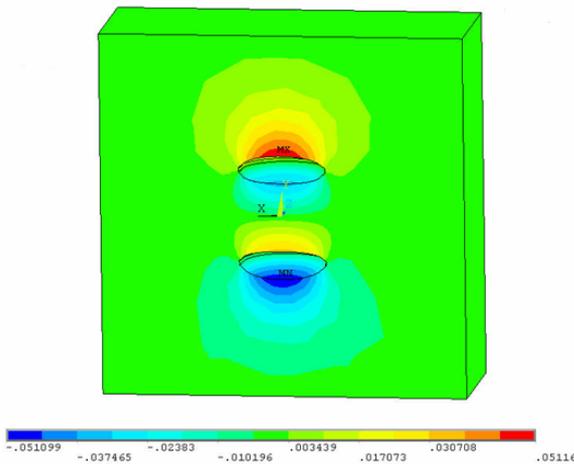
## 6.5 CONFRONTO

Eseguendo un confronto tra le due simulazioni, ed in particolare sul modello tutto incastrato, la prima cosa che salta subito all'occhio è la similitudine delle distribuzioni indotte sia in termini di spostamenti che in termini di tensioni. Da una analisi più attenta si evince, però, che tale similitudine è riferita solo alle distribuzioni, infatti se diamo un'occhiata ai valori numerici, sia degli spostamenti che delle tensioni, notiamo che le grandezze rilevate nel modello 2D risultano essere più grandi rispetto al modello 3D.

Prendiamo ad esempio i diagrammi degli spostamenti verticali qui di seguito riportati:



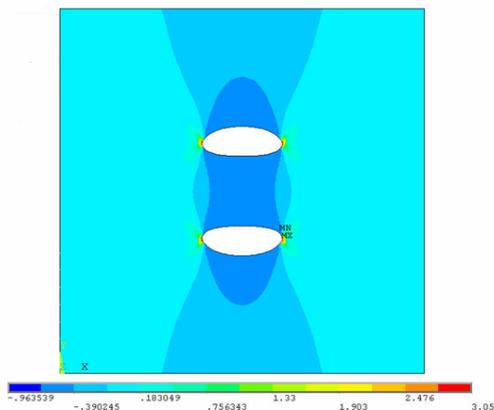
Spostamenti  $u_z$  nel modello 2D



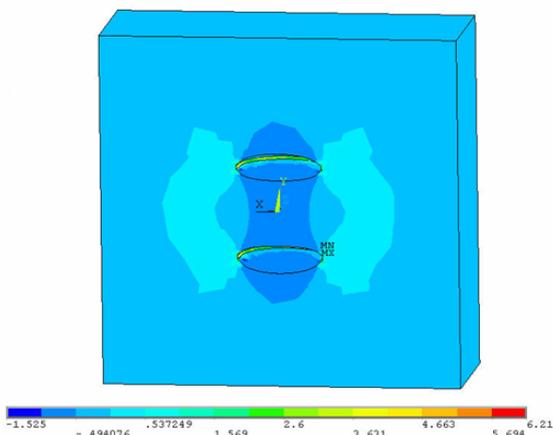
Spostamenti  $u_z$  nel modello 3D

centrando l'attenzione nella zona centrale fra le due fessure, zona in cui era posizionato il deformometro per la lettura degli spostamenti durante le prove in sito con martinetto piatto doppio, si rileva che il valore dello spostamento nel modello 2D è pari a 0,071mm mentre nel modello 3D è pari a 0,055 mm, se consideriamo che lo spostamento rilevato in sito risulta essere di 0,053mm, ci rendiamo subito conto della sovrastima fornita dal modello 2D.

Stessa cosa avviene se prendiamo in considerazione i diagrammi delle tensioni lungo la verticale.



Tensioni  $S_z$  nel modello 2D



Tensioni  $S_z$  nel modello 3D

Questo avviene per un motivo molto semplice, quanto rilevante: nel modello 2D la fessura creata nel pannello murario risulta essere non limitata lungo la direzione Y (limitazione che nella realtà era stata fissata a 26 cm rispetto alla superficie esterna), pertanto il nostro modellino risulta essere vincolato, in tutta la lunghezza lungo Y, solamente lungo i 4 bordi laterali; se invece prendiamo in considerazione il modello 3D, in esso la profondità del taglio effettuato per la realizzazione delle fessure è limitato ai 26 cm, così come da prove in sito, (e già questa risulta essere una migliore rappresentazione del caso reale), ciò comporta una diminuzione della pressione trasferita al pannello dai 2 martinetti.

In conseguenza di ciò, e dal confronto numerico dei risultati ottenuti dalle modellazioni numeriche con quelle ottenute in sito, posso pensare che una modellazione in 2D non rispecchia adeguatamente il fenomeno osservato in sito come lo rispecchia invece una modellazione in 3D.

Nella Tabella 6.1, di seguito riportata, sono evidenziati alcuni dei più rappresentativi risultati ottenuti.

<b>Tabella 6.1: Risultati rappresentativi</b>				
Grandezze rappresentate	Modello 2D		Modello 3D	Da prove in sito
	con incastri e carrelli	con solo incastri	con soli incastri	
$u_x$	0,012 mm	0,015mm	0,010mm	0,006mm
$u_z$	0,045mm	0,071mm	0,055mm	0,053mm
$S_x$	2,2 Kg/cm <sup>2</sup>	3,9 Kg/cm <sup>2</sup>	2,2 Kg/cm <sup>2</sup>	-
$S_z$	7,5 Kg/cm <sup>2</sup>	8,5 Kg/cm <sup>2</sup>	7,0 Kg/cm <sup>2</sup>	-

## Conclusioni

Il lavoro appena presentato rappresenta solo una fase iniziale, essendo abbastanza semplificato, di un'analisi della muratura più raffinata di quella tradizionale, in quanto mette da parte l'utilizzo di regole empiriche per ricorrere ad un modello matematico in grado di modellare i pannelli murari.

Ciò comporta naturalmente un numero maggiore di problematiche. Problematiche che si incontrano durante la fase di modellazione e che si presentano a più livelli.

Prima fra tutte è la scelta della realtà di riferimento, cioè di quello che è stato chiamato modello "*fine*" o "*micro*", nel mio caso ho adottato il modello lagrangiano.

A valle della scelta della realtà di riferimento vi è l'adozione del modello di continuo o "*macro*", in questo caso si è scelto di utilizzare il tradizionale modello di Cauchy.

Fatte queste scelte, si è passato poi all'identificazione del modello macro tramite una procedura costitutiva che, come mostrato nel capitolo 5, mi ha permesso di determinare alcune costanti elastiche del materiale sulla base dei parametri del modello micro.

Da una prima valutazione, questa procedura, ci ha portato ad ottenere delle costanti elastiche che si avvicinano molto a quelle ottenute in sito, tramite prove con martinetto piatto doppio, prove che, come mostrato ampiamente in questa tesi, ed in particolare nel capitolo 4, se realizzate con le opportune precauzioni ed attenzioni, seguendo le direttive e le raccomandazioni fornite dalle RILEM e dalle ASTM, danno risultati che rispecchiano adeguatamente lo stato di fatto della struttura.

Si è mostrato inoltre che una modellazione 3D rispecchia la realtà in maniera più adeguata rispetto ad una modellazione 2D, essa infatti porta a sovrastimare le tensioni trasferite dai 2 martinetti, con la conseguente errata interpretazione dei risultati sperimentali.

La metodologia presentata può essere pertanto considerata come valida e può essere utilizzata per altri progetti eventuali e futuri, naturalmente come punto di partenza, in quanto essendo le analisi svolte elastico-lineari, esse non hanno la pretesa di ricostruire a pieno il comportamento reale della muratura.

## Bibliografia

- [1] G. Uva. “Analisi di pareti murarie, modellazione costitutiva del danneggiamento e strategie numeriche di soluzione”. P.H.D. Thesis, 1997.
- [2] T. Tassios. “Meccanica delle murature”. Liguori Editore, Napoli, 1997.
- [3] E. Giangreco. “Progettazione strutturale” UTET, Torino, 2002.
- [4] R. Egermann. “Investigation on the Load Bearing Behaviour of Multiple Leaf Masonry, IABSE Symposium Structural Preservation”. Roma, 1993.
- [5] A.W. Hendry-B.P. Sinha-S.R. Davies. “Design of masonry structures”. E & FN SPON 1997
- [6] E.Papa, A.Nappi. “A numerical approach for the analysis of masonry structures”.Masonry International, Vol. 7, n.1, pp.18-24, 1993.
- [7] L.Gambarotta, S.Lagomarsino. “Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part, II: the continuum model and its applications”. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 26, pp.441-462, 1997.
- [8] A. Anthoine. “Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory”. International journal of solids and structures, 32, pp.137-163, 1995.
- [9] Binda, L., Mirabella, G, Abbaneo, S., “the Diagnosis Research Project”, Earthquake Spectra, Vol. 10, n. 1, 1994, pp. 151-170.
- [10] Rossi, P.P., “Analysis of mechanical characteristics of brick masonry tested by means of in situ tests”, 6<sup>th</sup> IBMaC, 1982, Rome, Italy.
- [11] Jurina L., Bonaldi P., Rossi P.P., 1980. “Indagini sperimentali e numeriche sui dissesti del

Palazzo della Ragione di Milano”, XIV Congr. Naz. Geotecnica, Firenze.

- [12] Gregorczyk P., Lourenco P.B., “A review on Flat-jack Testing”, *engenharia civil*, num.9, 2000, universidade do Minho Portugal.
- [13] T. G. Hughes, R. Pritchard, “In situ flat jack tests matching new mechanical interpretations”, 10<sup>th</sup> Int. Brick/Block Masonry Conf., Calgary, Canada, 1994
- [14] ASTM, American Society for Testing and Materials, D 4729-04, “Standard test method for in situ stress and Modulus of Deformation using the flat jack method”.
- [15] RILEM Recommendation MDT.D.4-04, “in situ stress tests based on the flat jack”
- [16] RILEM Recommendation MDT.D.5-04, “in situ stress strain behaviour tests based on the flat jack”
- [17] Jurina L. “alcuni recenti sviluppi nella tecnica dei martinetti piatti”, Atti del Conv. Nazio. - la meccanica delle murature tra teoria e progetto – messina 18-20 settembre 1996.
- [18] Rossi P.P., “L’impiego dei martinetti piatti nello studio delle murature”, seminario – Sperimentazione su struttura, attualità ed affidabilità delle metodologie di indagine, Venezia 1993.
- [19] R.Casciaro, V.Sansalone. “Un modello lagrangiano per l’analisi lineare di pannelli murari” febbraio 2000.

# Appendice

## PROCESSO DI DISCRETIZZAZIONE

### A.1 Discretizzazione della struttura

Nel caso di mezzo continuo, la suddivisione in porzioni più semplici si ottiene suddividendo il *dominio di definizione*  $\Omega$  del problema in un numero finito  $N$  di *sottodomini*  $\Omega_e$ , chiamati *elementi finiti*. Detta operazione prende il nome di *discretizzazione del dominio*. I vertici degli elementi finiti sono denominati *nodi* dell'elemento. Gli elementi risultanti dalla suddivisione, di forma semplice e convessa, non si devono sovrapporre, nel senso che detti  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  due elementi generici, la loro intersezione è l'insieme vuoto  $\phi$ :

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$$

oppure al massimo hanno in comune un lato o un vertice (nodo) delle rispettive frontiere. La loro unione è comunque contenuta in  $\Omega$ :

$$\bigcup_{e=1}^N \Omega_e = \Omega$$

Nella seguente figura viene illustrata una suddivisione di domini piani di corpi bidimensionali in elementi finiti. Nelle figg. A.1.a,b il dominio è ripartito in elementi tutti uguali, di forma triangolare e quadrangolare. Il dominio di fig. A.1.c è discretizzato in

elementi finiti triangolari e quadrangolari di forma irregolare. In particolare per l'elemento di fig. A.1.c, con contorno curvilineo, l'*errore di discretizzazione* associato alla suddivisione può essere ridotto infittendo i nodi sul contorno curvilineo.

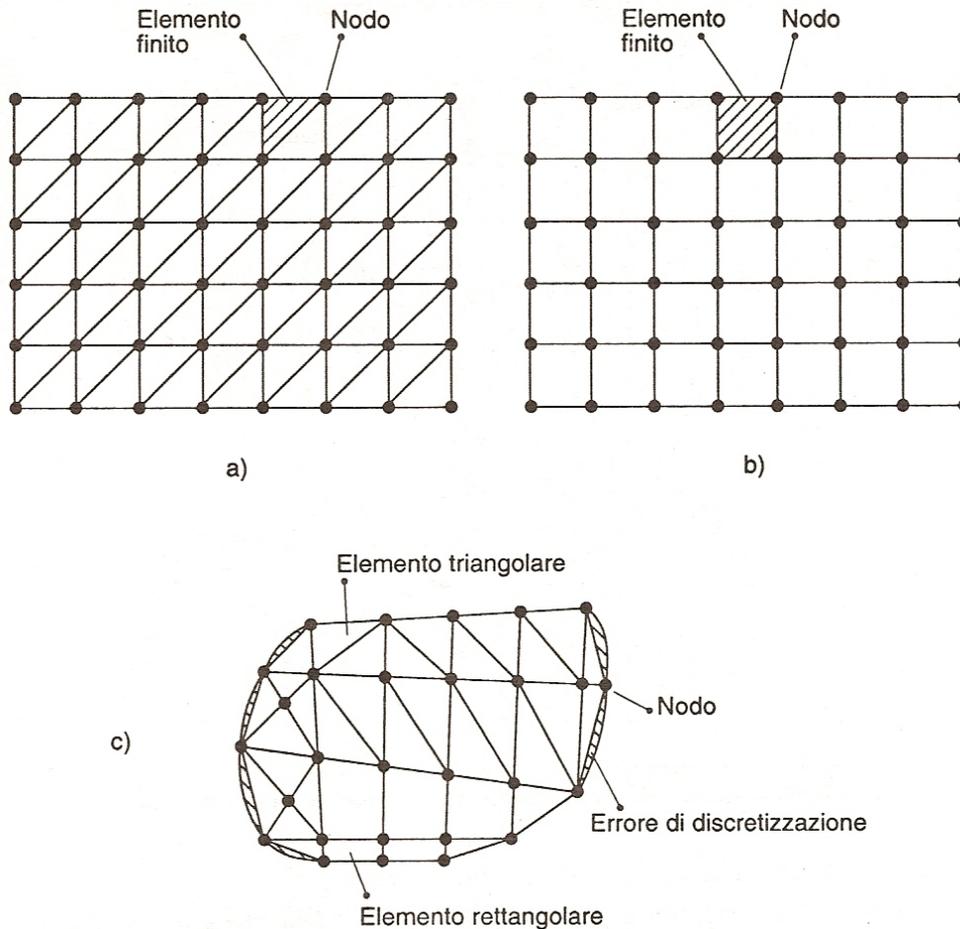


Fig. A1: Discretizzazione di corpi bidimensionali in elementi finiti piani

In linea di principio, la forma degli elementi deve essere semplice, allo scopo di approssimare facilmente domini irregolari. Per questo gli elementi impiegati hanno forma *triangolare* o *quadrangolare*. Inoltre, gli elementi in discorso consentono l'uso di *funzioni interpolanti* semplici.

Con il termine "*mesh*", si indica il complesso degli elementi del dominio, oppure la rete di suddivisione. La rete si dice anche *reticolo*, oppure *griglia*, ed individua le maglie.

Una "*mesh*" si dice regolare, oppure uniforme, quando il dominio risulta discretizzato in elementi finiti uguali.

Osservazione: nelle zone in cui si ha una concentrazione di sforzi, è necessario disporre di un numero di nodi maggiore rispetto al resto del dominio.

## A.2 Elemento rettangolare

### A.2.1 Funzioni di forma

L'elemento rettangolare più semplice presenta quattro nodi ai vertici, ed è dominato elemento rettangolare *lineare* o del *primo ordine*. Esso utilizza come quantità nodali le componenti di spostamento raccolte nel vettore:

$$q^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$$

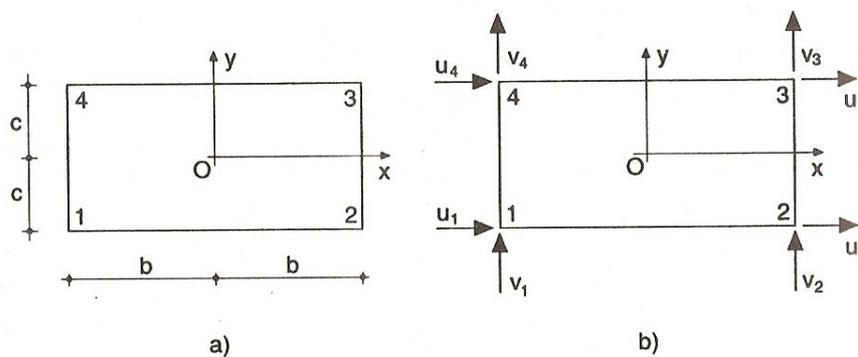


Fig. A.2: Sistema di riferimento e componenti di spostamento nodali per l'elemento rettangolare del primo ordine

Poiché ciascuno dei quattro nodi di vertice ha due gradi di libertà, i campi di spostamento  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  devono essere interpolati da funzioni bilineari, del tipo:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\approx u^*(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &\approx v^*(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \end{aligned}$$

Su ogni lato le funzioni spostamento hanno andamento lineare.

Indicando per semplicità di scrittura

$$\begin{aligned} u^*(x_i, y_i) &= u_i \\ v^*(x_i, y_i) &= v_i \end{aligned}$$

per  $i = 1, 2, 3, 4$ , il valore che la funzione spostamento assume nel generico nodo, risulta:

$$\begin{aligned} u(-b, -c) &= u_1 = \alpha_1 - \alpha_2 b - \alpha_3 c + \alpha_4 bc \\ u(b, -c) &= u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 b - \alpha_3 c - \alpha_4 bc \\ u(b, c) &= u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 bc \\ u(-b, c) &= u_4 = \alpha_1 - \alpha_2 b + \alpha_3 c - \alpha_4 bc \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema nelle incognite  $\alpha_i$  si ha:

$$\alpha_1 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} \qquad \alpha_2 = \frac{-u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4b}$$

$$\alpha_3 = \frac{-u_1 - u_2 + u_3 + u_4}{4c} \qquad \alpha_4 = \frac{u_1 - u_2 - u_3 + u_4}{4bc}$$

che sostituite nelle funzioni bilineari suddette, danno:

$$u = \mathcal{A}_1 u_1 + \mathcal{A}_2 u_2 + \mathcal{A}_3 u_3 + \mathcal{A}_4 u_4$$

Dove le funzioni di forma  $\mathcal{A}_i$  ammettono la seguente rappresentazione:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{4bc} (b-x)(c-y) \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{1}{4bc} (b+x)(c-y)$$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{4bc} (b+x)(c+y) \qquad \mathcal{A}_4 = \frac{1}{4bc} (b-x)(c+y)$$

Analogamente per  $v^*(x_i, y_i)$ , si perviene a:

$$v = \mathcal{A}_1 v_1 + \mathcal{A}_2 v_2 + \mathcal{A}_3 v_3 + \mathcal{A}_4 v_4$$

Il tipico andamento delle funzioni di forma è illustrato nella figura A.3.b. Il grafico di tali funzioni è la superficie di un paraboloido iperbolico.

La generica funzione  $\mathcal{A}_i$  assume il valore 1 in corrispondenza del nodo  $i$ , ed il valore nullo ai restanti nodi:

$$\mathcal{A}_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

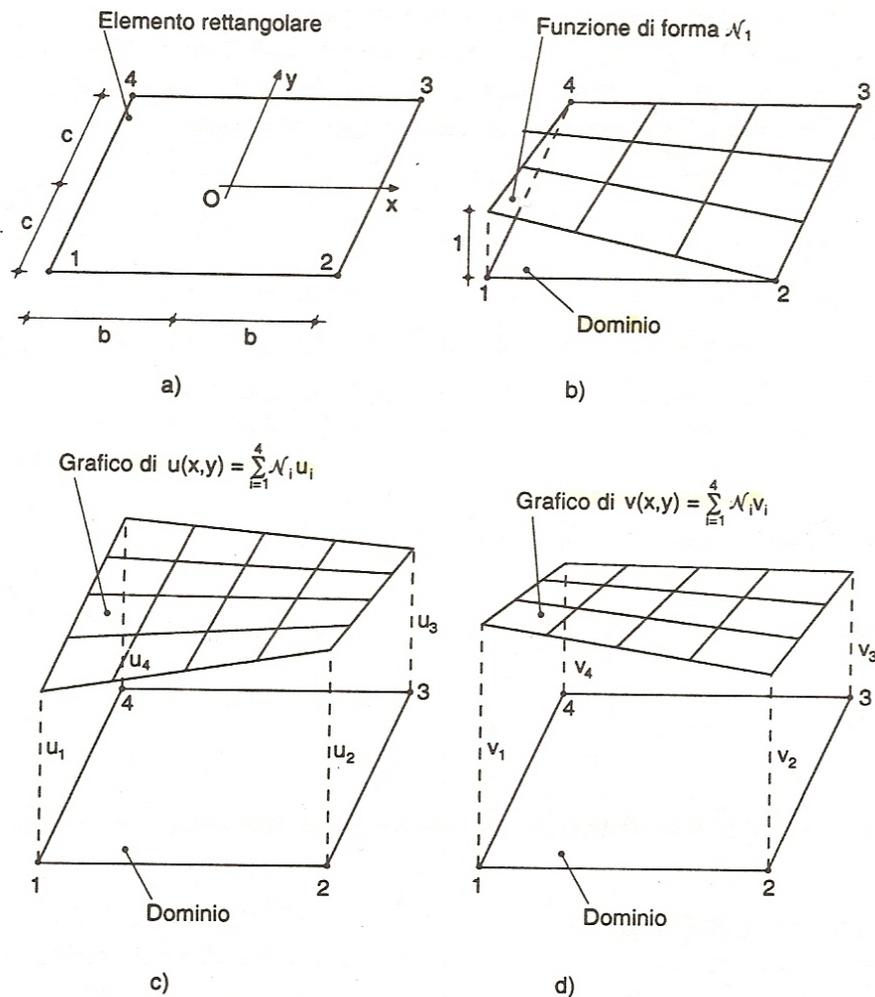


Fig. A.3: Grafici della funzione di forma  $\mathcal{N}_i$  e delle funzioni  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  approssimanti i campi di spostamento sull'elemento rettangolare

### A.3 Elementi finiti di ordine superiore

Bisogna rilevare che un dominio *monodimensionale, piano o tridimensionale*, può essere discretizzato mediante elementi più complessi introducendo *nodì intermedi* lungo i lati, oppure considerando *nodì interni* agli elementi.

In linea di principio, la capacità di approssimare l'andamento effettivo degli spostamenti è legata al grado del polinomio presente nel modello di spostamento.

Per gli elementi rettangolari, una visualizzazione del grado del polinomio in  $x$  e  $y$  approssimante il campo di spostamento, è fornita dal triangolo di Pascal:

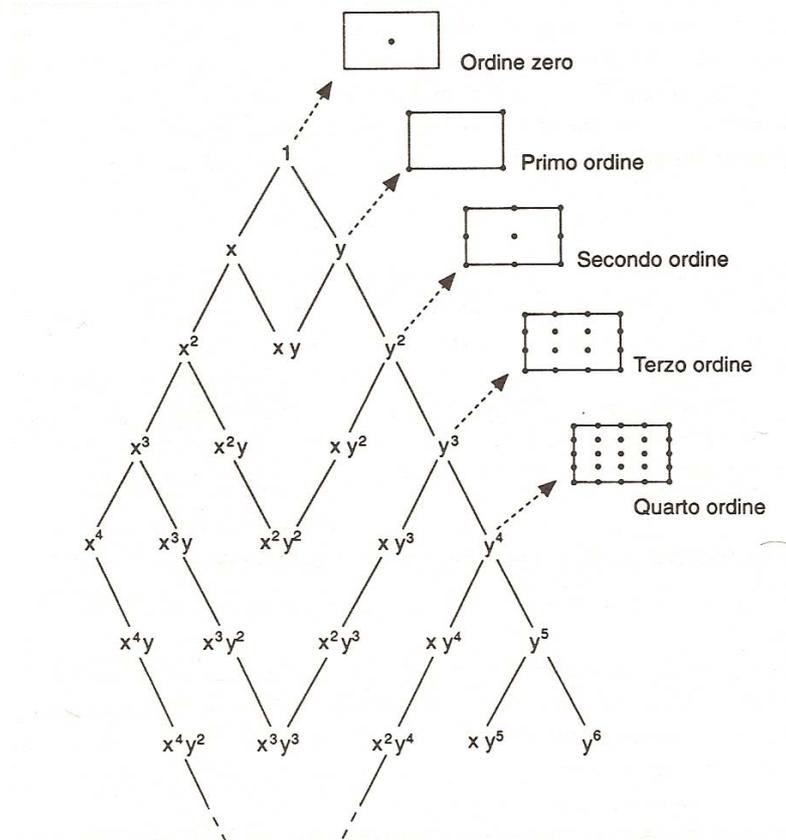


Fig. A.4: Diagramma di Pascal per elementi rettangolari

I termini dei polinomi approssimanti, associati agli elementi rettangolari di vario ordine, possono anche essere disposti secondo i vertici del reticolo a maglie rettangolari, così come nella figura successiva:

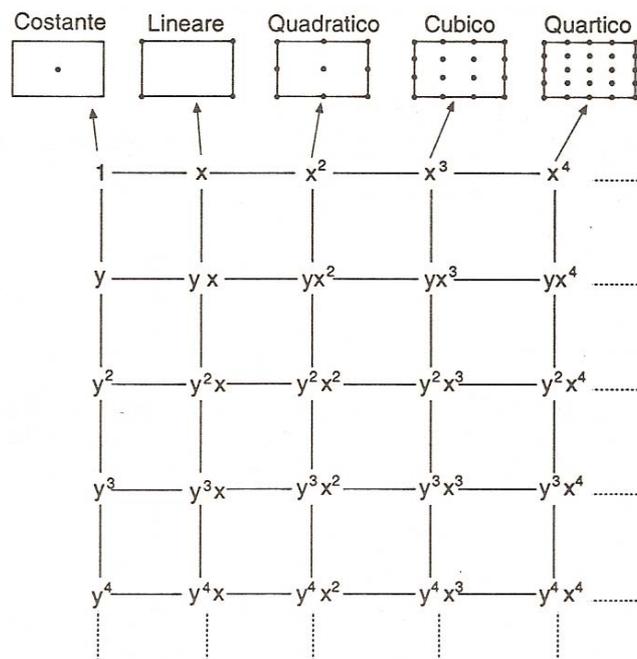


Fig. A.5: Reticolo a maglie rettangolari

