

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei sistemi collisionali

Tesi di laurea

Presentata da:
Stefano Sotira

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno accademico 2017-2018

Sommario

I processi dinamici svolgono un ruolo cruciale nei sistemi astrofisici, in particolar modo nei sistemi collisionali. Le stelle che compongono questi sistemi hanno compiuto molte orbite dalla loro formazione, di conseguenza sono avvenute, tra di esse, numerose interazioni e notevoli scambi di energia. Questi processi tendono ad evolvere il sistema astrofisico verso una distribuzione Maxwelliana dell'energia, come avviene in un gas a densità ordinarie; si vedrà però che i sistemi gravitazionali risentono di questi effetti in maniera molto diversa per alcuni aspetti, rispetto ad un gas in equilibrio termodinamico. Si discuterà di incontri a due corpi, di processi di riscaldamento dinamici e del tempo di rilassamento a due corpi, essenziale per individuare i sistemi collisionali. Dopodichè si approfondirà il comportamento dinamico degli ammassi globulari e la loro evoluzione, essendo essi ottimi candidati come sistemi collisionali. Si vedranno, in particolare, gli argomenti: struttura core-halo, catastrofe gravotermica e core-collapse, oscillazioni gravotermiche.

Indice

Introduzione	1
1 Definire un sistema collisionale	1
1.1 Tempo di rilassamento a 2 corpi	1
1.2 Approssimazione impulsiva	3
1.3 Calcolo del tempo di rilassamento	4
1.4 Tempo di rilassamento in astrofisica	7
2 Evoluzione dinamica degli ammassi globulari	9
2.1 Equipartizione dell'energia	9
2.2 Struttura core-halo	9
2.3 Evaporazione di stelle	10
2.4 Core collapse	11
2.5 Incontri con le binarie primordiali	12
2.6 Oscillazioni gravotermiche	13
Appendice	14
Problema dei due corpi	14
Riferimenti bibliografici	15

Introduzione

In astrofisica un sistema collisionale è un sistema nel quale le interazioni fra gli oggetti massivi che lo compongono, quali stelle, stelle binarie o buchi neri, hanno ridistribuito l'energia cancellando le condizioni iniziali del sistema. Affinchè questo avvenga è necessario che siano trascorsi abbastanza tempi dinamici tipici del sistema. Un tempo dinamico o tempo di attraversamento è un tempo, trascorso il quale, una stella ha completato il percorso della propria orbita attraverso il sistema. Dopo che le stelle hanno compiuto molte orbite, non sentono più un potenziale gravitazionale che può essere approssimato da un potenziale diffuso, come si fa in una galassia, che è un sistema non collisionale. Le stelle, nei sistemi collisionali, come gli ammassi globulari o aperti, sentono un potenziale gravitazionale granulare, ovvero percepiscono il contributo gravitazionale di ogni singola stella.

Considerare tutti gli incontri che ogni stella fa con le altre stelle che incontra lungo il cammino potrebbe essere molto complicato. La teoria cinetica affronta questo problema considerando una stella di prova che nel mezzo, con una certa velocità effettua un urto a due corpi, dopodichè si riconsidera la stessa stella con le stesse condizioni iniziali che sperimenta un urto con una stella diversa dalla precedente e così via; alla fine si sommano tutti questi urti a due corpi. In questo modo si arriva a definire il tempo di rilassamento a due corpi, che ci permette di dire quando un sistema si può considerare in regime collisionale (**collisional**) o in regime non collisionale (**collisionless**).

In questo elaborato si parla indifferentemente di incontri ed urti, per questi ultimi non si intendono urti geometrici, cioè collisioni inelastiche fra stelle, bensì interazioni prodotte dalla forza gravitazionale. Essa essendo una forza a lungo-range agisce anche tra stelle lontane.

Al fine di alleggerire la notazione nelle equazioni e nel testo, i vettori sono indicati con il carattere in grassetto.

1 Definire un sistema collisionale

1.1 Tempo di rilassamento a 2 corpi

Consideriamo in S_0 sistema di riferimento inerziale, una stella chiamata stella di prova (test star) di massa m_t e velocità \mathbf{v}_t ed una distribuzione di stelle omogenea, aventi distribuzione di velocità isotropa chiamate stelle di campo (field star). Due stelle non legate che si incontrano restano non legate e compiono orbite omotetiche, ovvero due curve uguali, l'iperbole, ma con caratteristiche geometriche diverse. In un singolo incontro tra la stella di test e una di campo con massa m_f e velocità \mathbf{v}_f , si ha la seguente relazione (**Appendice**)

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{V}_{cm} + \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}_{rel}$$

Essa lega la velocità della stella di test alla velocità relativa $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_t$, ovvero la velocità della stella di test vista dal sistema di riferimento della stella di campo, e alla velocità del centro di massa dei due corpi definita come:

$$\mathbf{V}_{cm} = \frac{m_t \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{v}_f}{M}$$

Con $M = m_t + m_f$ si indica la massa totale dei due corpi e con μ la massa ridotta definita come

$$\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}.$$

Per studiare le conseguenze dell'incontro, si consideri la variazione di velocità della stella di prova $\Delta \mathbf{v}_t$ che avviene durante l'urto $\Delta \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t,f} - \mathbf{v}_{t,i}$, vettore differenza tra la velocità finale e iniziale nel sistema S_0 . Si prende come velocità iniziale la velocità che la stella di test ha quando essa si trova a distanza infinita dalla stella di campo, analogamente si prende come velocità finale la

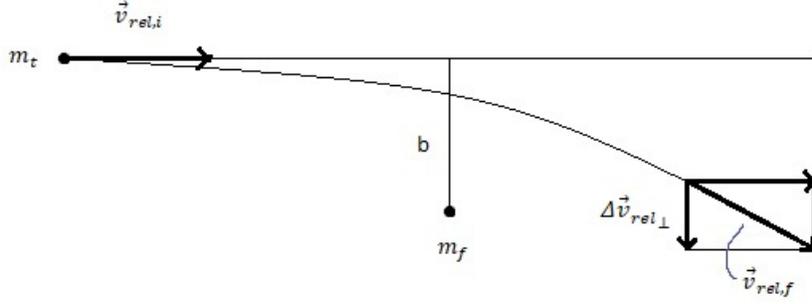


Figura 1: Traiettoria iperbolica vista dal sistema di riferimento della particella di campo m_f . Le norme della velocità relativa iniziale e finale sono uguali.

velocità che la stella ha quando ritorna a distanza infinita dopo l'urto; in queste due situazioni la forza gravitazionale è nulla. Estendendo a tutti i vettori dell'equazione si ha

$$\Delta \mathbf{v}_t = \Delta \mathbf{v}_{cm} + \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v}_{rel}$$

La velocità del centro di massa non cambia durante l'interazione, poichè il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, dunque $\Delta \mathbf{v}_{cm} = \mathbf{0}$. Si ottiene

$$\Delta \mathbf{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v}_{rel}$$

Questo risultato indica che la variazione di velocità della stella di prova in S_0 e la variazione di velocità della stessa, vista dal sistema di riferimento della stella di campo, sono parallele sebbene \mathbf{v}_t e \mathbf{v}_{rel} potrebbero avere direzioni completamente diverse.

Come conseguenza della conservazione dell'energia totale del sistema durante l'urto, si ha che la norma della velocità relativa iniziale e finale non cambia. Scomponiamo la velocità relativa finale in due componenti(**figura 1**): la prima parallela alla velocità relativa iniziale, l'altra perpendicolare ad essa e quest'ultima la si indica con $\Delta \mathbf{v}_{rel\perp}$, cioè la componente perpendicolare alla velocità relativa iniziale del vettore variazione della velocità relativa.

Si indica con b il parametro d'urto o d'impatto, definito come la distanza minima a cui si incontrerebbero le stelle se non interagissero. Se la forza è attrattiva come nel caso gravitazionale le stelle si avvicinano ad una distanza minore di b (o come nel caso bremsstrahlung elettrone-protone) mentre se la forza è repulsiva la distanza minima a cui si avvicinano le stelle è maggiore di b (come nel caso bremsstrahlung elettrone-elettrone o protone-protone). Il parametro d'urto è legato al momento angolare dell'orbita relativa dalla relazione $\|\mathbf{J}\| = \mu b \|\mathbf{v}_{rel,i}\|$, dove con $\|\mathbf{J}\|$ si è indicata la norma del vettore momento angolare.

Si pone l'attenzione alla componente perpendicolare alla direzione della velocità relativa iniziale del vettore variazione di velocità della particella di prova, che si indica con $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$. Si ha dunque:

$$(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp = \frac{\mu}{m_t} \Delta \mathbf{v}_{rel \perp}$$

Data la simmetria vale la seguente proprietà: per una stella di test immersa in un mezzo omogeneo e isotropo di stelle di campo, la somma vettoriale dei $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ su tutti gli urti è zero.

$$(\Delta \mathbf{v}_t)_{cross} = 0$$

dove $()_{cross}$ significa "media su tutti gli urti in un attraversamento". Il risultato si basa sulle assunzioni fatte riguardo le stelle di campo. A causa della distribuzione omogenea e isotropa, non si ha una concentrazione maggiore di stelle in una regione ed esse non hanno una direzione privilegiata di velocità; queste condizioni non renderebbero più valida la suddetta proprietà.

Si pone la nostra attenzione sulla somma dei quadrati dei $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ per poter individuare l'energia cinetica perpendicolare alla velocità relativa iniziale, K_\perp , che la particella acquista nei vari urti, ovvero

$$K_\perp = \frac{m_t}{2} \sum_{all \ enc.} \|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli urti (all encounters). Quando questo valore è dell'ordine dell'energia cinetica iniziale che aveva la particella in S_0 cioè:

$$K_i = \frac{m_t}{2} \mathbf{v}_i^2$$

è passato un tempo di rilassamento a 2 corpi. Un'altra proprietà dimostrabile è che, passato un tempo di rilassamento a due corpi, il valor medio d'aspettazione degli angoli di deflessione della stella di prova è $\pi/2$. Infatti l'orbita ha acquistato perpendicolarmente alla velocità relativa tanta energia cinetica quanto ne aveva prima in direzione della propria velocità iniziale. Si può dire, tra virgolette, che è avvenuta l'equipartizione dell'energia tra le direzioni di velocità della stella di prova dovuta ai vari urti. Quindi passato un tempo di rilassamento a due corpi, l'orbita della stella di prova si è dimenticata delle condizioni iniziali di velocità. Calcolare il t_{2b} per un oggetto astrofisico come una galassia o un ammasso globulare significa stimare quando esso perde memoria delle condizioni iniziali.

A causa di queste considerazioni il tempo di rilassamento a due corpi definisce un sistema collisionale. In astrofisica si ha, indicando con t_{age} l'età dell'oggetto:

$$t_{age} \gg t_{2b} \quad \text{ sistema collisionale}$$

$$t_{age} \ll t_{2b} \quad \text{ sistema non collisionale}$$

Ovviamente i due concetti sono relativi: ogni sistema gravitazionale, se guardato sufficientemente a lungo, è collisionale. Il tempo di rilassamento a due corpi non è una separazione netta infatti le difficoltà sorgono quando $t_{age} \simeq t_{2b}$. Nella prossima sezione si introduce un'approssimazione che permette di calcolare facilmente il tempo di rilassamento a due corpi.

1.2 Approssimazione impulsiva

Per il calcolo del tempo di rilassamento a due corpi si fa un'approssimazione chiamata approssimazione di Born o **approssimazione impulsiva**, per evitare di risolvere l'equazione dell'orbita relativa

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_i m_f}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

e trovare successivamente il $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$. Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

Si può scrivere per forze all'incirca costanti nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\mathbf{p}_\perp \approx \mathbf{F}_\perp \Delta t$$

dove si sono considerate solo le componenti perpendicolari alla velocità relativa iniziale. Si considera la componente perpendicolare alla velocità iniziale della quantità di moto della particella di massa fittizia μ , prodotta dall'azione di tutte le forze perpendicolari. A queste forze si sostituisce una forza caratteristica: la forza gravitazionale agente a distanza b . Si ha dunque

$$\mu \|\Delta \mathbf{v}_{rel,\perp}\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \Delta t$$

All'intervallo di tempo si sostituisce un tempo caratteristico. Per individuare un tempo scala del problema si utilizza la lunghezza e la velocità a disposizione cioè b e \mathbf{v}_{rel} , da cui

$$\Delta t \approx \frac{b}{\|\mathbf{v}_{rel}\|}$$

stima della durata dell'interazione. L'analisi teorica mostra che, per avere un risultato asintoticamente corretto, la durata dell'interazione è il doppio della precedente, quindi

$$\Delta t \sim \frac{2b}{\|\mathbf{v}_{rel}\|}$$

Da cui segue

$$\mu \|\Delta \mathbf{v}_{rel,\perp}\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{b \|\mathbf{v}_{rel}\|}$$

Questa formula è asintoticamente corretta; se si espande in serie per $b \gg 1$ e $\|\mathbf{v}_{rel}\| \gg 1$ l'equazione ottenuta dal calcolo rigoroso, il primo termine dell'espansione equivale al membro di destra del risultato di Born. Quindi la formula è tanto esatta, quanto più il parametro d'impatto e la velocità relativa sono grandi, ovvero per grandi valori di momento angolare dell'orbita relativa, per parametri d'impatto piccoli la formula non vale più.

Elevando al quadrato e considerando l'equazione che lega $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ e $\Delta \mathbf{v}_{rel,\perp}$ si ha

$$\|(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp\|^2 = \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}_{rel}\|^2}$$

1.3 Calcolo del tempo di rilassamento

Si può passare ora al calcolo del tempo di rilassamento. Si è focalizzata l'attenzione su $(\Delta \mathbf{v}_t)_\perp$ per poter trovare l'incremento di energia cinetica perpendicolare alla velocità relativa iniziale, K_\perp , e la sua variazione ΔK_\perp . Si ricorda

$$K_\perp = \frac{m_t}{2} \sum_{all\ enc.} \|(\mathbf{v}_t)_\perp\|^2$$

dove la sommatoria è estesa su tutti gli urti.

L'ipotesi che la distribuzione delle stelle di campo sia **omogenea** e **isotropa** si può scrivere matematicamente definendo la loro funzione di distribuzione come

$$f(\mathbf{x}_f, \mathbf{v}_f) = n_f g(\|\mathbf{v}_f\|)$$

dove n_f è la concentrazione di stelle di campo, ovvero numero di stelle per unità di volume, che per ipotesi non dipende dalla posizione. $g(\|\mathbf{v}_f\|)$ è la funzione di distribuzione delle velocità e per ipotesi, dipende solo dal modulo della velocità e non dalla direzione, in quanto tutte le direzioni sono equiprobabili.

Consideriamo una stella con velocità data, \mathbf{v}_f , quindi $\|\mathbf{v}_{rel}\| = \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|$. Di stelle con questa velocità ce ne sono $n_f g d^3 \mathbf{v}_f$. A distanza b ne incontra $2\pi b db$ poichè n_f è costante. La stella percorre

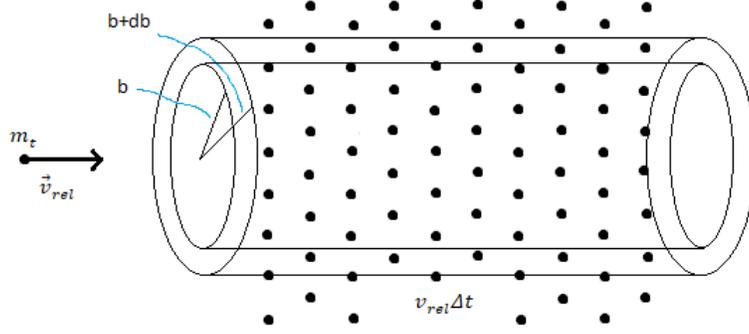


Figura 2: Stelle di campo con una certa velocità \mathbf{v}_f . Gli urti che compaiono nella sommatoria, per ora, sono solo quelli che avvengono con stelle comprese nella corona cilindrica di circonferenza interna $2\pi b$ e circonferenza esterna $2\pi(b + db)$. Le stelle di campo sono state disegnate per dare un'idea di omogeneità nella disposizione, ma in realtà sono distribuite tridimensionalmente. Nel disegno compaiono solo quelle con velocità \mathbf{v}_f che appaiono ferme viste dal loro sistema di riferimento.

nel mezzo una distanza $v_{rel}\Delta t$ dove $v_{rel} = \|\mathbf{v}_{rel}\|$. Quindi la sommatoria dei $\|(\mathbf{v}_t)_\perp\|^2$ della stella di test, estesa su tutti gli urti con un dato parametro d'impatto b , con particelle di campo aventi una data velocità \mathbf{v}_f è

$$\sum_{all\ enc.\ (b),(\mathbf{v}_f)} \|(\mathbf{v}_t)_\perp\|^2 = \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|^2} n_f g 2\pi b db d^3 \mathbf{v}_f \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\| \Delta t$$

Si può illustrare questo scenario con la corona cilindrica di raggio interno b e raggio esterno $b + db$ e lunghezza $v_{rel}\Delta t$ (**figura 2**), ricordando che questo cilindro ha una direzione data da \mathbf{v}_f e che quindi ogni altra popolazione di stelle con diverse velocità ha un cilindro di diversa lunghezza e orientazione.

Ordinando e semplificando si ottiene

$$\frac{\sum_{all\ enc.\ (b),(\mathbf{v}_f)} \|(\mathbf{v}_t)_\perp\|^2}{\Delta t} = \frac{8\pi G^2 m_f^2 n_f}{b \|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|} g(\|\mathbf{v}_f\|) db d^3 \mathbf{v}_f$$

a meno di un fattore $m_t/2$, si ha il rate di riscaldamento (aumento di energia cinetica) perpendicolare dovuto agli urti con stelle di campo con velocità \mathbf{v}_f e ad una distanza compresa tra b e $b + db$. Se ora si somma su tutte le stelle di campo, cioè si considerano tutte le velocità e tutti i parametri d'impatto, si avrà il rate di riscaldamento totale.

Integrando su tutte le velocità delle particelle di campo, omettendo quel che non dipende da \mathbf{v}_f , si ha

$$\int_0^\infty \frac{g(\|\mathbf{v}_f\|) d^3 \mathbf{v}_f}{\|\mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f\|} = \psi(\|\mathbf{v}_t\|)$$

dove $\psi(\|\mathbf{v}_t\|)$ è il potenziale di Chandrasekhar ed è analogo al potenziale gravitazionale nello spazio delle velocità, nel punto \mathbf{v}_t dall'origine, di un sistema a simmetria sferica. Esso dipende solo dalla norma di \mathbf{v}_t . ψ come il potenziale gravitazionale ha un termine dominante di monopolo quando si è molto lontani dall'origine, cioè ad alte velocità. In queste condizioni si ha $\psi \sim 1/\|\mathbf{v}_t\|$, quindi più la stella di prova è veloce minore energia cede alle stelle di campo nell'unità di tempo.

Integrando per tutti i parametri d'urto, omettendo quel che non dipende da b si ha

$$\int_0^\infty \frac{db}{b}$$

l'integrale diverge in ambo le direzioni, questa divergenza è famosa tanto da avere un nome: per urti a distanza zero si ha la **divergenza ultravioletta** per urti a distanza infinita si ha la **divergenza infrarossa**, questi nomi sono dovuti al processo di bremsstrahlung. Come già accennato ad esso si applica la stessa trattazione, a patto di sostituire la forza gravitazionale con la forza di Coulomb e le masse con l'inverso delle cariche; nei prossimi paragrafi si analizzano in dettaglio queste divergenze e come risolverle.

Divergenza ultravioletta Nel bremsstrahlung una particella carica che viene accelerata da un'altra emette radiazione, il picco di emissione si ha nel momento in cui la particella ha la massima accelerazione. Ad accelerazioni maggiori, quindi a distanze minori, l'intervallo di frequenza in cui si ha il picco d'emissione si sposta a valori più elevati di frequenza. Secondo la formula precedente una particella che passa vicino un'altra a distanza nulla dovrebbe emettere infinitamente nell'ultravioletto, cosa ovviamente impossibile. Infatti la formula non vale sempre; si è detto precedentemente che non vale per parametri d'urto piccoli a piacere, tanto meno per $b = 0$. Da un'analisi rigorosa, ovvero dagli ordini successivi dell'approssimazione di Born, si ha (dove come limite superiore si prende il raggio R del sistema e se ne discuterà nel prossimo paragrafo)

$$\int_0^R \frac{bdb}{b^2 + b_{90}^2} = \frac{1}{2} \ln(b^2 + b_{90}^2)|_0^R = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{R^2}{b_{90}^2} + 1\right)$$

dove b_{90} è il parametro d'urto per il quale v_{rel} ruota di 90° . Il rapporto R/b_{90} è chiamato Λ e per $R \gg b_{90}$ il logaritmo tende a $\ln \Lambda$ ed è chiamato **logaritmo di Coulomb**.

Divergenza infrarossa Analogamente al caso precedente una particella carica che emette per bremsstrahlung dovrebbe emettere infinitamente nell'infrarosso a causa delle interazioni con particelle lontane. In fisica del plasma si risolve questo problema considerando come limite superiore dell'integrale il raggio di Debye, che ad una determinata temperatura e densità è il raggio per il quale al di fuori della sfera le cariche si neutralizzano e la particella constata un plasma neutro. In gravità suddetto raggio non esiste e questo paradosso si risolve considerando che l'universo non è né euclideo né eterno né infinito. Considerando un sistema isolato si prende come limite superiore il raggio del sistema R .

Dunque si ottiene

$$\frac{d(K_t)_\perp}{dt} = \frac{m_t}{2} 8\pi G^2 m_f^2 n_f \psi(\|v_t\|) \ln \Lambda$$

Si definisce il tempo di rilassamento a due corpi come il rapporto tra l'energia cinetica iniziale della stella rispetto alla variazione nel tempo di essa in direzione perpendicolare alla velocità relativa iniziale

$$t_{2b} = \frac{K_i}{\dot{K}_\perp}$$

Si ha quindi

$$t_{2b} = \frac{\|\mathbf{v}_t\|}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \psi(\|v_t\|) \ln \Lambda}$$

(D'ora in avanti si scriveranno degli $=$ al posto dei \sim che dovrebbero comparire nelle formule, in quanto il risultato vale solo asintoticamente).

1.4 Tempo di rilassamento in astrofisica

Consideriamo una sistema sferico autogravitante omogeneo e isotropo di raggio R e massa totale M di N stelle, considerate come oggetti puntiformi di massa m_f . Se il sistema è all'equilibrio vale il teorema del viriale:

$$2K = -U$$

dove U è l'energia gravitazionale. Da cui

$$2\frac{3}{2}M\sigma^2 = \frac{GM^2}{R}$$

dove σ è la dispersione di velocità media unidimensionale, che è stata moltiplicata per 3 considerando le tre dimensioni. Si ha quindi

$$\sigma^2 = \frac{GM}{R}$$

Si prende questo valore come norma quadra di \mathbf{v}_t , $\|\mathbf{v}_t\|^2 = \sigma^2$ e si stima $\psi = 1/\|\mathbf{v}_t\|$. Si ha dunque

$$t_{2b} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda}$$

Riconsiderando σ^2 come $\sigma^2 = Gm_f/b_{90}$ si ha

$$\ln \frac{R}{b_{90}} = \ln \frac{R\sigma^2}{Gm_f} = \ln \frac{R\sigma^2 N}{Gm_f N} \approx \ln N$$

Sostituendo n_f da $n_f = \frac{N}{4/3\pi R^3}$ e dopo un pò di passaggi algebrici si ha

$$t_{2b} = \frac{2NR}{12\sigma \ln N}$$

Se si considera il tempo in cui le stelle attraversano il sistema ovvero $t_{dyn} = 2R/\sigma$ si ha

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{N}{12 \ln N} \approx \frac{0.1N}{\ln N}$$

Per una galassia assumendo un numero di stelle $N = 10^{11}$ da cui $\ln N \approx 10$ si ha $t_{2b} \approx 10^9 t_{dyn}$, cioè è passato un tempo di rilassamento dopo che le stelle hanno compiuto un miliardo di attraversamenti del mezzo. Considerando una stella come il sole a distanza di circa $R = 8 \text{ Kpc}$ con velocità $\sigma = 220 \text{ Km/s}$ quindi con $t_{dyn} = 250 \text{ Myr}$ si ha $t_{2b} \approx 10^8 \text{ Gyr}$ lontanissimo dall'età della galassia che si stima in 10 Gyr . Quindi le galassie sono in pieno regime non collisionale. Il tempo di rilassamento può essere valutato per regioni interne alla galassia, il centro della galassia in cui si hanno diverse condizioni di velocità e numero di oggetti è in regime collisionale.

Ammassi globulari e ammassi aperti Gli ammassi stellari sono sistemi stellari che fanno parte di una galassia, essi si dividono in due principali tipologie: ammassi aperti con un numero di stelle $N \simeq 10^2 - 10^4$ e ammassi globulari con $N \simeq 10^4 - 10^6$.

Gli ammassi aperti hanno forma irregolare e si formano continuamente nel disco galattico, la maggior parte di essi non ha più di 1 Gyr . Nella nostra galassia si stima essercene 10^5 . Si pensa che la maggior parte delle stelle nel disco galattico facevano parte di ammassi aperti che sono evaporati.

Gli ammassi globulari sono approssimativamente sferici, essi non contengono gas, né polvere né stelle giovani. La nostra galassia ne contiene 150-200 ma le grandi galassie ellittiche ne possono contenere anche 10000. La maggior parte degli ammassi globulari osservati si trova entro 10 Kpc dal centro della galassia, ma la distribuzione si estende oltre i 50 Kpc .

Diversamente dagli ammassi aperti, essi sono molto vecchi, hanno circa l'età della galassia che li ospita, infatti si crede che essi siano reliquie della formazione della galassia stessa. Per stimare l'età

	globulari	aperti
densità centrale ρ_0	$10^4 M_\odot pc^{-3}$	$10 M_\odot pc^{-3}$
raggio centrale r_c	1 pc	1 pc
raggio effettivo r_h	3 pc	2 pc
raggio limite r_t	35 pc	10 pc
dispersione di velocità centrale σ_0	6 kms ⁻¹	0.3 kms ⁻¹
tempo dinamico r_h/σ_0	0.5 Myr	7 Myr
massa M	$2 \times 10^5 M_\odot$	$300 M_\odot$
età t_{age}	10 Gyr	300 Myr
numero nella nostra galassia	150	10^5

Tabella 1: Valori tipici per ammassi globulari (Harris, 1996) e ammassi aperti (Piskunov et al., 2007)

di questi sistemi si può ricorrere al loro diagramma H-R, essendo le stelle nate complessivamente allo stesso tempo, il diagramma non mostra nessuna stella di sequenza principale oltre il punto di "turn-off", tutte le stelle prima di questo punto hanno lasciato la sequenza principale e sono evolute verso la fase di giganti.

Gli ammassi stellari hanno una densità stellare elevata nel core, ad esempio un tipico valore per la densità centrale, ρ_0 , di un ammasso globulare, è $\rho_0 = 10^4 M_\odot pc^{-3}$ e per un ammasso aperto si ha $\rho_0 = 10 M_\odot pc^{-3}$ dove M_\odot è la massa solare $M_\odot = 2 \times 10^{33} g$. La densità del core è molto più alta della densità media dell'ammasso per questo motivo si hanno modi diversi di definire il raggio. Si ha il raggio centrale (**core radius**) che è il raggio per il quale la brillantezza superficiale è metà del valore che ha nel centro; il raggio effettivo (**half-light radius**), ovvero il raggio che contiene metà della luminosità dell'ammasso; e il raggio limite o mareale (**limiting o tidal radius**) il limite dell'ammasso oltre il quale la densità scende a zero. Valori tipici degli ammassi globulari e ammassi aperti si possono visualizzare nella **tabella 1**.

Gli ammassi globulari sono inoltre dinamicamente vecchi, una tipica stella di un ammasso globulare ha compiuto molte orbite da quando l'ammasso è stato formato. La caratteristica di essere sferici, e non avere polvere o stelle giovani che oscurano e confondono le osservazioni li rende dei sistemi molto semplici, inoltre la caratteristica di essere dinamicamente vecchi li rende la miglior realizzazione fisica del problema degli N-corpi, cioè lo studio dell'evoluzione di un sistema di N punti massivi interagenti solo tramite l'azione della forza gravitazionale.

Per stimare il tempo di rilassamento per queste due tipologie di sistema stellare si utilizza per gli ammassi aperti un numero di stelle $N = 10^3$ e tempo dinamico $t_{dyn} \approx 10^7 yr$ si ottiene $t_{2b} = 10^8 yr$, che spiega il perchè la maggior parte di essi non è più vecchia di $10^9 yr$ essendo già passati in questo arco di tempo alcuni tempi di rilassamento a due corpi. Situazione che ha portato all'evaporazione delle stelle; inoltre per questi sistemi vi sono altre cause che hanno portato alla distruzione dell'ammasso, quali gli shock gravitazionali che esso subisce passando attraverso una nube di gas interstellare del disco.

Per gli ammassi globulari invece considerando $N = 10^5$ e $t_{dyn} \approx 10^6$ si ha $t_{2b} = 10^9 yr$ quindi dato che $t_{age} = 10 Gyr$, essi sono in regime collisionale.

In **figura 3** si possono vedere alcuni tempi di rilassamento degli ammassi globulari (istogramma bianco) e delle galassie (istogramma scuro).

Si vedono ora in dettaglio alcuni processi dinamici che avvengono durante l'evoluzione di un ammasso globulare.

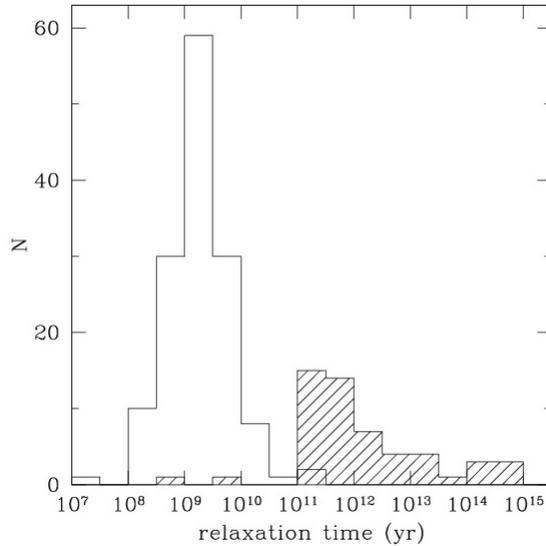


Figura 3: Distribuzione dei tempi di rilassamento per 141 ammassi globulari della nostra galassia (istogramma bianco) e 53 galassie vicine (istogramma scuro). I risultati per gli ammassi globulari sono basati sul catalogo di Harris (1996), quelli delle galassie sul campione di Faber et al.(1997).

2 Evoluzione dinamica degli ammassi globulari

La formazione degli ammassi globulari non è ancora stata compresa fino in fondo, quindi non si sa molto sulle possibili condizioni iniziali dell'ammasso. Il rilassamento tende a cancellare le condizioni iniziali perciò si può studiare l'evoluzione per ampi range di condizioni iniziali. I processi dinamici dell'evoluzione dell'ammasso si studiano separatamente, ma bisogna pensare che alcuni di essi avvengono contemporaneamente durante il tempo di vita dell'ammasso.

2.1 Equipartizione dell'energia

Un tipico sistema stellare contiene un vasto intervallo di masse differenti. Dalla teoria cinetica elementare si sa che gli urti producono l'equipartizione dell'energia cinetica: in media una particella con maggiore energia cinetica, cede energia alle particelle con minore energia cinetica. Nei gas ordinari questo conduce ad uno stato nel quale la velocità media delle particelle è proporzionale all'inverso della radice della massa $\bar{v} = \sqrt{3kT/m}$ dove k è la costante di Boltzmann.

Nei sistemi stellari le stelle massive che cedono energia cinetica cadono in fondo alla buca di potenziale, occupando le regioni centrali, mentre le stelle di piccola massa che acquistano energia si diffondono nelle regioni esterne dell'ammasso, dove c'è una minore dispersione di velocità. Esse, infatti, avendo i pericentri dell'orbita nelle zone centrali aumentano la dispersione di velocità in questa zona, nonostante le stelle pesanti che la compongono hanno velocità basse. Quando si guarda nelle regioni esterne, invece, si trovano gli apocentri di queste stelle, quindi si osservano stelle più lente.

2.2 Struttura core-halo

L'equipartizione dell'energia come si è visto porta le stelle massive nelle regioni interne e le stelle di piccola massa nelle regioni esterne. Questo porta alla formazione della struttura dinamica chiamata **core-halo**, cioè un nucleo centrale molto denso, approssimabile ad una sfera isoterma, con distribuzione di velocità all'incirca isotropa, nel quale si ha un alta dispersione di velocità, ovvero

un'alta temperatura, e un alone di stelle di piccola massa rarefatto con bassa dispersione di velocità, quindi bassa temperatura. Si potrebbe fare un analogia con la fase di gigante rossa nell'evoluzione stellare, nucleo denso, caldo ed atmosfera rarefatta, fredda.

Il tempo di rilassamento essendo inversamente proporzionale alla densità, è minore nella zona centrale che si rilassa prima, in questa regione la funzione di distribuzione approssima la distribuzione Maxwelliana. Nelle regioni esterne il tempo di rilassamento è più lungo e gli urti hanno un effetto relativamente piccolo. Come il rilassamento procede, però l'alone è rifornito di stelle provenienti dal core che hanno aumentato la loro energia. Queste stelle rimaste legate non possono aver spostato l'orbita interamente nell'alone, anche se l'apocentro dell'orbita può trovarsi nell'alone, il pericentro resta nella zona rilassata centrale, infatti è qui che avvengono gli urti significativi. Alla fine quest'ultima popolazione stellare diventa la componente principale dell'alone, perciò dopo alcuni tempi di rilassamento centrali, anche le proprietà dell'alone sono determinate dal rilassamento e non dalle condizioni iniziali.

2.3 Evaporazione di stelle

Col procedere di questa situazione nel core si ritrova metà della massa dell'ammasso. A causa di questa differenza di densità, il core si considera come un sistema autogravitante, cioè si trascura l'apporto dell'alone all'autogravità del sistema.

Quando le stelle di questa regione passano dal core tolgono energia alle stelle massive che compongono quest'ultimo. Le stelle dell'alone che acquistano energia possono raggiungere un punto in cui hanno una velocità maggiore della velocità di fuga dell'ammasso ed evaporano dal sistema. Considerando un potenziale gravitazionale idealizzato $\phi(r)$, con $\phi(r) = 0$ per $r > R$, cioè fuori dalla sfera e $\phi(r) = \phi_0 = -\bar{v}_e^2/2$ dentro la sfera, per $r < R$. Le stelle evaporeranno se la loro velocità soddisfa la condizione

$$v^2 > \bar{v}_e^2$$

Solitamente sono le stelle con energia quasi nulla che evadono, dopo che acquistano energia positiva a causa di un urto. Questa fuga di stelle non è significativa fino a che l'alone non si sviluppa ed ha un apprezzabile numero di stelle con energia leggermente negativa.

A questo processo, in cui una serie di incontri deboli e relativamente lontani aumentano pian piano l'energia della stella fino a farle avere energia quasi nulla ed un ultimo debole incontro le consente di evadere, si può associare un altro evento in cui un singolo incontro vicino con un'altra stella può produrre una variazione di velocità confrontabile con le velocità iniziali delle due stelle e quindi lasciarne una con velocità maggiore della velocità di fuga. In questo caso si parla di espulsione (**ejection**).

Si è parlato di evaporazione di stelle di un sistema isolato, in realtà gli ammassi globulari non sono isolati ma sono generalmente soggetti alla forza mareale generata dal potenziale gravitazionale della galassia che li ospita, questa condizione favorisce il processo di evaporazione. Una stella che supera il raggio mareale, r_t , evaderà dall'ammasso. Per ottenere un'approssimazione di r_t si consideri la galassia come un punto massivo di massa M_G situato ad una distanza fissa R_G . La forza mareale per unità di massa, F_t , lungo la linea che congiunge questo punto massivo e il centro dell'ammasso, che varia con r è data da

$$F_t = \frac{2rGM_G}{R_G^3}.$$

Questa forza sarà uguale e opposta all'accelerazione verso il centro dell'ammasso di massa M_C quando $r = r_t$ ($a_g = -GM_C/r_t^2$), da cui

$$r_t = \frac{M_C}{2M_G} R_G^3.$$

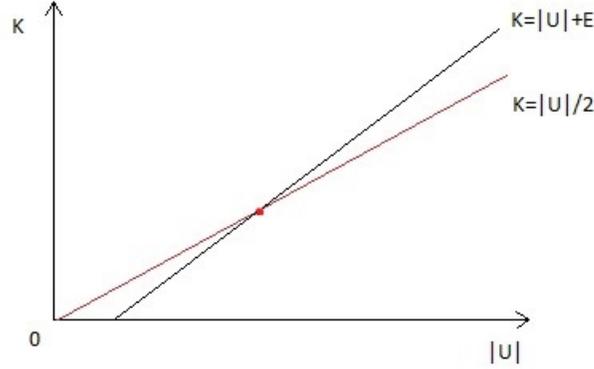


Figura 4: Grafico qualitativo. Il sistema autogravitante all'equilibrio occupa il punto d'intersezione tra la retta del viriale e una delle rette ad energia totale costante negativa.

2.4 Core collapse

L'instabilità della regione isoterma, il core; e il processo di collasso sono gli effetti più significativi nell'evoluzione dell'ammasso. La causa che sta alla base di questo processo è la capacità del calore negativa. Quando il core cede energia all'alone si contrae e si riscalda, invece quando l'alone acquista energia dal core si espande e si raffredda. Di conseguenza l'alone a contatto con il core assume il ruolo di pozzo di calore per il core che continua a cedere energia e a riscaldarsi. Questo processo è chiamato **catastrofe gravotermica** ed avviene per tutti i sistemi autogravitanti, nelle binarie ad esempio la stella più fredda assorbe calore dalla stella più calda, ma quest'ultima invece di raffreddarsi si riscalda e continua a cedere calore. Questa fonte di energia non nasce dal nulla, il processo avviene a scapito dell'energia gravitazionale, la stella più calda dopo aver ceduto calore si contrae e si riscalda.

Queste considerazioni si possono trarre dal teorema del viriale e dalla conservazione dell'energia totale

$$\begin{cases} 2K = -U \\ K + U = E \end{cases}$$

Il sistema all'equilibrio in un grafico $|U|-K$ occupa il punto di intersezione tra la retta del viriale $K = |U|/2$ e una delle rette di energia costante $K = |U| + E$ con energia minore di zero (**figura 4**). Sostituendo K dalla seconda equazione nella prima si ha

$$\begin{cases} U = 2E \\ K = -E \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo si ha

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = 2 \frac{dE}{dt} \\ \frac{dK}{dt} = - \frac{dE}{dt} \end{cases}$$

Il core cede energia, si ha quindi $\frac{dE}{dt} < 0$, di conseguenza si raffredda ma appena torna all'equilibrio sulla retta del viriale, dalla seconda equazione si vede che questo porta ad un aumento dell'energia

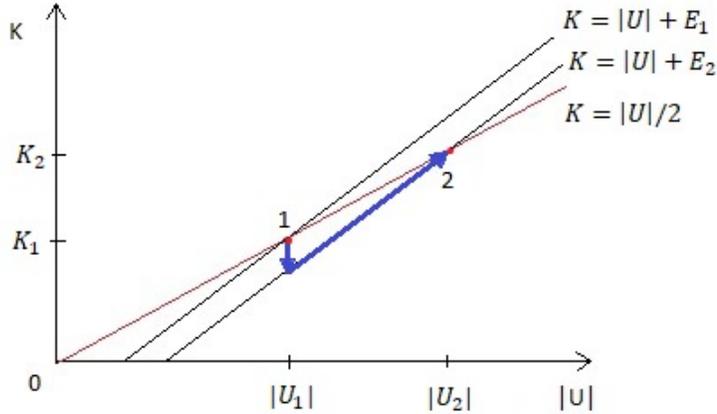


Figura 5: Grafico qualitativo. Il sistema autogravitante all'equilibrio con energia negativa E_1 si trova nel punto 1, dopo aver ceduto energia si ritrova sulla retta di energia E_2 con $E_2 < E_1$, quando mantenendosi sulla stessa retta ritorna all'equilibrio, punto 2 ha maggiore energia cinetica $K_2 > K_1$ e minore energia potenziale (maggiore in modulo $|U_2| > |U_1|$).

cinetica dello stesso fattore ed una diminuzione dell'energia potenziale doppia (**figura 5**). Il sistema quindi sarà più caldo, maggiore energia cinetica, ma più compatto, minore energia potenziale. Le considerazioni appena fatte valgono anche, nel caso inverso, per l'alone esterno. Come esso acquista energia dal core, si raffredda e si espande.

Questo avviene se il tempo dinamico è minore del tempo di raffreddamento cioè il tempo in cui il sistema perde tutta la sua energia. Questa condizione è essenziale in quanto afferma che il sistema torna all'equilibrio, dopo che passano alcuni tempi dinamici, prima di aver perso tutta la sua energia.

Il processo di contrazione del core, chiamato **core collapse**, conduce ad una crescita drammatica della densità centrale che culminerebbe in una singolarità, punto di densità infinita. Questo in realtà viene evitato, poichè ad un certo punto dell'evoluzione dell'ammasso, le stelle dell'alone che passano dal core non acquistano più energia da esso, ma dalle **binarie primordiali** che sono presenti nel core.

2.5 Incontri con le binarie primordiali

Le binarie primordiali si sono prodotte durante la formazione dell'ammasso globulare. Vengono chiamate così per distinguerle da quelle che si creano a seguito dell'aumento di densità del nucleo, per processi dinamici quali la **formazione mareale** o l'**incontro a tre corpi**. Le forze gravitazionali durante gli incontri trasferiscono energia tra le orbite delle binarie e le stelle dell'ammasso. Anche se le binarie sono rare, questi scambi di energia possono alterare molto l'equilibrio energetico dell'ammasso poichè l'energia di legame nell'orbita delle binarie può essere molto maggiore dell'energia cinetica di una stella tipica dell'ammasso. Si consideri, ad esempio, un ammasso globulare di massa $M = 10^5 M_\odot$ con velocità media delle stelle $\bar{v} = 10 \text{ Kms}^{-1}$. Dal teorema del viriale la sua energia di legame è $-\frac{1}{2}M\bar{v}^2 = 10^{50} \text{ erg}$. Un sistema binario costituito da due stelle di $1M_\odot$ con separazione $2R_\odot$ ha un'energia di legame di 10^{48} erg . Quindi 100 binarie di questo tipo contengono la stessa energia di legame dell'intero ammasso.

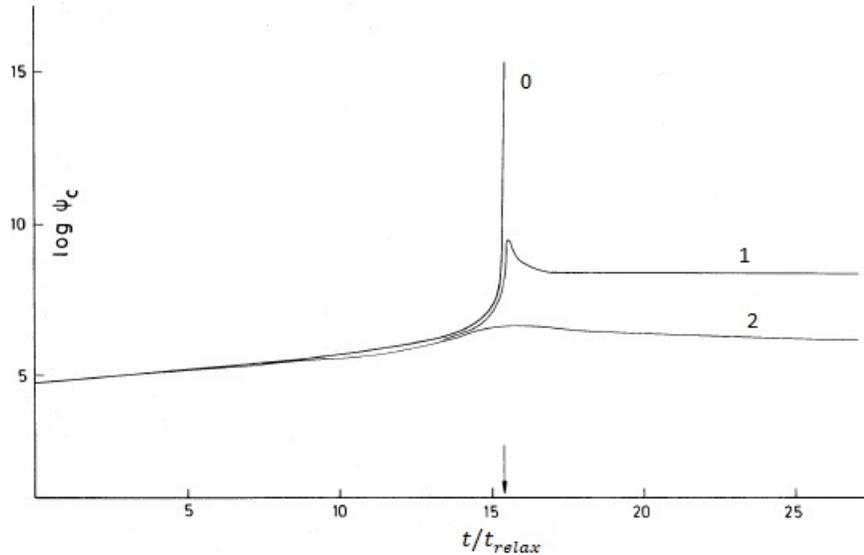


Figura 6: Variazione della densità centrale ψ_0 , rispetto al tempo adimensionale t/t_{relax} per casi estremi. La curva 0 rappresenta la situazione in cui non si ha nessun input di energia mentre le curve 1 e 2 quella in cui si ha un input energetico molto alto. La freccia indica il momento in cui il core collassa senza input energetici per $t/t_{relax} = 15.4$.

2.6 Oscillazioni gravotermiche

Quando il core diventa particolarmente denso, aumenta la probabilità di formazione di sistemi binari. Essi avvengono principalmente per due processi fisici. L'incontro a tre corpi durante il quale, tre stelle si incontrano e due di esse cedono abbastanza energia alla terza. Queste due stelle restano legate se la loro energia totale diventa negativa. La formazione mareale, invece, avviene dopo collisioni vere e proprie tra le stelle, durante queste collisioni le forze mareali possono fare in modo che, ad un successivo passaggio ravvicinato, le due stelle restino legate. Dopo il collasso del core iniziale, diventa dunque importante la fonte di energia delle binarie. Con metodi numerici E. Bettwieser e D. Sugimoto (1983) hanno constatato che dopo il collasso iniziale il core oscilla da uno stato di alta densità ad uno stato di bassa densità. Questa oscillazione ha un'ampiezza di un fattore 10^6 nella densità centrale.

Il collasso accelera fino a che la generazione di energia dovuta alle binarie diviene significativa. Dopo il core smette di contrarsi ed incomincia ad espandersi. L'evoluzione dell'ammasso rallenta, dato che il tempo di rilassamento aumenta come il core si espande.

L'ampiezza e il periodo dell'oscillazione dipende dal rate di generazione dell'energia. Se la generazione di energia è estremamente rapida, l'espansione è altrettanto decisa. In questi casi l'ammasso si espande fino a che non è dissolto dal campo mareale galattico. Se, viceversa, non c'è l'input di energia, la contrazione gravotermica continua indefinitamente. In **figura 6** è mostrata la variazione della densità centrale, ψ_0 , rispetto al tempo adimensionale t/t_{relax} dove t_{relax} è il tempo di rilassamento. La curva 0 corrisponde ad un'evoluzione dell'ammasso senza l'input energetico, passati circa 15 tempi di rilassamento, $t = 15.4 t_{relax}$, si ha il collasso del core, la densità arriva ad un punto di singolarità. Le curve 1 e 2 corrispondono invece ad alti input di energia; si può notare l'oscillazione.

Sia la contrazione che l'espansione sono guidate dall'instabilità gravotermica e vengono chiamate perciò **oscillazioni gravotermiche**.

Appendice

Problema dei 2 corpi

Consideriamo un sistema isolato di 2 particelle di massa m_t ed m_f massa totale $M = m_t + m_f$ e vettori posizione $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_f$ in un sistema di riferimento inerziale S_0 . Nel sistema di riferimento della particella di campo m_f si ha

$$\begin{cases} \mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_f \\ \mathbf{v}_{rel} \equiv \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_f \end{cases}$$

Le particelle interagiscono tra di loro attraverso la forza gravitazionale $\mathbf{F} = -\frac{Gm_t m_f}{r^2} \mathbf{e}_r$ data da $\mathbf{F} = \nabla U(r)$ dove $U(r)$ è l'energia potenziale che dipende solo dal modulo del vettore \mathbf{r} , $|\mathbf{r}| = r$. Si definiscono il centro di massa e la velocità del centro di massa come

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{cm} = \frac{m_t \mathbf{x}_t + m_f \mathbf{x}_f}{M} \\ \mathbf{V}_{cm} = \frac{m_t \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{v}_f}{M} \end{cases}$$

In accordo con la seconda legge di Newton, si ha:

$$\begin{cases} m_t \ddot{\mathbf{x}}_t = -\nabla_t U \\ m_f \ddot{\mathbf{x}}_f = -\nabla_f U = \nabla_t U \end{cases}$$

Risultati:

- Moto rettilineo uniforme del centro di massa.
- Conservazione dell'energia totale del sistema.

$$\begin{cases} M \mathbf{V}_{cm} = m_t \mathbf{v}_t + m_f \mathbf{v}_f = cost \\ E = \frac{1}{2} m_t |\mathbf{v}_t|^2 + \frac{1}{2} m_f |\mathbf{v}_f|^2 + U(r) = cost \end{cases}$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa si risolve il problema

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{R}_{cm} = \frac{\mu}{m_t} \mathbf{r} \\ \mathbf{X}_f = \mathbf{x}_f - \mathbf{R}_{cm} = \frac{\mu}{m_f} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{X}}_t = \mathbf{v}_t - \mathbf{V}_{cm} = \frac{\mu}{m_t} \mathbf{v}_{rel} \\ \dot{\mathbf{X}}_f = \mathbf{v}_f - \mathbf{V}_{cm} = \frac{\mu}{m_f} \mathbf{v}_{rel} \end{cases}$$

Soluzione orbita relativa

$$\begin{cases} \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_t m_f}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \mu = \frac{m_t m_f}{M} \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] L. Ciotti, *Astrofisica extragalattica*, appunti lezione, 2017.
- [2] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, seconda edizione, 2008.
- [3] L. S. Spitzer, *Dynamical evolution of globular clusters*, Princeton University Press, 1987.
- [4] E. Bettwieser, D. Sugimoto, *Post-collapse evolution and gravothermal oscillation of globular clusters*, Mon. Not. R. astr. Soc., 1983.
- [5] L. Ciotti, *Appunti di dinamica dei sistemi stellari*, 2006.