

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

TEOREMA DEL VIRIALE E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Tesi di Laurea

Candidato:
Angela Cratere

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Sessione III
Anno Accademico 2017/2018

Sommario

In questa trattazione ci si propone di ricavare il Teorema del Viriale sia nella sua forma tensoriale che in quella scalare e di presentare alcune delle sue innumerevoli applicazioni in Astrofisica. Il **primo capitolo** è dedicato alla derivazione teorica del Teorema del Viriale: poiché i principali sistemi di interesse astrofisico (gas, galassie, ammassi stellari) sono assimilabili a sistemi dinamici autogravitanti costituiti da N particelle, si parte dalla trattazione del problema degli N corpi, presentando alcuni problemi ad esso collegati, primo tra tutti la sua *non integrabilità*. Con lo scopo di ricavare informazioni dalle equazioni che descrivono il problema senza risolverle direttamente, si introduce il concetto di *funzione di distribuzione nello spazio delle fasi*, sostituendo il problema reale di N corpi discreti con quello ideale di una singola particella che si muove all'interno di un campo di forze generato da un potenziale *continuo*. Si delimitano poi le condizioni all'interno delle quali tale approssimazione è valida, definendo il cosiddetto *tempo di rilassamento a due corpi*. Attraverso una serie di ipotesi, come quella di *non collisionalità*, si giunge alla *Collisionless Boltzmann Equation*, punto di partenza da cui ricavare le *Equazioni di Jeans*, che collegano tra loro i «momenti» della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità. Dall'equazione di Jeans al second'ordine viene ricavato il *Teorema del Viriale, al second'ordine* sia in forma tensoriale che scalare, valido per un generico potenziale.

Nel **secondo capitolo** vengono presentate alcune applicazioni astrofisiche. Si parte mostrando come, dal Teorema del Viriale tensoriale, sia possibile dedurre una correlazione tra anisotropia del *tensore di dispersione delle velocità* e schiacciamento delle galassie ellittiche. Successivamente, ci si focalizza sui *sistemi autogravitanti* nei quali il potenziale gravitazionale è dovuto alle sole componenti del sistema, introducendo il *Piano Viriale* ed accennando ad alcuni fenomeni tipici dei sistemi collisionali, quali la *Catastrofe Gravotermica*. Viene quindi ricavato il *Criterio di Jeans* per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale e viene data una panoramica generale sul processo di formazione stellare. Seguendo poi l'approccio di *Ledoux* si introduce la *Forma Variazionale* del Teorema del Viriale, con la quale ricavare il *periodo di oscillazione radiale*. Infine, facendo riferimento ad un lavoro del 1953 di Fermi e Chandrasekhar, si analizzano gli effetti di un campo magnetico sulla stabilità gravitazionale e si accenna al meccanismo di confinamento del campo magnetico e dei raggi cosmici nel piano galattico.

Per questioni di spazio e data la vastità dell'argomento, viene omessa parte delle dimostrazioni e la trattazione viene presentata in termini generali.

Indice

1	Derivazione teorica	2
1.1	Il problema degli N corpi	2
1.1.1	Tempo di rilassamento	2
1.2	CBE: sistemi stellari in regime non collisionale	4
1.2.1	Osservabili correlate alla funzione di distribuzione	5
1.3	Teorema del Viriale	6
2	Applicazioni Astrofisiche	8
2.1	Galassie ellittiche: correlazione tra forma intrinseca e anisotropia	8
2.2	Sistemi autogravitanti e Piano Viriale	9
2.2.1	Sistemi autogravitazionali e calore specifico	10
2.2.2	Massa di Jeans e formazione stellare	11
2.3	Forma variazionale del Teorema del Viriale e periodo di pulsazione delle stelle variabili	13
2.4	Teorema del Viriale in presenza di campo magnetico	14
2.4.1	Campo magnetico e raggi cosmici: confinamento nel piano galattico	16

Capitolo 1

Derivazione teorica

1.1 Il problema degli N corpi

Un sistema costituito da N punti materiali identici in mutua interazione gravitazionale costituisce il cosiddetto *Problema degli N -corpi*, il quale rappresenta uno dei sviluppi più importanti della Fisica-matematica nonché il punto di partenza per capire l'evoluzione dei sistemi stellari, come gli ammassi globulari e le galassie.

Nella formulazione Hamiltoniana, il problema degli N corpi è dato da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \\ H = T + U = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \frac{G}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|} \end{cases} \quad (1.1)$$

dove m_i , $\mathbf{q}_i = \mathbf{x}_i$ e $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ sono la massa, le coordinate lagrangiane e gli impulsi coniugati dell' i -esima particella del sistema. Il problema è generalmente formulato assegnando le *condizioni iniziali*:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_i(0) = \mathbf{q}_i^0 \\ \mathbf{p}_i(0) = m_i \mathbf{v}_i^0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Dati N punti materiali in \mathbb{R}^3 lo spazio delle fasi del sistema ha dimensione $6N$: l'evoluzione temporale e spaziale del sistema è completamente descritto da un sistema di $6N$ equazioni differenziali scalari. Affinché il sistema sia risolvibile, cioè il problema sia integrabile secondo "*Jacobie-Lie*", è necessario disporre di $6N - 1$ integrali primi del moto (leggi di conservazione) che permettano di trovare la soluzione al problema come intersezione di varietà nello spazio delle fasi. Il problema degli N corpi, con $N \geq 3$, non è "*Jacobie-Lie Integrabile*": questa sua intrinseca complessità ha spinto numerosi scienziati, negli ultimi tre secoli, a sviluppare varie tecniche aventi lo scopo di estrarre informazioni importanti di carattere dinamico dal sistema di equazioni differenziali (1.1) senza la diretta determinazione delle orbite.

1.1.1 Tempo di rilassamento

Per estrarre informazioni dal problema degli N corpi è necessario seguire un approccio che permetta di ridurre lo spazio delle fasi $6N$ -dimensionale a \mathbb{R}^6 . In altre parole, si semplifica il problema degli N corpi allo studio del moto di una singola particella. A tale scopo, la distribuzione discreta delle N particelle puntiformi in \mathbb{R}^3 viene sostituita

con una distribuzione di densità continua, $\rho(\mathbf{x}, t)$: la singola particella non risente più dell'interazione discreta delle altre componenti bensì di un campo gravitazionale e di un potenziale *continui*. Il potenziale *smooth* ϕ , associato alla distribuzione di densità ρ attraverso l'equazione di Poisson $\Delta\phi = 4\pi G\rho$, è dato da:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y}, t) d^3\mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (1.3)$$

In tale approssimazione il moto di ciascun punto materiale è determinato solo dal potenziale continuo dato dall'equazione (1.3) e la dimensione dello spazio delle fasi è ridotta a 6. Il principale limite di questo approccio è che nel sistema reale ciascuna particella si muove in un potenziale discreto ϕ_{true} che, per la particella i -esima, è dato da:

$$\phi_{\text{true}}(\mathbf{x}_i, t) = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|} \quad (1.4)$$

L'orbita descritta da una particella sottoposta ad un campo di forze derivato dal potenziale ϕ si discosta dall'orbita *vera* dovuta a ϕ_{true} in un certo intervallo di tempo finito. Questo intervallo di tempo è il tempo scala in cui il termine di granularità $\phi_{\text{true}} - \phi$ cambia significativamente l'orbita di ciascuna particella nel potenziale continuo ϕ ed è detto **tempo di rilassamento a 2 corpi**. Esso permette di stimare entro quali limiti la rappresentazione continua sia fisicamente ragionevole e viene ricavato assumendo che le interazioni tra le particelle siano *indipendenti* e siano trattabili come *urti iperbolici a due corpi*: si trascurano, quindi, tutti gli effetti di *correlazione*. Un sistema gravitazionale nel quale gli effetti cumulativi degli urti non sono trascurabili e in cui ciascuna particella risente fortemente della *granularità* del campo gravitazionale è detto *collisionale*; un sistema nel quale è possibile trascurare gli effetti a *lungo range* dell'interazione gravitazionale è detto *non collisionale*.

Si può dimostrare¹ che, nel caso di un sistema autogravitante, una stima asintotica (ovvero, per $N \rightarrow \infty$) del tempo di rilassamento è:

$$t_{2b} = \frac{0.1N}{\ln N} t_{\text{cross}} \quad (1.5)$$

dove t_{cross} è il tempo di *attraversamento* del sistema ed è dato da $t_{\text{cross}} = \frac{2R}{v_*}$

Galassie ellittiche: assumendo $N = 10^{11}$ e $t_{\text{cross}} \simeq 2 \times 10^8$ yrs, il tempo di rilassamento a due corpi per tali sistemi è dell'ordine di 10^{15-16} yrs, milioni di volte il tempo di Hubble. Le galassie sono a tutti gli effetti sistemi non collisionali su tempi scala cosmologici.

Ammassi globulari assumendo $N = 10^6$ e $t_{\text{cross}} \simeq 2 \times 10^6$ yrs si ha $t_{2b} \simeq 5 \times 10^9$ yrs, più breve dell'età dell'Universo. Per tali sistemi gli effetti cumulativi delle interazioni a due corpi diventano dominanti: questa è una diretta manifestazione della natura a *lungo range* della forza gravitazionale.

È importante sottolineare che il concetto di sistema collisionale è relativo: ogni sistema gravitazionale, se guardato sufficientemente a lungo, è destinato inevitabilmente a diventare collisionale, cioè a *sviluppare una propria termodinamica*. Per la maggior parte dei sistemi stellari, il tempo scala sul quale ciò avviene è superiore al tempo di Hubble: nell'Universo attuale, tali sistemi possono essere trattati a tutti gli effetti come *non collisionali*.

¹si veda [1] per ulteriori sviluppi.

1.2 CBE: sistemi stellari in regime non collisionale

Come si può notare dalla (1.5) il tempo di rilassamento aumenta all'aumentare del numero di particelle N : sistemi stellari costituiti da un gran numero di stelle hanno maggiore probabilità di essere *non* collisionali. Al crescere di N la granularità di ϕ_{true} diventa importante su tempi scala lunghi e l'approssimazione continua si realizza su tempi scala finiti. Nel limite ideale di un *continuo non collisionale* ($N \rightarrow \infty$) l'approssimazione non collisionale è verificata per ogni tempo.

Lo strumento per investigare l'evoluzione di un sistema non collisionale è la cosiddetta **funzione di distribuzione**.

Definizione 1.2.1. Si definisce *funzione di distribuzione* $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ di un sistema N -body una funzione non negativa $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$ definita dalla proprietà che:

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} = M \quad (1.6)$$

$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ esprime la probabilità che, al tempo t , una generica stella si trovi in un intorno $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ del punto (\mathbf{x}, \mathbf{v}) dello spazio delle fasi γ .

Dalla definizione di probabilità segue la condizione di normalizzazione:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} = 1 \quad (1.7)$$

Teorema 1.2.1 (Collisionless Boltzmann Equation (CBE)). *Nel regime non collisionale, l'evoluzione della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi è espressa dalla seguente equazione:*

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left\langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0 \quad (1.8)$$

dove si è assunto che ogni elemento di volume dello spazio delle fasi γ si muova sotto l'azione di un campo di forza generato dal potenziale totale $\phi_{\text{tot}} = \phi + \phi_{\text{ext}}$, con $\phi_{\text{ext}} = \phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ *potenziale esterno* generato da una distribuzione di densità distinta dal sistema considerato. Se $\phi_{\text{ext}} = 0$ il sistema si dice *autogravitante*.

Si noti che la CBE corrisponde a richiedere che la *derivata convettiva* della funzione di distribuzione sia nulla. Se, infatti, si considera che in un sistema di riferimento inerziale, l'Hamiltoniana di singola particella è data da $H = \frac{1}{2}v^2 + \phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t)$ si ha che:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial \phi_{\text{tot}}}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (1.9)$$

Allora, l'equazione (1.8) è analoga a

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad (1.10)$$

dove la prima uguaglianza non è nient'altro che la definizione di derivata convettiva e nella seconda uguaglianza si è introdotta la *Parentesi di Poisson*.

La CBE descrive come varia localmente la densità di probabilità se vista da un osservatore comovente con la stella nello spazio delle fasi e dice che il flusso, attraverso lo spazio delle fasi, di un *fluido di probabilità* si conserva.

1.2.1 Osservabili correlate alla funzione di distribuzione

Introducendo la funzione di distribuzione e l'ipotesi di non collisionalità la dimensionalità dello spazio viene ridotta a 6 dimensioni spaziali e ad una dimensione temporale, una semplificazione importante rispetto al problema degli N corpi originario. Tuttavia, il problema posto dalla soluzione generale della CBE è ancora di difficile risoluzione: l'ipotesi di non collisionalità da sola non basta. Piuttosto che risolvere la CBE si cerca di *estrarre informazioni* da tale equazione. Per fare ciò uno dei metodi più famosi che viene utilizzato è il cosiddetto *metodo dei momenti*, il quale permette di costruire delle equazioni differenziali più semplici della (1.8), dette **equazioni di Jeans**. Tali equazioni rappresentano relazioni funzionali tra i cosiddetti «momenti» della funzione di distribuzione sullo spazio delle velocità e da queste è possibile partire per sviluppare ulteriori equazioni dei momenti, definiti sullo spazio delle configurazioni, note in letteratura come **equazioni viriali in forma tensoriale**.

Definizione 1.2.2 (Momenti delle velocità). $\forall i, j = 1, 2, 3$ si definiscono

$$\bar{v}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i f d^3\mathbf{v} \quad (1.11)$$

$$\overline{v_i v_j}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j f d^3\mathbf{v} \quad (1.12)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) d^3\mathbf{v} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (1.13)$$

dove \bar{v}_i sono le componenti delle velocità medie, σ_{ij} è detto *tensore di dispersione delle velocità* e $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}$

Il tensore di dispersione di velocità esprime, nell'interpretazione statistica, gli scarti quadratici medi delle velocità delle stelle attorno al loro valore medio. Come si può notare dalla seconda uguaglianza della (1.13), tale tensore è *simmetrico* e ciò vuol dire che esiste una matrice ortogonale di rotazione tale che la rappresentazione di σ_{ij}^2 in tale sistema è diagonale. Tale matrice è *definita positiva*.

Quindi, attraverso la funzione di distribuzione e il metodo dei momenti è possibile associare, a ciascuna galassia o sistema di N corpi, un campo continuo (scalare) di densità non collisionale, un campo vettoriale *locale* di velocità medie e un campo tensoriale, rappresentabile, nello spazio delle velocità, da *ellissoidi di dispersione di velocità*.

Limitandosi ai momenti del primo e del second'ordine è possibile costruire le cosiddette *equazioni di Jeans*:

Teorema 1.2.2 (Equazioni di Jeans (al secondo ordine)). $\forall i = 1, 2, 3$ valgono le seguenti identità²:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{D\bar{v}_j}{Dt} = \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \phi_{\text{tot}}}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} \quad (1.15)$$

² L'equazione (1.14) può essere ottenuta integrando la CBE (eq(1.8)) rispetto alle velocità, applicando il teorema della divergenza e sostituendo la definizione (1.11), mentre la (1.15) può essere ricavata moltiplicando la (1.8) per v_i e integrando sullo spazio delle velocità, sempre con l'ausilio del teorema della divergenza. Per la deduzione e la dimostrazione completa si veda [2], capitolo 4.

Si noti che le equazioni precedenti sono formalmente identiche alle equazioni di *continuità* e dell'*impulso* che descrivono il comportamento macroscopico di un fluido (in presenza di un campo gravitazionale e di forze viscoso e in assenza di termini di sorgente). In particolare, l'ultimo termine della (1.15) è l'analogo del gradiente di pressione: l'oggetto $-\rho\sigma_{ij}^2$ prende il nome di *Stress Tensor* e, nel caso di un sistema non collisionale, descrive una pressione *anisotropa*. Nonostante l'analogia formale esistono almeno due differenze fondamentali tra un fluido "ordinario" e un sistema non collisionale come una galassia:

1. Un fluido ordinario è un sistema collisionale e, quindi, all'*equilibrio termodinamico*: i frequenti urti tra le particelle cancellano, su tempi scala brevissimi, ogni eventuale anisotropia nella distribuzione dei moti quadratici. Questo fa sì che temperatura e pressione siano grandezze scalari associate a tensori *isotropi*. Nel caso di un sistema non collisionale, invece, temperatura e pressione sono tensori *anisotropi*: non essendoci urti, non c'è una redistribuzione dell'energia in eccesso e il sistema può essere "più caldo" in una direzione piuttosto che in un'altra. Questa anisotropia è la causa della morfologia delle galassie ellittiche, come si discuterà nel paragrafo 2.1.
2. Le equazioni della fluidodinamica costituiscono un sistema di equazioni differenziali «*chiuso*»: la termodinamica fornisce delle relazioni di chiusura, le *equazioni di stato*, che collegano la pressione del gas alla densità e alla temperatura. Le equazioni di Jeans, al contrario, costituiscono un sistema «*aperto*»: non esistono in dinamica stellare relazioni termodinamiche che permettono di chiudere il sistema e per poterlo risolvere è necessario introdurre ipotesi di chiusura ad hoc sulla forma di $\overline{v_i v_j}$, cioè sul grado di anisotropia del tensore di dispersione.

1.3 Teorema del Viriale

Le equazioni di Jeans costituiscono una *gerarchia infinita di equazioni differenziali*: il metodo dei momenti permette una maggior comprensione delle grandezze in gioco ma, di contro, si passa da un'unica equazione, la CBE, ad infinite equazioni. Il tentativo di estrarre informazioni dalla CBE è quindi un successo solo parziale. Tuttavia, le equazioni di Jeans costituiscono il punto di partenza per ricavare ulteriori relazioni fondamentali per la comprensione delle proprietà macroscopiche di un sistema non collisionale: le **equazioni viriali in forma tensoriale**.

Definizioni 1.3.1. $\forall i, j = 1, 2, 3$ si definiscono i seguenti **Tensori** e le relative tracce:

$$\text{Momento di Inerzia polare} \quad I_{kj} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_k x_j d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(I_{kj}) = I \quad (1.16)$$

$$\text{Energia cinetica totale} \quad K_{kj} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_k v_j} d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(K_{kj}) = K \quad (1.17)$$

$$\text{Energia cinetica ordinata} \quad T_{kj} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \overline{v_k} \overline{v_j} d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(T_{kj}) = T \quad (1.18)$$

$$\text{Energia cinetica di dispersione} \quad \Pi_{kj} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{kj}^2 d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(\Pi_{kj}) = \Pi \quad (1.19)$$

$$\text{Autoenergia} \quad U_{kj} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(U_{kj}) = U \quad (1.20)$$

$$\text{Energia di Interazione} \quad W_{kj} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho x_k \frac{\partial \phi_{\text{tot}}}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}; \quad Tr(W_{kj}) = W \quad (1.21)$$

Si noti che nel caso di un sistema autogravitante ($\phi_{\text{ext}} = 0$) il Tensore energia di interazione coincide con con il Tensore autoenergia (dovuto al solo potenziale di autogravità), $W_{kj} \equiv U_{kj}$.

Si noti, inoltre, che $K_{kj} = T_{kj} + \frac{\Pi_{kj}}{2}$, da cui, prendendone la traccia, $K = T + \frac{\Pi}{2}$

Introdotte le definizioni precedenti, è possibile ricavare il **Teorema del Viriale in forma tensoriale** considerando la seconda equazione di Jeans (eq. (1.15)), moltiplicandola scalarmente per \mathbf{x} e integrando sullo spazio delle configurazioni:

$$\underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} d^3 \mathbf{x}}_a + \underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x}}_b = - \underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \phi_{\text{tot}}}{\partial x_j} d^3 \mathbf{x}}_c - \underbrace{\int x_k \frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} d^3 \mathbf{x}}_d \quad (1.22)$$

Si può dimostrare che i vari termini si trasformano come segue³:

$$(a) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int x_k \rho x_j d^3 \mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I_{kj}; \quad (b) = - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ki} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \bar{v}_k \bar{v}_j d^3 \mathbf{x} = -2T_{kj};$$

$$(c) = -W_{kj}; \quad (d) = - \int_{\mathbb{R}^3} \delta_{ki} \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \sigma_{kj}^2 d^3 \mathbf{x} = -\Pi_{kj}$$

Allora la (1.22) diventa: $\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{kj}}{dt^2} - 2T_{kj} = W_{kj} + \Pi_{kj}$.

Si ottiene così **L'identità di Jacobi-Lagrange**:

$$\frac{\ddot{I}_{kj}}{2} = 2K_{kj} + W_{kj}. \quad (1.23)$$

Introducendo l'ipotesi di *stato stazionario*, si ha il **Teorema Viriale Tensoriale**:

$$2K_{kj} + W_{kj} = 0. \quad (1.24)$$

Prendendone la traccia si ha il **Teorema Viriale Scalare**:

$$2K + W = 0 \quad (1.25)$$

dove

$$W = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \langle \mathbf{x}, \nabla \phi_{\text{tot}} \rangle d^3 \mathbf{x} = W_{\text{self}} + W_{\text{ext}}. \quad (1.26)$$

³il calcolo del termine (a) è un pò laborioso. Si è preferito ometterlo, illustrando i risultati più importanti. I termini (b) e (d) possono essere riscritti con l'ausilio del *Teorema della divergenza*. Per il calcolo completo si veda [2], Cap.4

Capitolo 2

Applicazioni Astrofisiche

2.1 Galassie ellittiche: correlazione tra forma intrinseca e anisotropia

Il teorema del viriale nella sua forma tensoriale permette di dimostrare che la morfologia delle galassie ellittiche non è dovuta alla rotazione (come si riteneva fino alla fine degli anni '70) bensì all'anisotropia del tensore di dispersione di velocità.

Si consideri uno sferoide triassiale centrato nell'origine del sistema di riferimento e con gli assi di simmetria coincidenti con quelli cartesiani, che ruota attorno all'asse z . Per simmetria, si ha che: $T_{xx} = T_{yy}$, $\Pi_{xx} = \Pi_{yy}$, $W_{xx} = W_{yy}$.

Sfruttando il Teorema del viriale si può scrivere

$$\begin{cases} 2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0 \\ 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \end{cases}$$

Sommando membro a membro e tenendo conto che, per geometria, $T_{zz} = 0$ si ottiene:

$$\frac{2T_{xx} + \Pi_{xx}}{\Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \quad (2.1)$$

Introducendo la velocità quadratica media lungo la linea di vista $\overline{v_{\parallel}^2} = \frac{1}{\Sigma} \int dx_{\parallel} \int v_{\parallel}^2 f d^3\mathbf{v}$, dove $\Sigma \equiv \int \rho dx_{\parallel} = \int dx_{\parallel} \int f d^3\mathbf{v}$ e la dispersione di velocità lungo la linea di vista $\sigma_{\parallel}^2 = \overline{v_{\parallel}^2} - \overline{v_{\parallel}}^2$, integrando $\Sigma \overline{v_{\parallel}^2}$ su tutto il piano del cielo e tenendo conto delle definizioni (1.18) e (1.19) si ottiene:

$$\int \Sigma \overline{v_{\parallel}^2} d^2\mathbf{x} = \int \Sigma (\sigma_{\parallel}^2 + \overline{v_{\parallel}}^2) d^2\mathbf{x} = \int d^3\mathbf{x} \int f (\sigma_{\parallel}^2 + \overline{v_{\parallel}}^2) d^3\mathbf{v} = \frac{1}{M} \sum_{ij} \hat{s}_i (2T_{ij} + \Pi_{ij}) \hat{s}_j$$

dove \hat{s} è il versore nella direzione della linea di vista. Ovvero⁴:

$$\langle \sigma_{\parallel}^2 \rangle + \langle \overline{v_{\parallel}}^2 \rangle = \frac{1}{M} \hat{\mathbf{s}} \cdot (2T + \Pi) \cdot \hat{\mathbf{s}} \quad (2.2)$$

Nel caso del problema in esame, si ha che l'asse x è parallelo alla linea di vista e il piano xy è il piano del cielo. Pertanto $\hat{\mathbf{s}} \cdot (2T + \Pi) \cdot \hat{\mathbf{s}} = T_{xx} + \Pi_{xx}$ e dalla (2.1) si ottiene:

$$\frac{M (\langle \sigma_{\parallel}^2 \rangle + \langle \overline{v_{\parallel}}^2 \rangle)}{\Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}} \quad (2.3)$$

⁴la notazione $\langle \rangle$ indica la media, lungo il piano del cielo, ponderata per la densità di colonna. Per una generica grandezza q è $\langle q \rangle \equiv \int \Sigma q d^2\mathbf{x}$

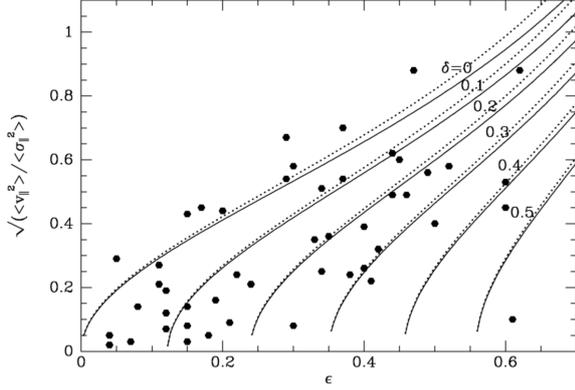


Figura 2.1: Diagramma diagnostico $(v/\sigma - \epsilon)$. Importanza relativa della velocità di streaming e della dispersione di velocità *lungo la linea di vista* in funzione dell'ellitticità e per diversi valori del parametro di anisotropia δ . Le curve continue si riferiscono a $\alpha = 0.15$, mentre quelle tratteggiate a $\alpha = 0.1$. Vi sono raffigurate 48 galassie ellittiche e lenticolari

Infine, è possibile caratterizzare la componente Π_{zz} in funzione della componente Π_{xx} nel seguente modo: $\Pi_{zz} = \int \rho \sigma_{zz}^2 d^3\mathbf{x} = (1 - \delta) \Pi_{xx}$, dove la quantità $\delta \equiv 1 - \frac{\Pi_{zz}}{\Pi_{xx}}$ è chiamato *Parametro di anisotropia* e quantifica il grado di deviazione dall'isotropia del tensore di dispersione.

Dopo ulteriori passaggi, dalla (2.3) si ricava la seguente espressione, valida per galassie edge on:

$$\frac{\langle \bar{v}_{\parallel}^2 \rangle}{\langle \sigma_{\parallel}^2 \rangle} = \frac{(1 - \delta) W_{xx}/W_{zz} - 1}{\alpha (1 - \delta) W_{xx}/W_{zz} + 1} = f(\epsilon, \delta, \alpha) \quad (2.4)$$

dove α è un parametro adimensionale⁵ che dipende da come la densità ρ e la velocità di streaming \bar{v} variano nel piano (R, z) . Per i modelli galattici, α appartiene al range $(0.05, 0.2)$. $\langle \bar{v}_{\parallel}^2 \rangle$ è una misura dei *moti ordinati* che avvengono lungo il disco della galassia (rotazione), mentre $\langle \sigma_{\parallel}^2 \rangle$ è una misura dei *moti random* che avvengono in direzione casuali. Il *diagramma diagnostico* $(v/\sigma - \epsilon)$ ⁶ di Figura 2.1 permette di visualizzare l'importanza relativa dei moti ordinati e di quelli random in funzione dell'ellitticità ϵ . Le curve continue si riferiscono a valori costanti del parametro di anisotropia δ . Dal diagramma è chiaro che a fissata eccentricità, solo i sistemi *isotropi* ($\delta = 0$) sono dominati dalla rotazione ($v/\sigma > 1$) mentre all'aumentare della dispersione della velocità cresce l'anisotropia del sistema. Se la rotazione è dinamicamente poco importante (cioè se il rapporto $v/\sigma < 1$) e se il sistema è schiacciato (alti valori dell'eccentricità ϵ), necessariamente deve essere anisotropo: le stelle risentono meno dalla mutua interazione gravitazionale nella direzione in cui la dispersione di velocità è maggiore.

Dunque i sistemi galattici possono essere divisi in due famiglie cinematiche: quella dei *rotatori veloci*, isotropi, caratterizzati da alte velocità di rotazione in rapporto alla dispersione di velocità e dominati da moti ordinati e quella dei *rotatori lenti*, anisotropi, caratterizzati da basse velocità di rotazione e dominati da moti disordinati.

2.2 Sistemi autogravitanti e Piano Viriale

Un sistema di N corpi si definisce *autogravitante* se il potenziale gravitazionale totale sotto l'azione del quale si muovono le particelle è determinato solo dalle particelle stesse

⁵ α è definito come segue $\alpha \equiv \frac{1}{\langle \bar{v}_{\parallel}^2 \rangle} \int \rho(\mathbf{x}) u^2 d^3\mathbf{x}$, dove $u(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) - \bar{v}_{\parallel}$ esprime la variazione di $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ lungo la linea di vista.

⁶ $v \equiv \langle \bar{v}_{\parallel}^2 \rangle$ e $\sigma \equiv \langle \sigma_{\parallel}^2 \rangle$

attraverso l'equazione (1.3), cioè se $W_{ext} = 0$ e

$$W \equiv U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = -\frac{G}{2} \iint \frac{\rho(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{y}, t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y}$$

. Si ottiene il seguente:

Teorema 2.2.1 (Viriale per sistemi autogravitanti). *Un sistema di N corpi è virializzato, cioè all'equilibrio, se e solo se*

$$2K = -U > 0 \quad \forall t \quad (2.5)$$

Le profonde implicazioni di questo risultato possono essere illustrate mediante l'ausilio del cosiddetto «Piano Viriale» mostrato in figura 2.2. In ascissa si ha il modulo dell'energia potenziale $|U|$ e in ordinata l'energia cinetica K . Ciascun punto di tale piano rappresenta un sistema gravitazionale: nel verso di $|U|$ crescente si posizionano i sistemi "concentrati" mentre nel verso di K crescente si hanno i sistemi più "caldi". Il luogo dei punti virializzati è individuato dalla **Retta del Viriale**, passante per l'origine:

$$K = \frac{|U|}{2} \quad (2.6)$$

Il **Principio di conservazione dell'energia** $K - |U| = E$, individua nel Piano Viriale un fascio di rette parallele alla bisettrice (che ha equazione $K = |U|$), ciascuna delle quali si riferisce ad un determinato valore dell'energia totale conservata. Qualsiasi sistema *isolato* evolve rispettando il *Principio di conservazione dell'energia*: pertanto, si muove nel Piano Viriale sempre su rette parallele alla bisettrice. Ciò implica che **un sistema autogravitante con energia positiva non può essere virializzato**. Infatti, solo le rette $T - |U| = E$ con $E < 0$ possono intersecare la Retta del Viriale. Si noti che se si ha un sistema non all'equilibrio, *conservativo*, le leggi del moto, governate dalle equazioni di Hamilton-Jacobi, sono *solenoidali*: per la conservazione del flusso, un sistema conservativo non può raggiungere l'equilibrio in un tempo *finito* altrimenti lo spazio delle fasi verrebbe *contratto* e si violerebbe il *Teorema di Liouville*. Tuttavia, esiste un fenomeno detto *filamentazione dello spazio delle fasi* che fa sì che il sistema raggiunga l'equilibrio su una certa «scala» ma su scala più piccola continui a «mixare» lo spazio delle fasi, evolvendosi. Tale fenomeno permette di considerare i sistemi stellari virializzati su scala macroscopica.

2.2.1 Sistemi autogravitazionali e calore specifico

Si consideri ora un sistema all'equilibrio nel Piano Viriale (punto A in figura 2.2). Se il sistema viene raffreddato (perde cioè energia cinetica) la sua energia totale diminuisce e il sistema si posiziona nel punto B appartenente alla retta a più bassa energia E . Il sistema può raggiungere nuovamente l'equilibrio restando però vincolato a tale retta (conservazione dell'energia): l'unico modo per tornare virializzato è incrementare la propria energia cinetica e diminuire quella potenziale (aumentarla in modulo), posizionandosi nel punto C. Il sistema finale risulta, quindi, meno energetico (E minore), più caldo (K maggiore) e più legato ($|U|$ maggiore). Al contrario, se il sistema viene riscaldato (acquista energia cinetica), ritornando all'equilibrio risulta essere più energetico (E maggiore), più freddo (K minore) e meno legato ($|U|$ minore). Un sistema nel quale un «riscaldamento» (incremento di energia cinetica) implica, in seguito al raggiungimento

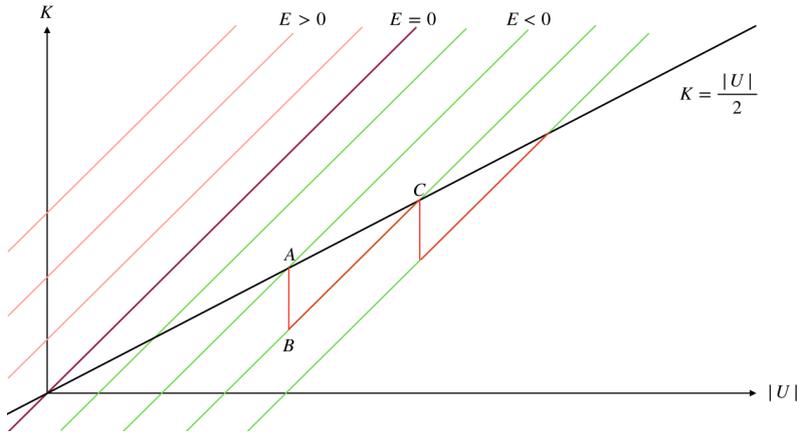


Figura 2.2: Piano Viriale

di un nuovo stato di equilibrio, un incremento di energia ma *non* un incremento di temperatura è detto **sistema termodinamico a calore specifico negativo**. Un sistema autogravitazionale è a calore specifico negativo. Infatti, dall'analogia con un gas ideale, è possibile definire la temperatura di un sistema autogravitante attraverso la relazione:

$$K = \frac{3}{2} N k_B \bar{T}$$

Se il sistema è virializzato, dal Teorema del Viriale si ha che $U = -K$, allora il calore specifico a *volume costante* è:

$$C_V \equiv \frac{dU}{dT} = -\frac{3}{2} N k_B < 0$$

Questo porta al risultato, a primo impatto paradossale, che il sistema perdendo energia cinetica si riscalda.

Una conseguenza di questo risultato è la cosiddetta *Evaporazione gravitazionale*, fenomeno che si verifica nei sistemi stellari *collisionali*, come ad esempio gli ammassi globulari, per i quali il tempo di rilassamento a due corpi è confrontabile con l'età. In tali sistemi, gli urti tra le componenti sono dominanti e le velocità stellari seguono la *distribuzione di Maxwell-Boltzmann*: questo vuol dire che esistono stelle, nella coda ad alta energia della distribuzione, che hanno una velocità maggiore della velocità di fuga del sistema e sfuggono all'attrazione gravitazionale. La perdita di tale componente stellare porta il sistema a perdere energia cinetica, raffreddandosi. Ma siccome il sistema ha calore specifico negativo, la perdita di energia comporta un «riscaldamento»: il sistema si muove nel Piano Viriale verso uno stato a maggior energia cinetica e a minor energia potenziale ($|U|$ maggiore), cioè il sistema finale è più *denso*. La maggior densità comporta un aumento degli urti tra le stelle: sempre più stelle vengono a trovarsi nella coda ad alta energia, superano la velocità di fuga e portano il sistema a contrarsi. Questo dà origine ad un processo a valanga conosciuto come *Catastrofe Gravotermica*: il sistema più perde stelle, più perde energia cinetica e più collassa.

2.2.2 Massa di Jeans e formazione stellare

Il Teorema del Viriale fornisce un criterio per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale. Poiché fu Jeans il primo a valutare l'effetto di piccole perturbazioni sulla stabilità,

tale criterio, che si traduce in una condizione sulla massa totale del sistema, prende il nome di *Criterio di Jeans*. Si consideri una nube molecolare nel mezzo interstellare che, per semplicità, si suppone a simmetria sferica e a densità costante. Il sistema è in *equilibrio idrostatico* fintanto che la forza gravitazionale è equilibrata dalla forza di pressione. Se l'autogravità supera la pressione interna, ha inizio la fase di collasso. La condizione per il collasso, in termini del Teorema del Viriale, si traduce in:

$$2T < |U| \quad (2.7)$$

Se si introducono $U = -\frac{3}{5}\frac{GM}{R}$ e $K = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}\frac{M}{\mu m_H}k_B T$, la (2.7) diventa:

$$3\frac{M}{\mu m_H}k_B T < \frac{3}{5}\frac{GM}{R} \quad (2.8)$$

che, espressa come condizione sulla massa totale del sistema, è:

$$M > M_J = \left(\frac{5k_B T}{G\mu m_H}\right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2} \quad (2.9)$$

M_J è detta *Massa di Jeans* ed è la massa limite che può avere un sistema gravitazionale, sorretto dalle sole forze di pressione, per essere in equilibrio idrostatico: superata tale massa il sistema diventa gravitazionalmente instabile e collassa su un tempo scala detto *tempo dinamico* $\tau_{\text{dyn}} = \left(\frac{2R^3}{GM}\right)^{1/2}$.

Il *trigger mechanism* che porta una nube a collassare può essere di diversa natura (shock front, collisione tra nubi, compressione lungo i bracci a spirale, interazione fra galassie). In questa prima fase di collasso, il moto del sistema sul piano viriale è assolutamente imprevedibile: il sistema, infatti, non è virializzato. La struttura gassosa è trasparente alla radiazione emessa e la caduta libera procede incontrastata. Man mano che la contrazione prosegue, la temperatura aumenta e ciò attiva processi di ionizzazione della materia che portano ad un aumento dell'opacità: parte della radiazione viene intrappolata comportando un aumento di pressione e il rallentamento dei tempi di contrazione della struttura. Si viene a creare uno stato di *quasi equilibrio* e si inizia a parlare di struttura dominata dal Teorema del Viriale: il punto che la rappresenta nel Piano Viriale appartiene ora alla Retta del Viriale. Da questo momento in poi si può parlare di struttura stellare che *emette energia*. Essa, infatti, ha temperatura maggiore dell'ambiente circostante: questo fa sì che inizi ad *irraggiare*, cioè a perdere energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, per raggiungere l'equilibrio termico con l'esterno, secondo le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{K} = -\dot{E} \\ |\dot{U}| = -2\dot{E} \end{cases}$$

Ogni perdita di energia ($\dot{E} < 0$) per irraggiamento causa un «riscaldamento» della struttura ($\dot{K} > 0$) e costringe la configurazione a contrarsi ulteriormente ($|\dot{U}| > 0$). La contrazione prosegue su un tempo scala più lungo, detto tempo *termodinamico* o di *Kelvin-Helmholtz* $\tau_{\text{KH}} = \frac{1}{2}\frac{GM^2}{LR} > \tau_{\text{dyn}}$. Esso esprime l'intervallo temporale in cui la luminosità L della struttura è dovuta alla sola contrazione gravitazionale. In altre parole, in questa fase il metodo di produzione di energia da parte della struttura stellare è la contrazione. Il raggiungimento delle temperature di combustione nel nucleo segna l'entrata della struttura stellare nella *Sequenza principale*: in questa fase sono le reazioni termonucleari la sorgente autonoma di produzione di energia che rallenta ulteriormente la contrazione. La struttura nucleare lentamente continua a contrarsi ma su tempi scala enormemente più lunghi, detti *termonucleari*.

2.3 Forma variazionale del Teorema del Viriale e periodo di pulsazione delle stelle variabili

Negli anni '40, l'astronomo belga **Paul Ledoux** sviluppò la forma variazionale del Teorema del Viriale scalare con il quale riuscì a dedurre il periodo di pulsazione radiale di una struttura stellare.

L'approccio di Ledoux consiste nel considerare la forma variazionale dell'identità di Jacobi-Lagrange e nell'introdurre varie leggi di conservazione, attraverso le quali ricavare un'espressione per la variazione del momento d'inerzia, dell'energia cinetica e dell'energia potenziale in funzione del tempo.

Si consideri una stella di raggio R . Sia r la distanza radiale di qualsiasi punto della configurazione dalla posizione di equilibrio r_0 .

Per valutare le variazioni δI , δK , δU delle grandezze I, K, U dai valori di equilibrio I_0, K_0, U_0 si parte dalla forma variazionale dell'identità di Jacobi-Lagrange

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(\delta I)}{dt^2} = 2\delta K + \delta U \quad (2.10)$$

Facendo uso di varie leggi di conservazione come, ad esempio, la continuità della massa:

$$m(r_0 + \delta r) = m(r_0)$$

si dimostra⁷ che le variazioni delle grandezze coinvolte sono uguali a:

$$\delta I = 2 \int_0^{I_0} \frac{\delta r}{r_0} dI_0; \quad \delta U = - \int_0^{U_0} \frac{\delta r}{r_0} dU_0; \quad 2\delta K \simeq 3 \int_0^M \frac{P_0}{\rho_0} (\gamma - 1) \frac{\delta \rho}{\rho_0} dm(r).$$

Per ottenere un'espressione per $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$ è necessario specificare la dipendenza della variazione della posizione di equilibrio r_0 dal tempo, dalla quale dipende la pulsazione. Se si assume che il moto sia periodico, è possibile definire la quantità ξ come segue

$$\xi = \frac{\delta r}{r_0} = \xi_0 e^{i\omega t} \text{ dove } \omega \text{ è la frequenza di oscillazione.}$$

Allora è possibile ridefinire le variazioni di I e U e K ⁸ come segue:

$$\delta I = 2e^{i\omega t} \int_0^{I_0} \xi_0 dI_0 \quad (2.11)$$

$$\delta U = -e^{i\omega t} \int_0^{U_0} \xi_0 dU_0 \quad (2.12)$$

$$2\delta K = -3 \int_0^M \frac{P_0}{\rho_0} (\gamma - 1) \left(3\xi_0 + r_0 \frac{d\xi_0}{dr_0} \right) e^{i\omega t} dm(r) \quad (2.13)$$

Sostituendo quest'ultime equazioni nella (2.10) si ottiene un'espressione per ω^2 , grandezza legata al periodo di pulsazione:

$$\omega^2 = \frac{- \int_0^{U_0} (3\gamma - 4) \xi_0 dU_0 + 3 \int_0^M \frac{P_0 \xi_0 r_0}{\rho_0} \frac{d\gamma}{dr_0} dm(r)}{\int_0^{I_0} \xi_0 dI_0} \quad (2.14)$$

⁷Si veda [3], Cap.3.

⁸Per ricavare l'espressione per K si fa uso nuovamente della conservazione della massa che richiede che: $\frac{\delta \rho}{\rho_0} = - \left(3\xi_0 + r_0 \frac{d\xi_0}{dr_0} \right) e^{i\omega t}$

Introducendo l'ipotesi ad hoc che la stella sia sufficientemente omogenea (γ costante) e che la pulsazione cresca radialmente verso l'esterno in modo lineare, l'espressione precedente può essere notevolmente semplificata:

$$\omega^2 = -\frac{(3\gamma - 4)U_0}{I_0} \quad (2.15)$$

Per una sfera di densità uniforme, l'energia potenziale di autogravità e il momento di inerzia rispetto al centro sono dati da:

$$U_0 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0}; \quad I_0 = \frac{4}{15}MR_0^2. \quad (2.16)$$

Se si prende $\gamma = 5/3$, valore appropriato per una struttura completamente convettiva, si ha:

$$\omega^2 = \frac{9}{4}\frac{GM}{R_0^3} = 3\pi G\bar{\rho} \quad (2.17)$$

Allora si ottiene che il **Periodo di Pulsazione radiale per una sfera uniforme** è inversamente proporzionale alla radice quadrata della densità media:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{3G\bar{\rho}}} \approx \frac{7.92 \times 10^3}{\sqrt{\bar{\rho}}} \text{ sec.} \quad (2.18)$$

Questa espressione, ricavata in maniera estremamente approssimata, risulta essere sperimentalmente corretta nel caso delle *Cefeidi Classiche*.

Infatti, poiché dalle osservazioni si ha che la densità media delle Cefeidi varia tra 10^{-3} e 10^{-6} g/cm^3 , una stima del loro periodo è $0.3 \text{ days} < T < 90 \text{ days}$, che è un risultato consistente.

2.4 Teorema del Viriale in presenza di campo magnetico

In un famoso articolo del 1953, Chandrasekhar e Fermi investigarono l'azione di un campo magnetico sulla stabilità gravitazionale introducendo nel Teorema del Viriale un termine che tenesse conto dell'energia magnetica. Il risultato del loro lavoro fu mostrare che quando l'energia magnetica eccede l'energia potenziale gravitazionale la configurazione diventa dinamicamente instabile. Da questo dedussero che i periodi relativamente lunghi delle variabili magnetiche fossero da imputare ad un eccesso di energia magnetica rispetto al limite previsto dal Teorema del Viriale.

Una generalizzazione del Teorema del Viriale in presenza di campo magnetico è:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + 3(\gamma - 1)U_{\text{int}} + U_{\text{mag}} + U_{\text{grav}} \quad (2.19)$$

dove U_{int} è l'energia interna, U_{mag} è l'energia magnetica e $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ è il rapporto tra i calori specifici (o *indice adiabatico*). La relazione precedente si ottiene moltiplicando scalarmente per \mathbf{x} l'equazione di *Navier-Stokes*⁹ e integrando su tutto il volume $d^3\mathbf{x}$.

⁹L'equazione del moto per un fluido non viscoso e incompressibile è $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{\rho}\nabla\phi + \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{H}}{c}$, dove \mathbf{J} è il vettore *densità di corrente* e \mathbf{H} è il campo magnetico. A parte il termine magnetico, si noti l'analogia con la seconda equazione di Jeans (eq. (1.15)): il termine $\frac{\partial\rho\sigma_{ij}^2}{\partial x_i}$ rappresenta proprio il gradiente di pressione.

Se il sistema è stazionario ($d^2I/dt^2 = 0$) e in assenza di moti macroscopici ($T = 0$) l'equazione (2.19) diventa:

$$3(\gamma - 1)U_{\text{int}} + U_{\text{mag}} + U_{\text{grav}} = 0. \quad (2.20)$$

D'altro canto, l'energia totale U_{tot} della configurazione è:

$$U_{\text{int}} + U_{\text{mag}} + U_{\text{grav}} = U_{\text{tot}} \quad (2.21)$$

Eliminando $U_{\text{mag}} + U_{\text{grav}}$ tra la (2.20) e la (2.21) si trova che, affinché un sistema stazionario sia stabile ($U_{\text{tot}} < 0$) è necessario avere $\gamma > 4/3$ in modo da rendere l'energia totale $U_{\text{tot}} = 3(\gamma - 1)U_{\text{int}} < 0$.

Allo stesso modo, eliminando U_{int} , si ottiene:

$$U_{\text{tot}} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}(U_{\text{mag}} + U_{\text{grav}})$$

Si ha quindi un'ulteriore condizione per la stabilità: affinché l'energia totale sia negativa, l'energia magnetica (> 0) non può superare il valore assoluto dell'energia potenziale gravitazionale:

$$U_{\text{mag}} = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{H}^2| d^3\mathbf{x} = \frac{1}{6} R^3 \overline{H^2} < |U_{\text{grav}}|. \quad (2.22)$$

È possibile stimare il limite imposto dal Teorema del Viriale al valore del campo magnetico nel caso di una distribuzione uniforme a simmetria sferica, per la quale si ha $U_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$. Esprimendo M e R in unità solari, dalla (2.22) segue che:

$$\sqrt{\overline{H^2}} < 0.2 \times \frac{M}{R^2} \text{gauss}. \quad (2.23)$$

Tabella 2.1: Campo magnetico superficiale e campo magnetico quadratico medio per tre stelle variabili.

Tipo	M (M_{\odot})	R (R_{\odot})	H_{sup} (gauss)	$\sqrt{\overline{H^2}} <$ (gauss)
A stars	4	5	10^4	3×10^7
S stars	15	3×10^2	10^3	3×10^4
VV Cephei	10^2	$2,6 \times 10^3$	10^3	3×10^3

La tabella 2.1 pone a confronto il valore del campo magnetico superficiale e il massimo valore del campo magnetico previsto dal Teorema del Viriale per tre tipologie diverse di *variabili magnetiche*. Il limite fissato dal Teorema del Viriale appare dai due ai tre ordini di grandezza più grande rispetto ai campi magnetici superficiali osservati. Questo è dovuto al fatto che il campo magnetico interno alla struttura stellare è probabilmente molto più intenso di quello superficiale.

Poiché il periodo delle variabili magnetiche è lungo se comparato con quello che si avrebbe se la pulsazione fosse di tipo adiabatico, è possibile che la variabilità di queste strutture sia dovuta ad un'accesso di energia magnetica e al fatto che il campo magnetico quadratico medio sia vicino al limite imposto dal Teorema del Viriale.

2.4.1 Campo magnetico e raggi cosmici: confinamento nel piano galattico

In condizioni astrofisiche il campo magnetico è *congelato* nella materia¹⁰ ed esercita una pressione interna detta *pressione magnetica* che si aggiunge alle altre pressioni presenti, quali la pressione del gas e quella dei *raggi cosmici*. Queste componenti di pressione dovrebbero portare ad un'espansione del mezzo interstellare: ci si aspetterebbe che campo magnetico, materia e raggi cosmici sfuggano dal disco della galassia. Invece, ciò che si osserva è un *confinamento* del campo magnetico e dei raggi cosmici nel piano galattico dovuto alla presenza di un potenziale gravitazionale attrattivo, come si può vedere la Teorema del Viriale:

$$2T + 3(\gamma - 1)U_{\text{int}} + U_{\text{mag}} + U_{\text{RC}} + U_{\text{grav}} = 0 \quad (2.24)$$

Come si realizza l'azione di confinamento? Si supponga che il campo magnetico, uniforme e parallelo al piano della Galassia, permei un cilindro isoterma di gas avente densità $\rho(z)$ con z altezza dal piano galattico. L'equazione dell'equilibrio barometrico per un elemento di volume di altezza z è:

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \bar{v}^2 + \frac{H^2}{8\pi} + P_{\text{RC}} \right) = -\rho(z)g(z) \quad (2.25)$$

dove $\rho \bar{v}^2$ è la *ram pressure*, con \bar{v}^2 velocità quadratica media e $\frac{H^2}{8\pi}$ è la *pressione magnetica*. Non avendo informazioni su come la pressione del campo magnetico e quella dei raggi cosmici varino in funzione di z , si ipotizza che esse siano funzione della pressione del gas e, in prima approssimazione, proporzionali ad essa:

$$\frac{H^2}{8\pi} \approx \alpha \rho \bar{v}^2 \quad P_{\text{RC}} \approx \beta \bar{v}^2$$

con α e β costanti. L'equazione dell'equilibrio barometrico diventa

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{g(z)}{\bar{v}^2(1 + \alpha + \beta)}$$

che integrata dà

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/\Lambda} \quad (2.26)$$

dove $\Lambda = \frac{\bar{v}^2(1+\alpha+\beta)}{\bar{g}}$ è detta *altezza caratteristica* sul piano della Galassia ed è il valore in corrispondenza del quale la densità è ridotta di $1/e$. \bar{g} è il valor medio dell'accelerazione di gravità nell'intervallo $[0, \Lambda]$. Sostituendo nella relazione precedente valori noti sperimentalmente, dedotti dalla distribuzione delle stelle perpendicolare al piano galattico, cioè $\Lambda = 150$ pc, $\bar{v}^2 = 6$ km s⁻¹, $\bar{g} = 1.6 \times 10^{-9}$ cms⁻² si trova che $\alpha + \beta \approx 1$, cioè che, affinché la Galassia sia in equilibrio, è necessario che il contributo alla pressione del campo magnetico e dei raggi cosmici sia dello stesso ordine di grandezza della pressione termica del gas:

$$\rho \bar{v}^2 \approx \frac{H^2}{8\pi} + P_{\text{RC}} \quad (2.27)$$

Poiché sul piano della Galassia, $\rho \approx 3 \times 10^{-24}$ gr cm⁻³ e $P_{\text{RC}} \approx 0.5 \div 1$ eV cm⁻³, dalla relazione (2.27) si vede che il valore del campo magnetico H non può essere molto maggiore di $\approx 5\mu\text{G}$ senza porre problemi alla condizione di equilibrio $\alpha + \beta \approx 1$.

¹⁰È noto dalla fisica dei plasmi che in condizioni di forte conducibilità elettrica il flusso del campo magnetico attraverso una superficie in moto con il fluido si conserva. Si usa dire che le linee di forza del campo magnetico sono *congelate* nel plasma e quindi si espandono con esso

Bibliografia

- [1] L. Ciotti, *Lecture Notes on Stellar Dynamics*, Scuola Normale Superiore Pisa, 2000
- [2] J. Binney, S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 2008
- [3] G.W. Collins, *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*, 2003
- [4] S. Chandrasekhar, E. Fermi, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, University of Chicago, 1953
- [5] C. Fanti, R. Fanti, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*, 2012
- [6] Appunti del corso *Astrofisica Extragalattica*, Prof. Luca Ciotti, A.A. 2017/2018
- [7] Appunti del corso *Processi di Radiazione e MHD*, Prof. Daniele Dallacasa, A.A. 2017/2018