

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
CORSO DI LAUREA IN ASTRONOMIA

Dinamica dei fluidi

Tesi di Laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Candidata:
Karin Silvi

Sessione III
Anno Accademico 2017-2018

A mia nonna, Ileana Gianferrari.

Dinamica dei fluidi

Karin Silvi

Sommario

Il seguente elaborato ha lo scopo di descrivere le caratteristiche peculiari della *dinamica dei fluidi*.

Il primo capitolo presenta il concetto fondamentale di *elemento di fluido* per la definizione di un fluido *collisionale*, nonchè *ideale*, e la conseguente descrizione matematica del suo moto attraverso due possibili formalismi, il *formalismo Euleroiano* ed il *formalismo Lagrangiano*. La descrizione della *derivata materiale* e la formulazione del *teorema del trasporto* nei paragrafi finali completano le nozioni necessarie per la comprensione basilare della fluidodinamica trattata nei capitoli successivi.

Il secondo capitolo, avvalendosi delle nozioni comprese precedentemente, descrive le tre equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi: l'*Equazione di Continuità della Massa*, l'*Equazione di Eulero* e l'*Equazione dell'Energia*. Viene inoltre dedicato un sottoparagrafo al caso dei *fluidi viscosi*.

Il terzo ed ultimo capitolo sceglie di trattare, tra le innumerevoli applicazioni astrofisiche dell'idrodinamica, le *onde sonore* ed in particolare il *Modello di Eulero-Poisson* per una nube di gas autogravitante del mezzo interstellare ponendo attenzione ai criteri per la prevalenza sulla pressione della gravità ed alla massa critica necessaria al collasso gravitazionale, denominata *Massa di Jeans*. L'elaborato si avvale principalmente delle notazioni matematiche contenute in [9], ad eccezione del Teorema del Trasporto e della trattazione dei fluidi viscosi per cui si è scelto di seguire le notazioni di [3] e [4] rispettivamente.

Indice

Indice	3
1 Introduzione	1
1.1 Formalismo Euleriano e Lagrangiano	1
1.1.1 La derivata materiale	2
1.2 Il teorema del trasporto	2
2 Equazioni dell'idrodinamica	3
2.1 L'equazione di continuità della massa	3
2.2 L'equazione di Eulero	5
2.2.1 I fluidi viscosi	6
2.3 L'equazione dell'energia	8
3 Applicazioni astrofisiche	9
3.1 Le onde sonore	10
3.2 Il modello di Eulero-Poisson	11
3.3 La Massa di Jeans	14
Riferimenti bibliografici	16

1 Introduzione

Si definisce "fluido" un corpo che ha proprietà non discontinue.

L'*elemento di fluido* è l'elemento di volume dV infinitamente piccolo "fisicamente" rispetto al corpo a livello macroscopico, per cui possono essere ignorate le variazioni sistematiche delle variabili prese in considerazione, ma grande a sufficienza da contenere un elevato numero di particelle. Presentando il rapporto tra una quantità q del fluido e la sua variazione come $L_{scale} = \frac{q}{|\nabla q|}$, si ha:

$$L_{fluid} \ll L_{scale}.$$

Definita una densità numerica di particelle "n" per unità di volume, si ha la seguente condizione:

$$nL_{fluid}^3 \gg 1 \quad \text{con } n = \text{densità numerica.}$$

In questo modo possono essere ignorate le fluttuazioni dovute al numero fisso delle particelle contenute all'interno dell'elemento di fluido stesso.

Se, in aggiunta, $L_{fluid} \gg \lambda_{mfp}^1$, dV è notevolmente maggiore rispetto al libero cammino medio delle particelle ed il fluido viene detto essere *collisionale* (dominano le interazioni collisionali tra le particelle del fluido).

La descrizione matematica dello stato del fluido collisionale in moto è data tramite la distribuzione della velocità $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ e due delle quantità termodinamiche, ad esempio $\rho(x, y, z, t)$ e $p(x, y, z, t)$. Si nota che lo stato è quindi descritto da cinque quantità: u_x, u_y, u_z, ρ e p .

Se non specificato, i fluidi presi in oggetto nel seguente trattato sono *ideali*, ovvero fluidi collisionali caratterizzati da una equazione di stato e soddisfacenti i seguenti criteri:

- non hanno frizioni interne,
- il volume rimane costante.

La mancanza di scambio di calore tra gli elementi di fluido (dovuta all'assenza di frizioni) significa che il moto è adiabatico per tutto il sistema. L'entropia delle particelle di fluido, denominata s , è costante nel tempo

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

e, in particolare, essa è massima.

1.1 Formalismo Euleriano e Lagrangiano

La dinamica dei fluidi si avvale di due possibili formalismi per lo studio del moto di un fluido: il *Formalismo Euleriano* ed il *Formalismo Lagrangiano*.

Il Formalismo Euleriano considera un volume in un punto fissato \mathbf{r} nello spazio e, durante lo studio del flusso del fluido attraverso il volume stesso, le variabili fisiche sono in funzione del tempo e di \mathbf{r} ; quindi $\rho(\mathbf{r}, t)$, $p(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. In questo modo la variazione di una delle quantità fisiche è una funzione del tempo; in particolare è la derivata rispetto al tempo della quantità al punto fissato \mathbf{r} .

¹ con λ_{mfp} si indica il libero cammino medio di una particella.

Come esempio per la comprensione si immagina di osservare dalla riva lo scorrere di un fiume.

Il Formalismo Lagrangiano prende in esame un elemento del fluido e studia la variazione delle sue quantità fisiche. Essendo il sistema di riferimento solidale all'elemento del fluido in moto, si ha che $\rho = \rho(\mathbf{a}, t)$ dove \mathbf{a} è una particolare etichetta per il fluido. Ora la posizione non è più una variabile indipendente ma è in funzione di \mathbf{a} , perciò $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, t)$. Il tasso di cambiamento rispetto al tempo per l'elemento "fissato" è dato dalla *derivata materiale*, indicata con $\frac{D}{Dt}$.

In confronto al precedente formalismo, adesso si sta osservando lo scorrere di un fiume da una barca in moto.

1.1.1 La derivata materiale

Si considerino le quantità fisiche (p, \mathbf{u}, ρ, T) caratterizzanti il fluido. Esse sono delle funzioni continue nello spazio e nel tempo riscrivibili in una forma generica come una quantità $q = q(\mathbf{r}, t)$. Partendo da una posizione \mathbf{r} e da un tempo t , risulta che al tempo $t + \delta t$ l'elemento si trova nella posizione $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ per cui la variazione nel tempo della quantità $q(\mathbf{r}, t)$ è per definizione:

$$\frac{Dq(\mathbf{r}, t)}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{[q(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t + \delta t) - q(\mathbf{r}, t)]}{\delta t}. \quad (1)$$

La forma compatta di $\frac{Dq(\mathbf{r}, t)}{Dt}$, conosciuta come *Derivata Materiale* o *Derivata Lagrangiana*, è data da:

$$\frac{Dq(\mathbf{r}, t)}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla q; \quad (2)$$

dove \mathbf{u} è, ovviamente, la velocità del fluido.

Si osserva che la derivata materiale relaziona il formalismo Lagrangiano con il formalismo Euleriano: il primo termine è dovuto al tasso di cambiamento in una posizione fissata (ovvero la derivata temporale euleriana), il secondo termine è dovuto al fatto che l'elemento di fluido considerato si è spostato in una nuova posizione dove la variabile $q(\mathbf{r}, t)$ assume un diverso valore.

1.2 Il teorema del trasporto

Lo studio della traiettoria di un mezzo continuo è possibile tramite l'osservazione delle linee tracciate dagli elementi di fluido in moto. Considerando il campo vettoriale di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (che è definito ovunque tramite coordinate euleriane), le linee principali che lo rappresentano sono le **streamlines** e le **pathlines**. Le streamlines (linee di flusso) sono tangenti in qualsiasi punto al vettore velocità e, ottenute tramite un "congelamento" del tempo, descrivono il comportamento del flusso in quell'istante². Le pathlines (linee del percorso) mostrano invece il percorso seguito da un elemento di fluido in un certo intervallo di tempo. Streamlines e pathlines appartengono rispettivamente ad una descrizione euleriana e lagrangiana e possono coincidere solo in caso di fluido *stazionario*, ovvero se e solo se il campo vettoriale della velocità è invariante nel tempo.

² è solito paragonarle, per comprensione, alle linee di forza di un campo vettoriale.

Si considerino dunque un campo $q(\mathbf{r}, t)$ ³, un campo vettoriale di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ed un volume iniziale Ω_0 , che varia dimensione nel tempo, descrivente un elemento di fluido. Ad un tempo t ogni elemento di fluido avrà tracciato una pathline e si troverà in un punto diverso da quello iniziale, con un nuovo volume Ω_t .

Il *Teorema del trasporto* descrive come varia il campo $q(\mathbf{r}, t)$ trasportato quando un volume del fluido si muove:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} q d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Dq}{Dt} + q \nabla \cdot \mathbf{u} \right) d^3\mathbf{r}. \quad (3)$$

Richiamando l'equazione (2) ed utilizzando l'identità

$$\nabla \cdot (q\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla q + q \nabla \cdot \mathbf{u},$$

l'equazione (3) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} q d^3\mathbf{r} = \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\mathbf{u}) \right] d^3\mathbf{r}. \quad (4)$$

Un'applicazione importante del risultato appena mostrato si ottiene assumendo che la quantità q sia conservativa⁴, cioè che $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} q d^3\mathbf{r} = 0$ per qualsiasi volume iniziale scelto Ω_0 . In questo caso si ha che:

$$\frac{Dq}{Dt} + q \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\mathbf{u}) = 0. \quad (5)$$

Se il campo \mathbf{u} è solenoidale, ovvero se $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, allora:

$$\frac{Dq}{Dt} = 0. \quad (6)$$

2 Equazioni dell'idrodinamica

Le equazioni di seguito riportate si avvalgono del Teorema del Trasporto, attraverso il formalismo Lagrangiano ed Euleriano, per la descrizione della conservazione della massa, del momento e dell'energia di un fluido.

2.1 L'equazione di continuità della massa

Per ottenere l'equazione per la conservazione della massa ci si ponga nella formulazione euleriana, considerando un fluido di densità ρ che attraversa un volume fisso V con superficie associata S come illustrato in figura 1.

³ è indifferente sceglierlo scalare o vettoriale.

⁴ la conservazione di q nel volume scelto significa che non sono presenti sorgenti o pozzi

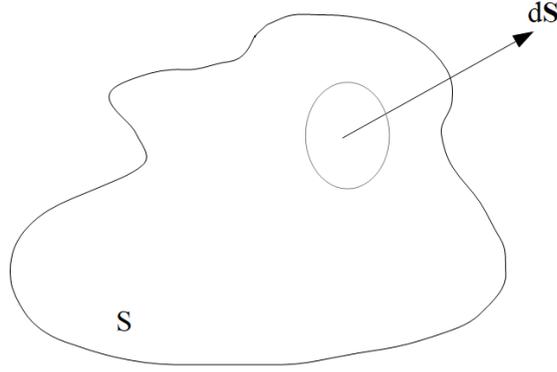


Figura 1: Superficie S attorno al volume fissato V

Il tasso di cambiamento della massa del fluido contenuta in questo volume è dato da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (7)$$

Come accennato nella descrizione del teorema del trasporto, in assenza di pozzi o sorgenti l'equazione (7) deve eguagliare il flusso in entrata della massa integrata su tutta la superficie.

Preso un elemento di superficie $d\mathbf{S}$, il vettore ad esso associato (che è perpendicolare alla superficie) forma un angolo θ con la velocità \mathbf{u} delle particelle di fluido; gli elementi di fluido compiono quindi una distanza per unità di tempo pari a $u \cos \theta = \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{|d\mathbf{S}|}$ nella direzione di $d\mathbf{S}$, che moltiplicata alla densità e a $|d\mathbf{S}|$ fornisce di conseguenza la massa di fluido attraversante in uscita l'elemento di superficie: $\rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$. Integrando sull'intera superficie si ottiene la massa "guadagnata" dal volume V^5 :

$$- \int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV, \quad (8)$$

dove il segno negativo giustifica il flusso in uscita dal volume fissato.

Dalla (4) del Teorema del Trasporto, assumendo la conservazione della quantità $q(\mathbf{r}, t)$ con il ruolo di $\rho(\mathbf{r}, t)$, si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV. \quad (9)$$

Valendo per tutti i volumi, l'equazione ottenuta può essere riscritta come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

che corrisponde alla formulazione euleriana dell'equazione di continuità della massa. Per ottenere la formulazione Lagrangiana non bisogna fare altro che richiamare la forma compatta della derivata convettiva (2) avvalendosi nuovamente dell'identità $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (11)$$

⁵ Il teorema della divergenza fornisce l'uguaglianza tra integrale di superficie e di volume.

per cui

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (12)$$

L'equazione (12) fornisce un esempio pratico all'accenno compiuto alla conclusione della descrizione del teorema del trasporto per cui, con campo \mathbf{u} solenoidale, $\frac{Dq}{Dt} = 0$. Ponendo $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (detta *divergence free*) si ha che $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, corrispondente alla definizione di *fluido incompressibile* le cui particelle di fluido associate preservano la loro densità ρ durante la pathline .

2.2 L'equazione di Eulero

Si vuole ora ricavare l'equazione che descrive la conservazione del momento, chiamata *Equazione di Eulero*.

Si consideri come mostrato in Figura 2 un fluido incompressibile avente superficie \mathbf{S} , volume V e velocità \mathbf{u} . Si vuole studiare l'equazione del moto lungo il versore $\hat{\mathbf{n}}$ di una sua particella di fluido⁶ seguendo il formalismo Lagrangiano.

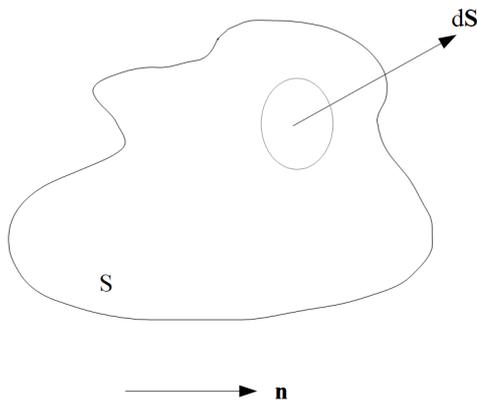


Figura 2: Volume del fluido con versore $\hat{\mathbf{n}}$.

Le forze agenti sull'elemento di superficie $d\mathbf{S}$ sono rispettivamente la forza di gravità (forza di volume) $\rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ e la pressione dovuta al fluido circostante agente perpendicolarmente alla superficie $-p \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S}$ ⁷.

Il tasso di cambiamento del momento per l'elemento di fluido, che eguaglia le forze agenti su di esso integrate sull'intero volume, fornisce le basi per la formulazione Lagrangiana dell'equazione di Eulero

$$\left(\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = - \int_V \nabla \cdot (p \hat{\mathbf{n}}) dV + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} dV, \quad (13)$$

dove per il teorema della divergenza si è passati da un integrale di superficie ad un integrale di volume per la pressione (forza di superficie) agente sul fluido.

Considerando il volume V infinitamente piccolo possiamo passare da $\int dV$ a δV ed attraverso l'utilizzo della familiare identità $\nabla \cdot (a\mathbf{b})$, otteniamo

⁶ con particella di fluido si intende l'elemento di fluido.

⁷ Si tenga presente che il segno negativo è dovuto alla direzione uscente del vettore $d\mathbf{S}$ mentre la pressione è entrante.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \frac{D}{Dt}(\rho \delta V) + \rho \delta V \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\delta V \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p - \delta V p \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} + \delta V \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (14)$$

Poichè la massa del fluido si conserva, il termine $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \frac{D}{Dt}(\rho \delta V)$ è nullo. Il vettore $\hat{\mathbf{n}}$ è un vettore unitario lungo una direzione costante per cui anche il termine $\delta V p \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}$ risulta pari a zero.

Si noti che la (14) vale per qualsiasi direzione e δV a piacimento: otteniamo dunque la formulazione Lagrangiana per l'Equazione di Eulero, dove il momento della particella di fluido varia come risultato dell'azione del gradiente di pressione e della forza di gravità

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (15)$$

La seconda formulazione per la (15) (stavolta euleriana), definita dall'espressione

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (16)$$

introduce come il variare del momento contenuto in una "celletta fissa" all'interno del fluido sia dovuto anche ad uno squilibrio nel flusso dell'impulso in entrata ed in uscita dalla cella.

2.2.1 I fluidi viscosi

Per parlare di fluidi *reali* e di come venga modificata per essi l'Equazione di Eulero si deve innanzitutto introdurre il tensore Π . Riformulando il tasso di cambiamento dell'impulso su unità di volume $\rho \mathbf{u}$ ⁸ come

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i, \quad (17)$$

sostituendo al suo interno la (10) in forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}$$

e la (16) in forma⁹

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} &= -\rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ponendo

⁸ si utilizza la notazione tensoriale.

⁹ per alleggerire i calcoli si ometterà l'azione della gravità sul fluido durante la trattazione dei fluidi viscosi

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial p}{\partial x_k}$$

può essere formulata una nuova espressione dell'Equazione di Eulero:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (19)$$

dove

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k \quad (20)$$

è la i -esima componente del tensore simmetrico che identifica l'ammontare di impulso nell'unità di tempo uscente dall'elemento di superficie dS perpendicolare all'asse x_k . Esso viene definito come "*Tensore di densità di flusso del momento*".

In forma vettoriale si ha $p\hat{\mathbf{n}} + \rho\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}})$: il tensore descrive il flusso del momento nella direzione del versore $\hat{\mathbf{n}}$, di conseguenza se quest'ultimo è diretto parallelamente alla velocità del fluido si osservano il contributo di una pressione termica (p) associata al moto casuale e isotropo delle particelle del fluido collisionale ed una *ram pressure* (ρu^2) generata dal moto d'insieme del fluido per cui si ottiene la densità di flusso $p + \rho u^2$. In direzione perpendicolare alla velocità si avrà il trasporto solo della componente trasversa del momento e la densità di flusso risulta semplicemente p .

Si ha ora l'occorrente necessario alla formulazione dell'equazione di conservazione del momento per fluidi reali incompressibili.

Il caso reale corrisponde alla presenza di una frizione interna al fluido (*viscosità*), dovuta a velocità differenti delle particelle, che tramite il *tensore viscoso* σ'_{ik} comporta un trasferimento irreversibile dell'impulso da punti in cui la velocità è maggiore verso punti in cui essa è minore. Il tensore della densità di flusso "ideale" del momento viene quindi modificato come segue:

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho u_i u_k, \quad (21)$$

dove il tensore $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ è detto *tensore degli sforzi*.¹⁰ Ponendosi momentaneamente nel caso di un fluido ideale in quiete si osserva che il tensore σ_{ik} , coincidente con $p\delta_{ik}$, moltiplicato alla componente n_k individua la pressione agente perpendicolarmente alla superficie utilizzata per la formulazione dell'Equazione di Eulero.

Il tensore viscoso σ'_{ik} è definito dalla somma di due *coefficienti di viscosità* μ e ζ , positivi, moltiplicanti rispettivamente:

- un termine contenente le combinazioni lineari simmetriche della derivata della velocità $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ dalla quale dipende il tensore e rappresentante la deformazione (allungamento o compressione) a cui è soggetta la particella di fluido che segue la propria pathline;
- la divergenza del campo della velocità e il tensore unitario,

pertanto

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \zeta \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ik}. \quad (22)$$

¹⁰ δ_{ik} è un tensore unitario diagonale.

Avendo deciso di trattare un fluido reale incompressibile, $\zeta \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ik}$ è nullo poichè applicabile solo a fluidi compressibili. Aggiungendo la variazione del tensore viscoso $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ all'interno di

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$$

e dividendo ogni membro per ρ , otteniamo l'equazione per il moto di un fluido incompressibile soggetto a forze viscosse ed alla pressione, chiamata **Equazione di Navier-Stokes**:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u}; \quad (23)$$

in cui $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è detto *coefficiente di viscosità cinematica*. Dalla (23) si può ricavare il concetto di *turbolenza* per il fluido.

Definendo due grandezze caratteristiche L e V, legate rispettivamente alla lunghezza e alla velocità del fluido, si ottengono le variabili adimensionalizzate che, sostituite nell'Equazione di Navier-Stokes, portano alla seguente formulazione:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{R_E} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (24)$$

Il **Numero di Reynolds** $R_E = \frac{LV}{\nu}$ è determinato dal rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscosse presenti nella (23) e rappresenta la transizione dal *regime viscoso* (in cui dominano le forze viscosse e le basse velocità) al *regime turbolento* (in cui dominano le forze d'inerzia e le alte velocità), poichè oltre un certo valore critico ($R_{crit} \sim 10^{3-4}$) il fluido può creare dei vortici.

2.3 L'equazione dell'energia

Per ricavare la terza ed ultima, ma non meno importante, equazione dell'idrodinamica si prenda in esame un fluido, non soggetto a processi dissipativi, la cui variazione dell'energia interna su unità di massa ϵ è fornita dalla nota *Prima Legge della Termodinamica*

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}, \quad (25)$$

dove $W = pdV$ è il lavoro svolto e δQ è il calore assorbito dall'ambiente esterno (entrambi espressi su unità di massa).¹¹

Definendo la derivata materiale per il lavoro come

$$\frac{DW}{Dt} = -p \frac{D(1/\rho)}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

ed introducendo la funzione $\frac{DQ}{Dt} = \dot{Q}_{cool}$, il cui segno è positivo se il mezzo viene raffreddato e negativo se riscaldato, la (25) assume la nuova formulazione:

¹¹ in questo paragrafo δ denota che la variazione di Q e W dipende dal percorso compiuto per arrivare ad uno stato finale da uno stato iniziale, poichè il calore e il lavoro non sono proprietà intrinseche di un corpo.

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} - \dot{Q}_{cool} \quad (26)$$

da inserire nell'equazione per la derivata materiale dell'energia totale per unità di volume del fluido, $E = \rho(\frac{1}{2}u^2 + \Psi + \epsilon)$ (con $\frac{1}{2}u^2$ e Ψ rispettivamente energia cinetica ed energia potenziale):

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{E}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\Psi}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} - \dot{Q}_{cool}). \quad (27)$$

Tenendo presente la formulazione lagrangiana dell'equazione generale per la conservazione dell'energia $\frac{DE}{Dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E$, si richiamino la (12) e la (15) (privata ovviamente di $\rho\mathbf{g}$) per ottenere le seguenti identità:

$$\frac{E}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{E}{\rho} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \text{dalla (12),}$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{u} \cdot (-\nabla p - \rho \nabla \Psi) \quad \text{dalla (15),}$$

$$\rho \frac{D\Psi}{Dt} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \Psi \quad \text{notazione euleriana,}$$

$$\rho \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{p}{\rho^2} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \text{dalla (12).}$$

Sostituite nella (27), semplificando i termini e passando dalla notazione Lagrangiana a quella Euleriana, otteniamo l'Equazione dell'Energia:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{u}] = -\rho \dot{Q}_{cool} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (28)$$

Poichè generalmente Ψ è in funzione della sola posizione il termine $\rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ è nullo e l'unica "incognita" della (28) è \dot{Q}_{cool} (il tasso di raffreddamento e riscaldamento del fluido considerato) che dipende dal processo a cui è legata.

Si propone come esempio esplicativo la conduzione per cui attraverso la *legge di Fourier* si ottiene il flusso di calore per unità di area $F_{cond} = -K \nabla T$ (con K costante di *conduttività* e T la temperatura) in cui il segno negativo giustifica la convenzione di assumere il flusso F_{cond} in direzione opposta a ∇T .

3 Applicazioni astrofisiche

L'astrofisica fa notevole uso della dinamica dei fluidi per lo studio di un'ampia categoria di fenomeni ed oggetti astrofisici (denominati *fluidi astrofisici*): stelle, dischi di accrescimento, venti stellari, galassie, gas nel ISM o nel IGM e molti altri.

I modelli matematici proponibili per l'astrofisica sono molteplici; il noto *Modello di Lundquist* per una nube di gas permeata da campo magnetico, a cui si può aggiungere la precedentemente discussa viscosità per ottenere il *Modello di Navier-Stokes* sono due classici esempi. Nel seguente trattato, a seguito di una breve introduzione sulle **onde sonore** in un mezzo come principale meccanismo per la propagazione delle perturbazioni, si è deciso di porre lo sguardo sul **Modello di Eulero-Poisson** per una nube del mezzo interstellare autogravitante e barotropica ed il "conflitto" tra onde sonore,

pressione e forza gravitazionale. Questo breve studio porterà ad una finale riflessione sul ruolo fondamentale della celebre **Massa di Jeans** per il collasso gravitazionale di tale nube e la conseguente formazione di stelle, galassie ed ammassi.

3.1 Le onde sonore

Si prenda in esame un fluido ideale barotropico, per cui la pressione è in funzione della densità ($p = p(\rho)$), il cui moto è descritto in formalismo Euleriano dalla (10) e dalla (16) che insieme formano il **Modello di Eulero** o *Modello del Primo Suono*.

Prese $p_0, \rho_0, \mathbf{u} = 0$ le quantità uniformi caratterizzanti lo stato di equilibrio, si applichi a quest'ultimo una perturbazione infinitesima istantanea ottenendo le nuove espressioni:

$$p = p_0 + \delta p,$$

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho,$$

$$\mathbf{u} = \delta \mathbf{u};$$

dove δ si riferisce alla perturbazione euleriana, ovvero alla perturbazione applicata su una fissata posizione.¹²

Sostituite nel modello, considerando solamente i termini al primo ordine nelle quantità perturbate, si ricava il sistema:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p = -\frac{dp}{d\rho} \frac{\nabla \delta \rho}{\rho_0}. \quad (30)$$

che è equivalente alla PDE del second'ordine del tipo onde per la perturbazione $\delta \rho$:

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \nabla^2 \delta \rho. \quad (31)$$

avente soluzione in una dimensione pari a $\delta \rho = \delta \rho_0 e^{i(kx - \omega t)}$ di pulsazione ω , numero d'onda k e velocità di propagazione $\frac{\omega}{k}$. Sostituendo la soluzione $\delta \rho$ nella PDE si osserva che $(\frac{\omega}{k})^2$ corrisponde a $\frac{dp}{d\rho}$, perciò l'onda si propaga nel fluido alla velocità del suono $c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. L'equazione generale $\delta s = \delta s_0 e^{i(kx - \omega t)}$ vale anche per la pressione e la velocità che, sostituite assieme a $\delta \rho$ nella (29) e (30), portano alla relazione diretta tra la perturbazione della velocità del fluido e la perturbazione della densità:

$$\delta u = \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \frac{\omega}{k}.$$

Si deduce quindi che la propagazione delle *onde sonore* attraverso il fluido è dovuta all'interazione tra le variazioni di velocità e di densità attraverso il termine della pressione: infatti $\delta \rho$ porta ad un gradiente di pressione che causa l'accelerazione della particella di fluido. La propagazione dell'onda è esclusivamente *longitudinale*: le onde trasversali, a differenza delle onde longitudinali, richiedono termini non diagonali nel tensore degli sforzi, il quale è puramente diagonale nel caso della pressione.

¹² Poichè le quantità sono state prese uniformi, le perturbazioni euleriane e lagrangiane ad una quantità X coincidono, perciò $\delta X = \Delta X$.

3.2 Il modello di Eulero-Poisson

Si assuma che il fluido barotropico descritto nel paragrafo precedente sia una nube di gas del mezzo interstellare autogravitante, di densità ρ , pressione p , velocità \mathbf{u} e soggetta ad un potenziale gravitazionale Ψ . In considerazione di un'onda sonora attraversante il fluido con una lunghezza d'onda λ per cui non si può ignorare la gravità, il Modello di Eulero è modificato dall'introduzione di una terza equazione che relaziona la perturbazione del potenziale gravitazionale alla perturbazione della densità, chiamata *Equazione di Poisson*, definendo il modello matematico per il fluido "**Modello di Eulero-Poisson**":

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Psi, \quad (33)$$

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho. \quad (34)$$

Applicando una perturbazione istantanea euleriana alle quantità dello stato di equilibrio $p_0, \rho_0, \mathbf{u} = 0, \Psi_0$ si ha:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\nabla \delta \rho}{\rho_0} - \nabla \delta \Psi, \quad (36)$$

$$\nabla^2 \delta \Psi = 4\pi G \delta \rho. \quad (37)$$

Si nota che l'assunzione di un fluido uniforme statico allo stato di equilibrio porta ad una condizione fisica assurda: con $u_0 = 0$, dalle equazioni per il moto si ottengono $\nabla p_0 = -\rho_0 \nabla \Psi_0, \nabla^2 \Psi_0 = 4\pi G \rho_0$ e se la pressione p_0 è costante, allora anche Ψ_0 deve esserlo implicando tuttavia un'impossibile densità ρ_0 nulla. Ciò è equivalente alla affermazione che un universo considerato statico sia completamente vuoto.

Nel 1902 Jeans propone la tecnica, conosciuta come "*Jeans swindle*", per cui le equazioni del modello vengono soddisfatte da una nube con densità uniforme e potenziale gravitazionale costante. In questo modo l'equazione gravitazionale interviene come legame funzionale tra la densità e il potenziale soltanto al momento delle perturbazioni. Inserendo rispettivamente nelle (35), (36), (37) le identità dai modi di Fourier¹³

$$\delta \rho = \rho_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

$$\delta \Psi = \Psi_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)};$$

si hanno le seguenti espressioni:

$$-\rho_1 \omega + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0,$$

¹³ per comodità si è preferito mostrare le identità in più dimensioni, a differenza del modello del primo suono in cui si è rimasti in una dimensione per la risoluzione del modello.

$$-\rho_0\omega\mathbf{u}_1 = -c_s^2\rho_1\mathbf{k} - \rho_0\Psi_1\mathbf{k},$$

$$-k^2\Psi_1 = 4\pi G\rho_1$$

che, "interagendo", portano alla formulazione della *relazione di dispersione*:

$$\omega^2 = c_s^2\left(k^2 - \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}\right) \quad (38)$$

oppure

$$\omega^2 = c_s^2(k^2 - k_j^2). \quad (39)$$

Dal risultato ottenuto sorge il criterio di instabilità di Jeans inteso come "lotta" tra la pressione e la forza di gravità.

ω^2 ha la possibilità di essere negativo per alcuni valori di k , i quali rappresentano delle perturbazioni che causano un aumento sempre maggiore della densità della nube. Il comportamento originariamente oscillatorio per ω reale è sostituito da una crescita esponenziale per ω immaginario.

Si definisce il *numero d'onda critico di Jeans* il numero d'onda critico per la stabilità:

$$k_j^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}. \quad (40)$$

corrispondente ad una lunghezza d'onda, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, chiamata *lunghezza d'onda critica di Jeans*:

$$\lambda_j = c_s\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \quad (41)$$

Si comprende dunque che perturbazioni di onde piane aventi $k < k_j$ e $\lambda > \lambda_j$ sono instabili. Se ciò sussiste, nonostante la pressione cerchi di "alleggerire" le fluttuazioni di densità, la gravità comprime ulteriormente la regione stessa che tende infine a collassare. Il collasso gravitazionale della nube avviene dunque quando la gravità domina sul termine termico.

La velocità di fase delle onde longitudinali di cui il vettore d'onda k soddisfa il criterio per la stabilità $k > k_j$, dette *onde gravitasoniche*, è chiamata *velocità di Jeans*:

$$v_j = \pm c_s(\rho_0)\sqrt{1 - \frac{k_j^2}{k^2}} \quad (42)$$

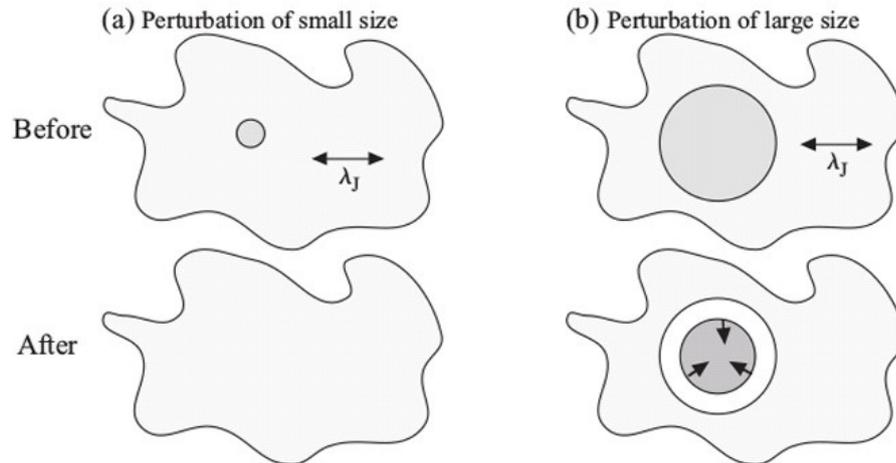


Figura 3: (a) Fluttuazioni della densità in una regione della nube aventi lunghezza d'onda minore rispetto alla lunghezza d'onda critica di Jeans. (b) Fluttuazioni della densità in una regione della nube con ampiezze maggiori rispetto alla lunghezza d'onda critica di Jeans.

In figura vengono mostrati due esempi pratici sui criteri di stabilità.

Si presentano due nubi interstellari sottoposte ad una perturbazione della densità, rispettivamente di piccola e grande ampiezza in confronto alla lunghezza d'onda critica di Jeans. Nel caso (a) la fluttuazione ha un comportamento oscillatorio nel tempo. Il criterio di stabilità è rispettato e la nube si trova in equilibrio idrostatico con la propria autogravità. In caso di un'ampiezza abbastanza piccola, l'autogravità della nube può essere persino ignorata. Nel caso (b) la condizione di stabilità viene a mancare e l'autogravità favorisce la compressione comportando una continua contrazione della perturbazione con conseguente collasso in breve tempo.

Un'ultima interessante osservazione, prima di presentare la massa critica per il collasso gravitazionale e la *formazione stellare*, è data dal ruolo della velocità del suono nella stabilità di un fluido descritto dal Modello di Eulero-Poisson. Si prendano in esame per il tasso di trasferimento di energia nel fluido ideale il caso

- isotermico: le onde sonore propagano la perturbazione se il tempo per la compressione e la rarefazione, affinché vi sia passaggio di calore tra le particelle di fluido, è maggiore del temposcala ω^{-1} con cui gli elementi di fluido compiono le oscillazioni, mantenendo conseguentemente costante la temperatura. La velocità del suono isotermica è:

$$c_s = \sqrt{\frac{RT}{\mu}};$$

- adiabatico: Ad entropia costante non vi è scambio di calore tra gli elementi del fluido ($\delta Q = TdS$) comportando un temposcala per il trasferimento di energia comparabile a ω^{-1} . In queste circostanze, sapendo che $p = K\rho^\gamma$, si ha che la velocità del suono adiabatica è:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

dove R è la costante universale dei gas, μ il peso molecolare medio e γ il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e volume costante ($\frac{C_p}{C_v}$).

Se il fluido associato al Modello di Eulero-Poisson è un gas monoatomico, corrispondente al caso isotermico con $\gamma = 1$, la velocità del suono presente al denominatore nella (40) alza la soglia per l'instabilità. Nel caso di un gas politropico avente $\gamma = \frac{5}{3}$, la velocità del suono abbassa la soglia per l'instabilità.

3.3 La Massa di Jeans

Si considerino l'energia termica e potenziale della nube, assunta come sfera omogenea ed uniforme. L'energia potenziale gravitazionale totale, avendo la sfera raggio R e massa $M = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3}$, è dimostrabile essere $U = -\frac{3GM^2}{5R}$. L'energia termica, considerando la nube come gas ideale, è per definizione¹⁴ $K = \frac{3}{2} \frac{MkT}{m} = \frac{3Mc_s^2}{2\gamma}$. Comparando le due equazioni si nota come l'energia totale data da $U + K$ diventa negativa per:

$$\frac{3Mc_s^2}{2\gamma} < \frac{3GM^2}{5R}$$

causando la predominanza della forza di gravità sull'energia termica nella nube. Dalla disequazione si deduce che:

$$c_s^2 < \frac{2\gamma GM}{5R} = \frac{8\pi\gamma G\rho_0 R^2}{15},$$

oppure

$$R^2 > \frac{15c_s^2}{8\pi\gamma\rho_0 G}.$$

Il rapporto tra il raggio R e la velocità del suono c_s , trascurando i fattori numerici,

$$\frac{R}{c_s} \geq (G\rho_0)^{-\frac{1}{2}}$$

permette la definizione del temposcala per il collasso gravitazionale chiamato *free-fall time* (tempo di caduta libera), $t_{ff} \sim (G\rho_0)^{-\frac{1}{2}}$. $t_s = \frac{R}{c_s}$ è il tempo che impiega il suono ad attraversare il sistema, definito *sound-crossing time*. Quando il tempo di caduta libera è più piccolo del crossing time, il collasso non può essere fermato.

La massa contenuta nella sfera avente come diametro la lunghezza d'onda λ_j ¹⁵ è chiamata *Massa di jeans* ed è pari a:

$$M_j \equiv \frac{4\pi\rho_0}{3} \left(\frac{1}{2}\lambda_j\right)^3 = \frac{\pi^{\frac{5}{2}} c_s^3}{6G^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}}} \quad (43)$$

Si può quindi dedurre che una perturbazione, in termini di massa, tende a crescere di ampiezza solo se la sua dimensione è sufficientemente grande, ovvero se coinvolge una massa sufficientemente grande tale che $M > M_j$.

¹⁴ Si ricordi che $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}}$

¹⁵ si osservi che, trascurando i fattori numerici, il valore critico di R dato da $R^2 \sim \frac{c_s^2}{\rho_0 G}$ è λ_j , come volevasi dimostrare.

Inserendo nelle (41) e (43) valori tipici delle nubi molecolari, si possono fare osservazioni conclusive molto interessanti. Si prenda in riferimento una nube molecolare fredda (con massa di particelle pari a $m = 3.3 \cdot 10^{-24}g$) di temperatura $T = 10K$ e $\gamma = \frac{5}{3}$, a cui corrisponde una velocità del suono $c_s = 260m/s$. Si ottengono le seguenti:

$$\lambda_j = 1.0pc \sqrt{\frac{T}{10K}} \left(\frac{n}{10^3cm^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M_j = 26M_\odot \left(\frac{T}{10k}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{n}{10^3cm^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Qualsiasi nube molecolare contenente più di qualche decina di masse solari di gas è perciò instabile, con conseguente collasso in un tempo t_{ff} :

$$t_{ff} = (G\rho_0)^{-\frac{1}{2}} = 2.1Myr \left(\frac{n}{10^3cm^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nelle prime fasi del collasso, nonostante la densità aumenti, il processo di raffreddamento sostenuto da atomi e molecole rimane efficiente mantenendo la nube in fase isoterma. Di conseguenza, la massa di Jeans decresce consentendo la frammentazione della nube stessa in frammenti di massa sempre minore, ognuno dei quali collassa seguendo il proprio free-fall time. I prodotti di questa prima frammentazione sono gli ammassi stellari. La formazione risulta quindi essere un processo gerarchico. Successivamente, quando la nube diventa otticamente spessa (ovvero opaca alla sua stessa radiazione) a causa dell'aumento di densità, i processi di perdita radiativa dall'interno della nube diventano inefficienti. Il processo non è più isoterma ma adiabatico e la radiazione non può più fuggire. La temperatura comincia di conseguenza a crescere, così come la Massa Critica di Jeans, stabilizzando il collasso e portando alla formazione di una *protostella*.

Riferimenti bibliografici

- [1] Dallacasa D., *MHD*, dispense 2017
- [2] Franchi F., *Dinamica dei fluidi*, dispense 2018
- [3] Ciotti L., *Dinamica dei fluidi*, dispense 2018
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 1987
- [5] Ciotti L., *Lecture notes on stellar dynamics*, 2000
- [6] F.R. Ferraro, *Evoluzione stellare*, dispense 2018
- [7] H. Karttunen and H. Oja, *Fundamental Astronomy*, 2006
- [8] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2007
- [9] C. J. Clarke and R. F. Carswell, *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*, 2007

Ringraziamenti

Ci tengo a ringraziare la professoressa Franca Franchi per gli importanti consigli dati per la stesura di questa tesi.

Ringrazio immensamente la mia professoressa di fisica del liceo, Claudia Farina, per riavermi fatto appassionare alla fisica. Se ho intrapreso il percorso universitario che sognavo fin da piccola, ma a cui per anni avevo rinunciato, è anche grazie a te.

Ringrazio le mie amiche Laura e Marina, che mi hanno sopportata durante gli sproloqui scientifici e supportata.

Un grazie speciale va a i miei compagni di corso tra cui Giada ed Andrealuna, che per tre anni mi hanno aiutata quando avevo bisogno; Fabio, Niccolò ed Eugenio vi ringrazio per la compagnia in tutti i viaggi da pendolari che abbiamo compiuto per sei mesi all'anno.

Infine, il ringraziamento più grande va a mia madre, che ha compiuto grandi sacrifici pur di assecondare i miei studi e che mi ha sempre supportata nei momenti di maggior bisogno.