ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÁ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Generalizzazione del Teorema di Seifert-Van Kampen

Tesi di laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
STEFANO FRANCAVIGLIA

Presentata da:
ENRICO TREBESCHI

Sessione unica
Anno Accademico 2017-2018

Indice

Sommario

Dati due spazi topologici, è molto utile e interessante scoprire se siano o meno omeomorfi, in quanto l'omeomorfia preserva tutte le proprietà topologiche. Il più delle volte è molto complesso costruire un omeomorfismo esplicito o anche solo mostrare che ne esista uno, ed è altrettanto complicato dimostrare il viceversa.
Ci sono però, come già detto, molte caratteristiche che vengono mantenute dall'omeomorfismo, dette invarianti topologici. Questi non forniscono condizioni sufficienti a garantire l'esistenza di un omeomorfismo, in compenso danno condizioni necessarie, altrettanto preziose per fermare la ricerca di una funzione inesistente. Esempi di invarianti sono le proprietà di connessione, compattezza, numerabilità.

La topologia algebrica si è occupata di creare un ponte tra topologia e algebra costruendo oggetti algebrici che riflettono alcuni comportamenti topologici dello spazio. Questi strumenti sono degli invarianti laschi, cioè danno condizioni necessarie molto deboli. Questo difetto è però intrinseco nella loro natura, in quanto il loro scopo è essere semplici e rapidi da calcolare, proprietà acquisita al prezzo di una drastica perdita di informazioni.

Uno di questi oggetti è il primo gruppo fondamentale di uno spazio topologico puntato. Pur essendo meno complesso rispetto a trovare un omeomorfismo, costruire quest'invariante non è affatto semplice e il teorema di Seifert-Van Kampen si propone di agevolarne calcolo. Vedremo però che, per caratteristiche intrinseche alla natura del primo gruppo fondamentale, il teorema in questione ha delle limitazioni, che vengono in parte superate nella generalizzazione che utilizza i gruppoidi come invarianti.

Nella prima parte tratteremo quindi il primo gruppo fondamentale e il teorema di Van Kampen, cercando di mettere in luce gli aspetti che rendono necessaria una generalizzazione, in seguito ci occuperemo di definire il primo gruppoide fondamentale, che viene sviluppato sulla falsa riga del primo gruppo fondamentale facendo uso della teoria delle categorie, al fine di eliminare le problematiche relative al punto base e alla connessione per archi, finendo con il dimostrare l'equivalente del teorema di Van Kampen per questa teoria.

Capitolo 1

Teorema di Van Kampen

Il teorema di Van Kampen permette di esprimere il primo gruppo fondamentale di uno spazio topologico in funzione dei gruppi fondamentali di sottospazi che lo decompongono. Ciò riduce radicalmente la difficoltà di calcolarlo, permettendo di ricondurlo a casi più semplici.

Vedremo in questo primo capitolo com'è definito il primo gruppo fondamentale di uno spazio topologico e i limiti che rendono necessaria la generalizzazione fatta con i gruppoidi, infine enunceremo il Teorema di Van Kampen e ne spiegheremo l'utilità tramite alcuni esempi.

La trattazione sarà il più possibile discorsiva ed eviteremo di appesantirla con dimostrazioni rigorose, a meno che queste siano propedeutiche a comprendere i motivi che portano alla seconda parte. Per approfondire i dettagli tecnici si faccia riferimento a [4] (capitolo 1), [5] (sezioni da 2.1 a 2.3, capitolo 3).

1.1 Primo gruppo fondamentale

Il primo gruppo fondamentale, che definiremo formalmente tra poco, riflette il comportamento dei cappi su uno spazio topologico puntato. Vedremo che esso è un invariante topologico, ovvero gruppi fondamentali di spazi omeomorfi sono isomorfi.

Definizione 1.1.1 (Cammini e cappi)**.** Un cammino in uno spazio topologico X è una mappa $\omega\colon \mathbb{I} = [0,1] \to X$. Un cappio è un cammino tale che $\omega(0) = \omega(1)$.

L'insieme dei cammini su uno spazio topologico si denota con PX, ma in generale non è un oggetto per nulla maneggevole, sia per la sua cardinalità che per la sua struttura. Per questo motivo non lavoreremo con cammini ma con classi di equivalenza di cammini.

Definizione 1.1.2 (Omotopia di cammini)**.** Siano α, β due cammini su uno spazio topologico X. α si dice omotopo a β se esiste una funzione continua $F\colon \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to X$, detta equivalenza omotopica, tale che $F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \beta(t)$.
Si verifica banalmente che questa sia una relazione di equivalenza.

Possiamo pensare l'omotopia tra cammini come una deformazione continua di un cammino nell'altro, osservando che l'applicazione $t \mapsto F(t,s)$, che denoteremo d'ora in poi con F_t, è un cammino in X per ogni $t \in \mathbb{I}$.

L'operazione che dà la struttura di gruppo al primo gruppo fondamentale è la concatenazione tra cammini. Siano α, β due cammini tali che il punto finale del primo e il punto iniziale del secondo coincidano, ovvero $\alpha(1) = \beta(0)$, definiamo l'operazione $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha\beta$ tale che

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \geq 1/2 \end{cases},$$

ovvero il cammino ottenuto percorrendo a velocità doppia prima α e poi β.

Osservazione 1.1.3. Non possiamo concatenare cammini non consecutivi, ovvero quest'operazione non è ben definita su tutto PX.

Vogliamo restringerci ad una classe di cammini per cui l'operazione soddisfi gli assiomi dei gruppi, ovvero che l'operazione si possa applicare ad ogni coppia, risulti associativa ed esistano l'elemento neutro e l'elemento opposto.

Osserviamo innanzitutto che, dove definita, l'operazione è costante sulle classi di equivalenza per omotopia di cammini, e quindi è ben definita sul quoziente. Fissiamo dunque un punto $x_0 \in X$, detto punto base, e prendiamo la classe dei cappi basati in x_0, ovvero i cammini $\omega\colon \mathbb{I} \to X$ tali che $\omega(0) = \omega(1) = x_0$. In questo modo però non siamo certi che due cammini omotopi in PX lo siano anche nella classe dei cappi basati in x_0, in quanto se F è l'equivalenza omotopica, non necessariamente F_t è un cappio basato in x_0 per ogni $t \in \mathbb{I}$.

Esempio 1.1.4. Consideriamo $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ standard con punto base nell'origine. Siano $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = e^{2\pi i t}$. Sia F definita come $F(t,s) = e^{2\pi i t s}$, allora α, β sono cammini omotopi. In questo caso F_t è un cappio basato nell'origine solo per $t = 0, 1$.
Non esiste invece un'omotopia rel$\{0,1\}$ (definita in 1.1.5), infatti si può dimostrare che $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ e $[\alpha] = 0$, $[\beta] = 1$.

Per questo motivo dobbiamo introdurre un tipo di omotopia più fine di quella presentata precedentemente, ovvero l'omotopia relativa agli estremi.

Definizione 1.1.5 (Omotopia di cammini rel$\{0,1\}$)**.** Due cammini α, β si dicono omotopi rel$\{0,1\}$ se sono omotopi e l'equivalenza omotopica soddisfa la condizione

$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0), \qquad F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1), \qquad \forall s \in \mathbb{I}.$$

Da ultimo definiamo il concetto di spazi puntati, che permette di fissare il punto x_0 su cui saranno basate le classi dei cappi che costituiranno gli elementi del gruppo fondamentale.

Definizione 1.1.6 (Spazi puntati)**.** Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$, chiamiamo spazio topologico puntato la coppia (X, x_0). Dati due spazi puntati (X, x_0), (Y, y_0), chiamiamo mappa puntata una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Abbiamo tutti gli elementi per costruire il primo gruppo fondamentale di uno spazio topologico.

Definizione 1.1.7 (Primo gruppo fondamentale)**.** Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato. Il suo primo gruppo fondamentale, denotato con $\pi_1(X, x_0)$, è il gruppo composto dalle classi di equivalenza dei cappi basati in x_0 modulo omotopia relativa $\{0, 1\}$. L'operazione che conferisce all'insieme la struttura di gruppo è l'operazione di concatenazione di classi di cappi.

D'ora in poi parleremo di cappi intendendo classi di cappi quando ciò non generi ambiguità.

Abbiamo scelto come elementi i cappi basati in un punto per poter concatenare ogni coppia di cammini e, come appena visto, l'operazione è ben definita sul quoziente. La proprietà associativa è facilmente verificabile osservando che due curve con uguale supporto percorse a differente velocità sono omotope. Infine l'elemento neutro è dato dal cammino costante in x_0, e si può mostrare che l'opposto di $\omega(t)$ è $\omega(1-t)$, ovvero il cappio ottenuto percorrendo ω nel verso contrario.

Osservazione 1.1.8. Poiché gli elementi di $\pi_1(X, x_0)$ sono cappi basati in x_0, il primo gruppo fondamentale vede solo le componenti connesse per archi.

Questa è il primo limite del primo gruppo fondamentale, in quanto fissare il punto base fa perdere tutte le informazioni sulle altre componenti connesse per archi di X. Per questo motivo il più delle volte negli enunciati ci troveremo costretti a imporre che gli spazi in esame siano connessi per archi, come sottolineeremo in seguito.

1.2 Proprietà di $\pi_1(X, x_0)$

Abbiamo ora un oggetto modellato sulle caratteristiche topologiche dello spazio, vogliamo esplorarne le proprietà.

Teorema 1.2.1 (Prop. 1.5 [4], Th. 3.2.16 [5])**.** *Siano x_0, y_0 due punti di X appartenenti alla stessa componente connessa per archi, allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo a $\pi_1(X, y_0)$.*

Dimostrazione. Poiché x_0, y_0 appartengono alla stessa componente connessa per archi esiste un cammino ω tale che $\omega(0) = x_0$ e $\omega(1) = y_0$.
Si può mostrare che l'isomorfismo cercato è:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, y_0) \\ \alpha \quad &\mapsto \omega^{-1}\alpha\omega \end{aligned}.$$

□

Osservazione 1.2.2. Quest'isomorfismo non è canonico, ovvero dipende dalla scelta del cammino ω, a meno che il gruppo fondamentale non sia abeliano.

Per ora abbiamo utilizzato il concetto di spazio topologico puntato quasi fosse solo una notazione per mettere in evidenza il punto base, vediamo che è invece un oggetto molto più profondo. A questo fine diamo un risultato che pare in contraddizione con quanto detto finora, per sottolineare quanto sia restrittiva e innaturale l'imposizione di un punto base.

Teorema 1.2.3. *Il primo gruppo fondamentale NON è un invariante topologico.*

Controesempio. Anticipiamo che $\pi_1(\mathbb{S}^1, s_0) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{D}^2, d_0) = 0$. Sia $X = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{D}^2$. X è omeomorfo a se stesso tramite l'identità. Poiché il gruppo fondamentale vede solo la componente connessa per archi a cui appartiene il punto base, $\pi_1(X, s_0) = \pi_1(\mathbb{S}^1, s_0) = \mathbb{Z}$. Per lo stesso motivo $\pi_1(X, d_0) = \pi_1(\mathbb{D}^2, d_0) = 0$. Se il primo gruppo fondamentale fosse un invariante topologico avremmo appena dimostrato che X non è omeomorfo a se stesso, che è ovviamente assurdo. □

Questa "contraddizione" proviene dal fatto che il gruppo fondamentale sia un invariante per spazi puntati e non per spazi topologici. In effetti (X, s_0) non è isomorfo a (X, d_0), in quanto non esiste un omeomorfismo di X in se stesso tale che $s_0 \mapsto d_0$. Se però ci restringiamo al caso degli spazi topologici connessi per archi il teorema 1.2.1 garantisce che il gruppo fondamentale sia un invariante. Per dimostrare quest'affermazione abbiamo bisogno di utilizzare definire omomorfismi tra gruppi fondamentali.

Proposizione 1.2.4 (Morfismi indotti)**.** *Siano (X, x_0), (Y, y_0) spazi topologici puntati e sia $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una mappa puntata.*
f induce un omomorfismo $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ definito come $f_*([\omega]) := [f(\omega)]$.

Osserviamo che l'immagine continua di un cammino è un cammino, in quanto è una mappa continua $\mathbb{I} \xrightarrow{f\circ\omega} Y$, quindi la definizione di morfismo indotto e ben posta. Si dimostra inoltre che sia ben definito, ovvero le immagini di cappi omotopi sono omotope. A questo proposito si veda [4] (pagg. 35-38) e [5] (Th. 3.2.8).

Corollario 1.2.5. *Siano X, Y connessi per archi, se i due spazi topologici sono omeomorfi allora i loro gruppi fondamentali sono isomorfi.*

Dimostrazione. Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo tra i due spazi. Abbiamo già visto che, se uno spazio è connesso per archi, il primo gruppo fondamentale è uguale a meno di isomorfismi per qualsiasi punto base. Prendiamo dunque $x_0 \in X$ arbitrario e definiamo $y_0 = f(x_0)$, in questo modo $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è una mappa puntata.
Abbiamo appena mostrato sia f_* che $(f^{-1})_*$ sono omomorfismi di gruppi. Se mostriamo che $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ abbiamo vinto.

Per definizione $(f^{-1})_*$ associa a $[\omega'] \in \pi_1(Y, y_0)$ il cappio $[f^{-1}(\omega')]$ in $\pi_1(X, x_0)$. Se scelgo $[\omega'] = [f(\omega)]$ ottengo

$$(f^{-1})_*([\omega']) = (f^{-1})_*([f(\omega)]) = [f^{-1}(f(\omega))] = [\omega].$$

Allora $(f^{-1})_* f_*([\omega]) = [\omega]$ per ogni ω in $\pi_1(X, x_0)$, ovvero $(f^{-1})_*$ è inversa sinistra per f_*. Reiterando il ragionamento scambiando f con f^{-1} otteniamo che $(f^{-1})_*$ è inversa destra per f_*, ovvero ne è l'inversa. $\square$

L'ipotesi di connessione per archi gioca un ruolo fondamentale e deve essere utilizzata dopo aver trovato un omeomorfismo, per "traslare" il gruppo fondamentale dell'immagine nel punto base su cui avevamo il primo gruppo fondamentale isomorfo. Infatti se $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ non è detto che esista un omeomorfismo puntato $(X, x_0) \to (Y, y_0)$.

Esempio 1.2.6 (Controesempio)**.** Consideriamo lo spazio topologico $\mathbb{I} = [0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea. Sia $(X, x_0) = (\mathbb{I}, \frac{1}{2})$ e $(Y, y_0) = (\mathbb{I}, 0)$. Gli spazi sono omeomorfi e i gruppi fondamentali isomorfi, ma non esiste un automorfismo $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$ tale che $\frac{1}{2} \mapsto 0$. Infatti se f è un omeomorfismo allora per ogni sottospazio A nel dominio, $f|_A$ è un omeomorfismo tra A e $f(A)$. Prendiamo un intorno di $\frac{1}{2}$ in $\mathbb{I}$, ovvero un insieme della forma $A = (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua, $f(A)$ deve essere un sottospazio connesso di $\mathbb{I}$ contenente 0, ovvero $f(A) = [0, \delta)$, con $\delta > 0$. Ma A non è omeomorfo a $f(A)$, quindi abbiamo una contraddizione.

Nella dimostrazione infatti si sceglie implicitamente uno spazio puntato ausiliario (Y, z_0) per mostrare l'isomorfismo $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, z_0)$. Solo successivamente, sfruttando la connessione per archi di Y, mostriamo che $\pi_1(Y, y_0)$ è isomorfo a $\pi_1(Y, z_0)$ e quindi, per transitività, a $\pi_1(X, x_0)$. Per questo motivo continueremo a chiamare impropriamente invariante topologico il gruppo fondamentale, tenendo in considerazione solo spazi connessi per archi.

Osservazione 1.2.7. L'omomorfismo f_* perde molte delle proprietà della funzione f, come dovremmo aspettarci, in quanto il primo gruppo fondamentale mantiene solo poche delle informazioni sullo spazio (si pensi ad esempio che $\mathbb{R}^n$ ha lo stesso gruppo fondamentale per ogni $n \in \mathbb{N}$). Per questo l'isomorfia dei gruppi fondamentali è solo condizione necessaria per l'omeomorfia degli spazi (se connessi per archi).

Esempio 1.2.8. $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ iniettiva (risp. suriettiva)
$\not\Rightarrow f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ iniettiva (risp. suriettiva).
Anticipiamo che $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{R}^2, 0) \cong 0$ e $\pi_1(\mathbb{I}, 0) \cong 0$. Consideriamo l'immersione $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ che è ovviamente iniettiva, mentre il morfismo indotto $\mathbb{Z} \to 0$ non può esserlo. D'altra parte la mappa $\mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ che disegna una circonferenza è suriettiva, ma un morfismo $0 \to \mathbb{Z}$ non può esserlo.

1.3 Omotopia

Abbiamo visto parecchie proprietà del primo gruppo fondamentale, ma ancora nessun metodo che ci permetta di calcolarlo. Generalizziamo la definizione di omotopia di cammini per ottenere uno strumento che ci permetterà di trattare con più facilità il primo gruppo fondamentale.

Definizione 1.3.1 (Omotopia di mappe)**.** Siano X, Y spazi topologici. Due mappe $f, g\colon X \to Y$ si dicono omotope se esiste una funzione continua $F\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$.
Chiameremo F equivalenza omotopica e la denoteremo con $F\colon f \simeq g$.

Osservazione 1.3.2. L'omotopia tra funzioni continue è una generalizzazione di quella tra cammini in quanto quest'ultima è un'omotopia di mappe in cui $X = \mathbb{I}$.

Siamo a questo punto pronti per definire l'omotopia tra spazi topologici, che è una relazione più debole, e per questo più maneggevole, rispetto all'omeomorfia.

Definizione 1.3.3 (Omotopia)**.** Due spazi topologici X, Y si dicono omotopi (o dello stesso tipo di omotopia) se esistono due mappe $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ per cui valga

$$gf \simeq 1_X, \qquad fg \simeq 1_Y,$$

dove 1_X, 1_Y denotano rispettivamente le identità su X, Y.
In questo caso g si dice inversa omotopica di f e si scrive $X \simeq Y$.

Teorema 1.3.4 (Prop. 1.18 in [4], Th. 3.2.17 in [5])**.** *Siano X, Y spazi connessi per archi e omotopi, allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo a $\pi_1(Y, y_0)$ per ogni $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.*

Dimostrazione. Di nuovo la connessione per archi serve per non dipendere dal punto base. Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ le mappe che realizzano l'equivalenza omotopica. Si può dimostrare che gli omomorfismi indotti da queste funzioni siano isomorfismi. □

Possiamo quindi usare l'omotopia per semplificare uno spazio al fine di calcolarne il primo gruppo fondamentale.

Corollario 1.3.5. *Definiamo contraibile uno spazio omotopo allo spazio formato da un solo punto, ovvero $X = \{P\}$. É evidente che l'unico cammino su $\{P\}$ sia quello costante, e di conseguenza $\pi_1(X, P)$ è il gruppo banale.*
Dal teorema discende che ogni spazio contraibile abbia primo gruppo fondamentale banale.

Proposizione 1.3.6. $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{R}$ è connesso per archi, il suo gruppo fondamentale non dipende dal punto base x_0. Mostriamo che $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è contraibile per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ottenere la tesi.
Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to X$ tale che $f(x) = P$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e sia $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ tale che $g(P) = 0$. Ovviamente $fg = 1_X$. $gf\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è tale che $gf(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. L'omotopia definita come $F(x,t) = (1-t)x$ è l'equivalenza cercata. □

Vorremmo calcolare il gruppo fondamentale di spazi come la sfera e il toro, ma con le nostre attuali conoscenze non siamo in grado di farlo.

1.4 Presentazione di gruppi

Prima di affrontare il teorema abbiamo bisogno di alcune nozioni di algebra, che ci permetteranno di esprimere i gruppi fondamentali e di manipolarli. Il principale riferimento bibliografico per la stesura di questa sezione è stato [1] (sezioni 6.7-6.8).

Definizione 1.4.1 (Gruppo libero)**.** Sia $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme di simboli, definiamo l'insieme delle parole su X come:

$$\tilde{F}(X) := \{x_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} x_{i_2}^{\epsilon_{i_2}}, \ldots, x_{i_k}^{\epsilon_{i_k}} | x_{i_j} \in X,\ \epsilon_{i_j} = \pm 1,\ j = 1, \ldots, k;\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Osserviamo che per $k = 0$ abbiamo la parola nulla, che indicheremo con 1. In questo modo, definendo l'operazione su $\tilde{F}(X)$ come la giustapposizione di due parole, abbiamo un'operazione binaria associativa, di cui la parola nulla è l'elemento neutro.
Se una parola contiene la successione $\ldots xx^{-1} \ldots$ o $\ldots x^{-1}x \ldots$, imponiamo di ridurne la lunghezza eliminando x e x^{-1}. Diremo che una parola è ridotta se non è possibile apportarvi ulteriori semplificazioni. Abbiamo così definito x^{-1} come l'inverso di x.
Si può dimostrare che la riduzione è unica, ovvero non dipende dall'ordine con cui vengono fatte le semplificazioni. Definiamo quindi il gruppo libero sull'insieme dei simboli X come:

$$F(X) := \{w \in \tilde{F}(X), w \text{ ridotta}\}.$$

In generale denoteremo il gruppo libero su n elementi con $\mathbb{F}_n$.

Stiamo utilizzando la notazione moltiplicativa, in particolare denoteremo $a^n := \underbrace{aa\ldots a}_{n\,volte}$.

Proposizione 1.4.2. *Il gruppo libero su un elemento è isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Sia a un generatore di $\mathbb{F}_1$, l'isomorfismo $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{Z}$ è definito estendendo $a \mapsto 1_{\mathbb{Z}}$, ovvero $a^n \mapsto n1_{\mathbb{Z}} = n$. $\square$

Grazie alla proposizione che segue avremo un modo per scrivere ogni gruppo come quoziente di un opportuno gruppo libero. Questo ci permetterà di definire operazioni di prodotto tra gruppi.

Proposizione 1.4.3 (Proprietà di rappresentazione del gruppo libero)**.** *Sia S un insieme, G un gruppo e $f: S \to G$ un'operazione tra insiemi.*
f si estende in maniera unica ad un morfismo ϕ su $F(S)$.
La dimostrazione si trova a pag. 261 di [1] (Prop. 8.1).

Diremo che G è *generato* da S se ϕ è suriettiva.

Corollario 1.4.4. *Se S genera G allora $G \cong F(S)/ker(\phi)$.*

Definizione 1.4.5 (Relazioni)**.** Sia G un gruppo, $S = \{x_i, i \in I\}$ un insieme di generatori per G, con I insieme di indici qualunque, e sia $\phi: F(S) \to G$ l'omomorfismo suriettivo ottenuto estendendo l'identificazione $S \to G$ come descritto nella proposizione 1.4.3. Chiamiamo relazioni tra i generatori di G gli elementi di $ker\phi$, ovvero gli elementi $r \in F(S)$ tali che $\phi(r) = 1_G$.

Definizione 1.4.6 (Presentazione)**.** Poiché $ker\phi$ è un sottogruppo di un gruppo libero, è a sua volta libero. Denotiamo con $R = \{r_j, j \in J\}$, con J insieme di indici qualunque, un insieme di generatori per $ker\phi$.
Scriviamo $G :=< S|R >= \{s_i, i \in I | r_j, j \in J\}$ per dire che $G = F(S)/N(R)$, dove $N(R)$ è il più piccolo sottogruppo normale di $F(S)$ contenente R.

Esempio 1.4.7. Consideriamo il gruppo libero $\mathbb{Z}$ generato da $S = 1_{\mathbb{Z}}$, vogliamo presentare $G = \mathbb{Z}_n$. In $\mathbb{Z}$ è naturale la notazione additiva, quindi denotiamo con $0_{\mathbb{Z}}$ l'elemento neutro e con $1_{\mathbb{Z}}$ un generatore. Sia $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ l'omomorfismo costruito estendendo $1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_{\mathbb{Z}_n}$, allora $ker\phi = \{nz, z \in \mathbb{Z}\}$. Un generatore per $ker\phi$ è n, prendiamo allora $R = \{n\}$.
$\mathbb{Z}_n$ risulta quindi $< \mathbb{Z}|R >= \{1_{\mathbb{Z}}|n1_{\mathbb{Z}}\}$, ovvero $\mathbb{Z}_n = \{\phi(z), z \in \mathbb{Z}, \phi(nz) = 0_{\mathbb{Z}_n}\}$, cioè $\mathbb{Z}_n = \{[z], z \in \mathbb{Z}, [n] = [0]\}$.

Osservazione 1.4.8. La presentazione non è unica ed è tuttora un problema aperto se a partire da due presentazioni (anche finite) si possa dire in tempo finito se esse rappresentino lo stesso gruppo.

Definizione 1.4.9 (Trasformazioni di Tiesze)**.** Le trasformazioni di Tietze permettono di passare da una presentazione finita ad una, ancora finita, equivalente. Le enunciamo solamente senza entrare nel dettaglio.
Sia $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme di simboli e $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ un insieme di relazioni, consideriamo la presentazione $< X|R >$.

i. sia s è conseguenza di R, ovvero è prodotto di r_j. Sia $R' := R \cup \{s\}$, allora $< X|R' > \cong < X|R >$,

ii. sia $h \in F(X)$, e y un simbolo non esistente in X. Siano $X' := X \cup \{y\}$ e $R' := R \cup \{yh^{-1}\}$, allora $< X'|R' > \cong < X|R >$.

Osservazione 1.4.10. La relazione yh^{-1} equivale alla richiesta che $\phi(yh^{-1}) = 1_G$, ovvero $\phi(y) = \phi(h)$. Allora il nuovo generatore y corrisponde alla parola h, cioè $y = h$ in G.

Definizione 1.4.11 (Prodotto libero)**.** Siano $G =< A|R >$ e $H =< B|S >$ due gruppi, definiamo il prodotto libero tra G e H come

$$G * H :=< A \sqcup B|R \sqcup S >$$

ovvero è l'unione disgiunta degli elementi dei due gruppi e delle rispettive relazioni.

Esempio 1.4.12. Prendiamo $G = \mathbb{Z}_n =< a|a^n >$, $H = \mathbb{Z}_m =< b|b^m >$, allora

$$\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m =< a, b|a^n, b^m > .$$

Definiamo ora il prodotto amalgamato, che servirà per il teorema di Van-Kampen.

Definizione 1.4.13 (Prodotto amalgamato)**.** Consideriamo tre gruppi $G =< A|R >$, $H =< B|S >$ e $L =< C|T >$. Siano $g\colon L \to G$, $h\colon L \to H$ omomorfismi di gruppo, definiamo prodotto tra G, H amalgamato rispetto a L tramite g, h il gruppo

$$G *_{(L,g,h)} H :=< A \sqcup B|R \sqcup S \sqcup \{g(l)h(l)^{-1}, l \in L\} >$$

cioè il prodotto libero tra G, H a cui vengono aggiunti i relatori che identificano gli elementi che sono immagine dello stesso elemento in L attraverso i due diversi morfismi.

Esempio 1.4.14. Come prima, siano $G = \mathbb{Z}_n =< a|a^n >$, $H = \mathbb{Z}_m =< b|b^m >$ i gruppi da moltiplicare. Consideriamo $L = \mathbb{Z}$ e i morfismi $g = \pi_n$, $h = \pi_m$, ovvero le proiezioni canoniche di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{Z}_k$, tali che $1_\mathbb{Z} \mapsto 1_{\mathbb{Z}_k}$. Allora, per la condizione $g(l) = h(l)$, ovvero $a = b$, otteniamo la relazione ab^{-1}.
Il prodotto amalgamato risulta essere $M = \mathbb{Z}_n *_{(\mathbb{Z},\pi_n,\pi_m)} \mathbb{Z}_m =< a, b|a^n, b^m, ab^{-1} >$.
Grazie alle trasformazioni di Tietze riusciamo a trovare che $M =< a|a^{MCD(n,m)} >$, infatti

$$< a, b|a^n, b^m, a = b > \iff < a|a^n, a^m > .$$

Sia $d = MCD(n, m)$, esistono $t, s \in \mathbb{Z}$ tali che $tn + sm = d$, allora

$$a^d = a^{tn+sm} = a^{tn}a^{sm} = (a^n)^t(a^m)^s = 1_M.$$

a^d è una conseguenza, perciò $M =< a|a^n, a^m, a^d >$. Infine a^n e a^m sono conseguenze di a^d, poiché $d|n, m$. Allora $M =< a|a^d >= \mathbb{Z}_d$, ovvero $\mathbb{Z}_n *_{(\mathbb{Z},\pi_n,\pi_m)} \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{MCD(n,m)}$.

1.5 Teorema di Seifert-Van Kampen

Teorema 1.5.1 (Seifert-Van Kampen)**.** *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, siano X_1, X_2 due sottospazi di X tali che:*

i. $Int(X_1) \cup Int(X_2) = X$,

ii. X_1, X_2 *connessi per archi,*

iii. $X_0 := X_1 \cap X_2$ *sia connesso per archi.*

Sia $x_0 \in X_0$ e siano $i_k \colon X_0 \hookrightarrow X_k$ le mappe di inclusione. Allora vale:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) *_{(\pi_1(X_0,x_0),(i_1)_*,(i_2)_*)} \pi_1(X_2, x_0).$$

Idea della dimostrazione. Dato che X_1 e X_2 ricoprono con i loro interni X possiamo scrivere tutti i cappi di X come concatenazione di cappi di X_1 e X_2. Si amalgama rispetto a X_0 perché, se lo stesso cappio ω è contenuto sia in X_1 che in X_2, affinché la sua classe di equivalenza sia ben definita nel gruppo fondamentale di X, è necessario che $[\omega]_1 \in \pi_1(X_1, x_0)$ e $[\omega]_2 \in \pi_1(X_2, x_0)$ coincidano in $\pi_1(X, x_0)$.

La dimostrazione formale si trova in [4] (Th. 1.20). Alternativamente viene presentata in [5] (Th. 3.3.18) una formulazione più debole, per il caso di complessi simpliciali. □

Osservazione 1.5.2. Poiché X è connesso $X_0 \neq \emptyset$. La richiesta che x_0 appartenga a X_0 e la connessione per archi di X_0, X_1 e X_2 servono unicamente affinché tutti i gruppi fondamentali espressi siano ben definiti. Riusciremo a superare l'ipotesi di connessione per archi nella generalizzazione.

Osservazione 1.5.3. La richiesta (i) serve per mantenere un legame con la topologia, che è costituita dagli aperti. Se $Int(X_1) \cup Int(X_2) = X$ posso scrivere ogni aperto $B \subseteq X$ come

$$B \cap (\mathring{X}_1 \cup \mathring{X}_2) = (B \cap \mathring{X}_1) \cup (B \cap \mathring{X}_2) =: B_1 \cup B_2.$$

Osserviamo che B_k è aperto in X in quanto intersezione finita di aperti. D'altra parte, poiché $B_k \subseteq \mathring{X}_k \subseteq X_k$, $B_k \cap X_k = B_k$, e quindi B_k è aperto anche in X_k. Possiamo quindi vedere ogni aperto di X come unione di aperti di X_1 e X_2. Questo ci permette di dire che, in qualche senso, a partire da X_1 e X_2 si può ricostruire la topologia di X. Successivamente vedremo più nel dettaglio questo legame, che chiameremo pushout.

Esempio 1.5.4. Possiamo ricoprire $\mathbb{S}^1$ con due semicirconferenze chiuse. Questa coppia di insiemi rispetta tutte le richieste del teorema eccetto (i). Se applicassimo la tesi troveremmo che il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^1$ sarebbe banale e ciò, come vedremo, è un assurdo.

Corollario 1.5.5. *Se X_0 è contraibile il teorema diventa* $\pi(X, x_0) \cong \pi(X_1, x_0) * \pi(X_2, x_0)$.

Si potrebbe pensare che la richiesta della connessione per archi di X_0 sia un prezzo relativamente basso da pagare per ottenere uno strumento così formidabile, e che solo in casi patologici si debba ricorrere ad altri strumenti.
Proviamo dunque a calcolare con Van Kampen il gruppo fondamentale di una circonferenza. Gli unici sottospazi connessi per archi sono gli archi di circonferenza e $\mathbb{S}^1$ stessa. Ovviamente non ha senso applicare il teorema prendendo $X_1 = \mathbb{S}^1$, quindi dobbiamo scegliere due archi di circonferenza. Vediamo però che se vogliamo che i loro interni ricoprano $\mathbb{S}^1$ siamo obbligati a prenderli che si intersechino in entrambi gli estremi, quindi X_0 non è connesso per archi e dunque il teorema non vale.
Questo è molto grave, in quanto per calcolare il gruppo fondamentale di una rosa a n petali o di una superficie con Van Kampen è necessario conoscere il primo gruppo fondamentale della circonferenza.

Teorema 1.5.6. $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. La dimostrazione, che noi daremo alla fine con l'utilizzo del teorema generalizzato, viene data attraverso lo studio delle proiezioni di rivestimento in [4] (Th. 1.7), mentre [5] (Ex. 3.3.14 (a)) utilizza il gruppo dei lati di una triangolazione di complessi simpliciali.
Intanto, giusto per avere un'idea, si pensi che i rappresentanti delle classi dei cappi sono $[e^{i2\pi nt}]$, al variare di n in $\mathbb{Z}$, ovvero una classe è determinata dal numero di giri con cui un cappio avvolge $\mathbb{S}^1$, con il segno che dipende dal verso di percorrenza. □

Con questo risultato siamo in grado di calcolare il gruppo fondamentale di una rosa a n petali e di qualsiasi superficie chiusa in maniera decisamente rapida.

Corollario 1.5.7. *Sia R_n la rosa a n petali, allora* $\pi_1(R_n, p) \cong \mathbb{F}_n$.

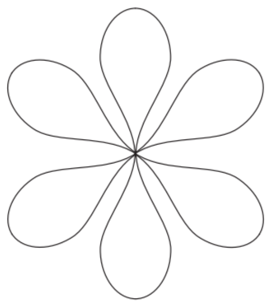
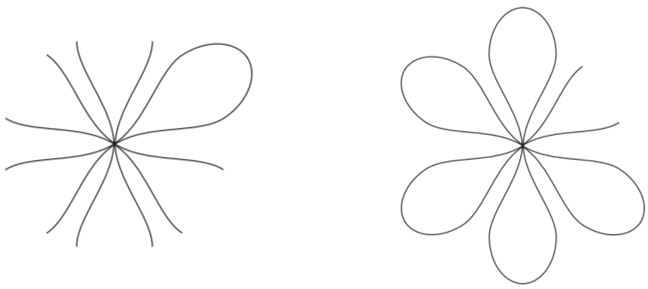


Figura 1.1: Esempio di rosa ad n petali con n=6

Per induzione. Se $n = 1$ la rosa è $\mathbb{S}^1$ e quindi la tesi discende direttamente dal teorema, dal momento che $\mathbb{F}_1 \cong \mathbb{Z}$.
Mostriamo $n = k$ con un disegno:



(a) *Sottospazio* X_1 (b) *Sottospazio* X_2

Dobbiamo lasciare i filetti che sporgono per soddisfare (i), ma essendo contraibili $X_1 \simeq \mathbb{S}^1$, quindi $\pi(X_1, x_0) \cong \mathbb{F}_1$, e $X_2 \simeq R_{k-1}$ e per induzione $\pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{F}_{k-1}$, inoltre l'intersezione è uno spazio contraibile quindi $\pi_1(R_k, x_0) \cong \mathbb{F}_1 * \mathbb{F}_{k-1} \cong \mathbb{F}_k$. □

Per le superfici vediamo invece il caso della sfera $\mathbb{S}^2$ e del toro $\mathbb{T}^2$.

Proposizione 1.5.8. *$\pi_1(\mathbb{S}^2, x_0)$ è il gruppo banale.*

Dimostrazione. Per il teorema di classificazione delle superfici possiamo rappresentare una circonferenza come un poligono con un numero pari di lati identificati a coppie. In particolare la sfera è omeomorfa allo spazio ottenuto come quoziente del quadrato in figura.

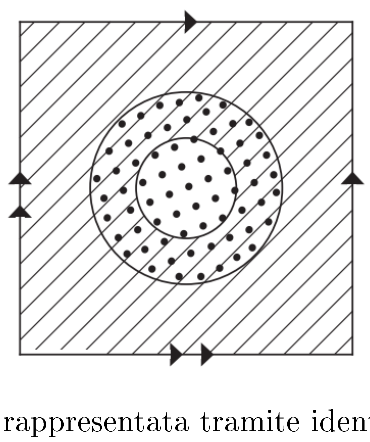


Figura 1.2: Sfera rappresentata tramite identificazione dei lati

Prendiamo come X_1 l'insieme colorato con i pallini e come X_2 quello rigato. Fissiamo un punto $x_0 \in X_0$. X_1 è un disco che, essendo contraibile, ha gruppo fondamentale banale. X_0 è una corona circolare e, poiché è omotopa a $\mathbb{S}^1$, $\pi_1(X_0, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Osserviamo che possiamo tramite un'omotopia deformare X_2 nel bordo del quadrato (se supponiamo di prendere il quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$ basta sceglere l'applicazione $F((x,y),t) = \frac{1-t}{\max\{|x|,|y|\}}(x,y)$). Il bordo del quadrato è formato da lati identificati che, per come li abbiamo scelti, rappresentano un segmento, quindi uno spazio contraibile. Allora anche il gruppo fondamentale di X_2 è banale. Applicando il teorema risulta $\pi_1(\mathbb{S}^2, x_0) = 0 *_{(\mathbb{Z},(i_1)_*,(i_2)_*)} 0 = 0$ □

Proposizione 1.5.9. $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, *ovvero il gruppo abeliano libero su due elementi.*

Dimostrazione. Come nel caso della sfera, possiamo rappresentare $\mathbb{T}^2$ come un quadrato coi lati identificati.

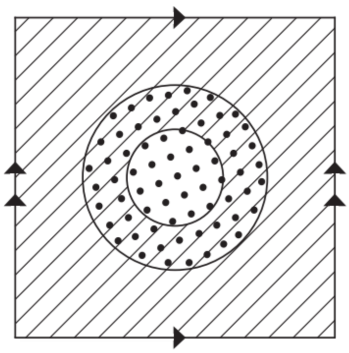


Figura 1.3: Toro rappresentato tramite identificazione dei lati

Prendiamo X_1, X_2 come nel caso della sfera. Analogamente a quanto appena visto $\pi_1(X_1, x_0) \cong 0$, $\pi_1(X_0, x_0) \cong \mathbb{Z}$ e X_2 omotopo allo spazio formato dal bordo del quadrato, in questo caso R_2. Allora $\pi_1(X_2, x_0) \cong \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
Per calcolare il prodotto amalgamato dobbiamo studiare come si comportano le mappe di inclusione. Per come abbiamo costruito l'omotopia su X_2, il generatore c di $\pi_1(X_0, x_0)$ viene deformato nel bordo del quadrato. Quindi, detti a, b i generatori di $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, che corrispondono ai due lati adiacenti, c viene mandato da $(i_2)_*$ mandato in $aba^{-1}b^{-1}$. Poiché $\pi_1(X_1, x_0) \cong 0$ $(i_1)_*(c) = 0$, la relazione è $aba^{-1}b^{-1}$ e di conseguenza $\pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) \cong < a, b | aba^{-1}b^{-1} >$, cioè l'abelianizzato di $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, che è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

Capitolo 2

Primo gruppoide fondamentale

2.1 Categorie

La teoria delle categorie permette di realizzare una matematica delle strutture matematiche, al fine di mettere in luce analogie tra branche apparentemente slegate tra loro. Noi ci occuperemo in particolare di trovare strutture algebriche che siano invarianti topologici, ovvero delle relazioni tra le categorie di gruppi e gruppoidi con quella degli spazi topologici.
Questa prima sezione risulterà slegata rispetto al precedente capitolo, in quanto molto astratta. Nelle successive tenteremo di riempire l'armamentario teorico che stiamo costruendo di un significato geometrico, per comprendere come possa essere utilizzato nello studio della topologia.

Per approfondimenti fare riferimento a [3], in particolare per questa parte sono state usate le sezioni da 6.1 a 6.4.

Definizione 2.1.1 (Categoria)**.** Una categoria $\mathcal{C}$ è formata da:

i. una classe, detta classe degli oggetti di $\mathcal{C}$ e denotata come $Ob(\mathcal{C})$,

ii. $\forall x, y \in Ob(\mathcal{C})$ una classe $\mathcal{C}(x, y)$ di elementi detti morfismi da x a y in $\mathcal{C}$,

iii. $\forall x, y, z \in Ob(\mathcal{C})$, una funzione, chiamata composizione, tale che

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) &\to \mathcal{C}(x,z) \, . \\ (g,f) &\mapsto gf \end{aligned}$$

La composizione deve soddisfare la proprietà associativa, ovvero

$$h(gf) = (hg)f, \qquad f \in \mathcal{C}(x,y),\ g \in \mathcal{C}(y,z),\ h \in \mathcal{C}(z,w).$$

Inoltre per ogni oggetto $x \in Ob(\mathcal{C})$ deve esistere un morfismo $1_x \in \mathcal{C}(x,x)$, detto identità, tale che dati $y \in Ob(\mathcal{C})$, $f \in \mathcal{C}(x,y)$, $g \in \mathcal{C}(y,x)$ valga

$$1_x f = f, \qquad g 1_x = g.$$

Denoteremo l'identità con 1_x quando utilizzeremo la notazione moltiplicativa e 0_x con la notazione additiva. Chiameremo i morfismi di $\mathcal{C}$ elementi della categoria li indicheremo con $f \in \mathcal{C}$ o con $f \colon x \to y$.

Esempio 2.1.2. `Set` è la categoria che ha come oggetti gli insiemi e come morfismi le funzioni. La composizione è quella classica tra funzioni e l'identità è la funzione identica $x \mapsto x$.

Esempio 2.1.3. `Top` ha come oggetti gli spazi topologici e come morfismi le funzioni continue. La composizione e l'identità sono le stesse di `Set`.

Esempio 2.1.4. $\mathtt{Top}_\circ$ è la categoria degli spazi topologici puntati che ha per morfismi le mappe puntate.

Esempio 2.1.5. `Grp` è la categoria dei gruppi con gli omomorfismi di gruppi.

Definizione 2.1.6 (Sottocategoria)**.** Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorie. $\mathcal{D}$ è una sottocategoria di $\mathcal{C}$ se:

i. $Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$,

ii. $\mathcal{D}(x,y) \subseteq \mathcal{C}(x,y) \quad \forall x, y \in Ob(\mathcal{D})$,

iii. la composizione di morfismi e le identità in $\mathcal{D}$ coincidono con quelle in $\mathcal{C}$.

Diremo che la sottocategoria $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ è:

- piena se $\mathcal{D}(x,y) = \mathcal{C}(x,y)$ per ogni x, $y \in Ob(\mathcal{C})$,
- larga se $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$.

Definizione 2.1.7 (Sezione e Retrazione)**.** Siano $f \in \mathcal{C}(x,y)$ e $g \in \mathcal{C}(y,x)$ due morfismi. Se $gf = 1_x$ chiamiamo g inverso sinistro di f e f inverso destro di g.
In particolare definiamo retrazioni i morfismi che ammettono inverso destro (o equivalente sono inverso sinistro di un altro morfismo) e sezioni quelli che ammettono inverso sinistro.

Esempio 2.1.8. Nella categoria `Set` le sezioni sono le funzioni iniettive e le retrazioni sono le funzioni suriettive.
Sia infatti $f \colon A \to B$ una funzione iniettiva, possiamo definire la funzione $g \colon B \to A$ che sia l'inversa di f sull'immagine e mandi $B \setminus Im\, f$ in punti qualsiasi di A. Allora è evidente che $gf = 1_A$, ovvero f è una sezione. Notare che con questo esempio abbiamo

anche mostrato che in generale l'inverso sinistro non è unico (dipende da come scelgo l'immagine degli elementi in $B \setminus Im\, f$).
Sia invece $g\colon A \to B$ una funzione suriettiva, definiamo $f\colon B \to A$ prendendo come immagine di b un elemento qualsiasi in $g^{-1}(\{b\})$. La funzione è ben definita perché per suriettività $g^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset\ \forall b \in B$. Anche qui è evidente che $gf = 1_B$, ovvero g è una retrazione, e che in generale l'inverso destro non è unico (dipende dalla scelta dell'elemento in $g^{-1}(\{b\})$).

Lemma 2.1.9. *Sia $f \in \mathcal{C}(x,y)$, siano g_1, $g_2 \in \mathcal{C}(y,x)$ tali che $g_1 f = 1_x$, $fg_2 = 1_y$, ovvero f è sia una retrazione che una sezione. Allora $g_1 = g_2$ ed è chiamato inverso di f.*

Dimostrazione. $g_1 = g_1 1_y = g_1(fg_2) = (g_1 f)g_2 = 1_x g_2 = g_2$ □

Definizione 2.1.10 (Isomorfismo)**.** Un morfismo $f \in \mathcal{C}(x,y)$ si dice isomorfismo se ammette inverso o, equivalentemente, se è sia una retrazione che una sezione.

Abbiamo quindi definito gli oggetti con cui vorremmo lavorare, abbiamo ora bisogno di costruire delle relazioni che li colleghino.

Definizione 2.1.11 (Funtore)**.** Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorie. Sia $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un'applicazione che associa ad ogni oggetto $x \in Ob(\mathcal{C})$ un oggetto $Fx \in Ob(\mathcal{D})$ e ad ogni morfismo $f \in \mathcal{C}(x,y)$ un morfismo $Ff \in \mathcal{D}(Fx, Fy)$. F si dice funtore se

$$F(gf) = F(g)F(f), \qquad F(1_x) = 1_{Fx}.$$

Esempio 2.1.12. L'applicazione che ad ogni spazio puntato (X, x_0) associa il suo gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ è un funtore $\mathtt{Top}_\circ \to \mathtt{Grp}$. Infatti abbiamo già visto che le mappe $f\colon X \to Y$ inducono morfismi $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$. Si può inoltre verificare che $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$ e $(gf)_* = g_* f_*$. Definendo $\pi_1(f) := f_*$, π_1 risulta un funtore.

Osservazione 2.1.13. Dalla definizione discende che la composizione di funtori è un funtore.

Definizione 2.1.14 ($\mathtt{Cat}$)**.** Definiamo $\mathtt{Cat}$ la categoria che ha per oggetti le categorie e per morfismi i funtori.

Proposizione 2.1.15. *Sia F un funtore $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Se $f \in \mathcal{C}(x,y)$ è un isomorfismo, una retrazione o una sezione allora anche $Ff \in \mathcal{D}(Fx, Fy)$ lo è.*

Dimostrazione. La dimostrazione discende banalmente dalle proprietà del funtore: siano f, g due morfismi di $\mathcal{C}$ tali che $gf = 1$, allora vale

$$F(g)F(f) = F(gf) = F(1) = 1_{Fx}.$$

Da ciò vediamo che $F(g)$ è una retrazione e $F(f)$ una sezione. Un isomorfismo è un morfismo che è contemporaneamente una sezione ed una retrazione e, poiché un funtore preserva entrambe le proprietà, preserva anche quella di isomorfismo. □

Osservazione 2.1.16. Ogni funtore $F\colon \texttt{Top} \to \mathcal{C}$, dove $\mathcal{C}$ è una generica categoria, induce invarianti topologici su ogni spazio topologico.
Consideriamo infatti due spazi topologici X, Y, ovvero due oggetti di $\texttt{Top}$. Questi si dicono omeomorfi se esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ che ammette inversa continua, cioè equivalentemente se $f \in \texttt{Top}(X, Y)$ è un isomorfismo. Ma se f è un isomorfismo in $\texttt{Top}$ allora anche la sua immagine attraverso il funtore lo è, perciò l'esistenza di un isomorfismo in $\mathcal{C}(FX, FY)$ è condizione necessaria affinchè X e Y siano omeomorfi.

Corollario 2.1.17. *Abbiamo così ridimostrato il fatto che il primo gruppo fondamentale sia un invariante per gli spazi puntati, e abbiamo portato alla luce un legame più profondo di quanto non ci potessimo aspettare nella costruzione data nel primo capitolo tra uno spazio puntato e il suo gruppo fondamentale.*

Vogliamo ora slegarci dal vincolo dato dal punto base sfruttando il fatto che nelle categorie i morfismi non sono necessariamente definiti per ogni coppia di oggetti, in quanto $\mathcal{C}(C_1, C_2)$ può essere vuota. Ripercorreremo quindi parte del processo che ha portato alla nascita del gruppo fondamentale alla luce dei nuovi strumenti di cui ci siamo dotati.

Definizione 2.1.18 (Categoria dei cammini)**.** Sia X uno spazio topologico, denotiamo con PX la categoria dei suoi cammini, che ha come oggetti i punti di X e come morfismi i cammini tra le coppie ordinate dei punti. Avremo cioè $Ob(PX) = X$ e, per ogni coppia $x, y \in X$, $PX(x, y) = \{\omega\colon \mathbb{I} \to X,\, \omega(0) = x,\, \omega(1) = y\}$. La composizione tra morfismi la concatenazione di cammini, definita se l'estremo finale del primo cammino coincide con quello iniziale del secondo.
N.B.: rispetto alla composizione di morfismi la concatenazione di cammini scambia l'ordine, ma questo non modifica nulla per quanto concerne la nostra trattazione.

Proposizione 2.1.19. *L'applicazione $P\colon \texttt{Top} \to \texttt{Cat}$ che associa ad uno spazio topologico X la categoria PX è un funtore.*

Dimostrazione. P è l'identità sugli oggetti. Data una mappa $f\colon X \to Y$, $P(f)$ è il morfismo che manda un cammino $\omega\colon \mathbb{I} \to X$ nel cammino $f \circ \omega\colon \mathbb{I} \to Y$.
Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ mappe continue, allora

$$P(g \circ f)(\omega) = (g \circ f) \circ \omega = g \circ (f \circ \omega) = P(g)P(f)(\omega)$$

per ogni cammino ω, ovvero $P(gf) = P(g)P(f)$. Inoltre è evidente che l'identità viene mandata in se stessa in quanto $P(1_X)(\omega) = 1_X \circ \omega = \omega$. □

Come già osservato in precedenza, questa struttura è eccessivamente ingombrante e complicata per esserci utile. La utilizzeremo solo come punto di partenza per definire oggetti più maneggevoli, restringendoci a classi d'omotopia invece di considerare tutti i possibili cammini. In questo modo vedremo che gli invarianti trovati non sono più generiche categorie, ma oggetti con maggiore struttura e per questo con proprietà che ne facilitano lo studio.

2.2 Definizione e proprietà di $\pi_1 X$

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice piccola se $Ob(\mathcal{C})$ e $\mathcal{C}(x,y)$ sono insiemi per ogni coppia (x,y).

Definizione 2.2.1 (Gruppoidi)**.** Un gruppoide è una categoria piccola in cui tutti i morfismi sono isomorfismi.

Osservazione 2.2.2 (Definizione equivalente). Sia $\mathcal{G}$ un gruppoide. Denotiamo con $\mathbf{G} := \bigcup_{x,y \in Ob(\mathcal{G})} \mathcal{G}(x,y)$ e con $*$ la composizione tra morfismi. Possiamo allora pensare $\mathcal{G}$ come all'insieme $\mathbf{G}$ dotato dell'operazione parziale $*$, che risulta associativa, inoltre ogni elemento dell'insieme ha un inverso rispetto a tale operazione.

Osservazione 2.2.3. Analogamente possiamo vedere ogni gruppo G come una categoria. Sia $\mathcal{G}$ la categoria con un unico oggetto x e sia $\mathcal{G}(x,x) = G$. Poiché G è un gruppo le proprietà dei morfismi sono rispettate, inoltre ogni elemento del gruppo ammette inverso che, nel linguaggio delle categorie, significa che ogni morfismo $g \in \mathcal{G}(x,x)$ è un isomorfismo. Quindi, come lasciava intuire il nome, i gruppoidi sono una generalizzazione dei gruppi.

La classe dei gruppoidi forma una categoria, denotata come `Grpd`, i cui morfismi sono i funtori tra gruppoidi. Chiameremo gli oggetti di un gruppoide *luoghi* e i suoi morfismi *strade*. Questa notazione è utile per distinguere gli elementi dei gruppoidi (morfismi) dai morfismi tra gruppoidi (funtori) e sottolineare il ruolo rivestito da questi oggetti nel generalizzare il primo gruppo fondamentale.

Definizione 2.2.4 (Primo gruppoide fondamentale)**.** Sia X uno spazio topologico, definiamo $\pi_1 X$ il gruppoide che ha come luoghi i punti di X e come strade le classi di equivalenza rel$\{0,1\}$ dei cammini in X. Il ruolo di composizione è occupato dalla concatenazione che, come già visto, è ben definita sul quoziente.
I morfismi tra gruppoidi sono le mappe indotte, definite come visto per il gruppo fondamentale, che vengono denotate come $\pi_1 f$, anche se spesso le chiameremo f con leggero abuso di notazione.

Osservazione 2.2.5. Nella costruzione del primo gruppo fondamentale avevamo dovuto restringerci a cappi puntati in un punto per poter definire l'operazione di gruppo, cioè la concatenazione, per qualsiasi coppia di elementi del gruppo. Nella generalizzazione ai gruppoidi l'operazione è parziale, ovvero non è definita necessariamente per tutte le coppie di luoghi. Affinché i cammini siano strade ci basta che sia definita una composizione tra $\pi_1 X(x,y) \times \pi_1 X(y,z) \to \pi_1 X(x,z)$. Il primo insieme contiene i cammini da x a y, il secondo quelli da y a z, quindi la concatenazione è ben definita e costituisce un cammino da x a z, ovvero un elemento di $\pi_1 X(x,z)$. Inoltre ogni cammino ha un inverso, ottenuto cambiando il verso di percorrenza, quindi $\pi_1 X$ è effettivamente un gruppoide.

Il primo gruppoide fondamentale è modellato sui cammini, quindi non dipende più da un punto base. Per questo motivo questa generalizzazione supera il limite di poter analizzare una sola componente connessa per archi di X, riflettendo le caratteristiche dell'intero spazio.

Proposizione 2.2.6. *L'applicazione p che a PX associa $\pi_1 X$ è un funtore.*

Dimostrazione. p è l'identità sugli oggetti e il quoziente rispetto all'omotopia $\mathrm{rel}\{0,1\}$ sui morfismi. Le proprietà della proiezione a quoziente concludono la dimostrazione. □

Corollario 2.2.7. *L'applicazione $\pi_1\colon \mathtt{Top} \to \mathtt{Grpd}$ che ad ogni spazio topologico associa il suo primo gruppoide fondamentale è un funtore.*

Dimostrazione. $\pi_1 = pP$, ovvero è composizione di due funtori. □

Da quanto visto in precedenza questo garantisce che il primo gruppoide fondamentale sia un invariante topologico. Vogliamo ora esplorarne le proprietà per capire se possiamo ricavarne informazioni specifiche sulla topologia di X.

Osservazione 2.2.8. Attraverso il gruppoide fondamentale possiamo ricevere solo informazioni riguardanti la connessione per archi, e non circa la connessione. Per esempio consideriamo i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$: sia X il seno del topologo, definito come $\{(x, \sin(1/x)), x > 0\} \cup (\{0\} \times [0,1])$, e sia Y formato da due segmenti disgiunti.

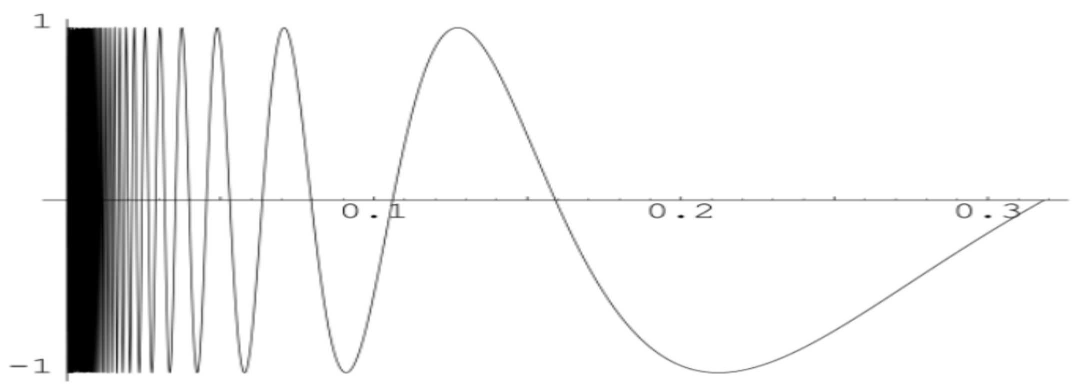


Figura 2.1: Seno del topologo

Entrambi non sono connessi per archi ed hanno due componenti connesse per archi, ma il primo è connesso, a differenza del secondo. I loro gruppoidi fondamentali sono però isomorfi, questo è facile da vedere in quanto le due componenti connesse per archi di entrambi gli spazi sono contraibili.

Vediamo dunque come il gruppoide fondamentale ricalca la proprietà di connessione per archi di uno spazio.

Definizione 2.2.9 (Connesso)**.** Un gruppoide $\mathcal{G}$ si dice connesso se ogni coppia di luoghi è collegata da una strada, ovvero se $\mathcal{G}(x, y) \neq \emptyset \quad \forall x, y \in Ob(\mathcal{G})$.

Segue banalmente dalla definizione il seguente enunciato:

Proposizione 2.2.10. *X è uno spazio topologico connesso per archi $\iff$ $\pi_1 X$ è un gruppoide connesso.*

Esempio 2.2.11. X si dice totalmente disconnesso se ogni componente connessa per archi è un singoletto. In questo caso il gruppoide fondamentale di X sarà della forma:

$$\pi_1 X(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \neq x \\ \{1_x\} & \text{per } y = x \end{cases}.$$

Definizione 2.2.12 (Sottogruppoide)**.** $\mathcal{H}$ si dice sottogruppoide di $\mathcal{G}$ se è una sua sottocategoria ed è anch'esso un gruppoide.

Una sottocategoria di un gruppoide può non essere un gruppoide: se f è un elemento di $\mathcal{H}$, ma f^{-1} no, allora f non ammette inverso in $\mathcal{H}$. Questo significa che f non è un isomorfismo e $\mathcal{H}$ di conseguenza non è un gruppoide. D'altra parte l'unica proprietà che potrebbe non essere soddisfatta da una sottocategoria di un sottogruppoide è quella per cui tutti i morfismi sono isomorfismi, quindi una sottocategoria piena è sempre un sottogruppoide, in quanto contiene tutte le possibili strade per ogni sua coppia di luoghi.

Definizione 2.2.13 (Componente)**.** Si dicono componenti di $\mathcal{G}$ i sottogruppoidi pieni connessi massimali rispetto all'inclusione dei luoghi.

Risulta evidente che se $\mathcal{H}$ è una componente di $\pi_1 X$ allora $Ob(\mathcal{H})$ è una componente connessa per archi di X. Il viceversa non è vero, in quanto dai soli luoghi non abbiamo informazioni sulle strade del sottogruppoide. Tuttavia, se $C \subseteq X$ è una componente connessa per archi, il sottogruppoide pieno che ha C come insieme dei luoghi è una componente.

Da queste poche definizioni possiamo renderci conto di come il primo gruppoide fondamentale permetta di immagazzinare informazioni riguardanti proprietà non banali, come la connessione per archi, il numero e la composizione delle componenti connesse per archi, in "scaffali" di immediata lettura.
Ricavare dati da questa struttura è in teoria molto semplice, in quanto basta controllare se gli insiemi $\pi_1 X(x, y)$ siano o meno vuoti, ma a livello pratico ci si imbatte in un ostacolo tanto banale quanto ostico, ovvero l'enorme cardinalità di questo gruppoide.
I luoghi di $\pi_1 X$ sono infatti tutti i punti di X e, dal momento che l'abbiamo costruito come invariante topologico sfruttando i cammini, possiamo supporre di lavorare con spazi con supporto più che numerabili, in quanto i cammini in spazi costruiti su insiemi discreti sono costanti, o al più "saltellano" nell'intorno massimale di un punto, in quanto il suo filtro d'intorni ha cofinalità finita, quindi ha poco senso utilizzare questo tipo d'invariante per cercare di distinguerli. Il primo gruppoide fondamentale risulta perciò una struttura molto ingombrante.

2.3 Costruzione di $\pi_1 XA$

L'idea che svilupperemo per ovviare al problema della cardinalità è quella di non prendere come luoghi tutti i punti dello spazio topologico, ma restringere la scelta ad un sottoinsieme che renda il gruppoide più maneggevole, pur mantenendo tutte le informazioni. La seguente proposizione ci mostra come la maggior parte delle informazioni che siamo riusciti ad immagazzinare siano ridondanti, e ci suggerisce una via per snellire e rendere più efficiente la struttura del gruppoide fondamentale.
Siano $x, y \in X$, e siano α, β due cammini congiungenti x e y, ovvero $x \xrightarrow{\alpha} y$ e $x \xrightarrow{\beta} y$. Osserviamo che $\alpha\beta^{-1}$ è un cappio basato in x, ovvero $x \xrightarrow{\alpha\beta^{-1}} x$. Vale allora il seguente enunciato:

Proposizione 2.3.1. *α, β sono cammini omotopi rel$\{0,1\}$ se e solo se $\alpha\beta^{-1}$ è un cappio nullomotopo. Nel linguaggio dei gruppoidi questo significa*

$$\alpha = \beta \text{ in } \pi_1 X(x,y) \iff \alpha\beta^{-1} = 1_x \text{ in } \pi_1 X(x,x).$$

Dimostrazione. Se supponiamo $\alpha\beta^{-1} \simeq 1_x$ allora $\alpha \simeq \alpha\beta^{-1}\beta \simeq \beta$.
Viceversa se $\alpha \simeq \beta$ vale $\alpha\beta^{-1} \simeq \beta\beta^{-1} \simeq 1_x$, ovvero $\alpha\beta^{-1}$ è un cappio nullomotopo. □

Questo risultato mostra come il comportamento dei cammini sia osservabile studiando unicamente i cappi. Proviamo quindi a restringerci a studiare un unico luogo.

Osservazione 2.3.2. Consideriamo un gruppoide $\mathcal{G}$ con un solo oggetto. L'insieme delle strade di $\mathcal{G}$ dotato dell'operazione di composizione forma un gruppo. Per questo motivo i gruppoidi con un solo oggetto vengono abusivamente chiamati gruppi.

Definizione 2.3.3 (Vertex group)**.** Sia $\mathcal{G}$ un gruppoide, e sia $x \in Ob(\mathcal{G})$.
Il vertex group di $\mathcal{G}$ su x, che denoteremo con $\mathcal{G}(x)$, è il sottogruppoide pieno di $\mathcal{G}$ che ha come unico oggetto x.

Proposizione 2.3.4. *$\pi_1 X(x_0)$ è isomorfo come gruppo a $\pi_1(X, x_0)$.*

Dimostrazione. Per definizione le strade in $\pi_1 X(x,y)$ sono le classi dei cammini omotopi relativamente agli estremi, quindi gli elementi di $\pi_1 X(x,x)$ sono le classi rel$\{0,1\}$ dei cappi basati in x, da cui la tesi. □

Restringere in maniera così drastica l'insieme dei luoghi porta quindi ad una perdita esagerata d'informazioni, d'altra parte la proposizione ha come ipotesi che $\pi_1 X(x,y) \neq \emptyset$, ovvero che i luoghi presi in esame siano contenuti nella stessa componente. Abbiamo di fatto ridimostrato che il primo gruppo fondamentale descriva il comportamento dei cammini e che prenda in esame un'unica componente connessa per archi. Sapere che non esistano strade tra due luoghi è un'informazione molto preziosa, in quanto permette di capire che i due punti appartengano a componenti connesse per archi distinte.

Visti questi elementi possiamo pensare di prendere un punto per ogni componente, in modo da costruire un primo gruppoide fondamentale più agile che sia in un certo senso l'unione dei gruppi fontamentali di ogni componente connessa per archi di X. Con il vertex group abbiamo ristretto il nostro invariante ai cammini che hanno estremi nel sottoinsieme $\{x_0\}$, vogliamo generalizzare questa nozione a sottoinsiemi qualunque di X.

Definizione 2.3.5 ($\pi_1 XA$)**.** Sia X uno spazio topologico e A un insieme qualunque. Definiamo $\pi_1 XA$ come il sottogruppoide pieno di $\pi_1 X$ che ha come oggetti i punti di $X \cap A$.

Osservazione 2.3.6. Prendere come A un insieme qualsiasi invece che un sottoinsieme di X non crea nessun problema, in quanto in ogni caso $X \cap A \subseteq X$. Questa definizione più generale sarà utile per studiare il comporatamento dei gruppoidi fondamentali dei sottospazi topologici di uno stesso spazio, restringendoci allo stesso insieme di punti base.

Osservazione 2.3.7. Sia $Y \subseteq X$, A insieme qualunque e sia $i \colon Y \hookrightarrow X$ la mappa d'inclusione. i induce un morfismo $i_* \colon \pi_1 YA \to \pi_1 XA$.

Soffermiamoci un attimo al caso di $A \subseteq X$, in quanto il caso generale serve unicamente per mettere in relazione gruppoidi fondamentali di sottospazi di uno stesso spazio, come appena osservato. Per $A \neq X$ l'applicazione che associa a X $\pi_1 XA$ non è funtoriale. Ciononostante si può definire una categoria, in perfetta analogia a quanto fatto con gli spazi puntati, che renda quest'applicazione un funtore. Non avendo bisogno della funtorialità di questo nuovo oggetto, ci limiteremo a dare la definizione per completezza.

Definizione 2.3.8 (Spazi coppie)**.** Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme qualsiasi, definiamo coppia topologica (X, A). Una mappa tra due coppie topologiche $f \colon (X, A) \to (Y, B)$ è una funzione continua $f \colon X \to B$ con la proprietà che $f(A) \subseteq B$.
Si dimostra che prendendo le coppie topologiche come oggetti e le mappe di coppie come morfismi si ha una categoria e che l'applicazione $(X, A) \mapsto \pi_1 XA$ sia un funtore da tale categoria in `Grpd`.

La costruzione del sottogruppoide $\pi_1 XA$ era finalizzata a semplificare lo studio dello spazio attraverso i gruppoidi, vogliamo quindi capire quali richieste sulle caratteristiche di A che producano sottogruppoidi migliori. Prendendo $A = \{x_0\}$ ritroviamo il primo gruppo fondamentale, risultato in generale insoddisfacente, dato che abbiamo costruito tutta questa struttura con l'unico fine di superare i limiti del gruppo. Se invece prendiamo $A = X$ otteniamo il primo gruppoide fondamentale, la cui cardinalità ci metteva in difficoltà.

Definizione 2.3.9 (Insieme rappresentativo)**.** Sia X uno spazio topologico. Un insieme A si dice rappresentativo per X se interseca tutte le sue componenti connesse per archi.

La proposizione 2.3.1 garantisce che il primo gruppo ci fornisce tutte le informazioni riguardanti il comportamento di cammini sulla stessa componente connessa per archi, quindi la generalizzazione ai gruppoidi aggiunge solamente le informazioni riguardanti la connessione per archi. Scegliendo A rappresentativo abbiamo quindi un sottogruppoide che non perde alcuna informazione contenuta nel gruppoide fondamentale. Più A sarà piccolo e più la nostra scelta sarà efficiente.
Come abbiamo sottolineato prima, la scelta di A può servire anche per confrontare gruppoidi di sottospazi, quindi non necessariamente la scelta ottimale di A coinciderà con l'insieme rappresentativo di cardinalità minore.

Capitolo 3

Teorema di Van Kampen per gruppoidi

In questo capitolo definiremo per prima cosa strutture che ci permetteranno di mettere in relazione i gruppoidi. In seguito dimostreremo il teorema e come ultima cosa calcoleremo grazie a questo risultato il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^1$.

3.1 Diagrammi di morfismi

Nello studio delle categorie hanno una maggiore rilevanza le relazioni tra i elementi, non perché gli oggetti siano di secondaria importanza, ma perché i morfismi sono intrinsecamente legati ai due oggetti che collegano, quindi studiare come si comportano i morfismi ci permette di capire cosa sia in relazione (gli oggetti) ma anche in che modo lo sia (tramite quali morfismi). Le relazioni tra morfismi vengono evidenziate graficamente tramite l'utilizzo di diagrammi che ne riflettono il comportamento.

Il riferimento bibliografico per questa sezione è [3] (sezione 6.6).

Definizione 3.1.1 (Coproduct)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano C_1, C_2, C degli oggetti di $\mathcal{C}$. Siano $i_1\colon C_1 \to C$, $i_2\colon C_2 \to C$ due morfismi, che d'ora in poi denoteremo con il diagramma

$$C_1 \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} C_2 \ .$$

La coppia (i_1, i_2) si dice coproduct se per ogni coppia di morfismi (f_1, f_2), $f_k\colon C_k \to C'$, dove C' è un oggetto qualunque di $\mathcal{C}$, vale a dire per ogni diagramma

$$C_1 \xrightarrow{f_1} C' \xleftarrow{f_2} C_2 \ ,$$

esiste ed è unico il morfismo $f\colon C \to C'$ tale che $fi_k = f_k$. Questo è equivalente a richiedere che esista un unico morfismo f che rende commutativo il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & C \arrow[d, "f"] & C_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& C' &
\end{tikzcd}
.
$$

In questo caso scriveremo $C = C_1 \sqcup C_2$, in analogia con l'unione disgiunta di insiemi. Possiamo pensare (impropriamente) a C come unione di C_1, C_2 e a i_k come all'immersione in C del suo sottoinsieme C_k, e di conseguenza vediamo f_k come la restrizione di f su C_k.

La notazione $C_1 \sqcup C_2$ per indicare il coproduct è sensata dal momento che questo è unico a meno di isomorfismi.
Siano infatti $C_1 \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} C_2$, $C_1 \xrightarrow{j_1} D \xleftarrow{j_2} C_2$ coproduct. Poiché C è un coproduct, $\exists! f\colon C \to D$ tale che $fi_k = j_k$. D'altra parte anche D lo è, quindi $\exists! g\colon D \to C$ tale che $gj_k = i_k$. Questo significa che $gf\colon C \to C$ è un morfismo tale che $gfi_k = gj_k = i_k$, ovvero fattorizza il diagramma di C tramite se stesso. Anche 1_C ha questa proprietà ma, dal momento che C è un coproduct, il morfismo con questo comportamento è unico, quindi $gf = 1_C$. Reiterando il ragionamento troviamo $fg = 1_D$, ovvero C e D sono isomorfi.

Osservazione 3.1.2. La notazione $C = C_1 \sqcup C_2$ è ambigua, in quanto fa sembrare il coproduct una proprietà degli oggetti, mentre in realtà è una proprietà dei morfismi. Di fatto però possiamo pensarla anche come una caratteristica degli oggetti affermando che due oggetti C_1, C_2 di una categoria sono in coprodut tra loro se esiste un terzo oggetto C e due morfismi $i_1 \in \mathcal{C}(C_1, C)$, $i_2 \in \mathcal{C}(C_2, C)$ tali da fattorizzare attraverso C ogni altro morfismo da C_1, C_2. Quindi l'oggetto C che definisce il coproduct in qualche modo contiene tutte le informazioni relative ai due oggetti di partenza che i morfismi della categoria preservano.

Esempio 3.1.3. Nella categoria `Set` le informazioni preservate dai morfismi sono di tipo quantitativo, infatti due insiemi si dicono isomorfi quando contengono lo stesso numero di elementi, cioè esiste una biezione tra loro. Possiamo quindi fattorizzare ogni coppia di funzioni $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ prendendo come coproduct qualsiasi insieme D di cardinalità $|D| = |A| + |B|$, scegliendo come (i_1, i_2) delle funzioni che ricoprano in maniera disgiunta D.
Nella pratica si sceglie $D = A \sqcup B$, ovvero l'insieme $\{x_A, y_B, x \in A, y \in B\}$ perché in questo modo è evidente come costruire (i_1, i_2), ovvero definendo $i_1(x) := x_A$ e $i_2(y) = y_B$.

Esempio 3.1.4. Nella categoria `Top` il coproduct è $X_1 \xrightarrow{i_1} X_1 \sqcup X_2 \xleftarrow{i_2} X_2$, dove i_k è l'immersione $X_k \hookrightarrow X_1 \sqcup X_2$.

Esempio 3.1.5. Nella categoria `Grp` il coproduct di G_1 e G_2 è il prodotto libero $G_1 * G_2$.

Proposizione 3.1.6. *Nella categoria* `Grpd` *il coproduct tra* $\mathcal{G}_1$ *e* $\mathcal{G}_2$ *è il gruppoide definito come*

$$\mathcal{G}(x,y) = \begin{cases} G_1(x,y) & \textit{se } x,y \in Ob(\mathcal{G}_1) \\ G_2(x,y) & \textit{se } x,y \in Ob(\mathcal{G}_2) \\ \emptyset & \textit{altrimenti} \end{cases}.$$

Corollario 3.1.7. *Sia* $X = X_1 \sqcup X_2$ *un coproduct in* `Top`*, allora* $\pi_1(X)$ *è il coproduct di* $\pi_1(X_1)$ *e* $\pi_1(X_2)$ *in* `Grpd`*.*
In un linguaggio più familiare questo significa $\pi_1(X_1 \sqcup X_2) \cong \pi_1 X_1 \sqcup \pi_1 X_2$*.*

Osservazione 3.1.8. I coproduct sono relazioni tra morfismi e non tra oggetti. Nel corollario si intende che se $X_1 \xrightarrow{i_1} X \xleftarrow{i_2} X_2$ forma un coproduct, allora anche $\pi_1 X_1 \xrightarrow{\pi_1 i_1} X \xleftarrow{\pi_1 i_2} \pi_1 X_2$ lo è.

Il coproduct ha un limite evidente, ovvero non tiene conto di eventuali relazioni tra i due oggetti in esame. Pensiamo per esempio a due insiemi A, B con intersezione non vuota C. Possiamo costruire il coproduct, ma questo sarà della forma $A \sqcup B$, quindi conterrà due copie di C. Abbiamo quindi bisogno di una struttura che ci permetta di "unire" le informazioni tra due oggetti "filtrandole" attraverso relazioni aggiuntive che intercorrono tra di essi.

Definizione 3.1.9 (Pushout)**.** Siano C_0, C_1, C_2, C oggetti di $\mathcal{C}$ e $i_k \colon C_0 \to C_k$, $u_k \colon C_k \to C$ suoi elementi. Consideriamo il diagramma

$$\mathbf{C}= \begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "u_1"] \\ C_2 \arrow[r, "u_2"] & C \end{tikzcd}.$$

Diremo che $\mathbf{C}$ forma un pushout di (i_1, i_2) se:

i. il diagramma è commutativo, cioè $i_1 u_1 = i_2 u_2$,

ii. per ogni diagramma commutativo altro diagramma commutativo della forma

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"] & C' \end{tikzcd}$$

esiste ed è unico il morfismo $f \colon C \to C'$ tale che $f u_k = f_k$.

La proprietà (ii) è detta proprietà ϕ-universale, e caratterizza i pushout a meno di isomorfismi. Siano infatti $\mathbf{C}=$ $\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "u_1"] \\ C_2 \arrow[r, "u_2"] & C \end{tikzcd}$ e $\mathbf{D}=$ $\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "v_1"] \\ C_2 \arrow[r, "v_2"] & D \end{tikzcd}$ due pushout di (i_1, i_2). Per la proprietà (i) entrambi i diagrammi sono commutativi, la proprietà (ii) permette di fattorizzare $\mathbf{D}$ attraverso $\mathbf{C}$, ovvero esiste $f\colon C \to D$ tale che $fu_k = v_k$. D'altra parte, poiché anche $\mathbf{D}$ è un pushout, esiste $g\colon D \to C$ tale che $gv_k = u_k$. Allora $gfu_k = gv_k = u_k$, ovvero gf è un morfismo che fattorizza $\mathbf{C}$ attraverso $\mathbf{C}$. Ma è ovvio che anche l'identità 1_C lo faccia, quindi per unicità $gf = 1_C$. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento su $\mathbf{D}$, e ciò comporta che $fg = 1_D$ e di conseguenza C e D sono isomorfi.

Osservazione 3.1.10. Se $\mathbf{C}=$ $\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "u_1"] \\ C_2 \arrow[r, "u_2"] & C \end{tikzcd}$ è un pushout e $C_0 = \emptyset$, allora $C_1 \xrightarrow{u_1} C \xleftarrow{u_2} C_2$ è un coproduct. Questo risulta in maniera banale dal fatto che se C_0 è vuoto ogni diagramma è commutativo, in quanto non sta mappando niente, e per lo stesso motivo la proprietà ϕ-universale e la fattorizzazione data dal coproduct si equivalgono.
Questo indica che la definizione di pushout ricalca perfettamente ciò che stavamo cercando, ovvero un coproduct che tenga in considerazione le relazioni reciproche: quando vengono a mancare il pushout torna il coproduct. Quindi possiamo pensare all'oggetto che abbiamo aggiunto, C_0, come il contenitore delle informazioni "comuni" ai due insiemi, e la commutatività del diagramma garantisce che non vengano "separate".

Abbiamo denotato i due morfismi $C_0 \to C_k$ con i_k perché, come vedremo nei prossimi esempi, questi possono essere pensati come un'inclusione di C_0 in C_k. Osserviamo inoltre che rispetto al coproduct abbiamo condizioni molto più restrittive sui morfismi che possono essere fattorizzati attraverso C, ovvero che diano luogo a diagrammi commutativi.

Esempio 3.1.11. Prendiamo due insiemi A, B. Siano i_A, i_B le inclusioni di $A \cap B$ nei rispettivi sovrainsiemi e u_A, u_B le inclusioni di A, B in $A \cup B$. Allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "i_A"] \arrow[d, "i_B"] & A \arrow[d, "u_A"] \\ B \arrow[r, "u_B"] & A \cup B \end{tikzcd}$$

è un pushout nella categoria `Set`.
Il diagramma commuta in quanto sto semplicemente immergendo un sottoinsieme nei suoi sovrainsiemi, dobbiamo mostrare che rispetti la proprietà di ϕ-universale, consideriamo dunque un diagramma commutativo della forma

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{i_A} & A \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_B} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_A} \\ B & \xrightarrow{f_B} & C \end{array}.$$

Definiamo la funzione $f\colon A \cup B \to C$ come $f(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{se } x \in Im\, u_A \\ f_B(x) & \text{se } x \in Im\, u_B \end{cases}$.

f è ben definita in quanto per commutatività del diagramma f_A e f_B coincidono su $Im\, u_A \cap Im\, u_B = A \cap B$, inoltre f fattorizza f_k. Inoltre f è unica, in quanto le inclusioni sono l'identita ristretta ai sottoinsiemi.

Proposizione 3.1.12. *Sia X uno spazio topologico, siano X_1, X_2 sottospazi topologici i cui interni ricoprono X e sia $X_0 = X_1 \cap X_2$. Siano $i_k\colon X_0 \hookrightarrow X_k$ e $u_k\colon X_k \hookrightarrow X$ le mappe d'inclusione, $\boldsymbol{X}$ è un pushout nella categoria* `Top`.

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle u_1} \\ X_2 & \xrightarrow{u_2} & X \end{array}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che le funzioni di inclusione sono le stesse che avremmo nella categoria `Set`, e di conseguenza questo è un pushout in quella categoria. Da ciò ricaviamo gratuitamente la commutatività, poiché questa non dipende dalla topologia. Consideriamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

e definiamo f come nel caso della categoria `Set`. Dal momento che f fattorizza ogni possibile funzione, in particolare fattorizza anche ogni funzione continua. Quindi se dimostriamo che f è continua abbiamo concluso, in quanto l'unicità è garantita dal fatto che una seconda mappa fattorizzerebbe il diagramma anche in `Set`, ma abbiamo già visto che questo è impossibile.

Sia dunque $A \subseteq Y$ un aperto, vogliamo mostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto in X. Poiché per ipotesi f_k è continua, $A_k := f_k^{-1}(A)$ è un aperto di X_k e quindi anche $A_k \cap \mathring{X}_k$ lo è.

Per definizione, un aperto nella topologia indotta dall'inclusione è della forma $\Omega \cap X_k$, con Ω aperto di X, ne consegue che $A_k = \Omega \cap X_k$. Allora

$$A_k \cap \mathring{X}_k = (\Omega \cap X_k) \cap \mathring{X}_k = \Omega \cap \mathring{X}_k$$

è aperto in X. Poiché $fu_k = f_k$ e u_k è l'identità sull'immagine, $f^{-1}(A) \cap X_k = A_k$.
Infine, dato che gli interni di X_1, X_2 ricoprono X,

$$f^{-1}(A) = (f^{-1}(A) \cap \mathring{X}_1) \cup (f^{-1}(A) \cap \mathring{X}_2) = (A_1 \cap \mathring{X}_1) \cup (A_2 \cap \mathring{X}_2),$$

che è aperto in X in quanto unione di aperti. Poiché $f^{-1}(A)$ è aperto in X, f è continua e di conseguenza $\mathbf{X}$ è un pushout nella categoria `Top`. □

Osservazione 3.1.13. La proposizione non è estendibile ad un ricoprimento qualunque di X, dal momento che abbiamo utilizziato in maniera molto pesante l'ipotesi per cui gli interni di X_1, X_2 ricoprano X. Questo è coerente con quanto avevamo visto nell'esempio 1.5.4, cioè che riunendo gli insiemi di un ricoprimento generico non è garantita una coerenza topologica con l'insieme di partenza.

I pushout sono strutture estremeamente utili per studiare relazioni tra oggetti, definiamo operazione per comporli o confrontarli tra loro.

Proposizione 3.1.14. *La composizione di pushout è ancora un pushout, ovvero se*

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_C} & C \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_C} \\ B & \xrightarrow{u_B} & D \end{array} \quad \text{e } \boldsymbol{X}_2 = \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_E} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle u_C} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_E} \\ D & \xrightarrow{u_D} & F \end{array} \quad \textit{sono pushout lo è anche } \boldsymbol{X} = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_E i_C} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_E} \\ B & \xrightarrow{u_D u_B} & F \end{array}.$$

Dimostrazione. Il diagramma in esame è della forma

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_C} & C & \xrightarrow{i_E} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_C} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_E} \\ B & \xrightarrow{u_B} & D & \xrightarrow{u_D} & F \end{array}.$$

La commutatività del diagramma si trova sfruttando il lato comune ai due quadrati e la loro commutatività:

$$\begin{aligned} u_E i_E i_C =& (u_E i_E) i_C = (u_D u_C) i_C = && \text{commutatività di } \mathbf{X}_2 \\ &= u_D(u_C i_C) = u_D(u_B i_B) && \text{commutatività di } \mathbf{X}_1. \end{aligned}$$

Allora $u_E i_E i_C = u_D u_B i_B$, cioè il diagramma è commutativo.
Rimane da mostrare la proprietà universale, consideriamo quindi un diagramma commutativo della forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_E i_C} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_E} \\ B & \xrightarrow{g_B} & G \end{array}.$$

Osserviamo che, sfruttando la proprietà associativa, può essere riscritto come

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_C} & C \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_B} & & \big\downarrow{\scriptstyle g_E i_E} \\ B & \xrightarrow{g_B} & G \end{array} .$$

Poiché $\mathbf{X}_1$ è un pushout, $\exists! f \colon D \to G$ tale che $\begin{cases} f u_C = g_E i_E \\ f u_B = g_B \end{cases}$.

Abbiamo quindi, sempre sfruttando la proprietà associativa, il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_E} & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle u_C} & & \big\downarrow{\scriptstyle g_E} \\ D & \xrightarrow{f} & G \end{array} .$$

A questo punto fattorizziamo anche questo diagramma sfruttando il fatto che anche $\mathbf{X}_2$ sia un pushout, ovvero $\exists! g \colon F \to G$ tale che $\begin{cases} g u_E = g_E \\ g u_D = f \end{cases}$.

Allora il morfismo g è tale che $\begin{cases} g u_E = g_E \\ g(u_D u_B) = (g u_D) u_B = f u_B = g_B \end{cases}$, ovvero g è il morfismo che fattorizza il diagramma iniziale attraverso $\mathbf{X}$.

In particolare per come l'abbiamo costruito esso è unico: supponiamo che esista un morfismo $h \colon F \to G$ con la stessa proprietà, cioè tale che $\begin{cases} h u_E = g_E \\ h u_D u_B = g_B \end{cases}$. Ripercorrendo i passaggi precedenti vediamo che $h u_D$ è un morfismo $D \to G$ tale che $\begin{cases} (h u_D) u_B = g_B \\ (h u_D) u_C = g_E i_E \end{cases}$, ovvero $h u_D$ fa lo stesso lavoro di f, che però è unico perché $\mathbf{X}_1$ è un pushout, e quindi $h u_D = f$. Allora h fattorizza anche $\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_E} & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle u_C} & & \big\downarrow{\scriptstyle g_E} \\ D & \xrightarrow{f} & G \end{array}$ ma, poiché $\mathbf{X}_2$ è un pushout, il morfismo che fattorizza è unico, quindi $h = g$. □

Osservazione 3.1.15. La composizione può esser fatta anche verticalmente, in quanto il diagramma $\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle u_1} \\ C_2 & \xrightarrow{u_2} & C \end{array}$ è equivalente al suo "trasposto", ovvero $\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{i_2} & C_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle u_2} \\ C_1 & \xrightarrow{u_1} & C \end{array}$.

Possiamo quindi comporre a due a due diagrammi commutativi e pushout in qualsiasi direzione. Sotto perticolari condizioni è anche possibile comporne più di due contemporaneamente.

Definizione 3.1.16 ($\mathcal{C}_\square$)**.** Definiamo $\mathcal{C}_\square$ la categoria che ha per oggetti i diagrammi commutativi nella categoria $\mathcal{C}$. Un oggetto generico di $\mathcal{C}_\square$ è della forma $\mathbf{A}=$ $\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & A_1 \arrow[d, "g_1"] \\ A_2 \arrow[r, "g_2"] & A \end{tikzcd}$,

con A_k, $A \in Ob(\mathcal{C})$, $f_k \in \mathcal{C}(A_0, A_k)$, $g_k \in \mathcal{C}(A_k, A)$ tali che $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

Siano $\mathbf{C}=$ $\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "u_1"] \\ C_2 \arrow[r, "u_2"] & C \end{tikzcd}$ e $\mathbf{D}=$ $\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & D_1 \arrow[d, "v_1"] \\ D_2 \arrow[r, "v_2"] & D \end{tikzcd}$. Un morfismo $\mathbf{f}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è della forma $\mathbf{f}=(f_0, f_1, f_2, f)$, con $f_k\colon C_k \to D_k$ e $f\colon C \to D$ morfismi in $\mathcal{C}$, tali che il diagramma cubico rappresentato in figura sia commutativo. Questo significa che per ogni coppia di vertici tutti percorsi consentiti (che rispettino il verso delle frecce) che li congiungano sono equivalenti.

$$\mathbf{f}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}= \begin{tikzcd} C_0 \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dr, "f_0"] \arrow[dd, "i_2"] & & C_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "u_1"] & \\ & D_0 \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dd, "j_2"] & & D_1 \arrow[dd, "v_1"] \\ C_2 \arrow[rr, "u_2"] \arrow[dr, "f_2"] & & C \arrow[dr, "f"] & \\ & D_2 \arrow[rr, "v_2"] & & D \end{tikzcd}$$

Osservazione 3.1.17. Chiedere che il diagramma cubico sia commutativo è equivalente a chiedere che lo sia ogni sua faccia.

Vogliamo caratterizzare retrazioni, sezioni e isomorfismi in questa categoria.

Osservazione 3.1.18. Per unicità l'identità risulta essere la quadrupla delle identità. Le retrazioni, le sezioni e gli isomorfismi di conseguenza devono essere quadruple di retrazioni, sezioni e isomorfismi.

Non tutte le quadruple di morfismi costituiscono un cubo commutativo, quindi non è vero che ogni quadrupla di retrazioni (rispettivamente sezioni o isomorfismi) rappresenti rispettivamente una retrazione (rispettivamente una sezione o un isomorfismo) nella categoria $\mathcal{C}_\square$. In generale possiamo solo dire che se $\mathbf{f}=(f_0, f_1, f_2, f)\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $\mathbf{g}=(g_0, g_1, g_2, g)\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ sono morfismi tra diagrammi commutativi e $f_k g_k = 1_{D_k}$, $fg = 1_D$ allora $\mathbf{fg}=\mathbf{1_D}$.

Proposizione 3.1.19. *Il retratto di un pushout è un pushout.*
Siano cioè $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ due diagrammi commutativi nella categoria $\mathcal{C}$, ovvero $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ oggetti di $\mathcal{C}_{\square}$. Se esiste una retrazione $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ è pushout allora anche $\boldsymbol{C}$ lo è.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, d) \colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ la retrazione, il diagramma che lo rappresenta risulta

$$\begin{tikzcd}
D_0 \arrow[rr, "j_1"] \arrow[dr, "d_0"] \arrow[dd, "j_2"'] & & D_1 \arrow[dr, "d_1"] \arrow[dd, "v_1"] & \\
& C_0 \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dd, "i_2"] & & C_1 \arrow[dd, "u_1"] \\
D_2 \arrow[rr, "v_2"] \arrow[dr, "d_2"] & & D \arrow[dr, "d"] & \\
& C_2 \arrow[rr, "u_2"] & & C
\end{tikzcd} .$$

Per provare che $\mathbf{C}$ sia un pushout prendiamo un diagramma commutativo $\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"] & E \end{tikzcd}$.
Dobbiamo mostrare che esista un unico morfismo $f \colon C \to E$ tale che $fu_k = f_k$.
Sfruttando la commutatività di $\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "d_0"] & D_1 \arrow[d, "d_1"] \\ C_0 \arrow[r, "i_1"] & C_1 \end{tikzcd}$ e $\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "j_2"] & D_2 \arrow[d, "d_2"] \\ C_0 \arrow[r, "i_2"] & C_2 \end{tikzcd}$ costruiamo il diagramma commutativo $\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & D_1 \arrow[d, "f_1 d_1"] \\ D_2 \arrow[r, "f_2 d_2"] & E \end{tikzcd}$. Poiché $\mathbf{D}$ è un pushout per ipotesi, $\exists! g \colon D \to E$ tale che $gv_k = g_k d_k$.
Sia $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, c) \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ l'inverso sinistro di $\mathbf{d}$, vogliamo provare che il morfismo $f = gc$ è il morfismo che fattorizza il diagramma $\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"] & E \end{tikzcd}$. Per il diagramma

cubico di $\mathbf{c}$ i diagrammi $\begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{c_k} & D_k \\ \downarrow{\scriptstyle u_k} & & \downarrow{\scriptstyle v_k} \\ C & \xrightarrow{c} & D \end{array}$ sono commutativi, e quindi abbiamo

$$\begin{aligned} fu_k = gcu_k &= && \text{per definizione} \\ &= gv_kc_k = && \text{per commutatività del diagramma} \\ &= f_kd_kc_k = f_k && d_kc_k = 1_{C_k} \text{ per ipotesi} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $fu_k = f_k$, resta da mostrare l'unicità. Sia $f' \colon C \to E$ tale che $f'u_k = f_k$, allora vale

$$\begin{aligned} gv_k = f_kd_k &= && \text{per costruzione di } g \\ &= f'u_kd_k = && \text{scelta di } f' \\ &= f'dv_k && u_kd_k = dv_k \text{ per commutatività di } \mathbf{d} \end{aligned}$$

ovvero l'applicazione $f'd \colon D \to E$ è tale che $f'dv_k = f_kd_k$. Ma il morfismo che ha questo comportamento è unico, dal momento che $\mathbf{D}$ è un pushout, cioè $f'd = g$. Allora $f'dc = gc = f$ e, dato che $dc = 1_C$, $f' = f$. Il morfismo che fattorizza il diagramma è quindi unico, cioè $\mathbf{C}$ è un pushout. □

3.2 Generalizzazione del Teorema

Per quest'ultima sezione si faccia riferimento a [3] (sezione 6.7). Diamo subito l'enunciato del teorema, poi dimostreremo i risultati propedeutici alla dimostrazione.

Teorema 3.2.1 (Van Kampen per gruppoidi)**.** *Sia X uno spazio topologico, siano X_1, X_2 due sottospazi topologici di X tali che $Int(X_1) \cup Int(X_2) = X$ e denotiamo $X_0 := X_1 \cap X_2$. Sia $A \subseteq X$ un insieme rappresentativo in X_0, X_1, X_2 e X.*
Siano $i_k \colon X_0 \to X_k$ e $u_k \colon X_k \to X$ immersioni di sottospazi, e con leggero abuso di notazione chiamiamo allo stesso modo i morfismi indotti sui relativi gruppoidi fondamentali.

Allora $\pi_1 \boldsymbol{X} A := \begin{array}{ccc} \pi_1 X_0 A & \xrightarrow{i_1} & \pi_1 X_1 A \\ \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} \\ \pi_1 X_2 A & \xrightarrow{u_2} & \pi_1 X A \end{array}$ *è un pushout nella categoria* `Grpd`.

Rispetto alla versione classica del problema abbiamo delle ipotesi molto più deboli, infatti non è più necessario che X_0, X_1 e X_2 siano connessi per archi. Questo non garantisce che X_0 non fosse vuoto, ma anche se lo fosse ciò non intaccherebbe la definizione di pushout, quindi possiamo non preoccuparcene, a patto di definire per convenzione che ogni insieme sia rappresentativo per l'insieme vuoto.

Lemma 3.2.2. *Nelle ipotesi del teorema, denotando i morfismi come le funzioni che li inducono,* $\pi_1\boldsymbol{X}=$ $\begin{tikzcd} \pi_1X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & \pi_1X_1 \arrow[d, "u_1"] \\ \pi_1X_2 \arrow[r, "u_2"] & \pi_1X \end{tikzcd}$ *è un diagramma commutativo.*

Dimostrazione. Abbiamo mostrato che il diagramma $\mathbf{X}=$ $\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & X_1 \arrow[d, "u_1"] \\ X_2 \arrow[r, "u_2"] & X \end{tikzcd}$ sia un pushout in `Top`, quindi in particolare è un diagramma commutativo. Osserviamo che se F è un funtore allora $F(u_1)F(i_1) = F(u_1i_1) = F(u_2i_2) = F(u_2)F(i_2)$, ovvero il diagramma commuta. Poiché $\pi_1\colon \texttt{Top} \to \texttt{Grpd}$ è un funtore, abbiamo concluso la dimostrazione. □

Proposizione 3.2.3 (Lemma del numero di Lebesgue)**.** *Sia X uno spazio topologico compatto e sia $(U_k)_{k\in K}$ un suo ricoprimento aperto. Allora esiste $\delta > 0$ tale che ogni sottoinsieme di diametro inferiore a δ è tutto contenuto in un aperto del ricoprimento.*

Per la prova si faccia riferimento a [3] (enunciato 3.6.4, Lebesgue covering lemma*).*

Proposizione 3.2.4. *Nelle ipotesi del teorema, denotando j_k, v_k i morfismi indotti rispettivamente da i_k, u_k,* $P\boldsymbol{X}=$ $\begin{tikzcd} PX_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & PX_1 \arrow[d, "v_1"] \\ PX_2 \arrow[r, "v_2"] & PX \end{tikzcd}$ *è un pushout nella categoria* `Cat`.

Dimostrazione. La commutatività è garantita dalla funtorialità di $P\colon \texttt{Top} \to \texttt{Cat}$. Per provare la proprietà ϕ-universale prendiamo una categoria $\mathcal{C}$, due funtori $f_k\colon PX_k \to \mathcal{C}$ e consideriamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} PX_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & PX_1 \arrow[d, "f_1"] \\ PX_2 \arrow[r, "f_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}.$$

Dal momento che uno spazio topologico ha come supporto un insieme, anche la sua immagine attraverso un funtore è un insieme, in quanto un funtore è in particolare una funzione. Possiamo quindi supporre, a meno di restringerci all'unione delle immagini di f_1 ed f_2, che $Ob(\mathcal{C})$ sia un insieme. Allora il diagramma preso in esame induce il seguente diagramma commutativo nella categoria `Set`.

$$\begin{array}{ccc} Ob(PX_0) & \xrightarrow{j_1} & Ob(PX_1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ Ob(PX_2) & \xrightarrow{f_2} & Ob(\mathcal{C}) \end{array}$$

Per definizione $Ob(PX_k) = X_k$ e dalla caratterizzazione dei pushout in `Set` discende che esiste un'unica funzione $f\colon X \to Ob(\mathcal{C})$ che fattorizza (f_1, f_2). Vogliamo "estendere" f ai morfismi, cioè costruire un funtore $f\colon PX \to \mathcal{C}$ con la proprietà ϕ-universale.
I morfismi di PX sono le mappe $\omega\colon \mathbb{I} \to X$. Per ipotesi $\{Int(X_1), Int(X_2)\}$ è un ricoprimento aperto di X, quindi $\{\omega^{-1}(\mathring{X}_1), \omega^{-1}(\mathring{X}_2)\}$ è un ricoprimento aperto di $\mathbb{I}$, da cui per compattezza posso estrarre un sottoricoprimento finito $\{\mathbb{I}_1, \dots \mathbb{I}_n\}$. Definendo $\omega_m := \omega|_{\mathbb{I}_m}$, scalato opportunamente, posso scrivere $\omega = \omega_1 \dots \omega_n$, con ω_m cammino in X_k. Denotando con X_{k_m} lo spazio contenete $Im\,\omega_m$ è ben definito il morfismo $f_{k_m}(\omega_m)$, perché se ω_m è un cammino contenuto sia in X_1 sia in X_2, $f_1(\omega_m) = f_2(\omega_m)$ per commutatività del diagramma.
Ci stiamo riferendo impropriamente ai cammini di X_k e X con lo stesso nome, ma questo è un abuso accettabile, in quanto le inclusioni in questo caso sono la restrizione dell'identità sui sottospazi.
Definendo quindi $f(\omega) = \prod_{m=1}^{n} f_{k_m}(\omega_m)$ abbiamo trovato un funtore che fattorizza (f_1, f_2) sui morfismi ed è compatibile con quello definito sugli oggetti.
Manca da dimostrare l'unicità sui morfismi, in quanto quella sugli oggetti viene gratuitamente dal pushout di `Set`. Sia $g\colon PX \to \mathcal{C}$ un funtore tale che $gv_k = f_k$, allora $g(\omega) = g(\omega_1 \dots \omega_n) = g(\omega_1) \dots g(\omega_n)$. Ma abbiamo detto che v_k è la restrizione dell'identità su PX_k, quindi $\omega_m = v_{k_m}(\omega_m)$. Allora $g(\omega_m) = gv_{k_m}(\omega_m) = f_{k_m}(\omega_m)$ per ogni m, e di conseguenza $g(\omega) = g(\omega_1) \dots g(\omega_n) = f_{k_1}(\omega_1) \dots f_{k_n}(\omega_n) = f(\omega)$. Quindi $g(\omega) = f(\omega)$ per ogni morfismo, ovvero $f = g$. □

Questi risultati ci permettono di dimostrare il teorema per il caso $A = X$.

Dimostrazione per A=X. Vogliamo dimostrare che $\pi_1\mathbf{X} = \begin{array}{ccc} \pi_1 X_0 & \xrightarrow{i_1} & \pi_1 X_1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_1} \\ \pi_1 X_2 & \xrightarrow{u_2} & \pi_1 X \end{array}$ sia un pushout nella categoria `Grpd`. Il lemma 3.2.2 garantisce che sia commutativo, resta mostrare che valga la proprietà $\phi-$universale. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 X_0 & \xrightarrow{i_1} & \pi_1 X_1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_1} \\ \pi_1 X_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{G} \end{array} ,$$

dove $\mathcal{G}$ è un gruppoide e $f_k\colon \pi_1X_k \to \mathcal{G}$ sono morfismi tra gruppoidi tali che $f_1i_1 = f_2i_2$. L'idea della dimostrazione è la seguente: per prima cosa, grazie al funtore $p_k\colon PX_k \to \pi_1X_k$, realizziamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
PX_0 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr, "p_0"] \arrow[dd, "j_2"] & & PX_1 \arrow[d, "p_1"] \\
& \pi_1X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & \pi_1X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
PX_2 \arrow[r, "p_2"] & \pi_1X_2 \arrow[r, "f_2"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd} .$$

Definiamo $g_k := f_kp_k$ e costruiamo esplicitamente il morfismo $g\colon PX \to \mathcal{G}$ che fattorizza il quadrato grande, questo è unico in quanto $P\mathbf{X}$ è un pushout. Fatto ciò mostriamo che il morfismo costruito è costante sulle classi di equivalenza e quindi è ben definito $f\colon \pi_1X \to \mathcal{G}$ tale che $fp = g$ e in particolare fattorizza il quadrato piccolo. Infine dimostriamo che f sia unico.

Passo 1: costruiamo g

Il diagramma commuta perché i tre diagrammi interni commutano.
Sia a un cammino in X, se $Im\ a \subseteq X_k$ posso scrivere $a = v_k(b_k)$, con $b_k \in PX_k$. In questo caso definiamo $g(a) := g_k(b_k)$. La definizione è ben posta in quanto se $Im\, a \subseteq X_0 = X_1 \cap X_2$, per commutatività $g_1v_1 = g_2v_2$.
Sia ora a un cammino qualunque. Come visto nella precendente dimostrazione, il lemma di Lebesgue ci permette di scrivere $a = a_1 \dots a_n$, con a_m tutto contenuto in $\mathring{X}_k$. Definiamo allora $g(a) := g_{k_1}(a_1) \dots g_{k_n}(a_n)$. Come prima, questa definizione non dipende dalla suddivisione di a, dal momento che g è ben definita su $X_1 \cap X_2$ per commutatività del diagramma. Per come abbiamo costruito g vale inoltre $g(ab) = g(a)g(b)$ per ogni a, $b \in PX$.
Allora $g\colon PX \to \mathcal{G}$ è un morfismo e soddisfa $gv_k = g_k$. L'unicità è garantita dal fatto che $P\mathbf{X}$ sia un pushout nella categoria `Cat` e che $\mathcal{G}$, essendo un gruppoide, in particolare è una categoria.

Passo 2: mostriamo che g sia costante sulle classi di equivalenza

Siano a, b due cammini omotopi rel$\{0,1\}$ in PX, vogliamo mostrare che $g(a) = g(b)$. Sappiamo che ciò è vero per g_k, in quanto per definizione $g_k = f_kp_k$, dove p_k è la proiezione a quoziente.
Sia $F\colon a \simeq b$ l'equivalenza omotopica, allora $F\colon \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to X$ è una mappa continua. $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ è compatto quindi, in maniera analoga a quanto fatto per i cammini, costruiamo una scomposizione finita in rettangolini $R_{m,n} = [\frac{n}{s}, \frac{n+1}{s}] \times [\frac{m}{t}, \frac{m+1}{t}]$, al variare di $n = 0, \dots s-1$, $m = 0, \dots t-1$, tali che $F(R_{m,n})$ è tutto contenuto in $\mathring{X}_k$. Studiamo le immagini dei bordi dei rettangoli, queste rappresentano cammini omotopi in PX_k, dove l'equivalenza

omotopica è $F|_{R_{m,n}}$. Essendo questi cammini tutti contenuti in X_k, la loro immagine attraverso g coincide, in quanto $g|_{X_k} = g_k$. Quindi, ragionando ricorsivamente, troviamo $g(a) = g(b)$, ovvero g è costante sulle classi di equivalenza.
Definendo $f([a]) := [g(a)]$, ovvero $fp = g$, otteniamo un morfismo tale che $fu_k = f_k$.

Passo 3: unicità di f
Sia $h\colon \pi_1 X \to \mathcal{G}$ tale che $hu_k = f_k$, allora il morfismo $hpv_k\colon PX_k \to \mathcal{G}$ ha il seguente comportamento: $PX_k \xrightarrow{v_k} PX \xrightarrow{p} \pi_1 X \xrightarrow{h} \mathcal{G}$. Poiché $pv_k = u_k p_k$ risulta $hpv_k = hu_k p_k = f_k p_k =: g_k$. Ma allora hp fa lo stesso lavoro di g, e quindi per unicità $hp = g$, ovvero $hp = fp$. p è suriettiva su $\pi_1 X$, ciò garantisce che $h = f$. $\square$

Proposizione 3.2.5. *A rappresentativo in $X \implies \pi_1 XA$ è un retratto di $\pi_1 X$.*

Dimostrazione. $\pi_1 XA$ è un sottogruppoide di $\pi_1 X$, quindi l'immersione $l\colon \pi_1 XA \to \pi_1 X$, ovvero l'identità di $\pi_1 X$ ristretta a $\pi_1 XA$, è ben definita. Per questo motivo ci riferiremo impropriamente agli elementi di $\pi_1 XA$ e della sua immagine attraverso l con gli stessi nomi.
Vogliamo costruire una retrazione $r\colon \pi_1 X \to \pi_1 XA$ che sia l'inverso destro di l. Scriviamo $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, dove le X_j sono le componenti connesse per archi di X. Per ogni $x \in X \setminus A$ scegliamo un punto a_x^j in $X_j \cap A$, dove X_j è la componente conessa per archi contenente x. Definiamo la retrazione sui luoghi come

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \cap A \\ a_x^j & \text{se } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Allora $r(X) \subseteq X \cap A$, inoltre x e $r(x)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di $\pi_1 X$.
Dobbiamo ora definire r sulle strade. Per ogni punto $x \in X$ fissiamo un cammino ausiliario $f_x \in \pi_1 X(x, r(x))$ dato dall'identità 1_x se $r(x) = x$, ovvero se $x \in A$, e da un qualsiasi cammino $x \to r(x)$ altrimenti. L'esistenza di almeno un cammino in $\pi_1 X(x, r(x))$ è garantita dal fatto che x e $r(x)$ sono nella stessa componente connessa per archi. Dato che siamo in gruppoide, esiste $f_x^{-1} \in \pi_1 X(r(x), x)$.
Per ogni cammino $\omega \in \pi_1 X(x, y)$ poniamo $r(\omega) := f_x^{-1}\omega f_y$. Quindi $r(\omega)$ è un cammino $r(x) \xrightarrow{f_x^{-1}} x \xrightarrow{\omega} y \xrightarrow{f_y} r(y)$, cioè una strada di $\pi_1 X$ tra luoghi di $\pi_1 XA$. Dal momento che $\pi_1 XA$ è un sottogruppoide pieno, $r(\omega)$ è anche una sua strada, quindi l'applicazione r manda effettivamente strade di $\pi_1 X$ in strade di $\pi_1 XA$.
Rimane da mostrare che sia un morfismo di gruppoidi. Siano dunque $\alpha \in \pi_1 X(x, y)$, $\beta \in \pi_1 X(y, z)$, allora

$$r(\alpha)r(\beta) = f_x^{-1}\alpha f_y^{-1} f_y \beta f_z = f_x^{-1}\alpha\beta f_z = r(\alpha\beta).$$

Inoltre $r(1_x) = f_x^{-1} 1_x f_x = f_x^{-1} f_x = 1_{r(x)}$. $\square$

A partire da questo risultato vogliamo costruire una retrazione $\mathbf{r}\colon \pi_1\mathbf{X} \to \pi_1\mathbf{X}A$ nella categoria $\texttt{Grpd}_\square$, in modo da concludere la dimostrazione in quanto, come già visto, il retratto di un pushout è un pushout.
Abbiamo già una retrazione, però ci serve che sia un morfismo di diagrammi commutativi, ovvero che il diagramma cubico della forma

$$\begin{tikzcd}
\pi_1X_0 \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dr, "r_0"'] \arrow[dd, "i_2"'] & & \pi_1X_1 \arrow[dr, "r_1"] \arrow[dd, "u_1"'] & \\
& \pi_1X_0A \arrow[rr, "i_1^A"] \arrow[dd, "i_2^A"'] & & \pi_1X_1A \arrow[dd, "u_1^A"] \\
\pi_1X_2 \arrow[rr, "u_2"] \arrow[dr, "r_2"'] & & \pi_1X \arrow[dr, "r"'] & \\
& \pi_1X_2A \arrow[rr, "u_2^A"] & & \pi_1XA
\end{tikzcd}$$

sia commutativo. Affinché lo sia è sufficiente che lo siano singolarmente tutte e sei le facce del cubo. A questo fine sfrutteremo la libertà che ci lascia la proposizione nel costruire la retrazione. Dimostriamo un lemma che ci permette di alleggerire la notazione nella proposizione vera e propria.

Lemma 3.2.6. *Sia X uno spazio topologico, sia $Y \subseteq X$ un suo sottospazio. Sia A un insieme rappresentativo su X e Y. Si possono costruire retrazioni $r_X\colon \pi_1X \to \pi_1XA$, $r_Y\colon \pi_1Y \to \pi_1YA$ tali che*
$$\begin{tikzcd}
\pi_1Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r_Y"] & \pi_1X \arrow[d, "r_X"] \\
\pi_1YA \arrow[r, "i_A"] & \pi_1XA
\end{tikzcd}$$
sia commutativo.

Dimostrazione. Decomponiamo $Y = \bigcup_{k\in K} Y_k$ e $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, con Y_k, X_j componenti connesse per archi. Osserviamo che per ogni Y_k esiste un'unica X_j tale che $Y_k \subseteq X_j$, e che di conseguenza $Y_k \cap A \subseteq X_j \cap A$.
Definiamo quindi r_Y esattamente come nella proposizione, senza nessun particolare accorgimento. Vogliamo invece costruire r_X proprio in modo che $r_X i = i_A r_Y$.
Poiché $Y_k \cap A \subseteq X_j \cap A$, possiamo definire r_X sugli oggetti in modo che $r_X(y) = r_Y(y)$ per ogni $y \in Y$ e completandolo in modo coerente a quanto richiesto nella proposizione su $X \setminus Y$. Poiché i è la restrizione dell'identità sugli oggetti, abbiamo mostrato che il diagramma commuta su di essi.
Sulle strade invece i è il morfismo indotto dall'inclusione (che denoteremo momentaneamente come i_* per sottolinearne comportamento) e quindi in generale non mantiene il tipo

d'omotopia. Analogamente a quanto visto per gli oggetti osserviamo che se f_y è una strada $y \to r_Y(y)$, allora per come abbiamo definito r_X anche $i_*(f_y)$ collega gli stessi due punti (pur non essendo in generale rimasta la stessa strada), quindi possiamo scegliere $i_*(f_y)$ come strada ausiliaria per ogni $y \in Y$. Osserviamo in particolare che $i_*(f_y)^{-1} = i_*(f_y^{-1})$, quindi questa scelta è ben posta. Per $x \in X \setminus Y$ scegliamo f_x in tutta libertà, avendo come unici vincoli quelli posti dalla dimostrazione. In questo modo presa una strada $\omega\colon x \to y$ di $\pi_1 Y$ abbiamo che $\omega \xrightarrow{i_*} i_*(\omega) \xrightarrow{r_X} (i_*(f_x)^{-1})i_*(\omega)i_*(f_y)$, ma i_* è un morfismo indotto, quindi $(i_*(f_x)^{-1})i_*(\omega)i_*(f_y) = i_*(f_x^{-1}\omega f_y)$. D'altra parte i_A per definizione è $i|_{\pi_1 XA}$, quindi $\omega \xrightarrow{r_Y} f_x^{-1}\omega f_y \xrightarrow{i_A} i_*(f_x^{-1}\omega f_y)$. Allora $r_X(y) = r_Y(y)$, ovvero il diagramma è commutativo. □

Proposizione 3.2.7. *Nelle ipotesi del teorema $\pi_1 \boldsymbol{X} A$ è un retratto $\pi_1 \boldsymbol{X}$.*

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato che le facce

$$\begin{tikzcd} \pi_1 X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & \pi_1 X_1 \arrow[d, "u_1"] \\ \pi_1 X_2 \arrow[r, "u_2"] & \pi_1 X \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \pi_1 X_0 A \arrow[r, "i_1^A"] \arrow[d, "i_2^A"] & \pi_1 X_1 A \arrow[d, "u_1^A"] \\ \pi_1 X_2 A \arrow[r, "u_2^A"] & \pi_1 X A \end{tikzcd}$$

sono commutative.
Sia ora $r_0\colon \pi_1 X_0 \to \pi_1 X_0 A$ una retrazione costruita come nella proposizione. Possiamo costruire $r_1\colon \pi_1 X_1 \to \pi_1 X_1 A$ e $r_2\colon \pi_1 X_2 \to \pi_1 X_2 A$ come nel lemma appena dimostrato, poiché per definizione $X_0 = X_1 \cap X_2$, quindi è sottospazio di entrambi. Dal lemma segue che

$$\begin{tikzcd} \pi_1 X_0 \arrow[r, "r_0"] \arrow[d, "i_2"] & \pi_1 X_0 A \arrow[d, "i_2^A"] \\ \pi_1 X_2 \arrow[r, "r_2"] & \pi_1 X_2 A \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \pi_1 X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "r_0"] & \pi_1 X_1 \arrow[d, "r_1"] \\ \pi_1 X_0 A \arrow[r, "i_1^A"] & \pi_1 X_1 A \end{tikzcd}$$

sono diagrammi commutativi.
Ci manca da provare la commutatività dei diagrammi

$$\begin{tikzcd} \pi_1 X_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "u_1"] & \pi_1 X_1 A \arrow[d, "u_1^A"] \\ \pi_1 X \arrow[r, "r"] & \pi_1 X A \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \pi_1 X_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "r_2"] & \pi_1 X \arrow[d, "r"] \\ \pi_1 X_2 A \arrow[r, "u_2^A"] & \pi_1 X A \end{tikzcd} .$$

Osserviamo che $X_1 \subseteq X$, quindi possiamo sfruttando il lemma costruire un morfismo r' a partire da r_1 che faccia commutare il primo diagramma. D'altra parte anche $X_2 \subseteq X$, quindi esiste un morfismo r", che coincide con r_2 su X_2, che fa commutare il secondo diagramma.
Concentriamoci sul procedimento con cui si definisce r' e notiamo che abbiamo libertà di

scelta su $X \setminus X_1$. Possiamo allora "completarlo" in modo che sia uguale a r" su $X \setminus X_1$. Chiamiamo r l'applicazione così costruita.
Osserviamo che $X_2 = (X \setminus X_1) \cup X_0$, e che per costruzione r_1, r_2 coincidono su X_0. Dal momento che r' coincide con r_1 su $X_1 \supseteq X_0$ e r" coincide con r_2 su $X_2 \supseteq X_0$, allora r è ben definita e coincide con r' su X_1 e con r" su X_2, ovvero fa commutare entrambi i diagrammi.
Abbiamo cioè dimostrato $\mathbf{r}$=(r_0, r_1, r_2, r) è un morfismo di diagrammi. Poiché anche $\mathbf{l}$=(l_0, l_1, l_2, l) costituisce ovviamente un diagramma commutativo, dal momento che abbiamo costruito r_k e r come inversi sinistri di l_k e l, $\mathbf{r}$ è inverso sinistro di $\mathbf{l}$ in $\mathcal{G}\nabla_{\surd}\lceil_{\square}$. □

Abbiamo così concluso la dimostrazione del teorema di Van Kampen per gruppoidi.

3.3 Osservazioni conclusive

Quando abbiamo mostrato che il gruppo fondamentale non è un invariante topologico, avremmo potuto osservare che prendendo un unico punto x_C per ogni componente connessa per archi C del nostro spazio topologico e definendo l'insieme

$$pX = \{\pi_1(X, x_C), C \text{ componente connessa per archi di } X\}$$

avremmo avuto un invariante topologico che svolge lo stesso compito di $\pi_1 XA$, per A rappresentativo opportuno. Infatti una condizione necessaria affinché X e Y siano omeomorfi è che esista una biezione $f\colon pX \to pY$ tale che $\pi_1(X, x_C) \cong f(\pi_1(X, x_C))$, ovvero che accoppi gruppi fondamentali isomorfi. Moralmente questa era la conclusione a cui eravamo giunti costruendo $\pi_1 XA$, tuttavia la mancanza di stuttura impedisce di confrontare e fare operazioni su questi oggetti.
La fatica compiuta nel costruire questa pesante impalcatura algebrica viene ripagata attraverso le numerose proprietà trovate e la possibilità di scrivere gruppoidi in funzione di altri grazie agli strumenti del pushout e del coproduct.
In questo modo inoltre possiamo analizzare anche situazioni in cui non è possibile restringersi allo studio delle singole componenti connesse per archi. Un esempio di ciò è fornito dal calcolo del primo gruppo fondamentale della circonferenza.
Prima di affrontare la dimostrazione, richiamiamo un risultato di teoria delle categorie, la cui prova si trova in [3] (enunciato 6.7.3).

Definizione 3.3.1 (Categoria rappresentativa)**.** Una sottocategoria $\mathcal{C}'$ si dice rappresentativa in $\mathcal{C}$ se ogni oggetto di $\mathcal{C}$ è isomorfo ad un oggetto di $\mathcal{C}'$.

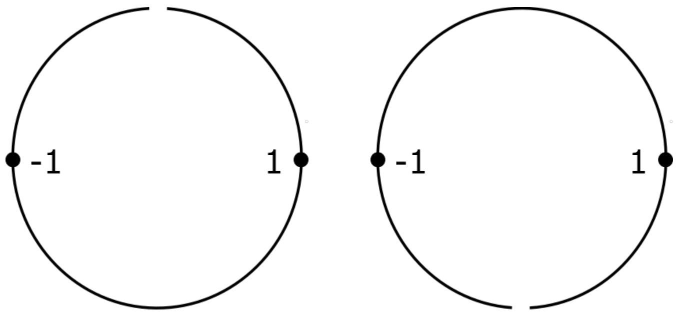
Questa è un'evidente generalizzazione di quanto già visto, infatti se A è un insieme rappresentativo per X allora $\pi_1 XA$ è una sottocategoria rappresentativa per $\pi_1 X$.

Questo discende dal fatto che A è rappresentativo per X se interseca tutte le sue componenti connesse per archi. Ad ogni luogo di X posso quindi associarne uno di A che sia nella stessa componente connessa per archi, e quindi esiste una strada che li congiunge. Essendo un gruppoide questa strada è in particolare un isomorfismo.

Proposizione 3.3.2. *Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ due categorie e sia $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtore tale che f sia iniettivo sugli oggetti. Allora ogni sottocategoria $\mathcal{C}'$ piena e rappresentativa di $\mathcal{C}$ induce un pushout della forma*
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "f'"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "r'"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd}$$
, dove f' è la restrizione di f a $\mathcal{C}'$.

Possiamo finalmente calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^1$.

Proposizione 3.3.3. $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$



(a) *Sottospazio* X_1 (b) *Sottospazio* X_2

Dimostrazione. Utilizziamo la notazione complessa, ovvero $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi t}, t \in [0,1]\}$. Scegliamo $X_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$ e $X_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{-i\}$ (vedi figura). Sia infine $A = \{-1, 1\}$.
Il teorema di Van Kampen per gruppoidi garantisce che

$$\begin{tikzcd} \pi_1 X_0 A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & \pi_1 X_1 A \arrow[d, "u_1"] \\ \pi_1 X_2 A \arrow[r, "u_2"] & \pi_1 \mathbb{S}^1 A \end{tikzcd}$$

sia un pushout.
Poiché l'insieme $\{1\} \subseteq A$ è rappresentativo in X_1 e $\mathbb{S}^1$, i vertex group $\pi_1 X_1(1)$ e $\pi_1\mathbb{S}^1(1)$ sono sottocategorie rappresentative per $\pi_1 X_1 A$ e $\pi_1 \mathbb{S}^1 A$. Il teorema appena enunciato ci garantisce che allora anche il seguente diagramma sia un pushout.

$$\begin{tikzcd} \pi_1 X A \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "u_1"] & \pi_1 X_1(1) \arrow[d, "u_1'"] \\ \pi_1 \mathbb{S}^1 A \arrow[r, "r"] & \pi_1 \mathbb{S}^1(1) \end{tikzcd}$$

Abbiamo dimostrato che la composizione di pushout sia un pushout, quindi abbiamo trovato il seguente pushout:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1 X_0 A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & \pi_1 X_1 A \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "u_1"] & \pi_1 X_1(1) \arrow[d, "u_1'"] \\
\pi_1 X_2 A \arrow[r, "u_2"] & \pi_1 \mathbb{S}^1 A \arrow[r, "r"] & \pi_1 \mathbb{S}^1(1)
\end{tikzcd}.$$

Calcoliamo i gruppoidi ai vertici del rettangolo, escluso ovviamente $\pi_1\mathbb{S}^1(1)$. π_1X_0A ha come oggetti $\{-1,1\}$ e come unici morfismi le identità, essendo composto da due componenti connesse per archi semplicemente connesse. Per lo stesso motivo $\pi_1X(1)$ è isomorfo al gruppo banale sull'oggetto 1. Infine poiché X_2 è uno spazio semplicemente connesso e π_1X_2A è costruito su due punti base, i morfismi sono le identità, $\omega \in \pi_1X_2(-1,1)$ e il suo inverso $\omega^{-1} \in \pi_1X_2(1,-1)$. Possiamo, denotando $j_1 := r_1i_1$ e $v_2 := ru_2$, riscrivere il nostro pushout nella forma:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1 X_0 A \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i_2"] & 0 \arrow[d, "u_1'"] \\
\pi_1 X_2 A \arrow[r, "v_2"] & \pi_1 \mathbb{S}^1(1)
\end{tikzcd}.$$

A questo punto osserviamo che dato che π_1X_0A ha come unici oggetti le identità ogni diagramma $\begin{tikzcd} \pi_1 X_0 A \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i_2"] & 0 \arrow[d, "f_1"] \\ \pi_1 X_2 A \arrow[r, "f_2"] & G \end{tikzcd}$ è commutativo se G ha un unico oggetto, ovvero è un gruppo. Infatti gli oggetti possono essere mandati da f_k nell'unico oggetto del gruppo, e gli unici morfismi mappati sono quelli banali.
Prendiamo quindi $G = \mathbb{Z}$ e f_2 tale che $\omega \mapsto 1$ (tutte le altre immagini sono vincolate, quindi non c'è bisogno di specificarle). Per definizione di pushout $\exists! f\colon \pi_1\mathbb{S}^1(1) \to \mathbb{Z}$ tale che $fv_2 = f_2$, quindi in particolare, denotando $\phi := v_2(\omega)$, $f(\phi) = fv_2(\omega) = f_2(\omega) = 1$. Sia $g\colon \mathbb{Z} \to \pi_1\mathbb{S}^1(1)$ il morfismo definito estendendo $1 \mapsto \phi$, ovvero $g(z) = \phi^z$. Dalla definizione abbiamo che fg è l'identità su $\mathbb{Z}$.
Osserviamo che $gfv_2(\omega) = gf(\phi) = g(1) = \phi$, ovvero $gf\colon \pi_1\mathbb{S}^1(1) \to \pi_1\mathbb{S}^1(1)$ è un morfismo tale che $gfv_2 = v_2$. Inoltre $gfu_1' = u_1'$ in quanto u_1' è il morfismo banale. Allora gf fattorizza il pushout, ma sappiamo che per definizione il morfismo che fa questo lavoro è unico ed è l'identità su $\pi_1\mathbb{S}^1(1)$. Abbiamo quindi appena dimostrato che $\pi_1\mathbb{S}^1(1) \cong \mathbb{Z}$. Avevamo dimostrato che $\pi_1X(x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$, da cui la tesi. □

Filosoficamente il teorema di Van Kampen per gruppoidi è una generalizzazione della sua controparte sui gruppi per le ipotesi da cui parte e i risultati che porta. Mostriamo che in realtà è una generalizzazione nel senso più proprio del termine, ovvero il teorema classico non è altro che un caso particolare di quest'ultimo.

Proposizione 3.3.4. *Nella categoria* `Grp` *l'oggetto che definisce il pushout è isomorfo al prodotto amalgamato.*
Questo significa che dati tre gruppi G_0, G_1, G_2 e due omomorfismi $i_k\colon G_0 \to G_k$, denotando $u_k\colon G_k \to G_1 *_{(G_0,i_1,i_2)} G_2$ gli omomorfismi che mappano i generatori di G_k nei rispettivi nel prodotto amalgamato, il seguente diagramma è un pushout.

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G_1 \arrow[d, "u_1"] \\ G_2 \arrow[r, "u_2"] & G_1 *_{(G_0,i_1,i_2)} G_2 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Innanzitutto dobbiamo dimostrare che il diagramma commuti, ma questo segue dalla definizione, infatti tra i relatori di $G_1 *_{(G_0,i_1,i_2)} G_2$ ci sono $u_1(i_1(x))u_2(i_2(x))^{-1}$, al variare di $x \in G_0$, ovvero $u_1 i_1(x) = u_2 i_2(x)$ $\forall x \in G_0$, quindi $u_1 i_1 = u_2 i_2$.
Consideriamo ora il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & G_1 \arrow[d, "f_1"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"] & H \end{tikzcd}$$

e mostriamo che $\exists! f\colon G_1 *_{(G_0,i_1,i_2)} G_2 \to H$ tale che $f u_k = f_k$.
Vorremmo definire $f(a) = \begin{cases} f_1(x) & \text{con } x \in u_1^{-1}(a) \text{ se } a \in Im\, u_1 \\ f_2(x) & \text{con } x \in u_2^{-1}(a) \text{ se } a \in Im\, u_2 \end{cases}$.
Sappiamo che $G_1 *_{(G_0,i_1,i_2)} G_2 = G_1 * G_2 / N(R)$, dove $R = \{i_1(x)i_2(x)^{-1}, x \in G_0\}$. Definiamo $\bar{f}\colon G_1 * G_2 \to H$ estendendo $\bar{f}(a) = \begin{cases} f_1(a) & \text{se } a \in G_1 \\ f_2(a) & \text{se } a \in G_2 \end{cases}$. Se $\bar{f}$ è costante sulle classi di equivalenza passa a quoziente, ovvero possiamo definire f come detto.
Mostriamo che $\bar{f}(R) = \{1_H\}$ implica che $\bar{f}$ sia costante sulle classi di equivalenza. Siano $\alpha, \beta \in G_1 * G_2$, $\alpha \sim \beta \iff \alpha = n\beta$, $n \in N(R)$, poiché $\bar{f}$ è un omomorfismo vale $\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(n\beta) = \bar{f}(n)\bar{f}(\beta)$.
Se $\bar{f}(n) = 1_H$ $\forall n \in N(R)$ allora $\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\beta)$, quindi $\bar{f}$ è costante sulle classi di equivalenza. Ma $n \in N(R)$, per definizione di classe coniugata, significa $n = \prod_{x \in G_0} g_x i_1(x) i_2(x)^{-1} g_x^{-1}$, con $g_x \in G_1 * G_2$. Di conseguenza, poiché $\bar{f}$ è un omomorfismo e abbiamo supposto $\bar{f}(R) = \{1_H\}$, vale

$$\begin{aligned} \bar{f}(n) &= \prod_{x \in G_0} \bar{f}(g_x)\bar{f}(i_1(x)i_2(x)^{-1})\bar{f}(g_x^{-1}) = \\ &= \prod_{x \in G_0} \bar{f}(g_x) 1_H \bar{f}(g_x)^{-1} = 1_H \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che $\bar{f}(R) = \{1_H\} \implies \bar{f}$ costante sulle classi di equivalenza, manca da mostrare che effettivamente $\bar{f}(i_1(x)i_2(x)^{-1}) = 1_H\ \forall x \in G_0$. Per costruzione vale

$$\begin{aligned}\bar{f}(i_1(x)i_2(x)^{-1}) =& f_1i_1(x)f_2(i_2(x)^{-1}) = \\ =& f_1i_1(x)f_2(i_2(x))^{-1}.\end{aligned}$$

Allora $\bar{f}(i_1(x)i_2(x)^{-1}) = 1_H \iff f_1i_1(x)f_2i_2(x)$, ovvero se e solo se il diagramma è commutativo, vero per ipotesi.
Possiamo quindi definire f come sopra, e per costruzione $fu_k = f_k$. Abbiamo trovato un omomorfismo che fattorizza (f_1, f_2), dobbiamo ora dimostrarne l'unicità.
Sia $f' \colon G_1 *_{(G_0,i_1,i_2)} G_2 \to H$ un omomorfismo tale che $f'u_k = f_k$. Sia $h \in G_1 * G_2$, poiché $Im\, u_1 \cup Im\, u_2 = G_1 * G_2$ esiste $\bar{h} \in G_k$ tale che $u_k\bar{h} = h$, per $k = 1$ o 2. Ma allora $f'h = f'u_k\bar{h} = f_k\bar{h} = fu_k\bar{h} = fh$, ovvero $f' = f$. $\square$

Questo risultato mostra che il teorema di Seifert-Van Kampen classico è un caso particolare della generalizzazione ai gruppoidi, laddove $A = \{x_0\}$, in quanto abbiamo visto che se $A = \{x_0\}$ allora $\pi_1 XA \cong \pi_1(X, x_0)$. Inoltre osserviamo che per soddisfare le ipotesi del teorema generalizzato abbiamo bisogno che $\{x_0\}$ sia rappresentativo per X_k e X, vale a dire che X_0, X_1, X_2, X siano connessi per archi, ovvero siamo esattamente nelle ipotesi del teorema classico.

Bibliografia

[1] Artin, Michael (2016), *Algebra*, Bollati Boringhieri

[2] Brown, Ronald (1966), *Grupoids and Van Kampen's theorem*

[3] Brown, Ronald (2006), *Topology and Groupoids*, Booksurge

[4] Hatcher, Allen (2002), *Algebraic Topology*, Cambridge University Press

[5] Maunder, Charles Richard Francis (1996), *Algebraic Topology*, Dover Publication