

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Artefatti di ricostruzione nella tomografia computerizzata con raggi X

Relatore:
Prof. Maria Pia Morigi

Presentata da:
Gianluca Carlini

Anno Accademico 2017/2018

Abstract

Gli artefatti da ricostruzione sono problemi comuni nella tomografia computerizzata con raggi X. Essi possono degradare la qualità di una immagine al punto da renderla inutilizzabile. Scopo dell'elaborato è l'analisi di diversi tipi di artefatti, a partire dai fenomeni che li causano, fino ad arrivare ai metodi impiegati per eliminarli o quantomeno ridurli. A tal fine si è proceduto ad una approfondita ricerca bibliografica e allo studio dei testi scientifici fondamentali riguardo all'argomento. Particolare attenzione è stata rivolta al fenomeno fisico del *Beam Hardening*, che è tra le maggiori cause di artefatti grafici, e di cui si sono viste diverse metodologie di correzione. Sono stati poi trattati gli artefatti dovuti all'apparato di misura e gli artefatti dovuti al paziente. Per quanto riguarda le tecniche di correzione, oltre ai procedimenti di più vecchia concezione e ormai consolidati, si è dato largo spazio alle metodologie innovative, di recente applicazione e ancora oggetto di studio e ricerca, come la *Dual-Energy CT* e la ricostruzione iterativa. Si è visto come la ricostruzione iterativa garantisca risultati di gran lunga superiori in merito alla qualità dell'immagine ricostruita, rispetto alla canonica *Filtered Back-Projection*, in particolare per quanto riguarda la *Low-dose CT*, di grande interesse in campo medico.

Indice

1	Tomografia computerizzata	4
1.1	I raggi X	4
1.1.1	Interazione dei raggi X con la materia	5
1.2	Il tubo radiogeno	7
1.3	Introduzione alla TC e principi di funzionamento	8
2	Ricostruzione dell'immagine	11
2.1	Metodo analitico	11
2.1.1	Backprojection	11
2.1.2	Fourier Slice Theorem	12
2.1.3	Filtered Backprojection	14
2.1.4	Geometria non parallela: Fan-Beam Reconstruction	18
2.2	Metodo iterativo	21
2.2.1	Massima verosimiglianza	21
3	Beam Hardening	25
3.1	Correzione per un materiale omogeneo	27
3.2	Correzione per un materiale non omogeneo	28
3.3	Dual Energy CT	31
4	Artefatti di ricostruzione	36
4.1	Artefatti dovuti all'apparato di misura	38
4.1.1	Aliasing	38
4.1.2	Partial Volume	39
4.1.3	Scatter	40
4.1.4	Rumore	41
4.2	Artefatti dovuti al paziente	43
4.2.1	Movimento del paziente	43
4.2.2	Artefatti metallici	45

Introduzione

La tomografia assiale computerizzata (TAC) fu concepita dall'ingegnere inglese Sir Godfrey Hounsfield e dal fisico sudafricano Allan Cormack. I due scienziati furono insigniti, per tali ricerche, del premio Nobel per la medicina nel 1979.

Dagli anni '70 ad oggi le tecnologie alla base della tomografia computerizzata (TC) sono state oggetto di una crescita esponenziale.

Il primi tomografi computerizzati impiegavano dai cinque ai dieci minuti per acquisire le immagini necessarie a ricostruire una sola sezione (*slice*). Il processo di elaborazione e ricostruzione vero e proprio richiedeva oltre due ore.

Gli scanner TC moderni sono in grado di acquisire più slice contemporaneamente in tempi inferiori al secondo e una ricostruzione viene completata in pochi secondi.

Il principale, ma non unico, utilizzo della tomografia computerizzata è nel campo medico, in cui essa ha rappresentato una vera e propria rivoluzione. La TC, inoltre, viene largamente utilizzata in contesti industriali e nel campo dei beni culturali.

Oggetto di questa tesi sono gli artefatti da ricostruzione nella tomografia computerizzata con raggi X. Essi rappresentano uno dei maggiori ostacoli da superare al fine di ottenere immagini di buona qualità.

Il primo capitolo presenta anzitutto una introduzione ai raggi X, e al modo in cui questi interagiscono con la materia. Si vedrà poi il processo con cui i raggi X vengono prodotti nella pratica, attraverso il tubo radiogeno. Infine, verranno mostrate le idee alla base della TC e i criteri con cui queste vengono poi applicate.

Il capitolo due riguarda il processo di ricostruzione dell'immagine. In esso saranno esposte due tecniche di ricostruzione: la *Filtered Back-Projection*, che costituisce il metodo di ricostruzione attualmente più utilizzato, e la ricostruzione iterativa, che sta iniziando a prendere piede soltanto negli ultimi anni.

Oggetto del terzo capitolo sarà il fenomeno fisico del *Beam Hardening*. Si vedrà cos'è il *Beam Hardening*, perché costituisce una delle maggiori fonti di artefatti grafici e quali sono le metodologie adottate per far fronte ad esso. In particolare, verranno presentate due tecniche di correzione: la prima iterativa, e la seconda basata su una tecnologia di recente realizzazione, detta *Dual Energy CT*.

Infine, il quarto ed ultimo capitolo, tratterà in modo generale gli artefatti da ricostruzione, a cominciare dalle loro tipologie, per poi passare ai fenomeni che li causano. Si farà distinzione tra gli artefatti causati dall'apparato di misura e quelli dovuti al paziente. Particolare attenzione verrà posta su quelle che sono le tecniche utilizzate per eliminare o ridurre i suddetti artefatti.

Capitolo 1

Tomografia computerizzata

1.1 I raggi X

I raggi X rappresentano la parte di spettro elettromagnetico con lunghezza d'onda compresa approssimativamente tra i 10 e i 10^{-3} nanometri. La scoperta dei raggi X risale al 1895 ed è merito del fisico tedesco Wilhelm Conrad Röntgen, che per la sua scoperta ricevette il premio Nobel per la fisica nel 1901. Esistono due diversi processi atomici responsabili della produzione di radiazione X; il primo è chiamato Bremsstrahlung, che in tedesco significa “radiazione di frenamento”, mentre il secondo è detto emissione di raggi X caratteristica. In generale, il termine Bremsstrahlung si riferisce ad una qualsiasi produzione di radiazione elettromagnetica per mezzo della decelerazione di una particella carica.

Il processo di Bremsstrahlung è alla base del funzionamento dei tubi a raggi X, nei quali gli elettroni vengono accelerati da un campo elettrico e diretti verso un target metallico. La decelerazione degli elettroni nel metallo comporta l'emissione di uno spettro continuo di raggi X, con energia massima pari all'energia cinetica degli elettroni. L'intensità totale della radiazione di Bremsstrahlung che risulta da una particella di massa m e carica elettrica ze incidente su un nucleo bersaglio di carica Ze è proporzionale a

$$I \propto \frac{Z^2 z^4 e^6}{m^2}. \quad (1.1)$$

Segue immediatamente che la produzione di radiazione X per Bremsstrahlung è tanto più efficiente quanto più alto è il numero atomico Z degli atomi bersaglio.

Il secondo processo responsabile della produzione di raggi X si verifica quando un elettrone altamente energetico collide con un elettrone appartenente ad una shell interna dell'atomo bersaglio, liberando il suddetto elettrone. L'atomo in questione si troverà in uno stato fortemente eccitato, dato dalla mancanza di uno dei suoi elettroni con energia di legame altamente negativa; gli elettroni delle shell esterne tenderanno quindi a riempire la lacuna formatasi nella shell interna. Durante tale processo l'energia viene conservata tramite l'emissione di un fotone con energia pari alla differenza di energia esistente tra la shell esterna e quella interna, secondo la ben nota formula $E = h\nu$. Il fenomeno appena descritto è noto come *emissione caratteristica* di raggi X e giustifica la presenza dei picchi caratteristici prima citati.

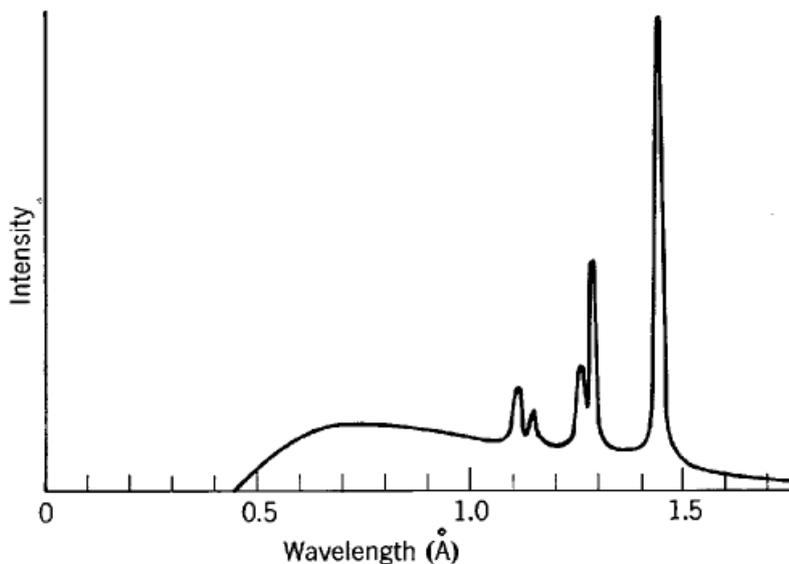


Figura 1.1: Tipico spettro di raggi X. Si possono osservare lo spettro continuo dovuto al bremsstrahlung e i picchi caratteristici dell'elemento che costituisce il target (Tungsteno) [1].

1.1.1 Interazione dei raggi X con la materia

In campo medico, l'energia dei fotoni utilizzati in radiologia diagnostica è compresa tra i 20 e i 120 keV. A questi livelli energetici ci sono tre modi in cui i raggi X possono interagire con la materia: l'effetto fotoelettrico, l'effetto Compton e lo scattering coerente.

Nel caso dell'effetto fotoelettrico, un fotone X incidente libera un elettrone da una shell interna dell'atomo. Una interazione di questo tipo produce uno ione positivo, un fotoelettrone e un fotone della radiazione caratteristica. Il massimo assorbimento si verifica quando l'energia del fotone X incidente è quasi identica all'energia di legame dell'elettrone, infatti, la probabilità di interazione fotoelettrica è inversamente proporzionale al cubo dell'energia in eccesso del fotone

$$P_{foto} \propto E^{-3}. \quad (1.2)$$

Inoltre, la probabilità di interazione è direttamente proporzionale al cubo del numero atomico Z

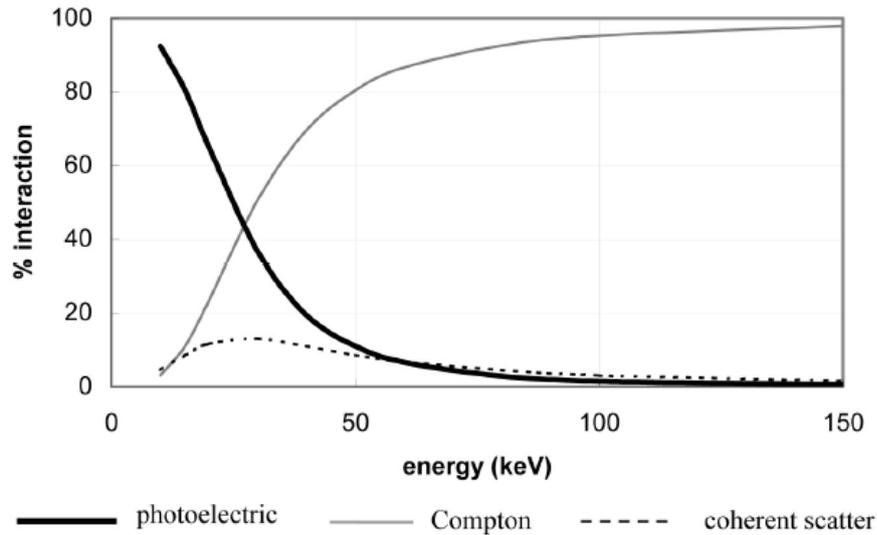
$$P_{foto} \propto Z^4, \quad (1.3)$$

perciò una piccola differenza nel numero atomico produce una grande differenza nella probabilità di assorbimento per effetto fotoelettrico.

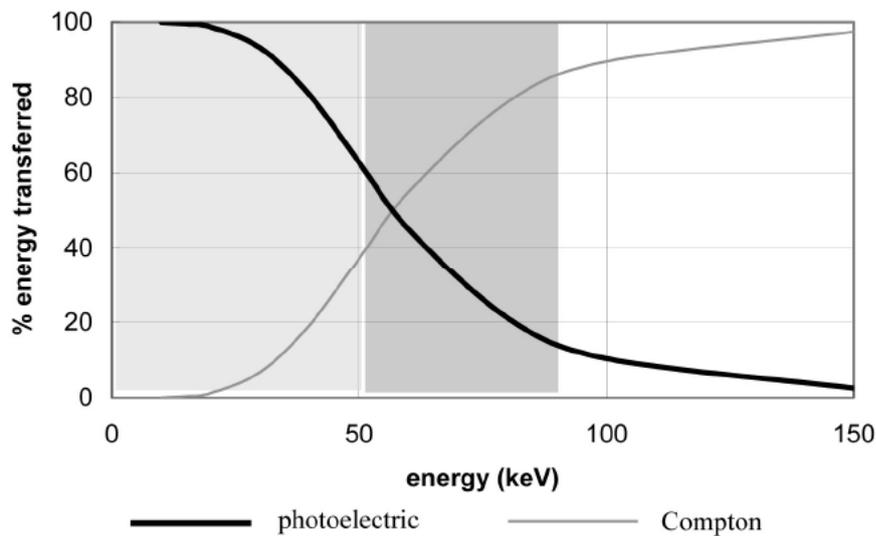
Il secondo modo in cui i raggi X interagiscono con la materia prende il nome dal fisico Arthur Compton, che per la sua scoperta fu insignito del premio Nobel per la fisica nel 1927. In questo tipo di interazione l'energia del fotone X incidente è molto superiore all'energia di legame dell'elettrone. In tal caso, il fotone X incidente libera l'elettrone dall'atomo e viene deflesso perdendo parte della sua energia. Il fotone può essere deflesso ad un qualunque angolo compreso tra 0 e 180 gradi; maggiore è la sua energia, maggiore è la probabilità che l'angolo sia inferiore a 90 gradi. Il fotone mantiene comunque parte dell'energia iniziale, cosicché l'assorbimento energetico è decisamente inferiore a quello che si verifica per effetto fotoelettrico. La probabilità

di interazione Compton non dipende dal numero atomico Z ma dalla densità elettronica del materiale. L'effetto Compton non genera quindi una differenza di contrasto rilevante tra i diversi tessuti, poiché la densità elettronica di questi è molto simile.

Il terzo modo in cui i raggi X interagiscono con la materia è detto scattering coerente, o scattering di Rayleigh. In questo caso, un'onda elettromagnetica con un campo elettrico oscillante mette in vibrazione gli elettroni dell'atomo, che oscillando emettono una radiazione con la stessa frequenza della radiazione incidente. Poiché non c'è alcuna conversione di energia in energia cinetica, lo scattering di Rayleigh viene solitamente trascurato in TC (tomografia computerizzata).



(a)



(b)

Figura 1.2: (a) Contributo dei diversi tipi di interazione, in percentuale, in funzione dell'energia. (b) Percentuale di energia trasferita per le differenti interazioni (in acqua) [1].

Sulla base della figura 1.2 (b) si può dividere l'intervallo energetico usato in diagnostica in tre diverse zone. La prima zona è compresa tra 0 e 50 keV, in cui

domina l'assorbimento fotoelettrico (grigio chiaro in figura). La seconda va da 50 a 90 keV circa, e in essa sono importanti sia l'interazione fotoelettrica che quella Compton (grigio scuro in figura). La terza zona è la regione rimanente, tra i 90 e i 150 keV, in cui l'effetto Compton domina su quello fotoelettrico.

L'effetto complessivo delle interazioni appena viste è una attenuazione della radiazione X incidente sul materiale. L'attenuazione può essere espressa da una relazione esponenziale per una radiazione X monocromatica incidente e un materiale di densità e numero atomico uniformi. Tale relazione prende il nome di *Legge di Beer-Lambert*:

$$I = I_0 e^{-\mu L}, \quad (1.4)$$

dove I_0 e I rappresentano le intensità delle radiazioni incidente e trasmessa, μ è il coefficiente di attenuazione lineare del materiale e L è lo spessore del materiale.

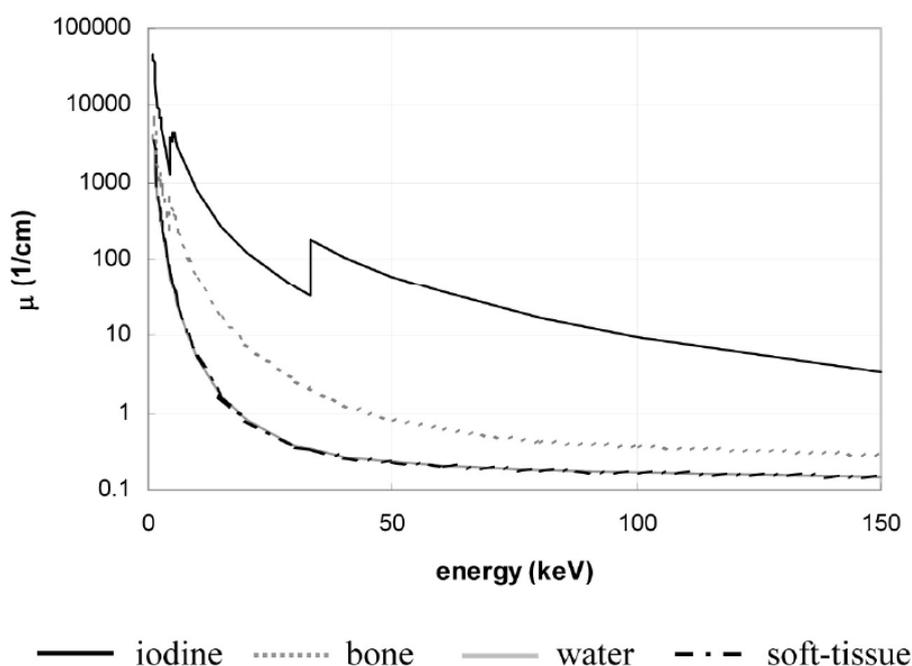


Figura 1.3: Coefficiente di attenuazione lineare in funzione dell'energia della radiazione incidente, per iodio, ossa, acqua e tessuti molli [1].

In Figura 1.3 è possibile notare come il coefficiente di attenuazione lineare di acqua e tessuti molli sia essenzialmente identico. Altro aspetto interessante riguarda i picchi nella curva relativa allo iodio. Per una energia di circa 33.2 KeV, infatti, μ passa rapidamente da 32.32 cm^{-1} a 176.59 cm^{-1} ; ciò è dovuto al fatto che la suddetta energia corrisponde all'energia di legame dell'elettrone nella shell K dello iodio. Ogni materiale presenta picchi caratteristici di questo tipo.

1.2 Il tubo radiogeno

Un tubo radiogeno è una ampolla di vetro contenente un anodo e un catodo ad alta tensione, situati ai poli opposti dell'ampolla, in condizioni di vuoto spinto. Il primo tubo radiogeno fu realizzato dal fisico britannico Willem Crookes. Il catodo è costituito da una spirale metallica, solitamente di tungsteno, in cui circola corrente

elettrica, che porta il filamento metallico all'incandescenza, innescando la produzione di elettroni per effetto termoionico. La spirale metallica è situata sul fondo di una coppa di focalizzazione che mantiene il fascio collimato per mezzo di un campo magnetico. L'anodo non è altro che una placca metallica, anch'essa solitamente di tungsteno, su cui incide il fascio di elettroni proveniente dal catodo. Gli elettroni prodotti dal catodo vengono accelerati mediante una differenza di potenziale applicata ai capi degli elettrodi. Le differenze di potenziale comunemente usate in campo diagnostico sono comprese tra i 20 e i 120 kV.

Distinguiamo i tubi radiogeni ad anodo fisso e ad anodo rotante, che rappresentano una evoluzione dei tubi ad anodo fisso e permettono una migliore dissipazione del calore, cosicché è possibile applicare una differenza di potenziale maggiore e avere, conseguentemente, una maggiore produzione di raggi X.

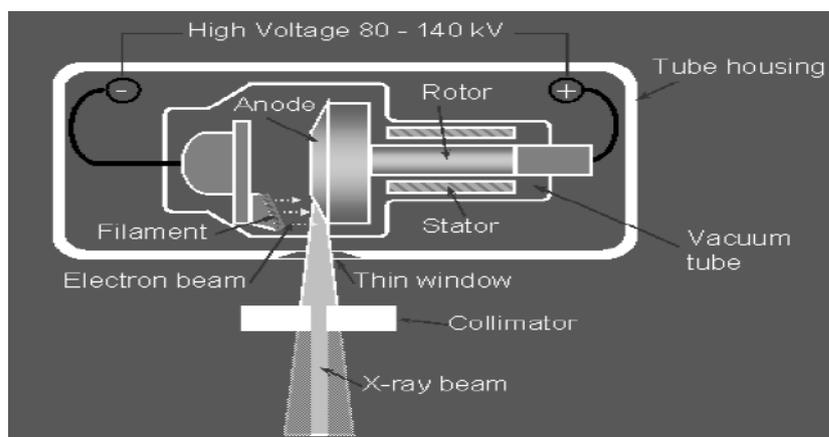


Figura 1.4: Schema di un tubo radiogeno ad anodo rotante.

Nei tubi radiogeni convenzionali gli elettroni che colpiscono l'anodo possono essere respinti e poi catturati nuovamente dall'anodo, generando raggi X da aree diverse dal fuoco. Per ottenere una maggiore precisione del fascio RX si procede quindi collegando l'anodo a massa, che, avendo ora un potenziale pari a zero volt, non attira verso di sé gli elettroni di rimbalzo; in questo modo la componente extrafocale di raggi X viene eliminata.

1.3 Introduzione alla TC e principi di funzionamento

L'avvento della tomografia computerizzata segna una rivoluzione nella diagnostica per immagini. La radiologia tradizionale, infatti, consiste nella "trasformazione" di un oggetto tridimensionale in una immagine bidimensionale in cui si rappresentano le densità delle strutture esaminate; ciò significa che l'immagine finale è la risultante dell'attenuazione di tutti i tessuti attraversati dal fascio RX. La TC, al contrario, produce una immagine che rappresenta la sezione del corpo, distinta dagli strati adiacenti, ottenuta misurando i profili di attenuazione del fascio collimato RX attraverso multiple viste angolari dello strato in esame. L'immagine in TC viene ottenuta grazie alla successiva rielaborazione di molte proiezioni di una sezione del corpo, prese da diverse angolazioni.

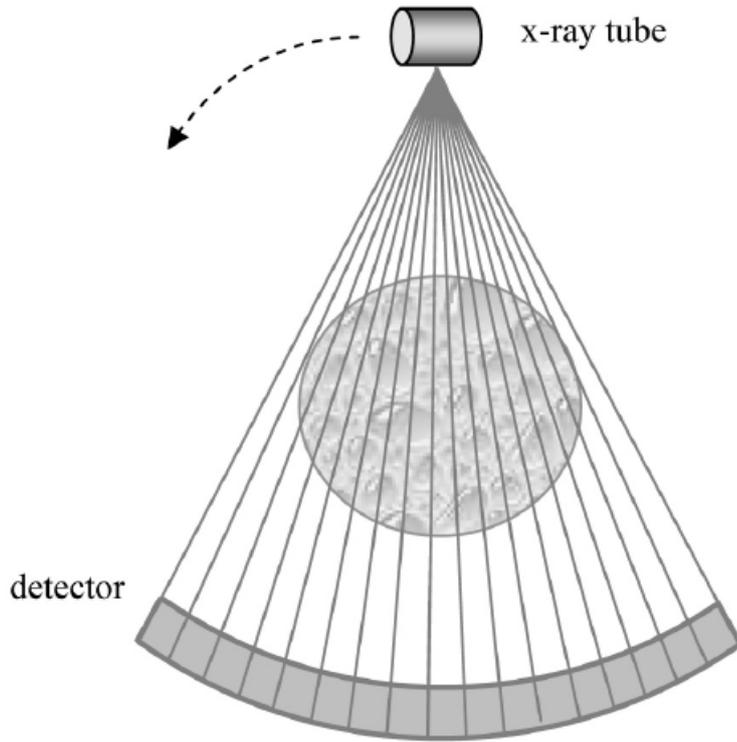


Figura 1.5: Rappresentazione di uno scanner TC. Il tubo radiogeno e i rivelatori ruotano attorno all'oggetto, rimanendo stazionari tra loro [1].

Il principio di ricostruzione dell'immagine si basa sul fatto che ogni sezione tomografica (*slice*) viene suddivisa in elementi di volume chiamati *voxel*. Ad ogni voxel corrisponderà un pixel dell'immagine ricostruita, il cui livello di grigio sarà funzione dell'effetto di attenuazione medio di tutte le sostanze contenute nel suddetto voxel.

Consideriamo ora un oggetto non omogeneo. Per calcolare le sue caratteristiche generali di attenuazione si può procedere dividendolo in elementi più piccoli, che presi singolarmente possono essere considerati omogenei; vale a dire che ad ognuno può essere associato un coefficiente di attenuazione lineare.

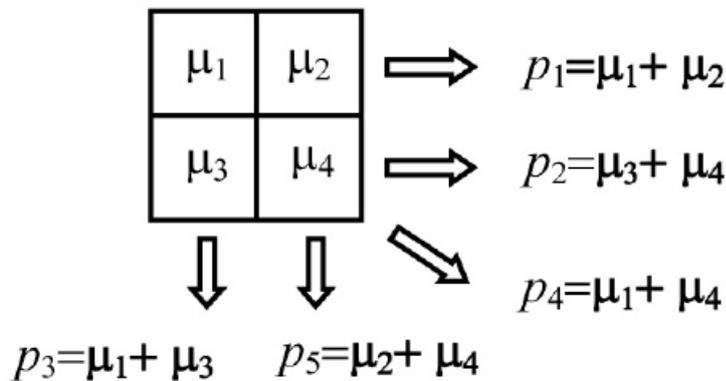


Figura 1.6: Semplice raffigurazione della divisione di un oggetto in elementi omogenei [1].

La legge di Beer-Lambert può quindi essere riscritta nel modo seguente

$$\begin{aligned}
 I &= I_0 e^{-\mu_1 \Delta x_1} e^{-\mu_2 \Delta x_2} \dots = I_0 e^{-\sum_n \mu_n \Delta x_n} = \\
 &= I_0 e^{-\int_L \mu(x) dx},
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

dove nell'ultimo passaggio si è passati dalla sommatoria all'integrale considerando che Δx tenda a zero.

L'equazione (1.5) porta quindi al risultato

$$p = -\ln \frac{I}{I_0} = \int_L \mu(x) dx.
 \tag{1.6}$$

Perciò, il problema della ricostruzione in TC è ricavare i coefficienti di attenuazione lineare $\mu(x)$ a partire dalle proiezioni misurate p .

In campo medico, tuttavia, ad essere rappresentati nell'immagine finale non sono i coefficienti di attenuazione lineare μ ma bensì la distribuzione di una grandezza chiamata numero CT, proporzionale ad una tonalità di grigio. Il numero CT è definito per una sostanza come:

$$\text{numero CT (HU)} = 1000 \frac{\mu - \mu_{\text{acqua}}}{\mu_{\text{acqua}}},
 \tag{1.7}$$

è una quantità adimensionale e segue la scala Hounsfield, la quale adotta come valore di riferimento il coefficiente di attenuazione lineare dell'acqua.

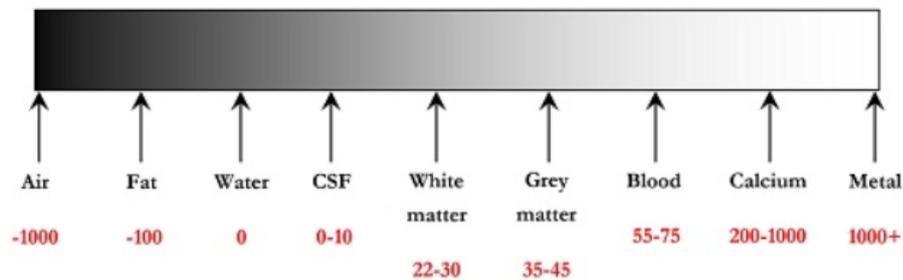


Figura 1.7: Scala di Hounsfield nell'intervallo da -1000 a +1000

Capitolo 2

Ricostruzione dell'immagine

Come detto alla fine del capitolo 1, ricostruire un oggetto in TC equivale a ricavare la distribuzione del coefficiente di attenuazione lineare del suddetto, utilizzando l'equazione (1.6). Si era visto come, nel caso di un oggetto non omogeneo, fosse conveniente dividere l'oggetto in tanti blocchi, abbastanza piccoli da poter considerare che ad ogni blocco corrispondesse un unico coefficiente di attenuazione lineare μ . Si consideri quindi per semplicità un oggetto formato da soli quattro blocchi (Figura 1.6). In simili condizioni è possibile ottenere un sistema di quattro equazioni linearmente indipendenti del tipo seguente

$$\begin{cases} p_1 = \mu_1 + \mu_2 \\ p_2 = \mu_3 + \mu_4 \\ p_3 = \mu_1 + \mu_3 \\ p_4 = \mu_1 + \mu_4 \end{cases}$$

per cui è noto esistere una soluzione univoca.

Perciò, generalizzando il problema al caso in cui l'oggetto venga diviso in $N \times N$ diversi blocchi, si può ottenere una soluzione effettuando N^2 misurazioni indipendenti. Un approccio di questo tipo dimostra che è sempre possibile trovare una soluzione matematica al problema, ma allo stesso tempo si rivela essere di poca utilità pratica. Si pensi infatti che la risoluzione dell'immagine finale dipende dal numero N di blocchi in cui l'oggetto viene diviso, ovvero dal numero di coefficienti μ_n che è possibile distinguere. Un miglioramento della risoluzione dell'immagine comporta quindi un aumento considerevole della complessità computazionale. Si deve poi considerare il caso in cui due o più misure non siano indipendenti; il numero di variabili sarebbe superiore al numero di equazioni e non si potrebbe più trovare una soluzione univoca.

2.1 Metodo analitico

2.1.1 Backprojection

Uno dei metodi più utilizzati per la ricostruzione dell'immagine è il cosiddetto *Filtered Backprojection Algorithm*, o FBP. Per dare un'idea del principio su cui si basa consideriamo il caso più semplice possibile, ovvero quello in cui l'oggetto che si vuole ricostruire sia un punto isolato.

La proiezione del suddetto punto corrisponderà, idealmente, ad una funzione delta

di Dirac centrata nella posizione in cui il raggio interseca il punto materiale. A priori, e con una sola proiezione, non è possibile sapere dove si trovi il punto, se non per il fatto che esso si troverà sicuramente lungo la linea individuata dal raggio. La cosa più sensata da fare, pertanto, è considerare che esso abbia uguale probabilità di trovarsi in ogni punto della linea. In pratica quindi l'immagine risultante da una singola proiezione sarà una linea di colore uniforme. Il passo successivo è acquisire un'ulteriore proiezione ruotando l'intero apparato di un certo angolo rispetto alla posizione di partenza. Il risultato sarà un'altra linea che interseca la linea di partenza in un punto dello spazio. Ripetendo la procedura per un numero sufficiente di angoli è possibile ottenere l'immagine dell'oggetto scansionato.

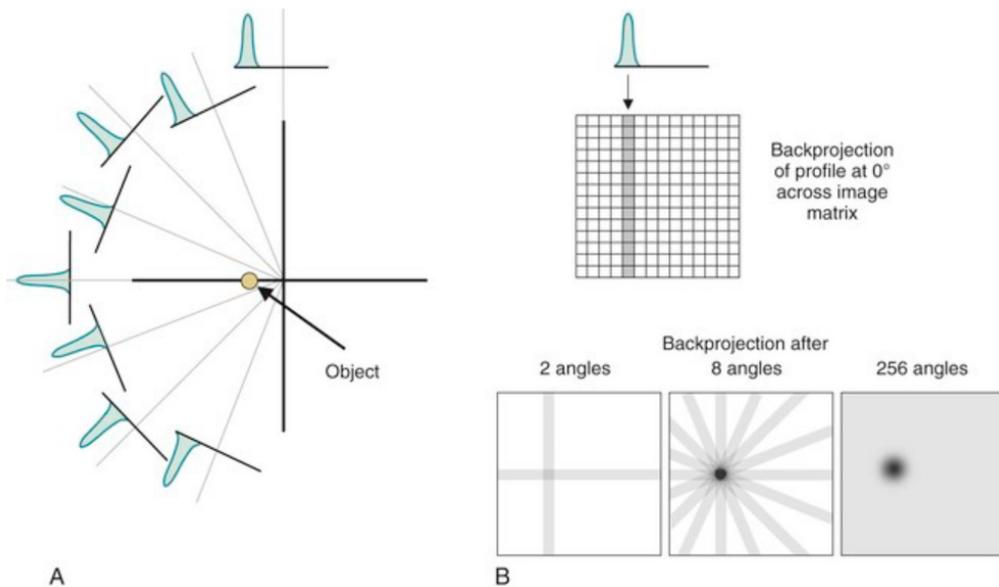


Figura 2.1: Schema illustrativo del procedimento che permette di ottenere l'immagine dell'oggetto studiato attraverso il metodo della Backprojection.

Il nome "Backprojection" deriva proprio dal fatto che si costruisce l'immagine bidimensionale finale a partire da un set di integrali di linea unidimensionali. Ovviamente una funzione del tipo delta di Dirac è possibile solo idealmente. In un caso reale si avrà una funzione dalla tipica forma a campana con una ampiezza diversa da zero, è chiaro quindi che l'immagine finale risulterà essere una versione sfocata dell'oggetto reale, com'è possibile vedere in figura 2.1.

2.1.2 Fourier Slice Theorem

Il principio matematico che governa le tecniche di ricostruzione tomografiche è noto come *Fourier slice theorem*. Sia $f(x, y)$ l'oggetto che si sta ricostruendo e sia $p(t, \theta)$ la proiezione parallela di $f(x, y)$ per un certo angolo θ , con t che rappresenta la distanza del raggio dal centro di rotazione.

Il teorema di Fourier esprime quanto segue:

Teorema 1 (Di Fourier) *La trasformata di Fourier di una proiezione parallela $p(t, \theta)$ di un oggetto $f(x, y)$ ottenuta ad un angolo θ equivale ad una linea nello spazio*

bidimensionale corrispondente alla trasformata di Fourier dell'oggetto $f(x, y)$; tale linea interseca l'origine formando lo stesso angolo θ .

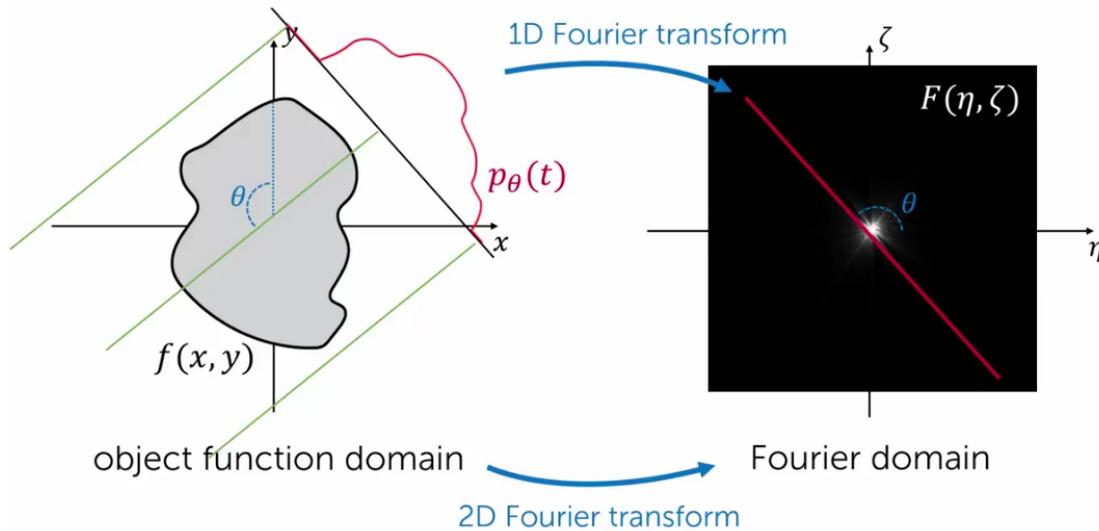


Figura 2.2: Rappresentazione grafica del teorema di Fourier

Essenzialmente, quindi, acquisendo proiezioni da angolazioni diverse è possibile costruire l'intera rappresentazione di Fourier dell'oggetto, e una volta che il dominio di Fourier è stato completamente costruito si può applicare una trasformata di Fourier bidimensionale inversa per ricostruire la funzione originale $f(x, y)$. Ora, sfortunatamente, questo approccio porta con sé due evidenti problemi. Anzitutto, le misure acquisite dalle differenti proiezioni giacciono su delle circonferenze, vale a dire che c'è bisogno di una interpolazione per portare i dati in un sistema di coordinate cartesiano, condizione necessaria per eseguire la trasformata inversa.

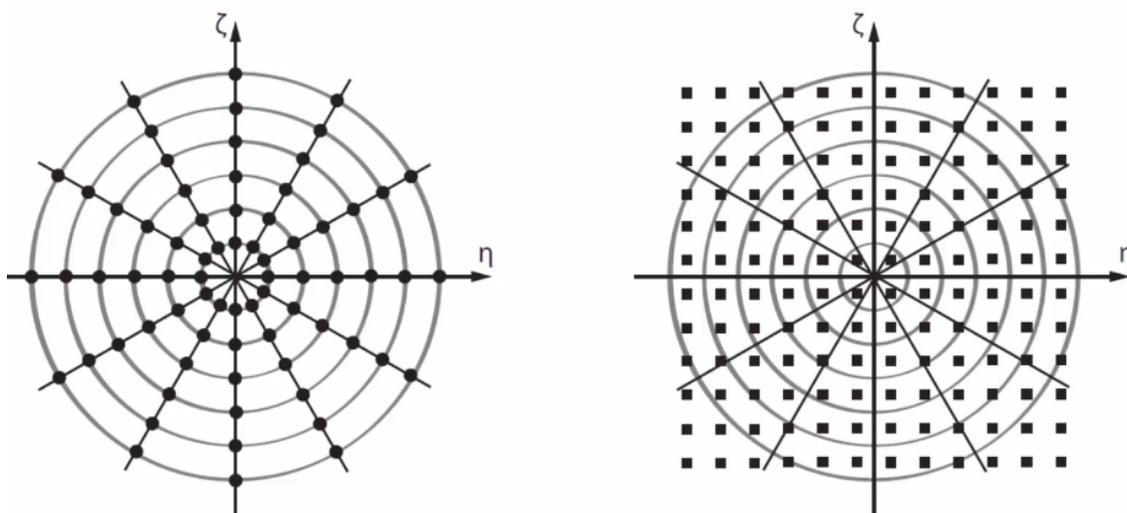


Figura 2.3: A sinistra è mostrata la disposizione delle misure raccolte, evidentemente distribuite su delle circonferenze. A destra si vede la disposizione dei dati necessaria per poter eseguire la trasformata di Fourier inversa.

In secondo luogo, è evidente (Figura 2.3) che il campionamento nel dominio di Fourier è molto più denso vicino all'origine piuttosto che nelle regioni esterne. Nella pratica ciò significa che per le basse frequenze sarà disponibile una grande quantità di dati e tali frequenze potranno essere ricostruite in modo accurato.

Vale invece il discorso opposto per le alte frequenze, per cui si hanno a disposizione meno dati e per cui sarà quindi impossibile ottenere una buona ricostruzione. Ciò che ne risulta sono immagini sfocate.

2.1.3 Filtered Backprojection

Ricaviamo ora la formula matematica utilizzata per la *Filtered Backprojection*, che risolve il secondo problema citato nel precedente paragrafo, ovvero l'aumento dell'imprecisione nella ricostruzione con l'aumento della frequenza. Cominciamo ricordando che è possibile ottenere una funzione $f(x, y)$ dalla sua trasformata di Fourier $F(u, v)$ applicando una trasformata di Fourier inversa

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.1)$$

Ora eseguiamo un cambio di coordinate, da cartesiane (u, v) a polari (ω, θ)

$$\begin{cases} u = \omega \cos \theta \\ v = \omega \sin \theta \end{cases} \quad (2.2)$$

cosicché

$$du dv = \omega d\omega d\theta. \quad (2.3)$$

Possiamo ora scrivere l'equazione (2.1) nel modo seguente

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega \quad (2.4)$$

Adesso possiamo servirci del teorema di Fourier, che ci permette di sostituire $F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$ con $P(\omega, \theta)$, dove $P(\omega, \theta)$ è la trasformata di Fourier di $p(t, \theta)$ fatta rispetto a t .

Vale dunque la seguente relazione

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega = \\ &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega + \\ &+ \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} P(\omega, \theta + \pi) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Notiamo poi che per una proiezione parallela si ha

$$p(t, \theta + \pi) = p(-t, \theta), \quad (2.6)$$

perciò

$$P(\omega, \theta + \pi) = P(-\omega, \theta). \quad (2.7)$$

Sostituendo l'equazione (2.7) nella (2.5) si ottiene

$$f(x, y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega. \quad (2.8)$$

Ricordiamo infine che t era definito come la distanza del raggio dal centro di rotazione, quindi

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (2.9)$$

da cui

$$f(x, y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega. \quad (2.10)$$

Il nome *Filtered Backprojection* deriva dunque dal fatto che la proiezione p è filtrata dalla funzione $|\omega|$, attraverso la quale le basse frequenze vengono soppresse in favore delle alte frequenze. Definendo la proiezione filtrata come

$$q(t, \theta) = q(x \cos \theta, y \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

possiamo esprimere $f(x, y)$ come segue

$$f(x, y) = \int_0^\pi q(x \cos \theta, y \sin \theta) d\theta. \quad (2.12)$$

In conclusione, la funzione $f(x, y)$, che rappresenta l'immagine ricostruita nel punto (x, y) , non è altro che la somma di tutte le proiezioni filtrate passanti per quel punto.

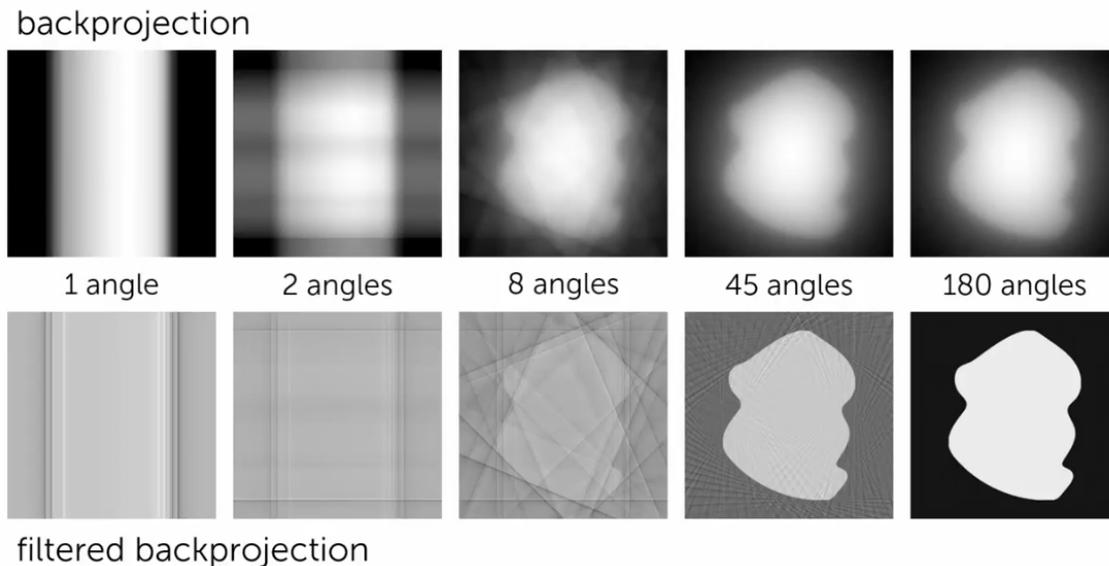


Figura 2.4: Differenza tra una immagine ricostruita tramite Backprojection (in alto) e una immagine ricostruita tramite FBP (in basso).

Il parametro ω ha le dimensioni di una frequenza; teoricamente quindi, l'integrale (2.11) dovrebbe essere calcolato per ogni frequenza possibile. Nella pratica però, l'energia contenuta nelle componenti della trasformata di Fourier oltre una certa

frequenza è trascurabile, perciò si può integrare la (2.11) all'interno di un intervallo di frequenze limitato $(-W, W)$

$$q(t, \theta) = \int_{-W}^W P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega. \quad (2.13)$$

Supponiamo che i dati delle proiezioni siano campionati con un intervallo di campionamento δ espresso in centimetri. Se non c'è aliasing, ciò implica che nel dominio di Fourier le proiezioni non contengano alcuna energia al di fuori dell'intervallo di frequenze $(-W, W)$, con

$$W = \frac{1}{2\delta} \text{ cicli/cm}, \quad (2.14)$$

come noto dal teorema di Nyquist.

Ne consegue che la funzione originale $|\omega|$ può essere sostituita dalla funzione

$$H(\omega) = |\omega|g(\omega) \quad (2.15)$$

dove

$$g(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{per } |\omega| < W \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.16)$$

La funzione $H(\omega)$ è mostrata in figura 2.5

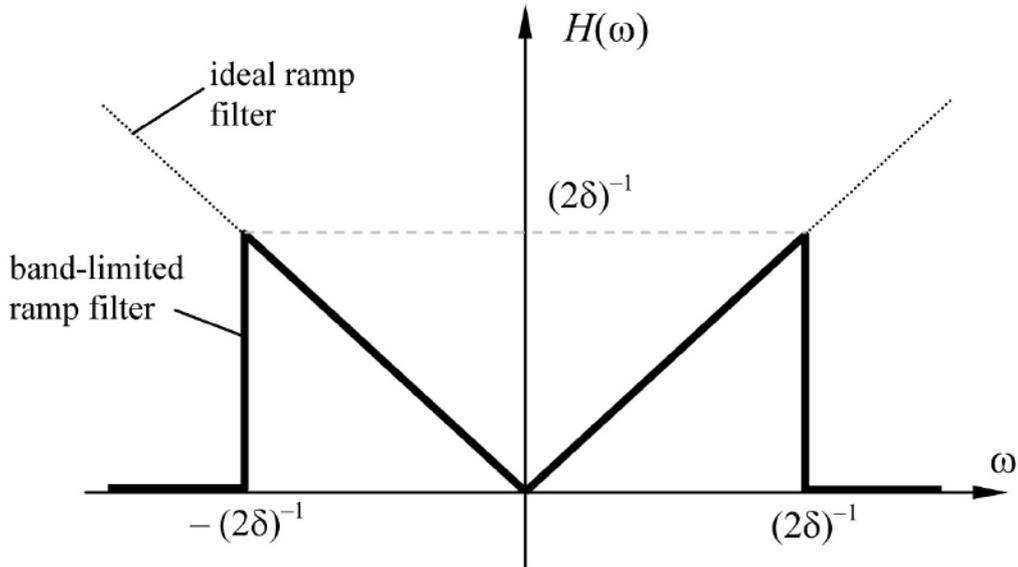


Figura 2.5: Funzione $H(\omega)$ utilizzata per filtrare le frequenze [1].

Nel dominio spaziale, la risposta impulsiva $h(t)$ del filtro $H(\omega)$ può essere ottenuta applicando la trasformata Fourier inversa ad $H(\omega)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega = \frac{1}{2\delta^2} \frac{\sin 2\pi W t}{2\pi W t} - \frac{1}{4\delta^2} \left(\frac{\sin \pi W t}{\pi W t} \right)^2. \quad (2.17)$$

Ora, secondo il teorema di convoluzione, la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni è il prodotto delle trasformate delle funzioni stesse, perciò si può

scrivere la (2.10) come segue

$$f(x, y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-t_m}^{t_m} p(t', \theta) h(t - t') dt', \quad (2.18)$$

dove

$$p(t', \theta) = 0 \quad \forall \quad t' > t_m. \quad (2.19)$$

Il ragionamento da cui deriva la precedente relazione si basa sul fatto che qualunque oggetto ha un'estensione finita. In altre parole, oltre una certa distanza t_m non ci sarà alcun punto dell'oggetto da proiettare, perciò ogni proiezione avrà valore nullo. Poiché i dati sono campionati ad intervalli di δ , $h(t)$ deve solo essere nota per gli stessi intervalli. Sostituendo quindi t con $n\delta$ nella (2.17) otteniamo

$$h(n\delta) = \begin{cases} \frac{1}{4\delta}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ pari} \\ -\frac{1}{(n\pi\delta)^2}, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

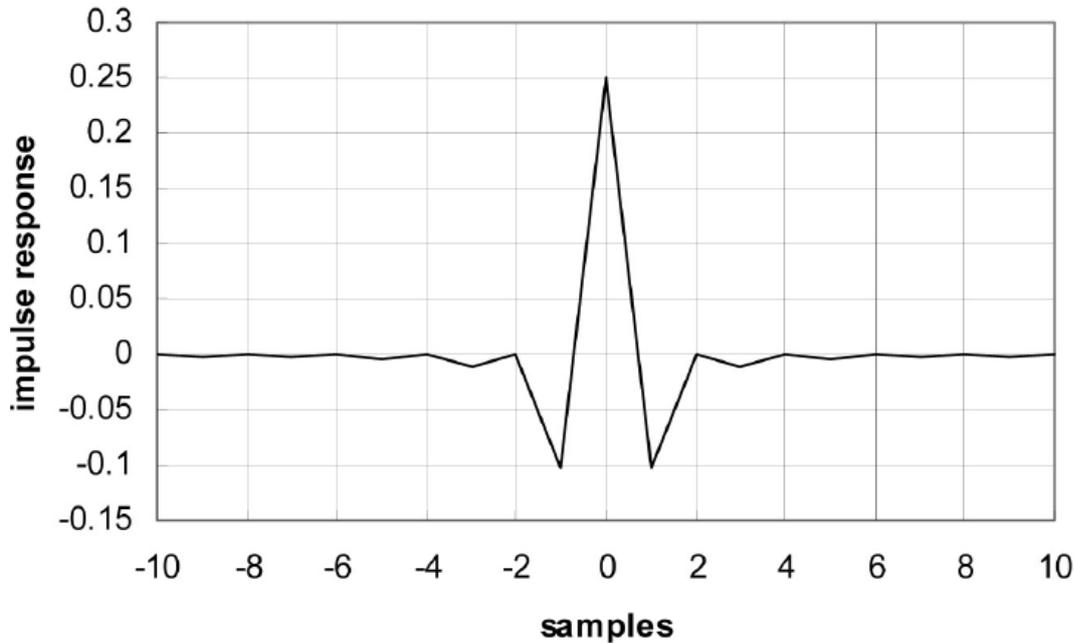


Figura 2.6: Rappresentazione grafica della funzione $h(n\delta)$ in cui si è posto $\delta = 1$ [1].

Adesso, se denotiamo il campionamenti della proiezione all'angolo θ come $p(k\delta, \theta)$, con $k = 0, \dots, N - 1$, possiamo esprimere la proiezione filtrata (2.11) come

$$q(n\delta, \theta) = \delta \sum_{k=0}^{N-1} h(n\delta - k\delta) p(k\delta, \theta), \quad (2.20)$$

con

$$n = 0, \dots, N - 1. \quad (2.21)$$

Anche qui si è usato il fatto che $p(k\delta, \theta)$ sia zero al di fuori di un certo intervallo. Ciò implica che per calcolare $q(n\delta, \theta)$ utilizziamo solamente $h(m\delta)$ nel range $-(N-1) < m < (N-1)$.

L'equazione (2.21) può essere direttamente implementata in un computer per trovare le proiezioni filtrate.

2.1.4 Geometria non parallela: Fan-Beam Reconstruction

Fino ad ora abbiamo approssciato il problema della ricostruzione considerando che i fasci di raggi X fossero tra loro paralleli. Nella pratica, purtroppo, una simile condizione non è quasi mai verificata, poiché il tipico assetto di uno scanner TC è quello mostrato in figura 1.5, in cui i raggi X hanno origine da una sorgente che può considerarsi puntiforme.

Le architetture comunemente usate sono due: equi-angolare ed equi-lineare. La prima prevede un detector composto da molti moduli, disposti in modo da formare un arco di circonferenza centrato sulla sorgente di raggi X; i moduli sono uniformemente spazati e l'angolo formato tra due raggi adiacenti è lo stesso per tutti i raggi. Nella seconda il detector è piatto e anche in questo caso la distanza di campionamento per i raggi in arrivo è la stessa; tuttavia, l'angolo che si forma tra due raggi adiacenti cambia spostandosi dal centro del detector alle zone esterne.

Oggetto della trattazione sarà soltanto l'architettura equi-angolare, essendo quella attualmente più utilizzata.

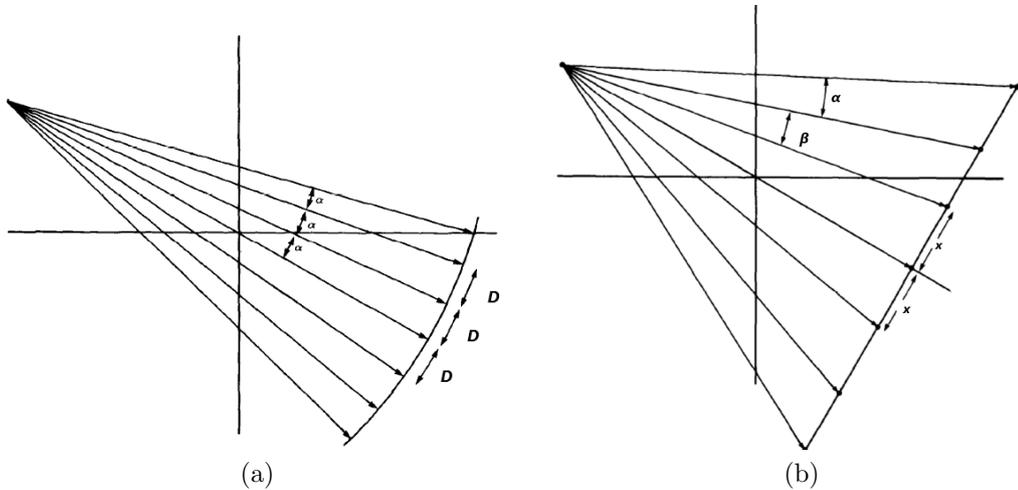


Figura 2.7: Rappresentazione schematica delle geometrie (a) equi-angolare e (b) equi-lineare [2].

Cominciamo dicendo che ogni raggio può essere identificato univocamente attraverso due parametri, che chiameremo γ e β . Il primo rappresenta l'angolo formato dal raggio considerato con il raggio passante per il centro di rotazione; il secondo è l'angolo che il raggio passante per il centro forma con l'asse y .

Ricordiamo ora che nel caso della geometria parallela avevamo utilizzato altre due quantità per identificare un raggio, ovvero t , la distanza del raggio dal centro di rotazione, e θ , l'angolo della proiezione rispetto all'asse y .

Facendo quindi riferimento alla figura 2.8, è chiaro che tra le due coppie di parametri

esistono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \theta = \beta + \gamma \\ t = D \sin \gamma \end{cases} \quad (2.22)$$

dove D è la distanza tra la sorgente di raggi X e il centro.

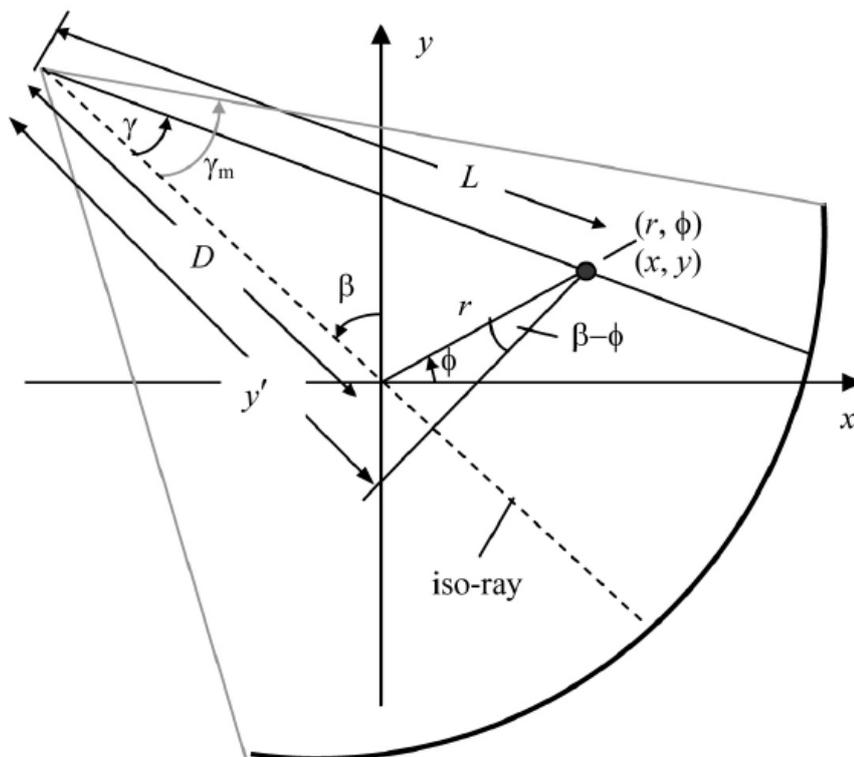


Figura 2.8: Geometria equi-angolare. Sono mostrati gli angoli γ e β e il raggio passante per il centro di rotazione. Un punto dello spazio può equivalentemente essere espresso tramite le coordinate cartesiane (x, y) o polari (\mathbf{r}, Φ) [1].

Riscriviamo l'equazione (2.18) considerando stavolta le proiezioni lungo 2π

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-t_m}^{t_m} p(t', \theta) h(x \cos \theta + y \sin \theta - t') dt' . \quad (2.23)$$

In coordinate polari la (2.23) si scrive)

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-t_m}^{t_m} p(t', \theta) h(r \cos(\theta - \phi) - t') dt' . \quad (2.24)$$

Ora, sostituendo la (2.22) nella (2.24) otteniamo

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} q(\gamma, \beta) h(r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma) D \cos \gamma d\gamma , \quad (2.25)$$

dove questa volta γ_m è il valore di γ oltre il quale $q(\gamma, \beta)$ sarà sempre uguale a zero (figura 2.8). $q(\gamma, \beta)$ in questo caso rappresenta la proiezione nella nuova geometria

non parallela. Definendo adesso L come la distanza tra il detector e il punto da ricostruire, e γ' come l'angolo del raggio passante per quel punto otteniamo

$$\begin{cases} L \cos \gamma' = D + r \sin(\beta - \phi) \\ L \sin \gamma' = r \cos(\beta - \phi) \end{cases} \quad (2.26)$$

La precedente relazione ci permette di scrivere

$$r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma = L \sin(\gamma' - \gamma), \quad (2.27)$$

che sostituita nell'equazione (2.26) ci fornisce la formula per la ricostruzione

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} q(\gamma, \beta) h(L \sin(\gamma' - \gamma)) D \cos \gamma d\gamma. \quad (2.28)$$

Ricordando la definizione originale della funzione filtro h , è possibile scrivere

$$\begin{aligned} h(L \sin \gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega L \sin \gamma} d\omega = \\ &= \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\omega'| e^{j2\pi\omega' \gamma} d\omega' = \\ &= \left(\frac{\gamma}{L \sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \end{aligned} \quad (2.29)$$

perciò, la (2.29) può essere espressa come segue

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} L^{-2} d\beta \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \gamma_m q(\gamma, \beta) h'(\gamma - \gamma') D \cos \gamma d\gamma, \quad (2.30)$$

dove

$$h'(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma). \quad (2.31)$$

Se adesso assumiamo che la proiezione $q(\gamma, \beta)$ sia campionata ad intervalli ν , la forma discreta di $h'(\gamma)$ risulta semplicemente

$$h'(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{8\nu^2}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ pari} \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi \sin n\nu} \right)^2, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

2.2 Metodo iterativo

Vediamo ora un altro metodo di ricostruzione dell'immagine, totalmente diverso da quello di cui si è appena discusso, detto *Iterative Reconstruction* (IR).

Una spiegazione esaustiva della tecnica è fornita da Bruno De Man [6], da cui riprendiamo la trattazione. Cominciamo dicendo che una immagine, che chiamiamo $\mu(x, y)$, può essere descritta come una combinazione lineare di funzioni di base $f_j(x, y)$

$$\mu(x, y) = \sum_{j=1}^J \mu_j f_j(x, y). \quad (2.32)$$

Nella precedente equazione μ_j rappresenta il valore del pixel j-esimo e $f_j(x, y)$ è una funzione che vale 1 all'interno del pixel j-esimo e 0 altrove. Usiamo quindi il vettore \mathbf{u} per denotare l'insieme di valori $\{\mu_j\}_{j=1}^J$ e il vettore \mathbf{y} per denotare l'insieme di misure $\{y_i\}_{i=1}^I$. Perciò, data un'immagine \mathbf{u} , il numero atteso di fotoni misurati sarà

$$\hat{y}_i = b_i \exp\left(-\sum_{j=1}^J l_{ij} \mu_j\right), \quad (2.33)$$

dove b_i è il numero di fotoni che sarebbe stato misurato in assenza di un oggetto tra la sorgente e il detector e l_{ij} è l'effettiva lunghezza di intersezione tra il raggio i-esimo e il pixel j-esimo. Si può dunque determinare \mathbf{u} risolvendo la precedente equazione.

Sfortunatamente, nella realtà, le misure y_i differiscono dai loro valori attesi \hat{y}_i a causa di fluttuazioni statistiche. Nella IR si cerca di ridurre il più possibile la discrepanza tra y_i e \hat{y}_i , utilizzando modelli statistici che permettano di esprimere y_i come una funzione di \hat{y}_i .

Il problema della ricostruzione viene quindi affrontato in due step. Per prima cosa si sceglie una funzione statistica, come ad esempio il metodo dei minimi quadrati o della massima verosimiglianza, poi si procede ad ottimizzare la funzione scelta.

2.2.1 Massima verosimiglianza

L'idea di base dell'approccio di ricostruzione, noto come *maximum a posteriori* (MAP) *approach*, è la seguente: dato un set di misure \mathbf{y} , trovare la distribuzione dei coefficienti di attenuazione lineare \mathbf{u} che massimizza la probabilità $P(\mathbf{u}|\mathbf{y})$, con

$$P(\mathbf{u}|\mathbf{y}) = \frac{P(\mathbf{y}|\mathbf{u})P(\mathbf{u})}{P(\mathbf{y})}. \quad (2.34)$$

Il termine $P(\mathbf{y})$ non dipende da \mathbf{u} e può quindi essere omissis. Il termine $P(\mathbf{u})$ contiene informazioni *a priori* sull'immagine.

Se non sono note informazioni *a priori*, quindi, il problema si riduce ad ottimizzare $P(\mathbf{y}|\mathbf{u})$.

Poiché le fluttuazioni statistiche sulle misure y_i sono tra loro indipendenti è possibile fattorizzare P

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^I P(y_i|\mathbf{u}). \quad (2.35)$$

Invece di ottimizzare l'espressione precedente, però, conviene ottimizzare il suo logaritmo, cioè

$$\ln P(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^I \ln P(y_i|\mathbf{u}). \quad (2.36)$$

Si assume ora che la maggiore fonte di incertezza derivi dalla natura quantistica dei fotoni, e che quindi i loro conteggi siano distribuiti secondo una distribuzione di Poisson.

Una distribuzione di Poisson y con media \hat{y} si presenta nella seguente forma

$$P(y|\hat{y}) = \frac{\hat{y}^y e^{-\hat{y}}}{y!}. \quad (2.37)$$

Poiché la probabilità di misurare y_i dipende solo dal suo dal suo valore atteso \hat{y} basato sull'immagine \mathbf{u} , abbiamo

$$P(y_i|\mathbf{u}) = P(y_i|\hat{y}_i). \quad (2.38)$$

Mettendo insieme le precedenti tre equazioni otteniamo la funzione:

$$L = \sum_{i=1}^I (y_i \ln \hat{y}_i - \hat{y}_i), \quad (2.39)$$

che, tramite l'equazione (2.33), può essere scritta in questo modo:

$$L = \sum_{i=1}^I \left[y_i \ln \left(b_i \exp \left(- \sum_{j=1}^J l_{ij} \mu_j \right) \right) - b_i \exp \left(- \sum_{j=1}^J l_{ij} \mu_j \right) \right]. \quad (2.40)$$

L'obiettivo è quindi trovare la distribuzione \mathbf{u} che massimizzi L .

Cominciamo definendo $h_i(p)$ come

$$h_i(p) = y_i \ln(b_i e^{-p}) - b_i e^{-p} \quad (2.41)$$

cosicché la (2.40) può essere scritta come segue

$$L = \sum_{i=1}^I h_i \left(\sum_{j=1}^J l_{ij} u_j \right). \quad (2.42)$$

A questo punto è di fondamentale importanza notare che vale la relazione

$$\sum_{j=1}^J l_{ij} u_j = \sum_{j=1}^J \frac{l_{ij}}{\sum_{h=1}^J l_{ih}} \left[\left(\sum_{h=1}^J l_{ih} \right) (\mu_j - \mu_j^n) + \sum_{h=1}^J l_{ih} u_h^n \right]. \quad (2.43)$$

La disuguaglianza di Jensen stabilisce che, per una funzione $\phi(x)$ convessa in una regione R , e un insieme di valori $\{x_i | x_i \in R\}$ vale

$$E\{\phi(x_i)\} \leq \phi(E\{x_i\}), \quad (2.44)$$

dove $E\{x\}$ indica il valore atteso della rispettiva variabile. Perciò, sostituendo la (2.43) nella (2.42) e applicando la disuguaglianza di Jensen (h_i è convessa), otteniamo

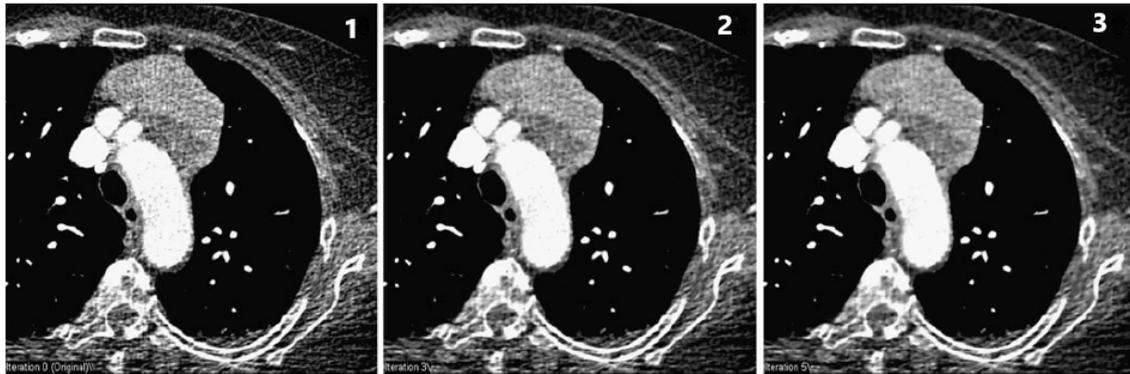
$$L(\mathbf{u}) \geq Q(\mathbf{u}; \mathbf{u}^n) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{l_{ij}}{\sum_{h=1}^J l_{ih}} h_i \left(\left(\sum_{h=1}^J l_{ih} \right) (\mu_j - \mu_j^n) + \sum_{h=1}^J l_{ih} \mu_h^n \right). \quad (2.45)$$

A questo punto è possibile massimizzare la funzione $Q(\mathbf{u}; \mathbf{u}^n)$ per massimizzare $L(\mathbf{u})$.

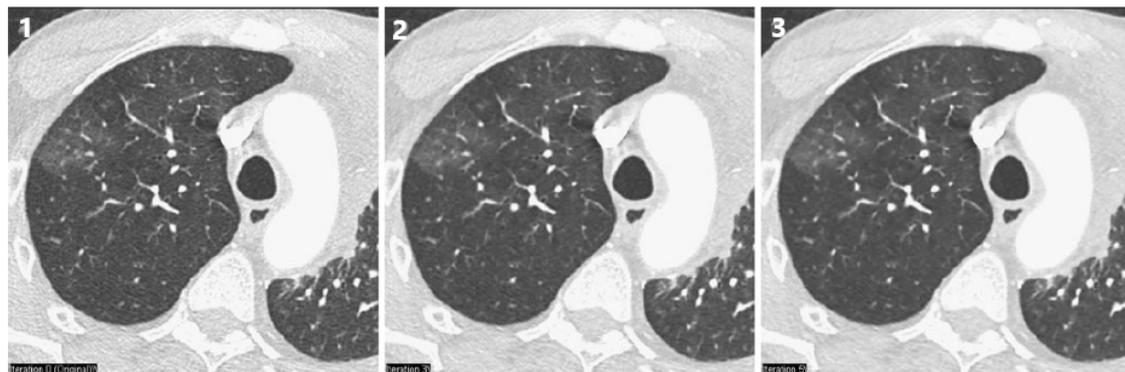
Tale problema può essere risolto numericamente usando la seguente formula

$$\mu_j^{n+1} = \mu_j^n + \frac{\left. \frac{\partial Q(\mathbf{u}; \mathbf{u}^n)}{\partial \mu_j} \right|_{\mathbf{u}^n}}{\left. \frac{\partial^2 Q(\mathbf{u}; \mathbf{u}^n)}{\partial \mu_j^2} \right|_{\mathbf{u}^n}} \quad (2.46)$$

dove \mathbf{u}^n rappresenta la ricostruzione corrente.



(a)



(b)

Figura 2.9: In (a) e (b) vediamo due esempi di riduzione del rumore attraverso la ricostruzione iterativa. (1) Immagine ricostruita tramite la FBP. (2) Immagine ricostruita tramite IR, con 3 iterazioni. (3) Immagine ricostruita tramite IR, con 5 iterazioni [7].

Per concludere, quindi, un algoritmo iterativo è una procedura che, a partire da una stima iniziale \mathbf{u}^0 di \mathbf{u} , genera una sequenza $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^j, \dots$, spesso denotata

come $\{\mathbf{u}^n\}$. Idealmente, $\{\mathbf{u}^n\}$ dovrebbe approssimare rapidamente il valore $\hat{\mathbf{u}}$, che massimizza la funzione L . In altre parole, anche se non è possibile risolvere analiticamente la (2.33), è possibile trovare un $\hat{\mathbf{u}}$ che approssima molto bene il valore vero \mathbf{u} . La IR presenta diversi vantaggi rispetto alla FBP vista in precedenza, come ad esempio una migliore riduzione degli artefatti metallici e un minor rumore di fondo nelle immagini (figura 2.9). Il vantaggio della ricostruzione iterativa, inoltre, è particolarmente evidente quando si utilizzano basse dosi di radiazioni (*low-dose CT*), come mostrato in figura 2.10.



(a)

(b)

Figura 2.10: *super-low-dose CT*. (a) Ricostruzione tramite FBP. (b) Ricostruzione tramite IR [1].

Nonostante quanto detto, comunque, la FBP rimane il metodo più utilizzato nei sistemi TC attuali. Il motivo risiede nella differenza di carico computazionale. In confronto con la FBP, infatti, i tempi di computazione per una ricostruzione iterativa risultano essere tra le dieci e le mille volte superiori.

Capitolo 3

Beam Hardening

Il Beam Hardening è un fenomeno che si verifica quando un fascio policromatico di raggi X attraversa un certo materiale. Nel capitolo 1, infatti, si è visto come il coefficiente di attenuazione lineare μ sia fortemente dipendente dall'energia della radiazione incidente (Figura 1.3); esso decresce, in modo molto rapido, al crescere dell'energia.

L'immediata conseguenza del fenomeno appena descritto è che la componente meno energetica del fascio viene attenuata in misura molto maggiore; con un conseguente aumento dell'energia media del fascio man mano che questo penetra nel materiale.

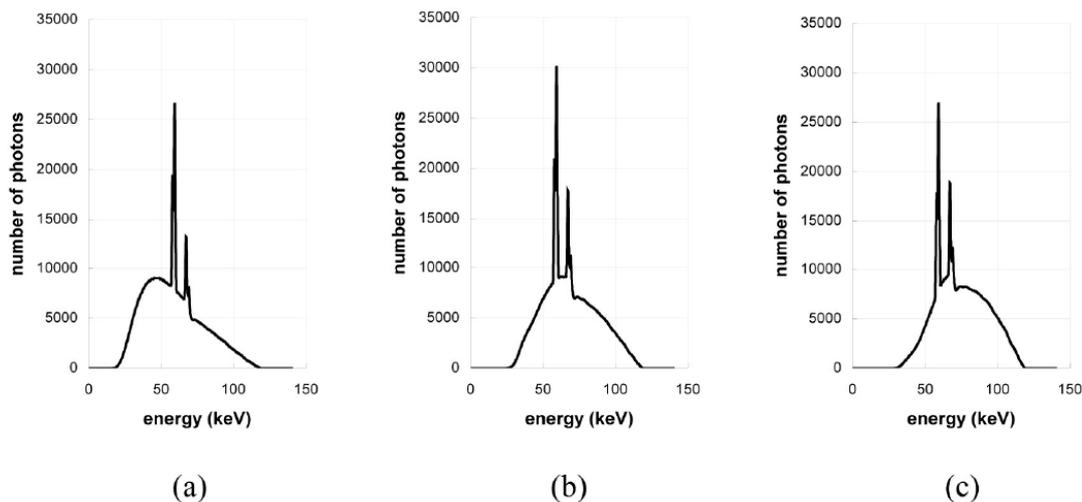


Figura 3.1: Effetto del Beam Hardening man mano che il fascio attraversa l'oggetto. (a) Spettro originario, (b) dopo 15 centimetri di acqua, (c) dopo 30 centimetri di acqua [1].

L'intensità totale della radiazione incidente sarà data da

$$I = \int I(E)dE \quad (3.1)$$

dove $I(E)$ rappresenta l'intensità della radiazione per unità di intervallo energetico. La legge di Beer-Lambert si applica ora per ogni intervallo energetico, cioè

$$I(E) = I_0(E)e^{-\int \mu(x)dx} \quad (3.2)$$

e l'intensità della radiazione trasmessa si può quindi esprimere mediante la formula

$$I = \int I_0(E) e^{-\int \mu(x) dx} dE. \quad (3.3)$$

Se si scrive

$$I_0(E) = I_0 S(E), \quad (3.4)$$

dove $S(E)$ rappresenta lo spettro della radiazione incidente, che soddisfa le seguenti proprietà

$$S(E) > 0 \quad \forall E \quad , \quad \int S(E) dE = 1, \quad (3.5)$$

si può esprimere l'equazione (2.3) nel modo seguente

$$I = I_0 \int S(E) e^{-\int \mu(x) dx} dE. \quad (3.6)$$

Dall'equazione (1.6) si può ora ottenere la nuova relazione per la proiezione misurata p

$$p = -\ln \frac{I}{I_0} = -\ln \left(\int S(E) e^{-\int \mu(x) dx} dE \right). \quad (3.7)$$

Risulta perciò chiaro che nel caso di un fascio incidente non monocromatico, la relazione tra p e la lunghezza del materiale attraversato non è più lineare.

Come si è visto, l'effetto del Beam Hardening è proporzionale allo spessore del materiale attraversato dal fascio. Una immediata conseguenza di ciò risiede nel fatto che la radiazione passante per il centro del bersaglio subisce un *indurimento* (hardening) maggiore rispetto a quella passante per i bordi. In termini pratici questo significa che l'immagine finale risulterà più chiara ai bordi e più scura al centro. Tale artefatto viene detto *cupping* ed è mostrato in Figura 2.2.

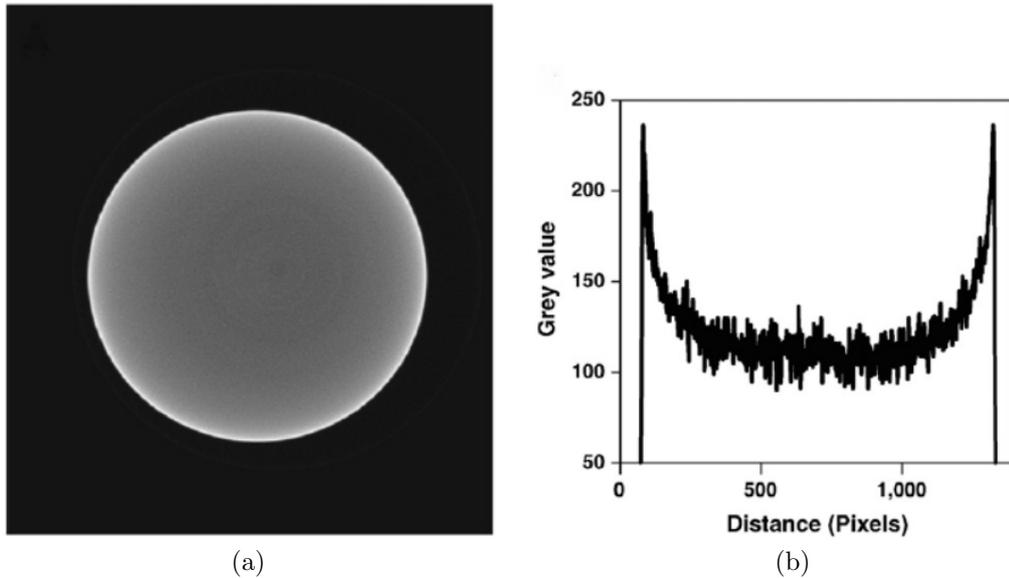


Figura 3.2: Tomografia di un cilindro di rame. (a) Il cilindro risulta più chiaro ai bordi e più scuro al centro. (b) Livello di grigio in funzione della distanza; per un fascio monocromatico la funzione dovrebbe essere una retta parallela all'asse x.

Una prima correzione si può ottenere interponendo una lastra di metallo, ad esempio alluminio, tra il fascio e il bersaglio; in questo modo la componente meno energetica del fascio viene eliminata prima che questo raggiunga il bersaglio. Il suddetto processo, tuttavia, non risolve del tutto il problema, perciò occorre una correzione effettuata via software.

3.1 Correzione per un materiale omogeneo

Attualmente, nelle ricostruzioni in TC si assume che

$$p = -\ln \frac{I}{I_0} \simeq \int_r \int_E S(E)\mu(x, E) dE dx \quad (3.8)$$

e una tecnica di ricostruzione monocromatica è applicata direttamente a p ^[3]. Gli algoritmi di correzione tentano di eliminare gli artefatti da beam hardening riducendo l'errore di approssimazione nell'equazione precedente.

Si può procedere aggiungendo un fattore di correzione $\Delta(r)$ ad ogni proiezione misurata p , cosicché l'equazione (3.8) assume la forma seguente

$$p + \Delta(r) = \int_r \int_E S(E)\mu(x, E) dE dx. \quad (3.9)$$

Poiché il fattore di correzione $\Delta(r)$ è funzione del coefficiente di attenuazione lineare $\mu(x, E)$, può essere calcolato solamente conoscendo a priori il valore di $\mu(x, E)$. La cosiddetta *correzione dell'acqua* assume quindi che il materiale analizzato abbia proprietà di attenuazione del tutto identiche a quelle dell'acqua, di cui è noto il coefficiente di attenuazione lineare. Come si è visto nel capitolo 1, tale approssimazione può risultare sensata se si sta analizzando una parte del corpo costituita per lo più da tessuto molle, tuttavia, perde di validità se la suddetta condizione non è soddisfatta.

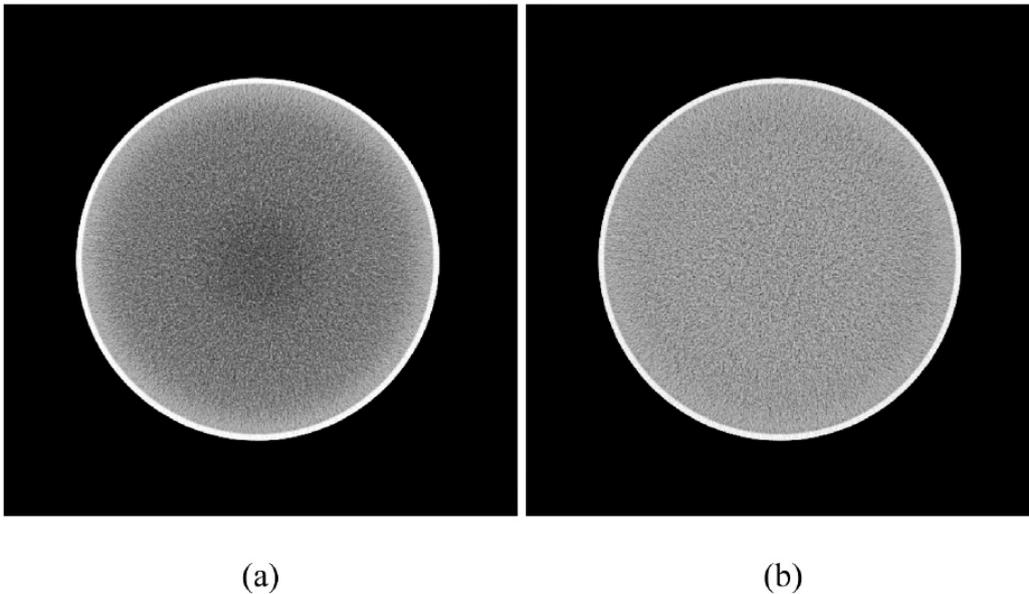


Figura 3.3: Ricostruzione di un cilindro pieno d'acqua (a) senza correzioni e (b) con la correzione dell'acqua.

Facendo riferimento alla Figura 1.3 è possibile vedere come il coefficiente di attenuazione lineare dell'osso sia sensibilmente diverso da quello dell'acqua; perciò l'analisi di un'area in cui siano presenti molte strutture ossee, come il cranio, richiede un approccio di correzione differente.

Vi sono essenzialmente due tipi di artefatti grafici in questo caso. Il primo prevede la formazione di bande scure tra oggetti densi (Figura 3.4 (a)). Ciò è dovuto alla discrepanza tra i raggi che attraversano uno solo dei suddetti oggetti e i raggi che ne attraversano più di uno. Il secondo tipo di artefatto riguarda il punto di contatto tra l'osso e il tessuto molle, che appare sfocato (Figura 3.4 (b)).

3.2 Correzione per un materiale non omogeneo

Il problema della ricostruzione in questo caso risulta più complesso. Una gran quantità di testi scientifici è stata scritta in merito all'argomento e in particolare ci soffermeremo qui sui lavori di Gabor T. Herman^[4] e Jiang Hsieh^{[1],[13]}. Consideriamo le proiezioni misurate per una radiazione monocromatica e per una policromatica, rispettivamente denotate con m e p

$$m = \int_L \mu(x) dx \quad (3.10)$$

$$p = -\ln\left(\int S(E) e^{-\int_L \mu(x) dx} dE\right) \quad (3.11)$$

Si è già detto che la procedura di ricostruzione si basa sull'assunto che la radiazione incidente sia monocromatica; in altre parole, essa fa uso della quantità m per calcolare i coefficienti di attenuazione lineare. Ciò che è possibile misurare, tuttavia, è p , perciò il problema della ricostruzione può essere posto nel modo seguente: data p , è possibile approssimare m abbastanza bene da calcolare correttamente i coefficienti μ ? La risposta è sì.

Si noti anzitutto che è possibile esprimere p in funzione di m

$$p = -\ln\left(\int S(E) e^{-m} dE\right). \quad (3.12)$$

L'equazione (3.12) ha una proprietà molto importante: essa è una funzione monotona crescente di m , vale a dire che, dato un valore di p , esisterà sempre uno e un solo valore di m che rende uguali i due lati dell'equazione (3.12). Le precedenti considerazioni suggeriscono un approccio interessante al problema. Si potrebbe considerare una funzione di p , $f(p)$, che, usata come stima per m , restituisca dei valori ragionevolmente buoni per i coefficienti di attenuazione lineare.

Candidate naturali allo scopo sono le funzioni polinomiali, ovvero funzioni del tipo

$$f(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i p^i \quad (3.13)$$

dove n è l'ordine della polinomiale e i coefficienti a_i , che dipendono dal materiale attraversato, devono essere determinati in modo che $f(p)$ restituisca una stima ragionevole di m .

Un modo per trovare i coefficienti a_i è utilizzare il metodo dei minimi quadrati, ovvero minimizzare la quantità

$$S = \sum_j \left(m_j - \sum_i a_i p_j^i \right)^2. \quad (3.14)$$

Perciò, per un oggetto composto da un solo materiale l'equazione si scrive

$$f(p) = \sum_{i=1}^n a_i \ln^i \left(\frac{I_0}{I} \right). \quad (3.15)$$

Consideriamo ora un oggetto composto da due diversi materiali, come ad esempio acqua e osso. Possiamo considerare i due materiali in sequenza, in modo che la radiazione uscente dal primo materiale sia la radiazione entrante nel secondo. Siano quindi I_0 l'intensità della radiazione incidente, I_w l'intensità della radiazione uscente dall'acqua e I l'intensità della radiazione misurata. La funzione $f(p)$, per un oggetto composto da due materiali diversi può quindi essere scritta come segue

$$f(p) \simeq \sum_{i=1}^n a_i \ln^i \left(\frac{I_0}{I_w} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \ln^i \left(\frac{I_w}{I} \right) \quad (3.16)$$

dove stavolta i coefficienti b_i dipendono dalle caratteristiche di attenuazione del secondo materiale.

Ora, se trattiamo l'intero oggetto come un singolo materiale, l'errore nella proiezione $\Delta f(p)$ non è altro che la differenza tra l'equazione (3.16) e l'equazione (3.15), vale a dire

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &\simeq \sum_{i=1}^n a_i \ln^i \left(\frac{I_0}{I} \right) - \left[\sum_{i=1}^n a_i \ln^i \left(\frac{I_0}{I_w} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \ln^i \left(\frac{I_w}{I} \right) \right] \simeq \\ &\simeq \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \ln^i \left(\frac{I_w}{I} \right) = (a_1 - b_1) \gamma + (a_2 - b_2) \gamma^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

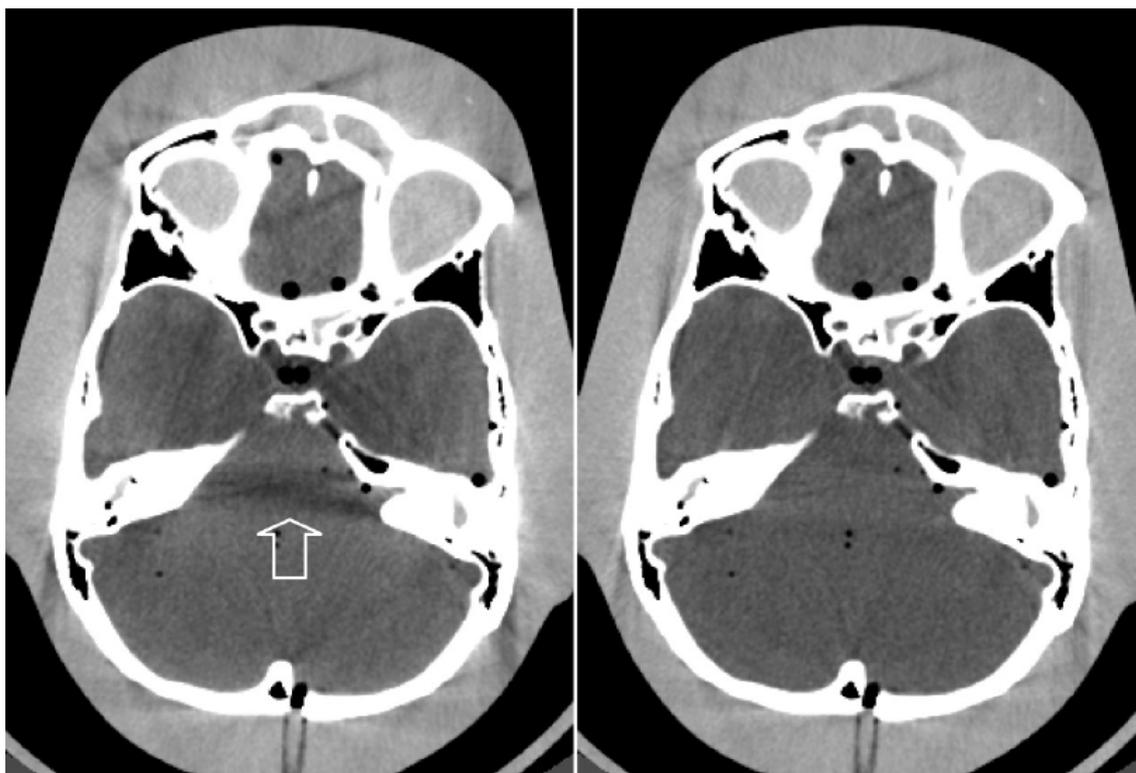
dove

$$\gamma = \ln \left(\frac{I_w}{I} \right). \quad (3.18)$$

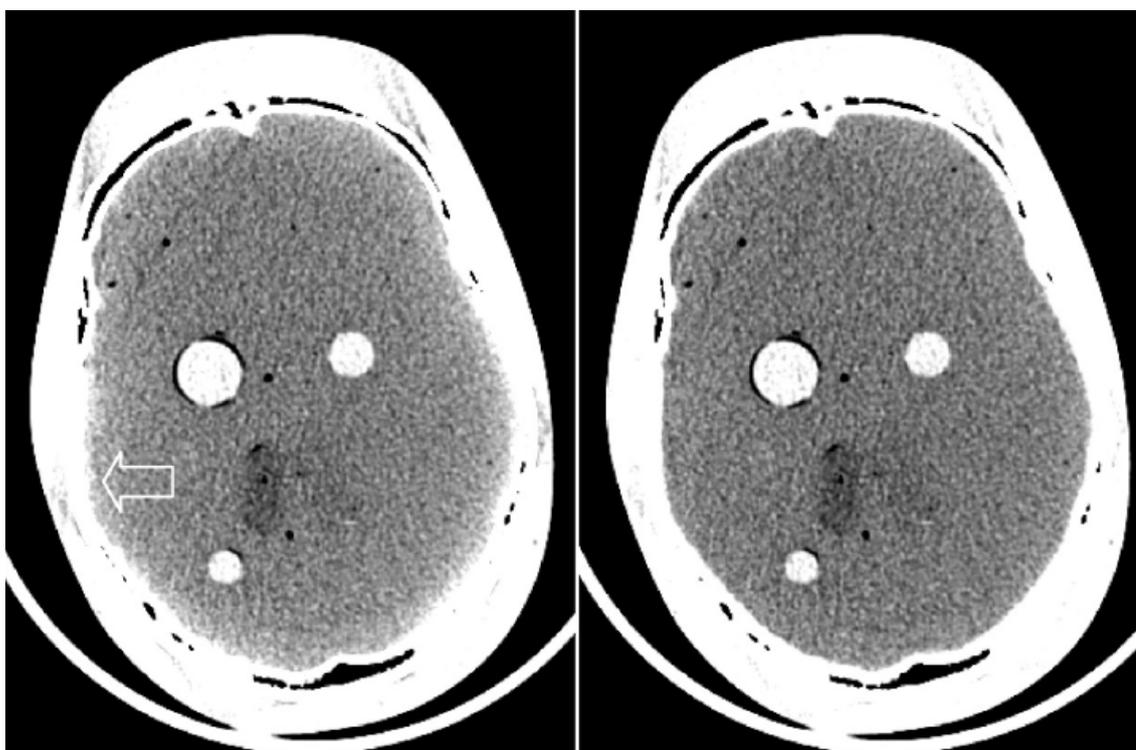
Nella maggior parte dei processi di calibrazione per una TC, il materiale di bassa densità è considerato come materiale di riferimento. L'errore nella proiezione, quindi, è per lo più parte dovuto ai materiali di alta densità.

Una stima di γ può essere ottenuta calcolando gli integrali di linea solo attraverso gli oggetti di alta densità. Per farlo è dunque necessario poter separare i materiali di alta densità da quelli di bassa densità.

Si può raggiungere lo scopo in modo abbastanza semplice impostando un valore di soglia per il numero CT. Ad esempio, per separare il tessuto osseo dal tessuto molle si può impostare una soglia a 200 HU (unità Hounsfield), poiché il numero CT per il tessuto molle è inferiore a 150 HU, mentre il numero CT per il tessuto osseo è superiore a 250 HU.



(a)



(b)

Figura 3.4: Immagini di due fantocci atti a replicare un cranio umano. A sinistra le ricostruzioni effettuate considerando solamente l'acqua nella correzione. A destra le ricostruzioni effettuate tenendo in considerazione anche la presenza di tessuto osseo. Le frecce nelle immagini di sinistra indicano gli artefatti grafici.[1]

3.3 Dual Energy CT

Gli artefatti indotti dal beam hardening possono anche essere corretti con un altro approccio, detto *Dual energy CT* (DECT), che consiste nell'effettuare una scansione con due differenti energie.

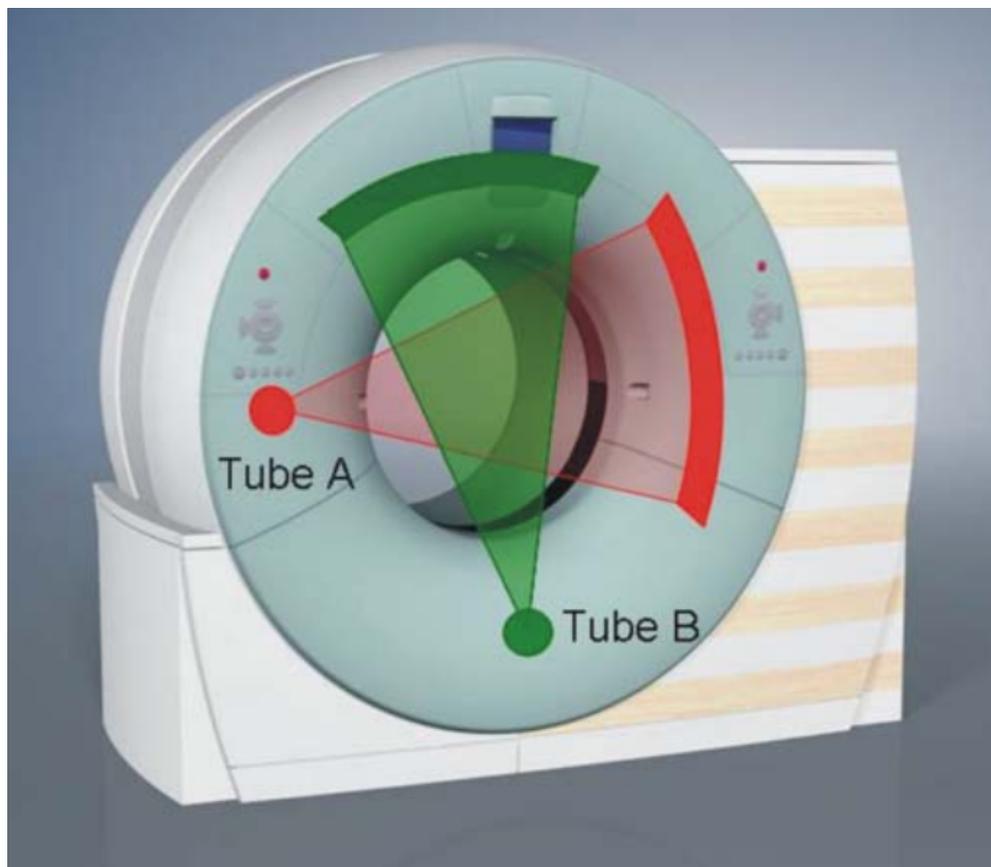


Figura 3.5: Rappresentazione schematica di un sistema DECT, con due coppie di tubi radiogeni e detector. Quando la macchina opera in modalità *dual energy* i due tubi emettono raggi X di differente energia, che vengono simultaneamente acquisiti dai corrispondenti detector. [12]

Il procedimento si basa sul fatto che negli intervalli energetici usati tipicamente in diagnostica vi sono essenzialmente due modi in cui i raggi X interagiscono con la materia: l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton.

Si è visto come il coefficiente di attenuazione lineare sia fortemente dipendente dall'energia dei fotoni incidenti, perciò, è possibile differenziare i materiali che compongono un oggetto in base al loro comportamento nel caso in cui siano investiti da fotoni a bassa o ad alta energia. Ad esempio, se l'energia dei fotoni incidenti è 75 keV il numero CT del tessuto osseo è praticamente identico a quello di una tipica miscela di acqua e iodio usata in campo diagnostico. Tuttavia, per una energia di 55 keV, i due valori sono sensibilmente differenti ed è quindi possibile distinguere un materiale dall'altro.

In altri termini, possiamo considerare il coefficiente di attenuazione di un determinato materiale $\mu(x, E)$ come la somma di due contributi; uno dovuto all'effetto fotoelettrico e uno dovuto all'effetto Compton, che sappiamo entrambi essere

dipendenti dall'energia E del fotone incidente. Possiamo scrivere

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)(E) = \alpha_p f_p(E) + \alpha_c f_c(E) \quad (3.19)$$

dove $\frac{\mu}{\rho}$ è il coefficiente di attenuazione lineare diviso per la densità del materiale, $f_p(E)$ e $f_c(E)$ rappresentano le funzioni di attenuazione dovute, rispettivamente, all'effetto fotoelettrico e all'effetto Compton; α_p e α_c , invece, rappresentano il contributo dell'effetto fotoelettrico e dell'effetto Compton, rispettivamente, e dipendono dal tipo di materiale.

Il coefficiente α_c è semplicemente

$$\alpha_c = \frac{Z}{A} \times N_{Avogadro} \quad (3.20)$$

dove Z e A rappresentano il numero atomico e la massa atomica, rispettivamente. f_c , invece, è l'equazione di Klein-Nishina

$$f_c(\gamma) = C_0 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \left[\frac{2(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \frac{1}{\gamma} \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{1}{2\gamma} \ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right\} \quad (3.21)$$

con

$$\gamma = \frac{E}{510.975} \text{ KeV} \quad , \quad C_0 = 2\pi \left[\frac{\mu_0 e^2}{4\pi m} \right]^2 \quad (3.22)$$

Per il contributo dell'effetto fotoelettrico si può usare la seguente approssimazione

$$\alpha_p f_p = \left[\frac{Z}{A} \times N_{Avogadro} \right] C_p \frac{Z^{3.8}}{E^{3.2}} \quad (3.23)$$

con $C_p = 9.8 \times 10^{-24}$.

Ogni materiale è caratterizzato da specifici valori di α_p e α_c . Perciò, se realizziamo due misure a due diverse energie, che denotiamo con E_L ed E_H , otteniamo un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)(E_L) = \alpha_p f_p(E_L) + \alpha_c f_c(E_L) \\ \left(\frac{\mu}{\rho}\right)(E_H) = \alpha_p f_p(E_H) + \alpha_c f_c(E_H) \end{cases} \quad , \quad (3.24)$$

che può essere risolto in modo univoco per identificare un materiale sconosciuto.

Da un punto di vista pratico è più conveniente utilizzare dei materiali noti, piuttosto che due effetti fisici, per produrre l'immagine finale. Ad esempio si potrebbero produrre immagini con densità pari a quella dell'acqua, o del tessuto osseo.

Perciò, considerati due materiali A e B si può scrivere l'equazione (3.24) nel modo seguente

$$\begin{cases} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_A(E) = \alpha_{A,p} f_p(E) + \alpha_{A,c} f_c(E) \\ \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_B(E) = \alpha_{B,p} f_p(E) + \alpha_{B,c} f_c(E) \end{cases} \quad (3.25)$$

dove stavolta $\alpha_{A,p}$, $\alpha_{B,p}$, $\alpha_{A,c}$, $\alpha_{B,c}$ rappresentano i contributi degli effetti fotoelettrico e Compton per i materiali A e B rispettivamente.

Le precedenti equazioni ci permettono ora di esprimere le $f(E)$ in funzione dei coefficienti di attenuazione lineare

$$f_p(E) = \frac{\alpha_{B,c} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_A(E) - \alpha_{A,c} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_B(E)}{\alpha_{A,p}\alpha_{B,c} - \alpha_{B,p}\alpha_{A,c}} \quad (3.26)$$

e

$$f_c(E) = \frac{\alpha_{B,p} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_A(E) - \alpha_{A,p} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_B(E)}{\alpha_{A,c}\alpha_{B,p} - \alpha_{B,c}\alpha_{A,p}}. \quad (3.27)$$

Ora, sostituendo le equazioni (3.26) e (3.27) nella (3.19), possiamo rappresentare il coefficiente di attenuazione lineare di qualsiasi materiale in termini dei coefficienti dei materiali A e B

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)(E) &= \frac{\alpha_p\alpha_{B,c} - \alpha_c\alpha_{B,p}}{\alpha_{A,p}\alpha_{B,c} - \alpha_{B,p}\alpha_{A,c}} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_A(E) + \frac{\alpha_c\alpha_{A,p} - \alpha_p\alpha_{A,c}}{\alpha_{A,p}\alpha_{B,c} - \alpha_{B,p}\alpha_{A,c}} \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_B(E) = \\ &= \beta_A \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_A(E) + \beta_B \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_B(E). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ad esempio si trova che, nell'intervallo energetico compreso tra i 40 keV e i 150 keV, il coefficiente di attenuazione lineare del tessuto osseo può essere espresso come segue

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{osso} \simeq 0.88 \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{acqua} + 0.018 \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{iodio}. \quad (3.29)$$

Material	a1	a2	Fractional rms error (%)
Aluminum	0.000	1.000	0.000
Lucite	1.000	0.000	0.000
Muscle	0.9496	0.0803	0.039
Bone	0.2369	0.8325	0.259
Water	0.9679	0.0708	0.053
Fat	1.0673	-0.0367	0.016
Copper	-11.60	13.90	1.140
Salt (NaCl)	-0.7154	1.7831	0.277
Iodine	-58.664	68.074	2.737

Figura 3.6: Accuratezza della decomposizione di un materiale in due materiali di base, nell'intervallo energetico compreso tra 40 e 110 keV. [5]

In figura 3.6 è illustrata l'accuratezza della decomposizione in due materiali di base ottenuta nell'equazione (3.28). In questo caso si sono scelti come materiali di base l'alluminio e il plexiglas (lucite); i coefficienti elencati sono stati ottenuti facendo un fit con il metodo dei minimi quadrati dei coefficienti di attenuazione misurati.

Ovviamente occorre scegliere materiali con un numero atomico abbastanza diverso da assicurare che abbiano differenti caratteristiche di attenuazione.

Fino ad ora non abbiamo preso in considerazione il fatto che il coefficiente di attenuazione lineare sia in generale dipendente anche dalla coordinata spaziale, a meno che non si abbia a che fare con un materiale omogeneo. Possiamo quindi esprimere la (3.28) nel modo seguente

$$\int \mu(\mathbf{r}, E) ds = \eta_A \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_A (E) + \eta_B \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_B (E) \quad (3.30)$$

dove

$$\eta_i = \int \rho(\mathbf{r}) \beta_i(\mathbf{r}) ds \quad , \quad i = A, B. \quad (3.31)$$

Essenzialmente, quindi, tramite l'equazione (3.28) possiamo esprimere l'integrale di linea di μ misurato come combinazione lineare dei due integrali di linea dei materiali di riferimento.

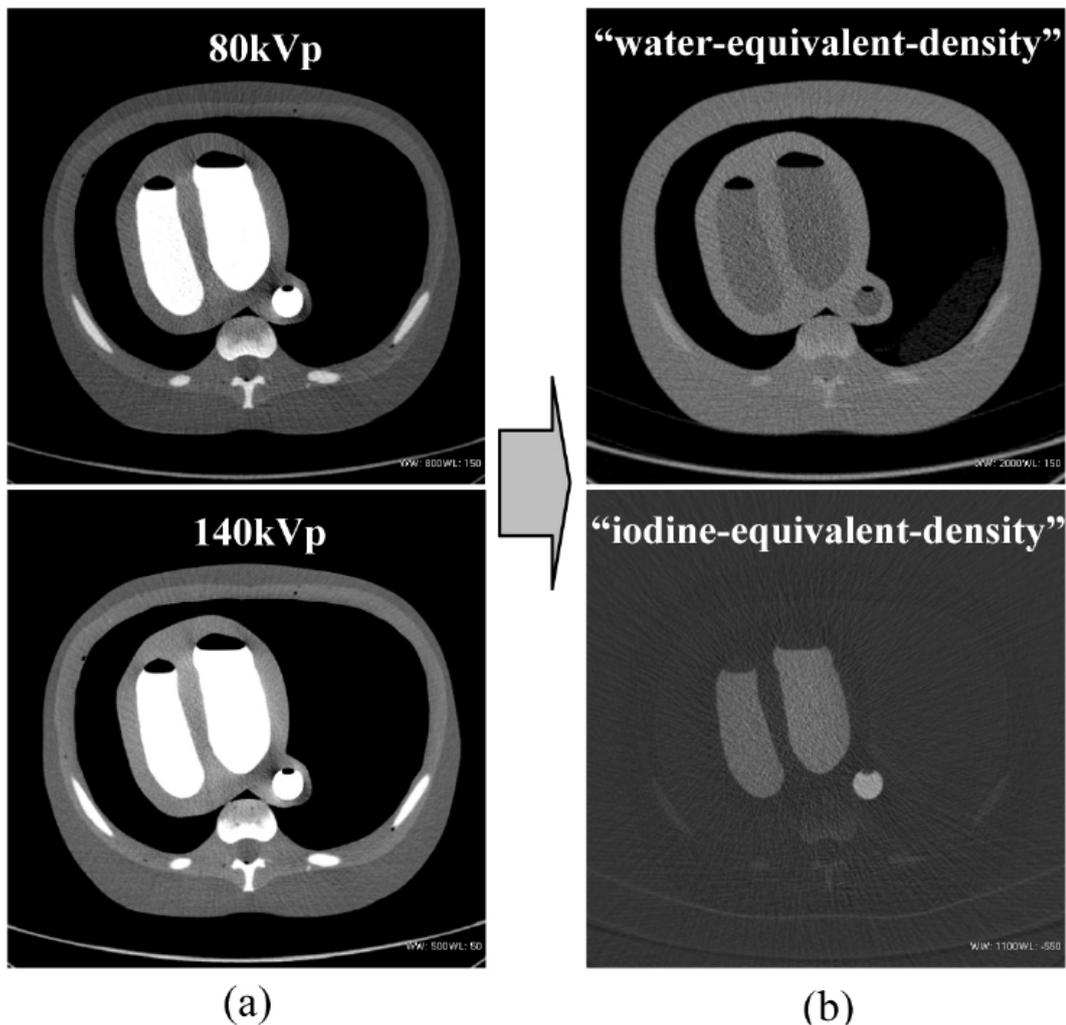


Figura 3.7: Fantoccio di un busto umano in cui è stato inserito iodio come mezzo di contrasto. (a) Immagini CT convenzionali in HU; (b) immagini con densità equivalente a quella dei materiali di base, in questo caso acqua e iodio, espresse in g/cm^3 . [1]

Per concludere, vediamo come è possibile utilizzare le tecniche appena viste per simulare un fascio incidente mono-energetico di raggi X.

Se sostituiamo nell'equazione (3.30) la variabile E con una energia E_0 ben precisa otteniamo

$$\int \mu(\mathbf{r}, E_0) ds = \eta_A \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_A (E_0) + \eta_B \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_B (E_0) \quad (3.32)$$

La parte sinistra dell'equazione rappresenta ora l'integrale di linea del coefficiente di attenuazione lineare dell'oggetto scansionato per una specifica energia E_0 , ovvero, rappresenta una proiezione mono-energetica.

I coefficienti di attenuazione per i materiali di base sono noti a priori.

Perciò, l'equazione (3.32) indica che, una volta note le quantità di ognuno dei materiali di base in ogni punto dell'immagine, è possibile ricavare un set di proiezioni mono-energetiche, utilizzabili per la ricostruzione dell'immagine.

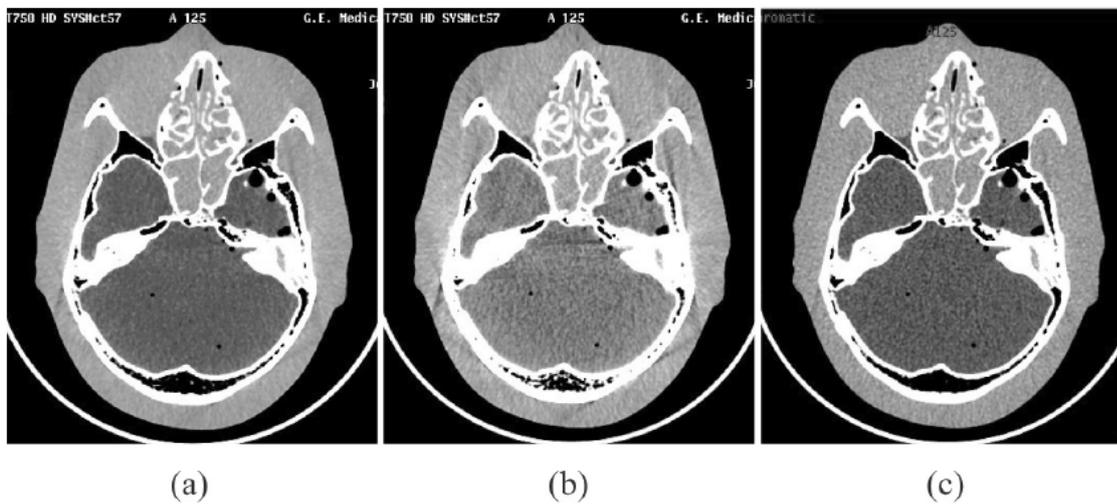


Figura 3.8: Fantoccio di un cranio umano. (a) Immagine per un voltaggio di picco di 140 kV, (b) immagine per un voltaggio di picco di 80 kV, (c) immagine corrispondente ad una radiazione mono-energetica con energia pari a 80 KeV. [1]

Capitolo 4

Artefatti di ricostruzione

Si potrebbe definire un artefatto grafico, in modo del tutto generale, come una qualsiasi discrepanza tra i coefficienti di attenuazione lineari di un oggetto e i loro valori ricostruiti.

La TC è naturalmente più predisposta all'insorgenza di artefatti grafici rispetto alla radiografia convenzionale, poiché le immagini sono ricostruite a partire da un numero di misure indipendenti dell'ordine del milione. Le tecniche di ricostruzione assumono che le misure siano tra loro consistenti, perciò un qualsiasi errore di misura si rifletterà come un errore nell'intera immagine ricostruita. Gran parte del lavoro associato alla generazione di una immagine in TC riguarda l'eliminazione, o quantomeno l'attenuazione degli artefatti grafici.

Gli artefatti che si possono presentare sono di quattro differenti tipi.

Il primo è detto *streaking artifact*, ed è dovuto ad una inconsistenza in una singola misura. In condizioni normali, infatti la FBP mappa ogni punto della proiezione in una linea retta; tuttavia, quando si verifica una inconsistenza nella proiezione, il processo di ricostruzione determina la formazione di linee che possono essere chiare o scure (Figura 4.1 a).

Ci sono poi gli *shading artifact*, che al contrario dei precedenti sono solitamente dovuti ad un gruppo di misure che deviano dai valori veri. Sono più difficili da identificare poiché causano variazioni graduali del numero CT attorno alla zona interessata.

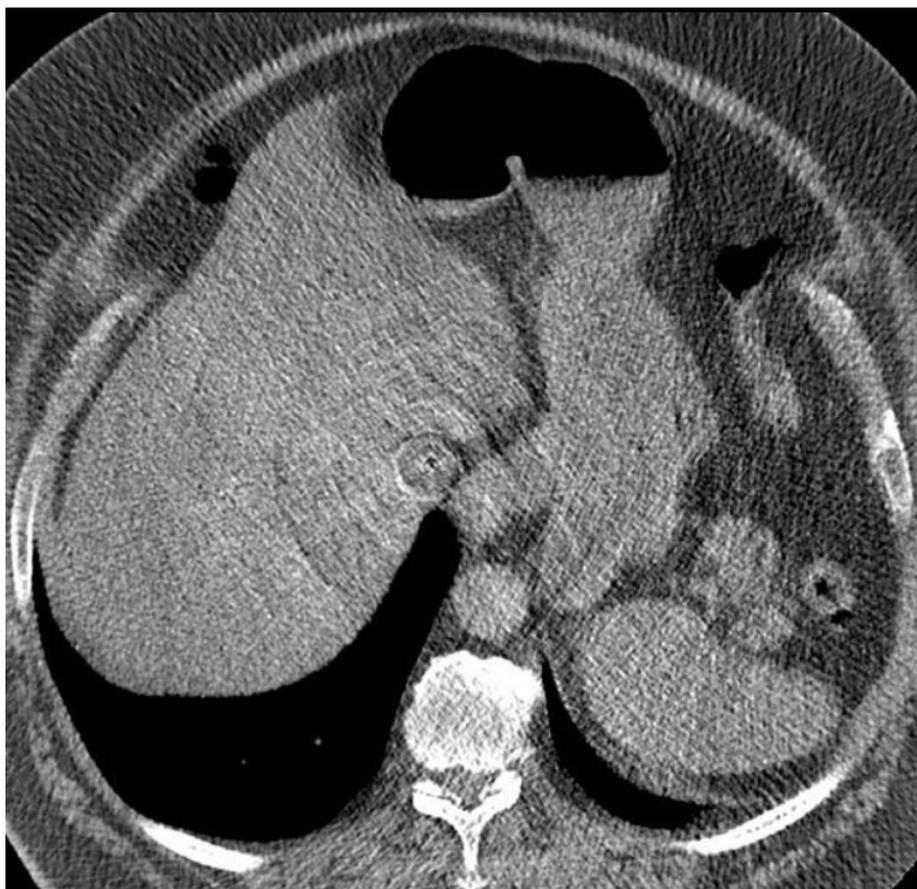
Gli artefatti dovuti ad una errata calibrazione di un singolo detector in un array di rivelatori appaiono come anelli sovrapposti all'immagine ricostruita, e sono perciò chiamati *ring artifact* (Figura 4.1(b)).

Per finire, citiamo gli effetti di distorsione, dovuti al fatto che, nei moderni apparati TC, il paziente viene spostato con velocità costante durante l'acquisizione (*helical CT*).

In base al processo responsabile della creazione dell'artefatto, si possono distinguere ancora quattro categorie: gli artefatti dovuti a fenomeni fisici, gli artefatti dovuti al paziente, artefatti dovuti all'apparato di misura e infine gli artefatti dovuti al processo di ricostruzione, tipici della *helical CT*.



(a)



(b)

Figura 4.1: (a) Esempio di *streaking artifact*, in cui la presenza di una elevata quantità di linee chiare e scure rende impossibile l'analisi dell'immagine [<http://www.edboas.com/science/CT/index.html>]. (b) *Ring artifact*: si possono notare dei cerchi concentrici nella parte centrale dell'immagine [<https://radiopaedia.org/cases/ring-artifact>].

4.1 Artefatti dovuti all'apparato di misura

4.1.1 Aliasing

Il primo passo verso la formazione di una immagine in TC prevede, ovviamente, la raccolta di dati, ovvero un campionamento.

La distribuzione dell'intensità dei raggi X passati attraverso l'oggetto che si sta studiando è sicuramente continua. Le misure, tuttavia, vengono raccolte tramite una serie di detector, che producono dei segnali che rappresentano la proiezione dell'oggetto. In altre parole, la funzione continua originale viene campionata in un insieme discreto di misure.

Dal teorema di Nyquist, sappiamo che per evitare l'aliasing la funzione originale deve essere campionata ad un ritmo che sia almeno il doppio della più alta frequenza spaziale contenuta nel segnale.

Per illustrare come si generano gli errori di aliasing cominciamo assumendo che la trasformata di Fourier $S_\theta(f)$ di una proiezione $P_\theta(t)$ appaia come in figura 4.2 (a). L'ampiezza di banda della suddetta funzione è B , ed è anch'essa mostrata in figura.

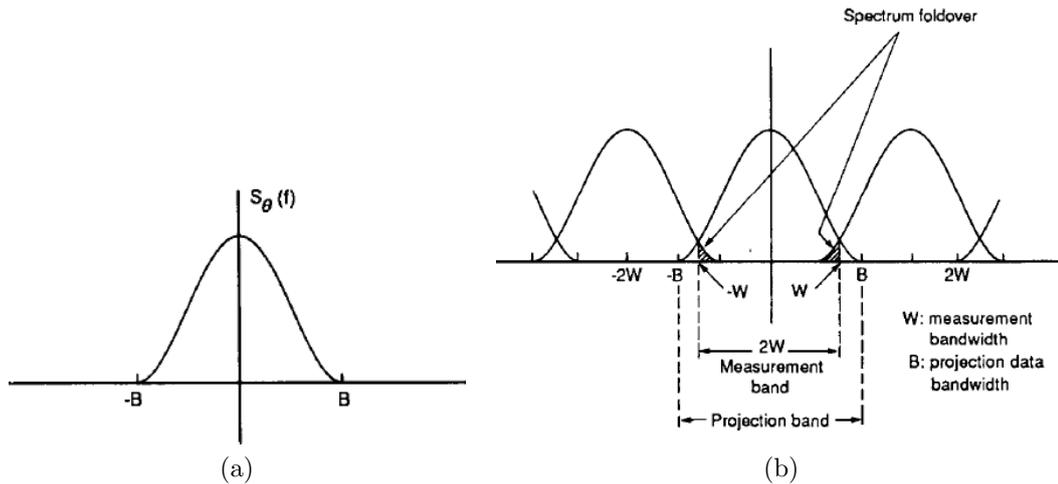


Figura 4.2: Se la proiezione (a) è campionata a frequenze minori di quella di Nyquist ($2B$ in questo caso), si avrà aliasing. Come mostrato in (b), ciò che accade è che gli spettri si sovrappongono [2].

Scegliamo quindi un intervallo di campionamento per le proiezioni, che chiameremo τ . Avremo perciò una ampiezza di banda di misura, W , pari a $\frac{1}{2}\tau$.

Ora, se $W < B$, ciò che accade è mostrato in figura 4.2 (b). In pratica le informazioni all'interno della banda di misura sono contaminate dalla sovrapposizione di più spettri. Tale sovrapposizione spettrale genera l'aliasing.

Per gli scanner di terza generazione (figura 1.5), un approccio per combattere l'aliasing è il cosiddetto *detector quarter-offset*. La tecnica consiste nello spostare il centro dell'array di detector di un quarto della larghezza del singolo detector, rispetto al centro di rotazione. Una volta che l'apparato ruota di 180 gradi, il centro del detector ha un offset pari alla metà della larghezza del singolo detector. In questo modo è possibile usare le visualizzazioni aggiuntive per ottenere informazioni uniche sull'oggetto. All'atto pratico un simile processo raddoppia a tutti gli effetti la frequenza di campionamento delle proiezioni.

Un primo svantaggio è dato dal fatto che i due set di campioni sono ottenuti a

distanza di 180 gradi. Per questo motivo, un qualsiasi movimento del paziente durante l'acquisizione potrebbe compromettere l'efficacia del processo. Inoltre, il doppio campionamento è ottenuto in modo corretto solamente per i raggi centrali. In altre parole, l'efficacia della tecnica è dipendente dalla posizione. Un altro metodo è il cosiddetto *Flying Focal Spot* (FFS), che consiste nel deflettere il punto focale dei raggi X tra due letture consecutive, come mostrato in figura 4.3.

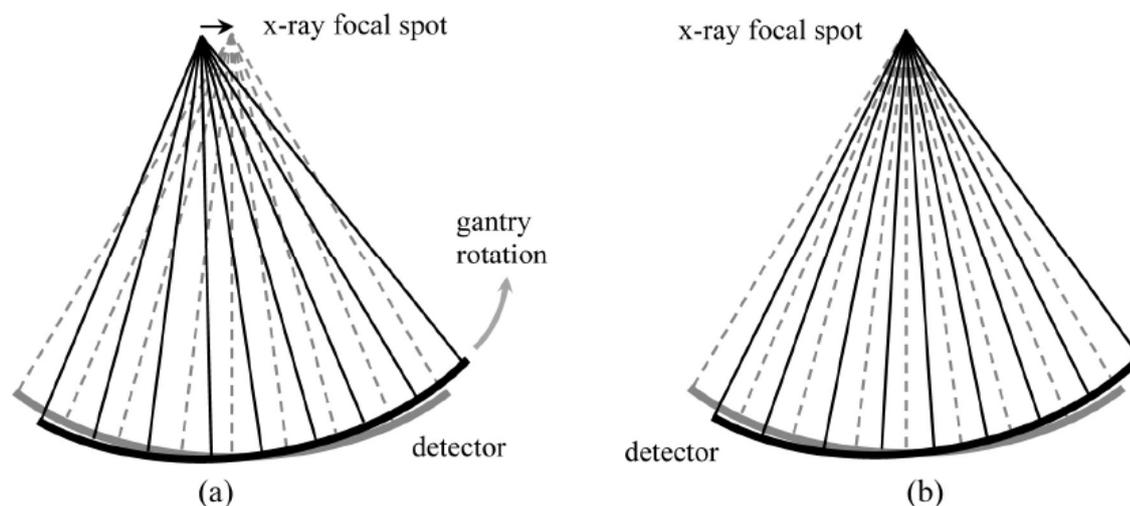


Figura 4.3: Rappresentazione della tecnica FFS. (a) Viene acquisita una prima misura (linee grigie tratteggiate). (b) Dopo la rotazione dell'apparato il punto focale viene spostato in modo da ottenere una doppia misurazione [1].

I due set di misure vengono acquisiti in un brevissimo periodo di tempo, cosicché il movimento del paziente non costituisce più un problema. Le due tecniche appena descritte possono essere combinate in modo da ridurre quasi totalmente gli artefatti da aliasing.

4.1.2 Partial Volume

L'artefatto detto *Partial Volume artifact* si verifica quando un oggetto decentrato rispetto all'asse di rotazione si introduce solo parzialmente all'interno del fascio di raggi X.

Come mostrato in figura 4.4, infatti, quando l'oggetto si trova lontano dalla sorgente, esso entra parzialmente nel campo visivo. D'altra parte, quando l'apparato è ruotato di 180 gradi, l'oggetto si trova molto più vicino alla sorgente e non compare all'interno del fascio di raggi X. Chiaramente un simile fenomeno genera una inconsistenza nelle misure.

Data la natura del processo, è chiaro che la probabilità di incorrere in un artefatto da *partial volume* aumenta all'aumentare dello spessore della slice. Si potrebbe pensare di ottenere una soluzione rapida al problema semplicemente utilizzando slice di ampiezza molto ridotta.

Sfortunatamente un simile approccio porta con sé diversi problemi. Prima di tutto, il rumore delle immagini diminuisce se si utilizzano slice più ampie. In secondo luogo, la scelta dell'ampiezza potrebbe essere obbligata.

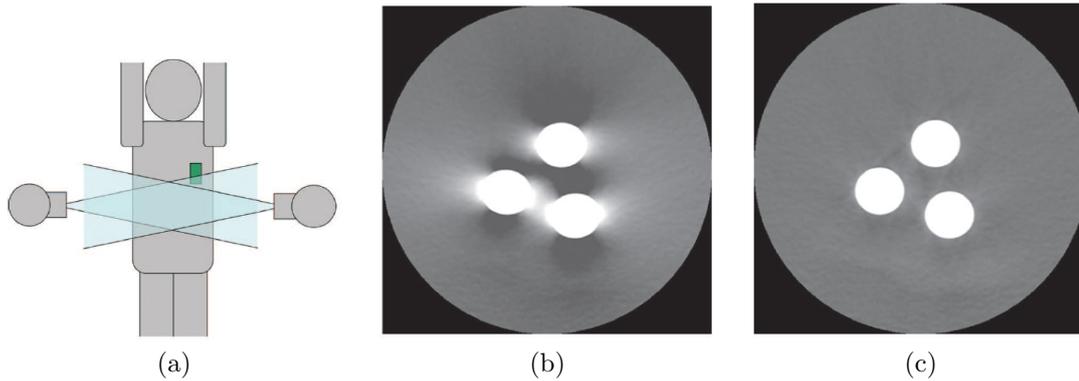


Figura 4.4: In figura (a) è mostrato il meccanismo che provoca la formazione degli artefatti da *partial volume*. Le immagini (b) e (c) mostrano una acquisizione TC in cui all'interno di un materiale omogeneo sono state poste tre barre cilindriche di elevata densità. In (b) le barre sono introdotte solo parzialmente all'interno della sezione, mentre in (c) esse sono totalmente all'interno. [16]

Ad esempio, in diverse situazioni è necessario effettuare la scansione in brevi intervalli di tempo, in modo da evitare movimenti, volontari o meno, del paziente. Ovviamente, in simili situazioni, non è possibile scegliere una ampiezza delle slice troppo ridotta.

I sistemi di acquisizione di ultima generazione, comunque, permettono di acquisire più slice contemporaneamente. Le slice acquisite possono poi essere sommate in modo da ridurre il rumore nell'immagine. Oltre a ciò, si possono usare appositi algoritmi per correggere l'artefatto da *partial volume*^[23].

4.1.3 Scatter

Come abbiamo visto nel primo capitolo, uno dei più importanti meccanismi di interazione dei raggi X con la materia è lo scattering Compton, o scattering incoerente. Il fenomeno prevede che un fotone X incidente collide con un elettrone, trasferendo ad esso parte della sua energia; l'energia residua è portata via da un fotone. Il fotone risultante dal processo ha generalmente una traiettoria diversa rispetto a quella del fotone incidente.

A causa dello scattering Compton, perciò, non tutti i fotoni che arrivano al detector sono fotoni primari. In base al design dell'apparato di acquisizione, una certa porzione del segnale rilevato è generata da fotoni diffusi per scattering incoerente. Tali fotoni fanno sì che il segnale rilevato devii da quello ideale dovuto ai fotoni primari, causando artefatti nelle immagini ricostruite.

Per capire l'impatto che ha lo scattering Compton sull'immagine finale facciamo riferimento alla figura 4.5. Nella suddetta figura, in basso, è mostrato un grafico che rappresenta il numero di fotoni misurati. Il valore minimo si registra in corrispondenza dell'oggetto di alta densità (ovale più scuro in figura). Come è possibile vedere, la distribuzione dell'intensità misurata dei fotoni diffusi è pressoché uniforme, poiché l'angolo con cui questi vengono deflessi è casuale. In altre parole, i fotoni diffusi costituiscono un rumore di fondo.

Quando questo segnale è combinato con quello dei fotoni primari ne risulta un se-

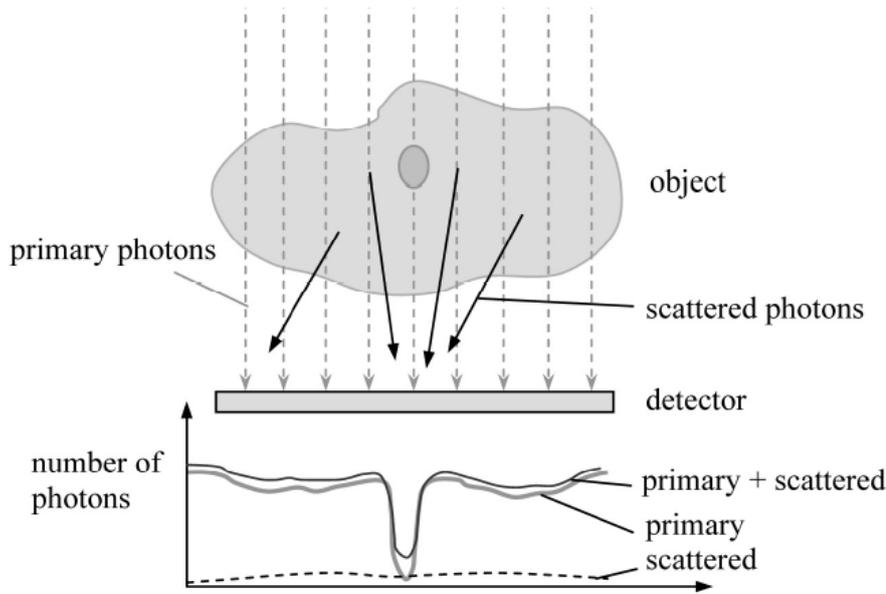


Figura 4.5: Rappresentazione schematica dell'effetto dello scattering Compton [1].

gnale composto con contrasto inferiore rispetto a quello che si avrebbe in assenza di scattering.

L'impatto generale dello scattering Compton è quindi una diminuzione del contrasto e un aumento del rumore di fondo.

Sfortunatamente, una vera e propria soluzione al problema non esiste. In altre parole, non è possibile separare i fotoni primari da quelli diffusi. Si può comunque arginare il problema per via sperimentale.

La procedura prevede di effettuare una scansione preliminare di una sezione dell'oggetto impostando una ampiezza del fascio estremamente ridotta. Il motivo dipende dal fatto che la quantità di fotoni diffusi è direttamente proporzionale al volume dell'oggetto attraversato. Lo scopo della scansione preliminare è quindi ottenere una misura in cui, idealmente, non si verifichi scattering.

Successivamente l'oggetto è nuovamente scansionato con la configurazione desiderata, cioè con una ampiezza del fascio maggiore, lasciando invariati i parametri della scansione. La differenza tra le due letture dovrebbe fornire il contributo dei fotoni diffusi.

Altro modo per ovviare al problema consiste nel piazzare dei collimatori davanti ai detector, che siano centrati sul punto focale dei raggi X. In questo modo la maggior parte dei fotoni diffusi può essere eliminata, poiché questi seguono traiettorie generalmente molto diverse da quelle dei fotoni X primari.

4.1.4 Rumore

Ci occuperemo ora di un fattore determinante nella qualità finale dell'immagine: il rumore.

Il cosiddetto rumore quantistico (*quantum noise* o *Poisson noise*) è determinato dal numero di fotoni X rilevati dai detector. Poiché la variazione nel flusso di fotoni segue approssimativamente una distribuzione di Poisson, un minore flusso registrato dai detector comporta una maggiore variazione del segnale.

Per le convenzionali immagini prodotte tramite FBP, la deviazione standard in HU

dovuta al rumore di Poisson è proporzionale a^[15]

$$\sigma \propto \sqrt{\frac{1}{x \times mAs}} \quad (4.1)$$

dove x è lo spessore della slice e la quantità di mAs (milli-Ampère secondo) determina il numero di fotoni che andranno ad interagire con il paziente (maggiori sono i mAs maggiore è il numero di fotoni).

Conseguenza immediata della relazione appena scritta è che esistono almeno due modi per diminuire il rumore delle immagini. Il primo è aumentare lo spessore delle slice, come si era già detto precedentemente. Il secondo è aumentare la dose, ovvero il numero di fotoni che andranno ad interagire con l'oggetto. Per quanto riguarda il primo metodo, abbiamo visto che non sempre la scelta dello spessore delle slice è libera; in diverse situazioni la scelta è dettata dalla misura che si vuole effettuare. Il secondo metodo porta con sé una problematica non indifferente. Aumentare la dose, infatti, significa aumentare la quantità di radiazioni ionizzanti assorbite dal paziente, per questo sarebbe preferibile ottenere buone misure anche a basse dosi di radiazioni.

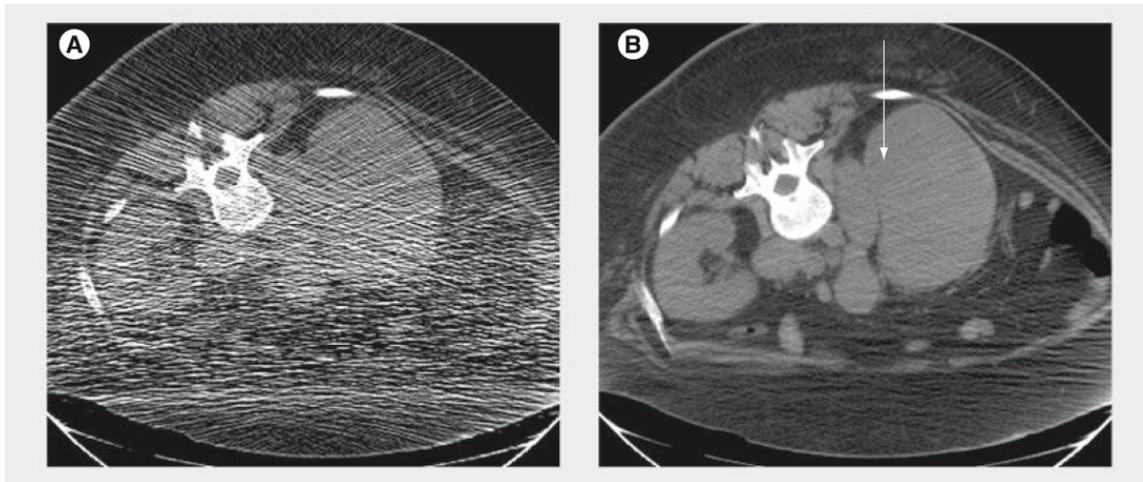


Figura 4.6: Effetto dei mAs sul rumore di Poisson. (a) Immagine ottenuta in *Low-dose CT* caratterizzata dall'evidente presenza di rumore di fondo (60 mA, 120 kVp, spessore della slice di 5 mm). (b) Immagine ottenuta con una dose 7.3 volte superiore, a cui corrisponde un rumore ridotto di circa 2.7 volte (440 mA, 120 kVp, spessore della slice di 5 mm). La freccia bianca in figura è a scopo medico e non ha rilevanza nella nostra trattazione. [15]

Come è possibile vedere in figura 4.6 (a), il rumore può anche rendere una immagine illeggibile. Il processo di *backprojection*, infatti, mappa le fluttuazioni nelle misure in intense linee chiare o scure.

Un'ottima soluzione al problema è data dagli algoritmi di ricostruzione iterativa, come si era visto nel capitolo 2. Tali tecniche di ricostruzione permettono di ottenere immagini di ottima qualità anche utilizzando basse dosi di radiazioni. Pur non essendo ancora i metodi di ricostruzione più utilizzati, a causa della loro complessità computazionale, si stanno recentemente diffondendo, anche grazie alla sempre maggiore potenza di calcolo disponibile nei computer.

In figura 4.7 è mostrata l'incredibile efficacia della ricostruzione iterativa rispetto alla canonica FBP.

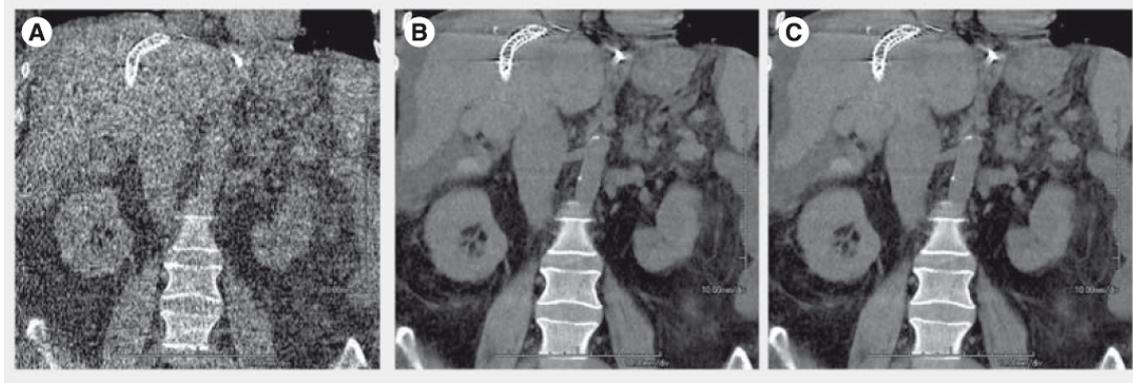


Figura 4.7: Efficacia della ricostruzione iterativa nella diminuzione del rumore. (a) Immagine ricostruita tramite FBP, in *Low-dose* (50 mA). (b) Immagine ricostruita tramite IR, con la stessa dose usata in (a). (c) Immagine ricostruita tramite FBP con una dose circa 15 volte superiore rispetto a quella usata in (a) (754 mA) [15].

4.2 Artefatti dovuti al paziente

4.2.1 Movimento del paziente

Uno degli aspetti a cui bisogna necessariamente andare incontro durante una scansione in TC nel campo della diagnostica medica è il movimento del paziente. Esso può essere volontario, come ad esempio la respirazione, o involontario, come ad esempio il battito cardiaco.

La conseguenza di quanto appena detto è che le strutture che si stanno esaminando non rimangono invariate nel tempo, ma possono allargarsi o comprimersi, in tutte le tre dimensioni spaziali, o, eventualmente, anche uscire o entrare nel FOV. Una particolare attenzione va posta nel riconoscimento e nella riduzione di questi peculiari artefatti, poiché spesso possono sembrare delle vere caratteristiche del paziente.

Consideriamo per la nostra trattazione il movimento dovuto alla respirazione. Esperimenti scientifici^[1] mostrano che, al contrario di quanto si possa pensare, il moto respiratorio non è affatto periodico. Come se non bastasse, il movimento della cassa toracica è presente anche quando il paziente trattiene il fiato.

A tal proposito illustriamo un interessante esperimento condotto da J. Hsieh^[1]. L'esperimento prevede la scansione di un fantoccio utilizzato come replica dei polmoni umani, capace di simulare il movimento respiratorio. Il fantoccio è stato inizialmente scansionato in condizione di movimento nullo in modo da avere una misura di riferimento. Successivamente si è proceduto a scansionare il fantoccio in tre diverse situazioni.

La prima misura è stata ottenuta alla fine dell'inspirazione. La seconda e la terza invece, sono state ottenute, rispettivamente, durante la fase di inspirazione e durante quella di espirazione. I risultati sono mostrati in figura 4.8. Com'è possibile vedere dalla suddetta figura, in (b) non sono presenti artefatti da movimento particolarmente evidenti. Il tempo della scansione era infatti impostato ad un secondo, che risulta essere un tempo abbastanza breve in confronto alla durata del fenomeno in esame. Nei casi (c) e (d), d'altra parte, la differenza della posizione tra l'inizio e la fine dell'acquisizione era al suo massimo. Lo scopo era rappresentare il peggior caso possibile e, in effetti, le immagini presentano artefatti decisamente marcati.

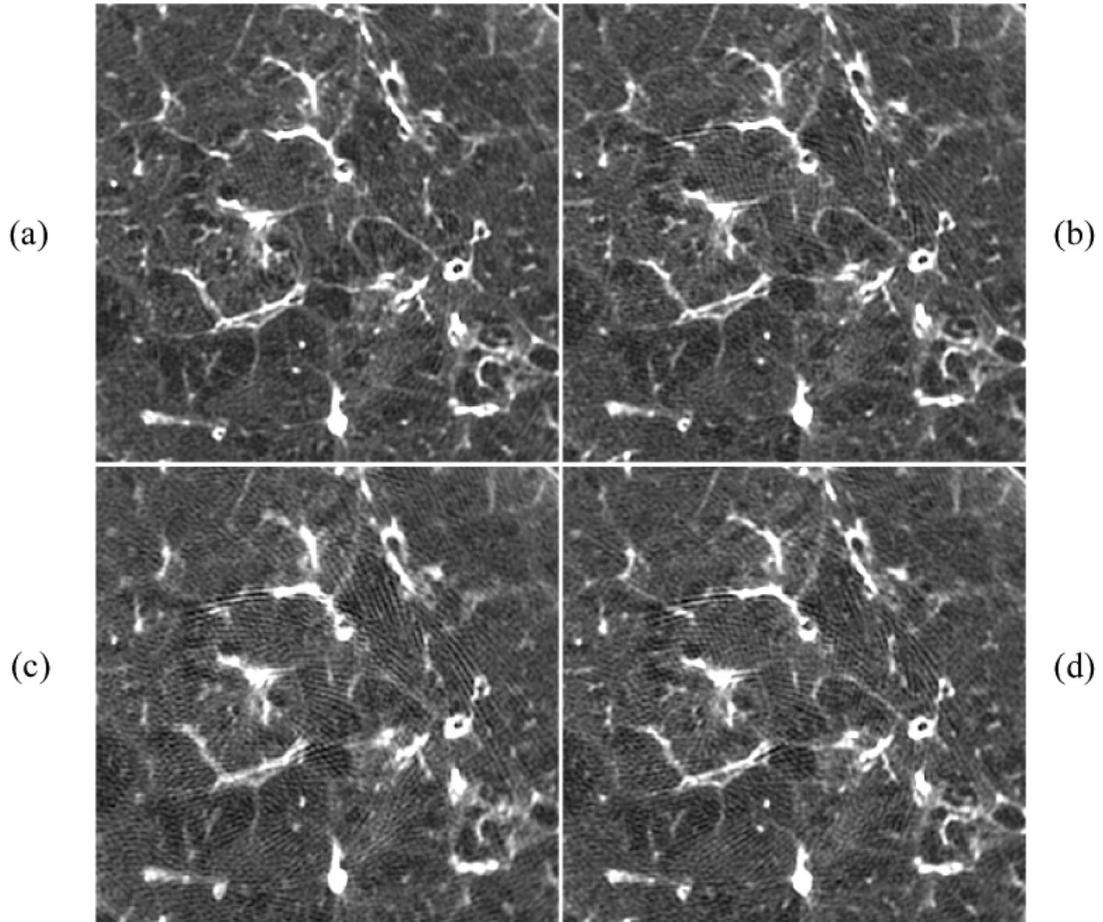


Figura 4.8: Ricostruzioni di un fantoccio usato per simulare i polmoni umani. (a) Nessun movimento. (b) Fine dell'espirazione. (c) Durante l'inspirazione e (d) durante l'espirazione [1].

Esistono procedure pratiche che permettono di arginare il problema, come ad esempio impostare tempi di rilevamento molto brevi. Ovviamente ciò che si va ad aumentare in questo modo è il rumore. Un'altra tecnica prevede di minimizzare il contributo delle proiezioni più inconsistenti nelle immagini. Si può ottenere tale risultato conferendo un peso minore alle proiezioni corrispondenti all'inizio e alla fine dell'acquisizione, essendo quelle che causano le maggiori discrepanze. Un simile approccio, tuttavia, funziona solamente se il periodo del movimento è significativamente maggiore rispetto al tempo di rotazione dell'apparato.

Bisogna poi prendere in considerazione il fatto che l'incidenza degli artefatti da movimento dipende anche dalla direzione del moto. Un modo semplice per ridurli, dunque, prevede di allineare la posizione iniziale della sorgente dei raggi X con la direzione primaria del moto; infatti, se il movimento è parallelo alla direzione dei raggi X, avrà un impatto minore o addirittura trascurabile.

Esistono poi, ovviamente, algoritmi che permettono di ridurre gli artefatti da movimento via software^[25].

Detto ciò, comunque, la tecnica più comunemente usata per far fronte al movimento respiratorio, consiste semplicemente nel chiedere al paziente di trattenere il fiato. Spesso infatti tale approccio si rivela adeguato, pur portando con sé evidenti

limitazioni. Ad esempio, infatti, non è detto che il paziente sia cosciente, o che riesca a trattenere il fiato per l'intera durata dell'acquisizione.

4.2.2 Artefatti metallici

Gli artefatti metallici sono estremamente comuni, essendo determinati dalla presenza di elementi metallici, o comunque fortemente radio-opachi, nell'oggetto scansionato. Essi sono causati da molteplici meccanismi, alcuni dei quali legati al metallo stesso, altri legati ai bordi del metallo.

Il metallo di per sé determina la formazione di artefatti da *Beam Hardening*, *Scattering*, *Partial volume* e rumore di Poisson, di cui si è già discusso in precedenza.

Per quanto riguarda i bordi del metallo, essi determinano l'insorgenza di artefatti particolarmente severi in casi di sotto-campionamento o di movimento dell'oggetto. Le elevate discontinuità nelle misure dovute ai bordi metallici sono infatti amplificate dal processo di FBP, risultando in intense linee chiare o scure.

Data la natura degli artefatti, comunque, è possibile applicare molte delle tecniche viste in precedenza per ridurre la loro incidenza. Ad esempio è possibile aumentare la differenza di potenziale (kVp), si possono effettuare scansioni con slice sottili, si può aumentare la dose e via dicendo.

Inoltre, conoscendo il metallo responsabile, è possibile applicare una tecnica di correzione simile a quella vista per il *beam hardening* nel caso del tessuto osseo.

Una tecnica chiamata *Linear Interpolation* (LI) prevede la sostituzione dei valori corrispondenti ai raggi che passano per il metallo con valori ottenuti, tramite interpolazione lineare, dai raggi passanti vicino al metallo, per poi procedere alla ricostruzione tramite FBP^{[27],[29]}. Il suddetto approccio è molto efficace nel combattere gli artefatti metallici nelle regioni che circondano il metallo. D'altra parte, però, ogni informazione riguardante il metallo è persa, e così anche per la regione immediatamente adiacente al metallo. Per questo motivo la tecnica LI non è sempre utilizzabile.

Una procedura degna di nota è la *Metal Deletion Technique*, o MDT, sviluppata da F. E. Boas e D. Fleischmann^{[15],[27]}. Si tratta di un metodo iterativo basato sul principio secondo cui i dati delle proiezioni passanti per il metallo o per regioni vicine ad esso sono meno accurati. Il processo prevede la costruzione dell'immagine iniziale utilizzando la LI; dopodiché la FBP è reiterata per quattro volte. Ad ogni iterazione, i raggi passanti per il metallo, identificati attraverso la FBP, sono rimpiazzati con i valori delle proiezioni dati dall'iterazione precedente.

In termini pratici ciò significa che invece di guardare attraverso il metallo si sta guardando attorno ad esso. Ovviamente, anche in questo caso, tutte le caratteristiche del metallo andranno perse.

La suddetta tecnica si rivela essere molto efficace nell'eliminazione degli artefatti metallici, se comparata alla normale FBP o ad altre due tipiche tecniche di riduzione. In particolare, le due tecniche a cui facciamo riferimento sono la LI, di cui si è già parlato, e la SART, una tecnica di ricostruzione algebrica che non approfondiremo nella trattazione, ma di cui è possibile leggere in diversi testi scientifici^{[2],[27]}.

In figura 4.9 si può osservare la validità della tecnica nella riduzione di molteplici tipi di artefatti metallici.

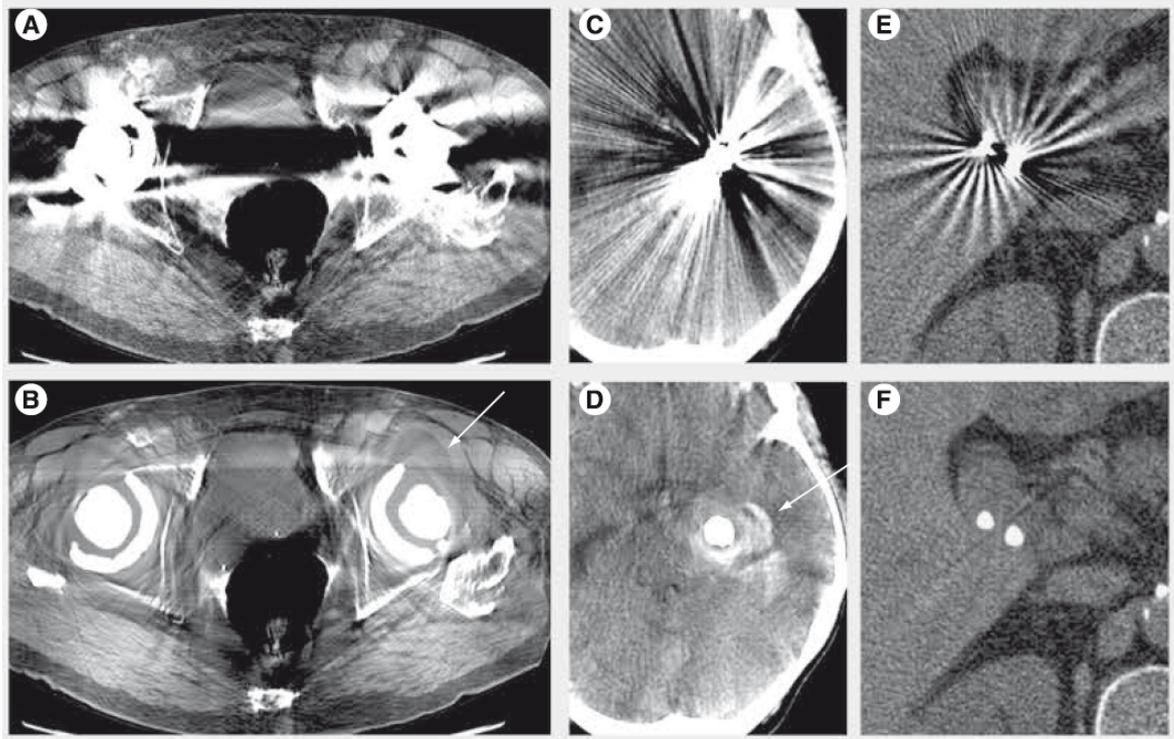


Figura 4.9: Efficacia della MDT nella riduzione di artefatti metallici [15].

Conclusioni

Nella tesi si è visto come la correzione degli artefatti di ricostruzione rappresenti una delle maggiori sfide nell'ambito della tomografia computerizzata con raggi X. La Filtered Back-Projection costituisce ad oggi la tecnica di ricostruzione delle immagini più utilizzata nella pratica, e non è difficile capirne il motivo. Essa permette, infatti, con le più moderne apparecchiature TC, di ottenere ricostruzioni praticamente in tempo reale. Si è visto come la ricostruzione iterativa, d'altro canto, presenti notevoli vantaggi in merito alla qualità dell'immagine ricostruita. Essa permette di ridurre notevolmente l'incidenza di vari tipi di artefatti e di ottenere, nel complesso, immagini caratterizzate da un minor rumore. La superiorità della ricostruzione iterativa rispetto alla Filtered Back-Projection è particolarmente evidente nel caso della Low-Dose CT. Quest'ultima considerazione non è da sottovalutare; infatti, soprattutto in campo medico, è quantomeno auspicabile poter ottenere immagini di buona qualità senza esporre il paziente ad eccessive dosi di radiazioni. Nonostante i suoi notevoli vantaggi, la ricostruzione iterativa sta prendendo piede solamente negli ultimi anni, con macchinari TC naturalmente predisposti alla ricostruzione dell'immagine tramite la suddetta tecnica. Infatti, rispetto alla FBP, i tempi di computazione che caratterizzano la ricostruzione iterativa possono essere anche mille volte superiori. Nelle situazioni in cui il tempo è un fattore discriminante, è chiaro che tra i possibili approcci si preferisca il più rapido. Man mano che le potenze di calcolo disponibili per i microprocessori aumentano, comunque, diventa sempre più realistica la possibilità che la ricostruzione iterativa si affermi come metodo di ricostruzione principale nelle apparecchiature TC del prossimo futuro.

Bibliografia

- [1] Hsieh Jiang (2009) "Computed tomography : principles, design, artifacts, and recent advances (2nd ed)", SPIE press
- [2] Kak A. , Slaney M. (1999) "Principles of computerized tomographic imaging", IEEE press
- [3] Chye Hwang Yan, Robert T. Whalen, Gary S. Beaupré, Shin Y. Yen, and Sandy Napel "Reconstruction Algorithm for Polychromatic CT Imaging: Application to Beam Hardening Correction", IEEE transaction on medical imaging, VOL. 19, NO. 1, pp. 1-11
- [4] G. T. Herman (1979) "Correction for beam hardening in computed tomography", Phys. Med. Biol. 24 81
- [5] L. A. Lehmann, R. E. Alvarez, A. Macovski, W. R Brody, N. J. Pelc, S. J. Riederer, and A. L. Hall (1981) "Generalized image combinations in dual KVP digital radiography" Med. Phys., 8: 659-667.
- [6] Bruno De Man (2001) "Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography"
- [7] François Pontana, Julien Pagniez, Thomas Flohr, Jean-Baptiste Faivre, Alain Duhamel, Jacques Remy, Martine Remy-Jardin (2010) "Chest computed tomography using iterative reconstruction vs filtered back projection (Part 1): evaluation of image noise reduction in 32 patients", European Radiology SP, 21(3), PP 627 - 635
- [8] Berthold K. P. Horn (1979) "Fan-Beam Reconstruction Methods", IEEE, VOL. 67 NO. 12
- [9] Jeffrey A. Fessler (2016) "Statistical Image Reconstruction Methods for Transmission Tomography", SPIE Handbook of Medical Imaging, Vol. 1, pp. 1-70
- [10] Jeffrey A. Fessler, Edward P. Ficaro, Neal H. Clinthorne, Kenneth Lange (1997) "Grouped-Coordinate Ascent Algorithms for Penalized-Likelihood Transmission Image Reconstruction" IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. 16, NO. 2
- [11] G. T. Herman (1995) "Image reconstruction from projections" , Real-Time Imaging, Volume 1, Issue 1, Pages 3-18

- [12] Balazs Ruzsics, Heon Lee, Peter L. Zwerner, Mulugeta Gebregziabher, Philip Costello, U. Joseph Schoepf (2008) "Dual-energy CT of the heart for diagnosing coronary artery stenosis and myocardial ischemia-initial experience", *Eur Radiol.*, 18(11): 2414-24
- [13] Jiang Hsieh, Robert C. Molthen, Christopher A. Dawson, Roger H. Johnson (2000) "An iterative approach to the beam hardening correction in cone beam CT", *Med. Phys.*, 27: 23-29
- [14] R A Brooks and G Di Chiro (1976) "Beam hardening in X-ray reconstructive tomography", *Phys Med Biol.*, 21(3): 390-8
- [15] F. Edward Boas, Dominik Fleischmann (2012) "CT artifacts: Causes and reduction techniques", *Imaging Med.*, 4(2),229-240
- [16] Julia F. Barrett, Nicholas Keat (2004) "Artifacts in CT: Recognition and Avoidance", *RadioGraphics*, 24:6, 1679-1691
- [17] Marc Kachelrieß, Michael Knaup, Christian Penßel, Willi A. Kalender (2004) "Flying Focal Spot (FFS) in Cone-Beam CT", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 53, no. 3, pp. 1238-1247
- [18] T. G. Flohr, K. Stierstorfer, S. Ulzheimer, H. Bruder, A. N. Primak, C. H. McCollough (2005) "Image reconstruction and image quality evaluation for a 64-slice CT scanner with z-flying focal spot", *Med Phys.*, 32(8):2536-47
- [19] Derik L. Davis, Prasann Vachhani (2017) "Computed Tomography Artifacts", Springer International Publishing
- [20] Rui Wanga, U. Joseph Schoepfb, Runze Wuc, Ryan P. Reddyb, Chuanchen Zhangd, Wei Yua, Yi Liua, Zhaoqi Zhanga (2012) "Image quality and radiation dose of low dose coronary CT angiography in obese patients: Sinogram affirmed iterative reconstruction versus filtered back projection", *Eur J Radiol.*, 81(11):3141-5
- [21] Yoshiko Sagara¹, Amy K. Hara, William Pavlicek, Alvin C. Silva, Robert G. Paden, Qing Wu (2010) "Abdominal CT: Comparison of Low-Dose CT With Adaptive Statistical Iterative Reconstruction and Routine-Dose CT With Filtered Back Projection in 53 Patients", *AJR Am J Roentgenol.*, 195(3):713-9
- [22] Ken Sauer, Charles Bouman (1993) "A Local Update Strategy for Iterative Reconstruction from Projections", *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 2, pp. 534-548
- [23] Jiang Hsieh (1999) "Nonlinear Partial Volume Artifact Correction in Helical CT", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 46, no. 3, pp. 743-747
- [24] Harry E. Martz Jr, Clint M. Logan, Daniel J. Schneberk, Peter J. Shull (2017) "X-Ray Imaging: Fundamentals, Industrial Techniques, and Application", CRC Press

- [25] Simon Rit, Jochem W. H. Wolthaus, Marcel van Herk, and Jan-Jakob Sonke (2009) "On-the-fly motion-compensated cone-beam CT using an a priori model of the respiratory motion", *Med Phys.*, 36(6):2283-96
- [26] Carl R. Crawford, J. David Godwin and Norbert J. Pelc (1989) "Reduction of motion artifacts in computed tomography", *IEEE Transactions on Medical Imaging* 15(3):327 - 332
- [27] F. Edward Boas, Dominik Fleischmann (2011) "Evaluation of Two Iterative Techniques for Reducing Metal Artifacts in Computed Tomography", *Radiology*, 259:3, 894-902
- [28] B. De Man, J. Nuyts, P. Dupont, G. Marchal and P. Suetens (1999) "Metal Streak Artifacts in X-ray Computed Tomography: A Simulation Study", *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 46, no. 3, pp. 691-696
- [29] Willi A. Kalender, Robert Hebel, Johannes Ebersberger (1987) "Reduction of CT Artifacts Caused by Metallic Implants", *Radiology.*, 164(2):576-7
- [30] Dirk Wagenaar, Emiel R. van der Graaf, Arjen van der Schaaf, Marcel J. W. Greuter (2015) "Quantitative Comparison of Commercial and Non-Commercial Metal Artifact Reduction Techniques in Computed Tomography", *PLoS ONE* 10(6)