

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Il paradosso EPR e la disuguaglianza di Bell

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Davide Candoli

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	5
1 I punti critici della teoria quantistica	7
1.1 I principi della teoria classica	8
1.2 Il ruolo della misura in meccanica quantistica	9
1.3 Il punto di vista di Einstein	12
2 Il paradosso EPR	15
2.1 I sistemi composti in meccanica quantistica	16
2.2 L'argomento EPR	20
2.3 Il significato del paradosso	22
2.4 Le implicazioni dell'articolo EPR	24
3 Il teorema di Bell	27
3.1 La disuguaglianza di Bell	28
4 Gli esperimenti sulla località	35
4.1 L'esperimento di Aspect	36
4.2 Il problema dei <i>loophole</i> e i successivi <i>Bell test</i>	40
Bibliografia	43

Introduzione

A più di un secolo di distanza dalla sua nascita, la meccanica quantistica continua a sorprendere ed affascinare. Nonostante il notevole accordo quantitativo con le osservazioni e l'eleganza della sua struttura formale, infatti, essa si basa su concetti profondamente estranei al nostro comune modo di pensare e di vedere il mondo. Uno degli aspetti più controintuitivi della teoria quantistica è senza dubbio la rinuncia alla rappresentazione dei fenomeni microscopici al di fuori dell'osservazione: in questo modo essa pone un limite alle nostre prospettive di conoscenza scientifica della natura.

Tuttavia, si tratta di un limite di questa specifica teoria o di una caratteristica naturale inevitabile? In altre parole, è possibile un'alternativa alla meccanica quantistica che ripristini una visione più intuitiva del mondo?

Questo è il problema essenziale al centro della vicenda scientifica iniziata con la pubblicazione dell'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen nel 1935, che metteva in discussione proprio la *completezza* della meccanica quantistica. Nata come una questione di carattere concettuale, nel corso del Novecento la critica avanzata da Einstein ebbe degli sviluppi inaspettati: il teorema di Bell, formulato nel 1964, mostrò come la meccanica quantistica e le cosiddette "*teorie a variabili nascoste*" che intendevano superarla hanno diverse implicazioni fisiche sperimentalmente osservabili. Questa scoperta diede il via a tutta una serie di esperimenti con l'obiettivo di verificare la teoria quantistica e approfondire la nostra comprensione di quest'ultima, test che continuano ad essere effettuati ancora oggi.

Nel testo che segue ripercorriamo questa storia attraverso i suoi momenti decisivi.

Nel Capitolo [1](#) introduciamo il problema dell'interpretazione della meccanica quantistica: dal confronto con la visione classica del mondo emergono gli aspetti più controversi di questa teoria, che furono oggetto di critica da parte di Einstein.

Nel Capitolo [2](#) entriamo nel merito dell'argomento EPR. Dopo aver chiarito il significato dell'*entanglement* quantistico, deriviamo il paradosso che

mette in discussione la completezza della meccanica quantistica, e ne esaminiamo le principali implicazioni.

Nel Capitolo 3 dimostriamo il teorema di Bell, un risultato che, essenzialmente, fornisce un criterio sperimentale per verificare se è possibile completare la meccanica quantistica restituendo validità ai principi della fisica classica.

Nel Capitolo 4 discutiamo l'esperimento di Aspect, il più importante fra i primi test sulla località ispirati dal teorema di Bell, e presentiamo alcuni dei successivi sviluppi in questo campo di ricerca.

Capitolo 1

I punti critici della teoria quantistica

Il problema controverso della meccanica quantistica che vogliamo discutere in queste pagine, è bene sottolinearlo, non è relativo alla sua predittività. I calcoli quantistici portano a risultati teorici in ottimo accordo con le misure sperimentali, come fu evidente già dai primi sviluppi della teoria. Il modello di Schroedinger dell'atomo di idrogeno è un esempio lampante del successo che la meccanica ondulatoria ottenne nel confronto con i dati dei laboratori. Sulla correttezza della teoria, quindi, non ci sono dubbi; diversa è la questione se consideriamo, più in generale, la comprensione dei fenomeni quantistici. Le relazioni matematiche che li descrivono devono infatti essere interpretate in senso fisico, e su questo problema il dibattito si protrasse a lungo.

Fu proprio lo sforzo di interpretazione della nuova teoria che fece emergere una visione del mondo rivoluzionaria, in netto contrasto con la linea di pensiero classica. La scoperta e lo studio dei processi microscopici imposero agli scienziati una revisione radicale dei concetti fondamentali della fisica. Si dovettero abbandonare delle profonde convinzioni che si erano rivelate essere soltanto dei pregiudizi sulla realtà oltre le misure, e divenne oggetto di discussione ciò che è possibile conoscere del mondo osservato scientificamente.

Diversi furono i fisici che si opposero a questo cambiamento di paradigma: il caso più illustre è senza dubbio quello di Einstein, che cercò ostinatamente di difendere la visione classica della realtà, senza mai rassegnarsi alle idee emergenti.

In questo primo capitolo recuperiamo i concetti fondamentali della fisica classica per poi trattarli alla luce della teoria quantistica, secondo la sua interpretazione ortodossa. Successivamente esaminiamo la posizione critica di Einstein nei confronti dell'interpretazione di Copenaghen, presentando le ragioni che portarono al suo distacco da questa corrente di pensiero.

Molte delle considerazioni che seguono sono trattate in [8].

1.1 I principi della teoria classica: determinismo, realismo e località

Nel paragrafo presente trattiamo il punto di vista classico sulla misura, il ruolo dell'osservatore e la conoscenza scientifica della realtà: sono aspetti che vengono solitamente dati per scontati, nel contesto della fisica classica, ma per i nostri scopi è utile esaminarli criticamente.

Prima della formulazione di una qualsiasi teoria, tutte le informazioni a disposizione di un fisico per lo studio dei fenomeni naturali provengono dalle misure. Per la deduzione della visione classica della realtà, il nostro punto di partenza sono quindi le misure relative ai fenomeni macroscopici.

Consideriamo un sistema classico generico che si trova in uno stato noto. Questo sistema è caratterizzato da proprietà misurabili, e l'osservatore dispone degli strumenti per rivelarne il valore. Ora, immaginiamo che l'osservatore effettui misure ripetute della stessa grandezza. In generale, otterrà valori diversi; tuttavia, questa variabilità si può attribuire ad una caratteristica naturale del processo di misura, ovvero il disturbo del sistema in esame. In fisica classica si assume che questa perturbazione si possa idealmente rendere piccola a piacere, in altre parole che sia possibile effettuare una misura delle proprietà di un sistema senza alterarne lo stato. In questo caso ideale, la misura ripetuta di una grandezza restituisce sempre lo stesso valore.

Cosa ne deduce l'osservatore?

Se la misura di qualsiasi proprietà di un sistema in un determinato stato riproduce sempre lo stesso valore (e questo non dipende dal fatto che più misure siano svolte simultaneamente), è naturale pensare che il sistema *possieda oggettivamente* le proprietà aventi quel valore, nel senso che, a prescindere da ogni misura, il sistema tenga memoria del valore che spetta ad ogni sua grandezza in quello stato. Con questa analisi elementare abbiamo introdotto due dei concetti cardine del pensiero classico.

Determinismo. Il fatto che in ogni suo stato un sistema abbia proprietà con valore definito rende possibile, una volta stabilite le relazioni matematiche necessarie, prevedere con esattezza l'esito della loro misura.

Realismo. Come abbiamo già detto, il sistema è dotato di proprietà oggettive, il cui valore è indipendente dall'osservazione. In questa visione della realtà, l'atto di misura ha un ruolo di relativa importanza, in quanto è ridotto alla sola verifica delle previsioni teoriche.

Vogliamo mettere in evidenza un aspetto più sottile del processo di misura, pensandolo - giustamente - come un evento calato nello spazio e nel tempo. I sistemi fisici sono estesi, e le misure, che in modo schematico si possono pensare localizzate in un punto e istantanee, possono essere effettuate simultaneamente in posizioni diverse del volume del sistema. Se il disturbo del sistema da parte dell'osservatore è eliminabile, ciascuna delle misure simultanee rivela una proprietà del sistema il cui valore è determinato dallo stato precedente alla misura. Ogni eventuale correlazione tra gli esiti delle misure può essere quindi spiegata in base all'evoluzione del sistema negli istanti precedenti alla misurazione: in altre parole, se si manifestano correlazioni, queste esistevano già prima della misura. Non esiste quindi nessuna interazione tra misure simultanee e distanti nello spazio. Questo fatto è conseguenza di uno dei principi della teoria classica, la *località*.

Questi concetti sono molto intuitivi e familiari sulla base del nostro senso comune, tuttavia, nell'analisi dei fenomeni quantistici, dovremo metterli in discussione. Questo sarà materia del prossimo paragrafo.

1.2 Il ruolo della misura in meccanica quantistica

Prendiamo ora in esame un fenomeno sulla scala microscopica. Ancora una volta, ripetendo la misura di un determinato osservabile su un sistema in un certo stato, il risultato sono valori differenti. Ciò di cui i fisici quantistici si resero conto per primi, tuttavia, è che in generale non è possibile ridurre il disturbo indotto nel sistema in modo da riprodurre lo stesso valore ad ogni ripetizione della misura. Quello che si ottiene è sempre una distribuzione di valori con diverse probabilità. Inoltre, non è possibile neppure valutare esattamente l'effetto del disturbo sul sistema, che sembra essere di natura intrinsecamente casuale.

Data questa situazione, è lecito porsi le seguenti domande. È possibile prevedere con esattezza l'esito di una misura? E nel caso questo non sia possibile, ha ancora senso parlare di proprietà oggettive di un sistema? Portando questo ragionamento alle sue conseguenze estreme, finiamo per mettere in dubbio l'esistenza stessa di una realtà oltre le misure.

Evidentemente, a livello microscopico gli strumenti di misura e il fenomeno in esame risultano concatenati in modo indissolubile, e non sembra più possibile parlare di un mondo esistente a prescindere dall'osservazione. Questo porta a delle conseguenze concettuali controintuitive, ma inevitabili.

Il primo stravolgimento dei concetti classici è proprio l'imprevedibilità del risultato di una misura, pur conoscendo lo stato del sistema. L'indeterminismo è di fatto l'origine di tutta una serie di rotture con la visione classica del mondo. Da questo discende infatti l'impossibilità di attribuire ad un sistema proprietà oggettive, limite che ci costringe a rinunciare alla rappresentazione della realtà al di fuori delle misure, il cosiddetto realismo.

Un terzo effetto che costituisce un cambiamento di grande portata riguarda la località. Consideriamo infatti un sistema quantistico esteso nello spazio. Nel momento in cui si effettua una misura, secondo la meccanica quantistica, l'osservatore induce un disturbo nel sistema che altera il suo stato *istantaneamente in ogni sua parte*. Tuttavia questa alterazione, definita *riduzione del pacchetto d'onda* o *collasso della funzione d'onda*, è l'effetto di un processo di misura localizzato in una certa posizione: siamo in presenza di un evento, la misura, che provoca una reazione simultanea del sistema in punti distanti nello spazio. Questo, evidentemente, va contro il concetto di località.

Per procedere è opportuno introdurre alcuni concetti matematici del formalismo quantistico, anche se non in termini rigorosi. Il lettore potrà approfondire questi argomenti su un qualsiasi manuale di meccanica quantistica.

Lo stato di un sistema è descritto da un vettore in uno spazio di Hilbert

$$|\psi\rangle$$

il quale determina le possibili reazioni del sistema stesso ad una generica misura. Il meccanismo con cui questo avviene trova una spiegazione grazie al carattere lineare della teoria: se $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ sono due stati possibili per il sistema, allora questo potrà trovarsi anche in una loro sovrapposizione, rappresentata matematicamente come la combinazione lineare

$$|\psi\rangle \alpha + |\phi\rangle \beta$$

a patto che i coefficienti siano normalizzati ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). È importante specificare che esistono degli stati in cui la misura di un determinato osservabile restituisce sempre lo stesso risultato: questi sono detti autostati dell'osservabile in questione. Inoltre, secondo il formalismo è sempre possibile scomporre ogni stato in una combinazione lineare di autostati di un dato osservabile. Poste queste premesse, è possibile comprendere quale sia l'effetto della misura dell'osservabile Q su un sistema in uno stato $|\psi\rangle$. Se questo vettore si scompone nella seguente combinazione lineare di autostati di Q

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \alpha_1 + |\psi_2\rangle \alpha_2 + |\psi_3\rangle \alpha_3 + \dots$$

la probabilità di ottenere come risultato il valore di Q nell'autostato $|\psi_i\rangle$ è data da $|\alpha_i|^2$ (è sottintesa la richiesta che i coefficienti della combinazione lineare siano normalizzati, nel senso che $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$). Quello che succede concretamente all'istante della misura è che il sistema passa dallo stato $|\psi\rangle$ allo stato $|\psi_i\rangle$ con probabilità $|\alpha_i|^2$: questo è il senso dell'espressione collasso della funzione d'onda.

Ora che abbiamo mostrato in linee essenziali la matematica che descrive il processo di misura, abbiamo tutti gli strumenti per discutere un fenomeno che ritornerà spesso nella nostra trattazione. Le particelle quantistiche sono dotate di un momento angolare intrinseco, lo spin, il cui orientamento è quantizzato. È molto comune il caso delle particelle di spin $\frac{1}{2}$, per le quali la componente dello spin lungo una certa direzione può assumere due soli valori discreti, $+\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$, dove \hbar è la costante di Planck ridotta.

Consideriamo due di queste particelle, che chiameremo A e B: lo stato del sistema, in generale, è rappresentato da una combinazione lineare di prodotti dei vettori di stato relativi alle singole particelle. È quindi possibile preparare il sistema nel seguente stato:

$$\frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

In questa notazione $|\uparrow\rangle$ rappresenta lo stato con spin $+\frac{\hbar}{2}$, $|\downarrow\rangle$ lo stato con spin $-\frac{\hbar}{2}$. La combinazione lineare scritta descrive matematicamente un'importante caratteristica dei sistemi quantistici composti, l'*entanglement*. Come si può verificare, quando lo stato del sistema si riduce ad uno dei termini della combinazione lineare, gli spin delle due particelle risultano sempre avere versi opposti. Questo significa che le rivelazioni dello spin delle due particelle sono processi casuali ma *statisticamente dipendenti*. Dell'entanglement parleremo approfonditamente nel Capitolo [2](#).

Ora, immaginiamo che le due particelle siano generate nello stato sopra indicato in un dato punto dello spazio, e che a partire dall'istante iniziale si muovano in direzioni opposte. Due osservatori, che definiamo Alice e Bob, seguono il moto delle rispettive particelle, ciascuno dotato degli strumenti per misurarne l'orientamento dello spin. Ad un certo punto, Alice effettua la misura sulla propria particella. Secondo quanto abbiamo detto in precedenza, lo stato del sistema può ridursi allo stato $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ oppure $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$, con la stessa probabilità: questo processo avviene istantaneamente, insieme alla misura. Tuttavia, nel momento in cui la funzione d'onda collassa, avviene un'alterazione dello stato di entrambe le particelle, nonostante la misura sia stata effettuata soltanto su una di esse. Siamo in presenza di una sorta di *azione a distanza* che permette al processo di misura di influenzare eventi

da esso causalmente disconnessi. Infatti, se in un istante immediatamente successivo Bob misura lo spin della propria particella, l'esito sarà certo, in quanto il sistema si trova già in un autostato di quell'osservabile, e sarà opposto a quello di A.

Come possiamo assicurarci che in tutto questo la relatività speciale non sia violata? A rigore, si ha una violazione dei principi relativistici soltanto se questa azione istantanea a distanza trasferisce un'informazione: in altre parole, effettuando la misura Alice deve essere in grado di comunicare a Bob un messaggio che quest'ultimo sappia interpretare senza ambiguità. Si presentano due casi differenti.

Nel primo, Alice e Bob si accordano sulla direzione in cui misurare la componente dello spin prima della generazione della coppia di particelle. In questo caso, entrambi sanno come interpretare i risultati della misura, ma Alice (il mittente) non ha il controllo sull'esito della propria osservazione, poichè la riduzione del pacchetto d'onda è un processo casuale: pertanto il messaggio inviato a Bob è privo di informazione. Se Alice scegliesse invece il verso di riferimento nell'istante successivo alla misura, in modo da poter decidere l'orientamento dello spin da comunicare a Bob, quest'ultimo non conoscerebbe tale verso di riferimento e non sarebbe in grado di interpretare l'esito della propria misura. Questo spiega perchè, paradossalmente, l'azione a distanza che si verifica con il collasso della funzione d'onda non rappresenta un segnale fisico, e quindi non contraddice la relatività.

Dal punto di vista concettuale resta il fatto che la località è violata, se si ammette che questa descrizione della realtà sia corretta. Questo rappresenta uno dei motivi principali dell'opposizione di Einstein alla teoria quantistica, come osserveremo nel prossimo paragrafo.

1.3 Il punto di vista di Einstein

L'interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica fu rivoluzionaria: segnò la nascita di un nuovo modo di pensare e stabilì dei nuovi confini per la conoscenza scientifica della realtà. In tutto ciò, l'abbandono delle idee tradizionali suscitò forti critiche da parte di chi credeva profondamente nella visione classica del mondo. Questa fu la posizione presa da Albert Einstein, sicuramente la voce più autorevole che difese le convinzioni classiche nel dibattito sulla meccanica quantistica.

Occorre specificare che i motivi del distacco di Einstein dalla nuova teoria non erano strettamente "razionali". I suoi ragionamenti erano senza dubbio il risultato di un'intensa riflessione (citando le sue parole: *"ho speso almeno cento volte più tempo a pensare ai problemi quantistici che alla teoria della*

relatività generale"), eppure ciò che muoveva la sua critica restava un presentimento, una "voce interiore". Il pensiero di Einstein, come fece notare Max Born, apparteneva alla generazione precedente alla rivoluzione quantistica, e i concetti emersi con la nuova teoria erano per lui un risultato affrettato e imprudente. Prendiamo ora in esame questi concetti tenendo presente il giudizio critico di Einstein.

Il primo punto di rottura con la fisica classica, come abbiamo visto, è l'indeterminismo: l'impossibilità di prevedere esattamente l'esito di una misura. Su questo aspetto è opinione diffusa che Einstein fosse estremamente ostile, probabilmente per l'abuso della citazione "*Dio non gioca a dadi con il mondo*": eppure, Pauli stesso testimonia che questa sua avversione è stata di gran lunga sopravvalutata. Einstein ragionò a lungo sulla questione della causalità, e non assunse mai il determinismo come premessa dogmatica.

Un altro concetto critico è il realismo, e forse è proprio nella discussione in merito a questo che il distacco di Einstein dalla fisica quantistica risulta più evidente. Nel suo pensiero era radicata l'idea che l'oggetto della scienza fosse la realtà, e che l'obiettivo della fisica fosse di accedere alla conoscenza completa dei fenomeni naturali. Secondo Einstein, ogni processo trova una spiegazione soddisfacente soltanto quando si riesce a ricostruire il meccanismo, calato nello spazio e nel tempo, che produce gli effetti osservati. La dinamica di una particella, quindi, è descritta in modo completo soltanto se siamo in grado di tracciarne la traiettoria: qualsiasi modello che renda conto delle sole posizioni misurate è corretto, ma incompleto. "*Io credo in una realtà che esiste oggettivamente*", dichiarava.

Se la comprensione dei fenomeni naturali richiede una coerente trattazione spazio-temporale, un altro degli elementi critici della teoria quantistica è il collasso della funzione d'onda. Già Schroedinger l'aveva definito "*maledetto salto quantico*" (si veda «Are There Quantum Jumps?», [3]): la riduzione del pacchetto d'onda rappresenta infatti un'eccezione alla dinamica libera dei sistemi quantistici, in quanto interrompe l'evoluzione continua della funzione d'onda prevista dall'equazione di Schroedinger. Il salto discontinuo tra due stati del sistema comporta una variazione istantanea del valore della funzione d'onda in ogni punto dello spazio, in evidente contrasto con i concetti di continuità spazio-temporale e località.

Einstein era tormentato in modo particolare proprio dalla violazione di quest'ultima, dai "*fantomatici effetti a distanza*" previsti dalla meccanica quantistica. L'esempio migliore che mostra come il collasso della funzione d'onda dia origine a questi effetti è quello delle particelle A e B nello stato entangled descritto nel paragrafo precedente. La spiegazione quantistica della correlazione tra le misure di Alice e Bob si basa su un'azione a distanza che va contro il principio di continuità spazio-temporale, nonostante la relatività

sia inviolata.

Il fisico tedesco non si arrese mai alla meccanica quantistica, e continuò a credere che fosse possibile sviluppare una teoria alternativa in grado di spiegare i fenomeni microscopici ripristinando il realismo e la località. La voce interiore che lo aveva reso scettico nei confronti dei nuovi sviluppi della fisica lo portò ad una profonda analisi dei principi della teoria quantistica, ricerca che culminò, nel 1935, con la pubblicazione dell'articolo Einstein-Podolsky-Rosen.

Capitolo 2

Il paradosso EPR

"*Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*", si chiedono Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen nel titolo della loro pubblicazione del 1935. Nel formulare questa domanda usano due parole chiave del loro ragionamento, che svilupparono con una logica disarmante.

La prima è *physical reality*: è importante sottolineare la differenza tra questo concetto e quello di *physical experience*, esperienza fisica. L'oggetto di interesse di EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) non sono tanto i dati sperimentali provenienti dai fenomeni microscopici, ma sono gli *elementi della realtà*, quegli oggetti che si possono pensare esistenti a prescindere dall'osservazione. Per EPR è quindi necessario stabilire una definizione precisa di elemento della realtà che sia indipendente da qualsiasi preconetto teorico.

Il secondo termine centrale nella tesi EPR è *complete*. Infatti, la questione posta dagli autori non riguarda la correttezza della teoria, ma la sua capacità di riconoscere tutti gli elementi della realtà oggettiva e di descriverli appropriatamente (completezza). La trattazione EPR mette in crisi la convinzione che la meccanica quantistica sia completa, mostrando come questa ipotesi porti ad una contraddizione, oppure all'abbandono di altri principi ritenuti irrinunciabili, come la località.

L'articolo di EPR riportò in primo piano il dibattito dell'interpretazione della teoria quantistica, che al tempo si riteneva sostanzialmente concluso con un'ampia adesione della comunità scientifica all'interpretazione di Copenaghen.

Per comprendere a fondo il significato del paradosso a cui è dedicato questo capitolo occorre spendere qualche parola in più riguardo i sistemi entangled. Una volta fatto ciò, presentiamo l'argomento EPR nel dettaglio, considerandone attentamente i passaggi più insidiosi. Infine, chiudiamo il capitolo esaminando le principali implicazioni della tesi EPR sull'interpre-

tazione della meccanica quantistica e citando gli sviluppi (teorici e non) a cui diede origine.

La fonte principale dei contenuti di questo capitolo è [8].

2.1 I sistemi composti in meccanica quantistica: stati fattorizzati e stati entangled

Come abbiamo accennato nel Capitolo [1], in meccanica quantistica lo stato di un sistema è rappresentato da un vettore $|\psi\rangle$ in uno spazio di Hilbert. La *completezza* della teoria quantistica, che ora assumiamo come ipotesi, implica che tale vettore contenga il massimo delle informazioni che si possono conoscere del sistema nello stato corrispondente. Nella maggiorparte dei casi, queste informazioni non consentono previsioni certe, ma ci forniscono soltanto delle probabilità.

È naturale chiedersi come si costruisce il vettore di stato di un sistema composto da due parti separate e non interagenti, a partire dai loro vettori di stato individuali $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. L'operazione che lega gli stati dei costituenti allo stato del sistema complessivo è il prodotto tensoriale dei due vettori

$$|\psi\rangle |\phi\rangle$$

Questo nuovo vettore di stato, tuttavia, rappresenta un caso molto particolare. In generale, lo stato del sistema complessivo è rappresentato da una combinazione lineare di diversi prodotti di vettori individuali

$$\sum_i |\psi_i\rangle |\phi_i\rangle \alpha_i$$

che non può essere sempre ridotta ad un singolo termine, come nel caso precedente. Questa caratteristica dei sistemi quantistici composti è una conseguenza diretta della linearità della teoria, proprietà fondamentale di cui abbiamo parlato nel Capitolo [1].

Gli stati descritti dalle due espressioni riportate sopra hanno delle implicazioni molto diverse sul sistema fisico in esame. I vettori nella prima forma descrivono i cosiddetti *stati fattorizzati*, quelli del secondo tipo gli *stati entangled*. Studiamo le differenze tra questi due casi con un esempio familiare e che riprenderemo in considerazione negli sviluppi successivi.

Abbiamo già fatto un accenno al momento angolare intrinseco delle particelle microscopiche, lo spin. Come tutti i momenti angolari della meccanica

quantistica, si tratta di una grandezza vettoriale le cui tre componenti sono rappresentate da operatori che non commutano

$$[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{s}_k$$

Questo, nel formalismo della meccanica quantistica, significa che due componenti dello spin non possono avere simultaneamente valore definito. Usando le parole di D. Bohm, quando il sistema si trova in un autostato di una delle tre componenti, il valore delle altre due subisce una sorta di "fluttuazione casuale".

La seconda fondamentale proprietà dei momenti angolari è la quantizzazione. Nel nostro caso consideriamo particelle di spin $\frac{1}{2}$, il cui stato di spin è rappresentato da un vettore in uno spazio di Hilbert bidimensionale. In questi stati, il modulo dello spin è sempre definito e vale $\frac{\sqrt{3}\hbar}{2}$; inoltre, indicheremo con

$$|\mathbf{n}, \uparrow\rangle \qquad |\mathbf{n}, \downarrow\rangle$$

rispettivamente gli autostati della componente dello spin lungo la direzione data dal versore \mathbf{n} corrispondenti agli autovalori $+\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$. Questi costituiscono una base ortonormale dello spazio di Hilbert degli spin.

È utile ricordare una proprietà del tutto generale dei vettori di stato. Dato un generico sistema in un certo stato, esiste sempre un osservabile del sistema che ha valore definito. Questa affermazione si traduce in termini molto semplici nel nostro esempio: per un qualsiasi stato nello spazio degli spin, esiste sempre un versore \mathbf{n} tale per cui la componente dello spin in quella direzione ha un valore definito nello stato considerato.

Dal momento che gli autostati di una componente dello spin formano una base ortogonale dello spazio corrispondente, possiamo trovare una relazione lineare tra due coppie di autostati delle componenti di spin rispetto alle direzioni \mathbf{n} e \mathbf{e}_3 (dove \mathbf{e}_i rappresenta una base ortonormale orientata dello spazio tridimensionale). Queste equazioni hanno la forma seguente:

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}, \uparrow\rangle &= |\mathbf{e}_3, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + |\mathbf{e}_3, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ |\mathbf{n}, \downarrow\rangle &= -|\mathbf{e}_3, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + |\mathbf{e}_3, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = n_3$, $e^{i\phi} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 + i\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = n_1 + in_2$.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti matematici per studiare il problema di un sistema composto da due particelle di spin $\frac{1}{2}$, che chiameremo A e B.

Consideriamo inizialmente uno stato fattorizzato, per esempio

$$|\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle$$

In questo stato, A e B si trovano in due autostati dell'operatore $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{s}}$ con autovalori opposti. Pertanto possiamo ancora sostenere che ciascuna delle due particelle possiede degli osservabili con valore definito.

Un'altra importante osservazione da fare sullo stato fattorizzato riguarda il processo di misura di un generico osservabile della particella A. Secondo il meccanismo della riduzione del pacchetto d'onda, per determinare l'esito della misura dobbiamo espandere il vettore di stato $|\mathbf{n}, \uparrow\rangle$ in una combinazione lineare di autostati dell'osservabile in questione: il sistema collasserà in uno dei termini risultanti con probabilità determinate dai rispettivi coefficienti. Si noti che in questo processo lo stato della particella B rimane invariato. Possiamo trarre da questo esempio la conclusione generale per cui in uno stato fattorizzato le misure di osservabili relativi a diversi sottosistemi sono processi *statisticamente indipendenti*.

Passiamo ad esaminare lo stesso sistema di due particelle nel seguente stato

$$\frac{|\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle - |\mathbf{n}, \downarrow\rangle |\mathbf{n}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.2)$$

La prima osservazione che possiamo fare è che non è più possibile trovare osservabili *delle singole particelle* che abbiano valore definito in questo stato (a patto di considerare i soli gradi di libertà di spin). Infatti, se utilizziamo la formula (2.1) per esprimere gli stati $|\mathbf{n}, \uparrow\rangle$ e $|\mathbf{n}, \downarrow\rangle$ in termini di autostati della componente dello spin rispetto ad una qualsiasi direzione, realizziamo che la forma del vettore di stato non cambia e per ciascuna delle due particelle rimangono egualmente probabili le due possibilità $+\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$. Di seguito sviluppiamo i calcoli che mostrano come lo stato (2.2) non si possa esprimere in forma fattorizzata.

$$|\psi\rangle = \frac{|\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle - |\mathbf{n}, \downarrow\rangle |\mathbf{n}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Esprimendo ogni ket in termini degli autostati dello spin rispetto alla generica direzione \mathbf{k} , otteniamo

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle = \\
& (|\mathbf{k}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) \times \\
& \times (-|\mathbf{k}, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + |\mathbf{k}, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2}) = \\
& = -|\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + |\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle \cos^2 \frac{\theta}{2} - \\
& - |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle \sin^2 \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi}
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle = \\
& = -|\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle \cos^2 \frac{\theta}{2} - \\
& - |\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle \sin^2 \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi}
\end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella formula di $|\psi\rangle$, otteniamo

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle (-\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}) + \\
&+ |\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&+ |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle (-\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
&+ |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle (\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi})] = \\
&= \frac{|\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle - |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Questo fenomeno ha delle conseguenze di grande portata sul piano concettuale. Vedremo che, secondo il criterio formulato da EPR, se una quantità misurabile ha valore definito allora ad essa corrisponde un elemento della realtà. Nel caso del nostro sistema nello stato entangled, ci rendiamo conto che nessuno degli osservabili propri delle singole particelle ha valore definito. Considerando il sistema nel suo complesso, esisteranno ancora osservabili globali dotati di valore definito, ma questo significa che ogni elemento della realtà è relativo al sistema totale e non è più possibile attribuire realtà alle due particelle in modo indipendente. È così che si manifesta la cosiddetta *non separabilità quantistica*.

L'analisi di queste implicazioni dell'entanglement ci permette di chiarire il significato del suo nome: in italiano lo tradurremmo come *groviglio*, *ingarbugliamento*, *confusione*, espressioni che fanno riferimento da una parte alle

complesse relazioni che si stabiliscono tra le parti di un sistema composto, dall'altra alla difficile comprensione di questo fenomeno.

L'entanglement non è affatto da pensare come un'eventualità lontana e anomala: gli stati entangled sono il risultato di ogni interazione tra due sistemi fisici. Prendiamo come esempio l'urto elastico tra due particelle. In fisica classica, noti gli stati iniziali delle due particelle, è possibile prevedere con esattezza i loro stati dopo l'urto, i quali saranno legati da una ben precisa relazione. Ora, supponiamo che l'urto avvenga tra due particelle quantistiche descritte inizialmente da un vettore di stato fattorizzato. L'esito della loro interazione questa volta non è noto con certezza, ma sono possibili per le due particelle più coppie di stati correlati, con diverse probabilità associate. Dopo l'urto le due particelle risultano quindi entangled, anche se il sistema si trovava inizialmente in uno stato fattorizzato. Questa è una caratteristica generale di tutte le interazioni. Nella prospettiva in cui tutti i sistemi sono destinati a interagire, dunque, l'entanglement porterà ad un progressivo mescolamento dei loro vettori di stato e alla formazione di un cosiddetto *unbroken whole*, un universo indiviso in cui le parti non hanno più alcuna identità individuale.

Cosa succede quando si effettua una misura su una parte di un sistema in uno stato entangled? Consideriamo nuovamente il caso delle particelle di spin $\frac{1}{2}$. Misurando la componente dello spin lungo \mathbf{n} per la particella A, lo stato complessivo si riduce ad uno dei due termini della combinazione lineare, come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente. In questo modo, sia A che B assumono valori definiti e opposti. Prima della misura, per B le due possibilità $\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$ avevano la stessa probabilità di verificarsi; dopo la misura, il valore del suo spin è definito. Se più sistemi si trovano in uno stato entangled, quindi, la misura effettuata su uno di essi può influenzare gli altri, riflettendo il fatto che i processi di misura sono ora *statisticamente dipendenti*. L'entanglement, che Schroedinger definì "*il tratto più caratteristico della meccanica quantistica, quello che impone il suo completo distacco dalle linee di pensiero classiche*", ha un ruolo centrale nel ragionamento sviluppato da EPR, come vedremo nel prossimo paragrafo.

2.2 L'argomento EPR

L'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen del 1935 si apre con alcune considerazioni di carattere generale [7]. Come abbiamo puntualizzato nell'introduzione a questo capitolo, la domanda che EPR si pongono riguarda la completezza della teoria quantistica. Per continuare, è quindi opportuno

specificare il significato dei concetti fondamentali di elemento della realtà e completezza di una teoria.

Per determinare un elemento della realtà, gli autori dell'articolo formulano il seguente criterio.

Se, senza in alcun modo disturbare il sistema, è possibile prevedere con certezza il valore di un suo osservabile, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a questa quantità.

EPR sostengono che questo criterio sia da prendere come una condizione sufficiente di realtà, ma non necessaria. Si noti come le uniche informazioni utili per determinare la realtà di una grandezza fisica provengano dall'esperienza, e siano quindi indipendenti da qualsiasi preconetto teorico. Gli autori, inoltre, si basano sulla seguente condizione di completezza di una teoria.

Ogni elemento della realtà deve avere una controparte nella teoria.

Questa affermazione, interpretata alla luce del precedente criterio di realtà, assume un significato ben preciso. Mettiamoci nei panni di uno sperimentatore che sta osservando un certo fenomeno. In assenza di modelli noti a priori, il nostro approccio sarà l'individuazione e la misura delle grandezze fisiche che caratterizzano il sistema in esame. A partire da questi dati, in generale, si possono trovare delle relazioni fra le grandezze in questione, ed è possibile codificarle in leggi empiriche. Conoscendo il valore di una parte delle quantità rilevanti, queste leggi ci consentono di prevedere il valore delle grandezze che restano: secondo il criterio mostrato sopra, è dunque possibile attribuire realtà a queste grandezze. Una teoria completa deve riconoscere l'esistenza di questi elementi della realtà. Per farlo, essa deve trovare un modello che includa le relazioni scoperte su base empirica e ne dia una spiegazione coerente. Una teoria che non renda conto di relazioni verificate sul piano fenomenologico è quindi essenzialmente incompleta. È questo il senso della condizione di completezza formulata da EPR.

Prima di esporre l'argomento EPR a tutti gli effetti, è necessario porre un'altra assunzione fondamentale. Si tratta dell'idea di Einstein di *località*, un principio talmente radicato nel suo pensiero che nell'articolo è praticamente sottointeso, nonostante si tratti di un'ipotesi cruciale per tutto il ragionamento a seguire. I sostenitori della completezza della meccanica quantistica potrebbero infatti interpretare la tesi EPR come una dimostrazione per assurdo della non località della teoria.

Gli elementi della realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

Poste queste premesse, abbiamo tutti gli strumenti per comprendere il ragionamento di EPR. Questi ultimi derivano il paradosso che prende il loro nome con un esempio fisico che può essere espresso in diversi modi equivalenti. Noi scegliamo di seguire la formulazione di Bohm [4], dove viene preso in esame il sistema di due particelle di spin $\frac{1}{2}$ con cui abbiamo già preso confidenza.

Articoliamo il nostro discorso in diversi passaggi, per maggiore chiarezza.

1. Un sistema di due atomi, ciascuno di spin $\frac{1}{2}$, ha spin totale nullo. Come è noto, questa configurazione di numeri quantici si realizza quando lo stato di spin del sistema complessivo è dato dalla formula (2.2)

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle - |\mathbf{n}, \downarrow\rangle |\mathbf{n}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

anche detto *stato di singoletto*. La scelta del versore \mathbf{n} è puramente arbitraria: come abbiamo visto, la forma del vettore di stato è indipendente dalla direzione di riferimento.

2. In certo istante che prendiamo come origine dei tempi, i due atomi sono portati a grande distanza con un metodo che non influenza il loro stato complessivo di spin ($|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle$). Al termine di questa operazione (nell'istante t) i due atomi si trovano rispettivamente in due regioni dello spazio che chiamiamo A e B.
3. Un'osservatore effettua sulla particella in A una misura della componente dello spin lungo la direzione \mathbf{n} . Questo porta al collasso istantaneo della funzione d'onda di spin, che supponiamo ridursi al primo termine della combinazione lineare (questa ipotesi è irrilevante ai fini del nostro ragionamento)

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t + dt)\rangle = |\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle$$

4. A questo punto, l'osservatore può prevedere con certezza l'orientamento dello spin della particella in B, senza dover disturbare ulteriormente il sistema. Questo significa che dall'istante t in avanti, allo spin della particella B è possibile associare un elemento della realtà.
5. Si pongono quindi due possibilità. O lo spin della particella B aveva valore definito anche prima dell'istante t , oppure fino all'istante della misura questo si trovava in uno stato di fluttuazione casuale. In quest'ultimo caso, come reazione istantanea all'atto di misura lo spin

dell'atomo in B acquista realtà, ma questo viola chiaramente il principio di località che avevamo enunciato. Tale principio, infatti, non può ammettere che un processo di misura *generi* simultaneamente un elemento della realtà in un punto distante dello spazio. Ciò significa che delle due alternative soltanto la prima è possibile, pertanto questo elemento della realtà esisteva già prima della misura.

6. Ora, torniamo indietro nel tempo fino al passaggio 3, e immaginiamo che l'osservatore avesse effettuato una misura della componente dello spin lungo una direzione \mathbf{k} ortogonale a \mathbf{n} . Come sappiamo, lo spin non può avere due delle tre componenti simultaneamente definite, secondo la teoria quantistica del momento angolare. Ricordiamo inoltre che lo stato globale prima della misura si può esprimere come

$$|\psi(t)\rangle = \frac{|\mathbf{k}, \uparrow\rangle |\mathbf{k}, \downarrow\rangle - |\mathbf{k}, \downarrow\rangle |\mathbf{k}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Dopo la misura, dunque, lo stato del sistema si riduce ad uno dei due termini di questa combinazione lineare. Questo significa che, dall'istante t in avanti, la componente dello spin lungo \mathbf{k} della particella B ha valore definito, e ad essa corrisponde un elemento della realtà.

7. Ripetendo il ragionamento esposto in 5, realizziamo che anche la componente lungo \mathbf{k} dello spin dell'atomo B deve avere valore definito già prima dell'istante t . La conclusione del ragionamento è che in un certo intervallo temporale che precede l'atto di misura, sia la componente lungo \mathbf{k} che quella lungo \mathbf{n} dello spin di B sono definite. Ma la meccanica quantistica sostiene che queste due grandezze sono incompatibili, e non possono avere realtà simultanea. Abbiamo dimostrato il paradosso: un paradosso che rivela, secondo EPR, l'incompletezza della teoria quantistica.

2.3 Il significato del paradosso

L'articolo del 1935 colse di sorpresa la comunità scientifica, per usare le parole di L. Rosenfeld, "*come un fulmine a ciel sereno*". L'argomentazione di EPR era disarmante nella sua semplicità, e partendo da ipotesi molto ragionevoli portava ad una grave contraddizione nell'interpretazione della meccanica quantistica. Nonostante la sua linearità, il discorso sviluppato nell'articolo tratta dei concetti molto sottili, e diede facilmente origine a

delle incomprensioni. Molti grandi della fisica del Novecento non colsero la profondità della tesi EPR, e in alcuni casi ne fraintesero addirittura il senso.

Bohr, diretto interlocutore di Einstein nel dibattito sull'interpretazione della teoria, pubblicò un articolo con l'intenzione di controbattere la tesi EPR. L'analisi di Bohr, tuttavia, è molto confusa e risulta difficile persino inquadrarne le conclusioni. In un passaggio del suo ragionamento, Bohr sembra voler smentire il paradosso EPR facendo ricorso al principio di complementarità da lui formulato.

Secondo il fisico danese, infatti, Einstein sarebbe giunto al risultato contraddittorio per cui due grandezze incompatibili posseggono simultaneamente un valore definito immaginando di poter effettuare sull'atomo in A due procedimenti di misura che non possono coesistere. Come è possibile verificare, infatti, la disposizione sperimentale che fornisce informazioni sulla prima grandezza è incompatibile con quella che misura il valore della seconda.

Questo fatto è innegabile, ma completamente irrilevante nei confronti dell'argomento EPR. Il loro *gedankenexperiment* incontra, in corrispondenza dell'istante di misura t , due possibili alternative: nella prima, viene misurata la componente dello spin lungo la direzione \mathbf{n} nella seconda la componente lungo \mathbf{k} . Nessuno dei due casi implica la misura simultanea di osservabili incompatibili. Tuttavia, in entrambe le possibilità si dimostra che *prima dell'istante t* l'osservabile misurato aveva valore definito, per l'atomo in B. L'esistenza di elementi della realtà prima dell'istante di misura, ovviamente, non può essere condizionata dalla scelta dell'osservabile da misurare, perciò essi sono necessariamente compresenti prima dell'istante t . Come si può verificare, il principio di complementarità di Bohr rimane inviolato in questo passaggio, tanto importante quanto insidioso.

Un altro malinteso molto diffuso riguarda l'origine della correlazione tra gli orientamenti dello spin degli atomi in A e in B. Al lettore poco attento non sembra esserci niente di strano nella dipendenza statistica tra i due processi di misura. Infatti, esistono molteplici situazioni dell'esperienza quotidiana in cui si verificano delle correlazioni tra misure simultanee e distanti nello spazio. Per fare chiarezza su questo punto, consideriamo l'esempio proposto da J. S. Bell.

Il dottor Bertlmann indossa sempre calze di colore diverso (Figura [2.1](#)). Tra i suoi conoscenti, questa sua bizzarra abitudine è risaputa. Immaginiamo di incontrare il dott. Bertlmann e di notare che la sua calza sinistra è rosa. Pur non avendo visto il colore della calza destra, sappiamo per certo che questa non sarà rosa, a meno che il dottore non abbia rinunciato alla sua usuale stravaganza. Questo non ci stupisce: il nostro senso comune, infatti, ci suggerisce che la mattina stessa il dott. Bertlmann abbia indossato proprio una calza rosa e una non rosa. La correlazione tra i colori delle calze osser-

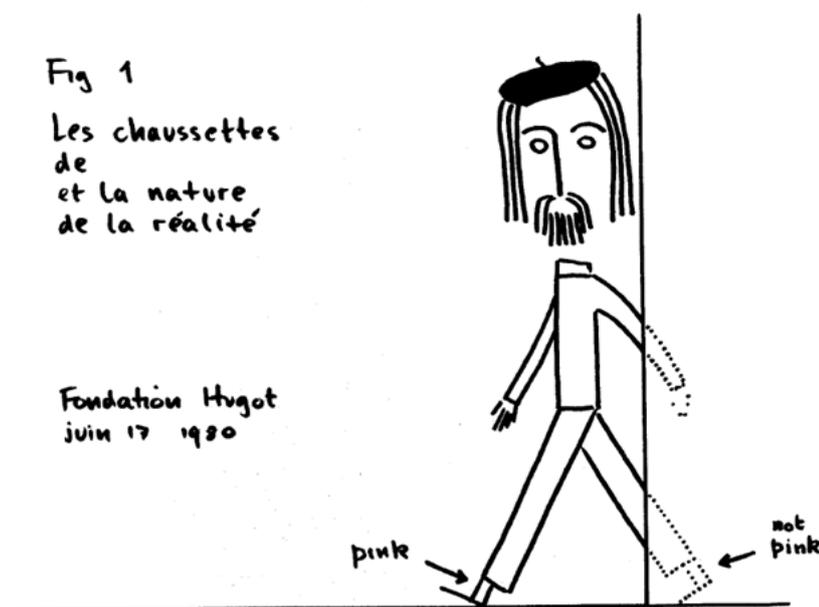


Figura 2.1: Le calze di diverso colore del dottor Bertlmann sono un esempio comune di correlazioni statistiche tra misure distanti nello spazio (da «Bertlmann's socks and the nature of reality», [3]).

vati esiste sin dal momento in cui il dottore si è vestito per uscire di casa. Tuttavia, questo non è ciò che si verifica secondo la meccanica quantistica nel caso di un sistema entangled. Per interpretare in senso quantistico la correlazione tra le calze del dott. Bertlmann, Bell la considera dal punto di vista di un bambino, in modo da liberarsi dai preconcetti del senso comune. Infatti, un bambino potrebbe immaginare che la calza sia dotata di volontà, e scelga quale colore assumere solo nel momento in cui viene osservata. A questo punto, come è possibile che le due calze scelgano sempre colori diversi, nello stesso istante e in punti lontani nello spazio? Come fanno a mettersi d'accordo? Sembra che tra di esse avvenga una sorta di comunicazione istantanea a distanza.

Con questo aneddoto, Bell intendeva mostrare come le correlazioni del mondo macroscopico siano molto diverse da quelle che si verificano tra sistemi microscopici in uno stato entangled. Nel dibattito sull'interpretazione di queste ultime, EPR si schierano *"dalla parte dell'uomo della strada"* (Bell): essi difendono la visione tradizionale della realtà fisica, consapevoli del fatto che la descrizione quantistica porta inevitabilmente alla rinuncia alla località.

2.4 Le implicazioni dell'articolo EPR

La tesi avanzata da Einstein, Podolsky e Rosen ebbe un forte impatto su molte profonde convinzioni dei fisici quantistici.

Una delle idee destabilizzate dall'argomento EPR fu l'*interpretazione a disturbo* delle relazioni di indeterminazione. Questo concetto fu introdotto da Heisenberg stesso, il quale pensava che le limitazioni ai processi di misura sui sistemi microscopici fossero da attribuire ad un disturbo meccanico ineliminabile da parte dell'osservatore. Così, la procedura sperimentale con cui si misura la posizione di una particella comporta un'alterazione imprevedibile dell'impulso, e viceversa. Tuttavia, considerando due sistemi in uno stato entangled, EPR dimostrarono che è possibile ottenere informazioni esatte su un osservabile del primo sistema (rendendo gli osservabili incompatibili indeterminati) effettuando una misura sul secondo, che si trova a grande distanza. È evidente che l'interpretazione a disturbo non è più adeguata a descrivere questo processo, in quanto non spiega la reazione istantanea a distanza da parte del primo sistema.

La proprietà della meccanica quantistica direttamente contestata da EPR è la completezza. Il loro articolo si chiude con le seguenti parole:

"Mentre noi abbiamo mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, abbiamo lasciato aperta la questione se una descrizione siffatta esista o no. Tuttavia noi crediamo che una teoria di questo genere sia possibile."

La risposta alla questione lasciata aperta da EPR giunse negli anni a seguire, con la formulazione di varie teorie indicate collettivamente col nome di teorie a variabili nascoste. L'idea che sta alla loro base è che il vettore nello spazio di Hilbert rappresenti solo parzialmente lo stato di un sistema microscopico: per ottenere la descrizione completa di tale sistema occorre introdurre dei parametri aggiuntivi la conoscenza dei quali fornirebbe informazioni esatte su tutte le proprietà del sistema. Il valore effettivo di queste variabili potrebbe non essere accessibile all'osservatore, lasciando l'esito di una qualsiasi misura impossibile da prevedere. Tuttavia, le teorie a variabili nascoste e la meccanica quantistica interpretano in modo molto diverso questa imprevedibilità: nel primo caso, essa si deve al fatto che l'osservatore ignora il valore dei parametri che definiscono lo stato del sistema; nel secondo, l'indeterminazione è vista come una proprietà intrinseca dei sistemi microscopici, e le leggi che governano i processi di misura sono probabilistiche.

Le teorie a variabili nascoste, in altre parole, rappresentano un *completamento deterministico della meccanica quantistica*. Riprendendo un'analogia proposta da Einstein, alla luce di tale completamento la meccanica quantistica assumerebbe il ruolo che la meccanica statistica ha nei confronti della

dinamica classica: la natura probabilistica della teoria sarebbe in questo senso un carattere *emergente*.

Se non si accetta l'incompletezza della teoria quantistica, è necessario mettere in discussione una delle assunzioni su cui si fonda il ragionamento EPR. Una soluzione, tutt'altro che indolore, è la rinuncia al principio di località: abbandonando questa ipotesi, ammettiamo che sia possibile influenzare istantaneamente a distanza gli elementi della realtà. Einstein non si rassegnò mai a tale rottura della continuità spatio-temporale, e vide nelle teorie alle variabili nascoste l'alternativa in grado di riprodurre i risultati sperimentali recuperando i principi tradizionali della fisica classica.

Gli sforzi di costruire una teoria di questo tipo da parte di David Bohm, tuttavia, non portarono al risultato auspicato da Einstein: egli riuscì nell'intento di descrivere i fenomeni microscopici in una teoria dall'impianto deterministico, ma per farlo dovette comunque rinunciare alla località. John Stewart Bell rimase impressionato dal lavoro di Bohm, e dedicò molto tempo nel tentativo di integrare all'interno della sua teoria il principio che Einstein riteneva irrinunciabile. Nonostante l'impegno, Bell non riuscì mai a ripristinare la località: sembrava che questo principio fosse incompatibile con le previsioni stesse della teoria. Illuminato da questa scoperta, Bell escogitò un criterio sperimentale, universalmente noto come la *disuguaglianza di Bell*, che permette di verificare se la realtà fisica è descritta da una teoria locale o non locale, basato ancora una volta sulle correlazioni tra due particelle quantistiche in uno stato entangled.

Capitolo 3

Il teorema di Bell

L'obiettivo della critica di Einstein, Podolsky e Rosen alla meccanica quantistica era individuare una contraddizione nella struttura della teoria che fosse possibile risolvere solo recuperando i principi del pensiero classico, quali il determinismo e la continuità spazio-temporale, e ritornando ad una visione della natura più intuitiva e familiare. Tuttavia, i fenomeni del mondo microscopico si sono rivelati tanto enigmatici da modificare anche le nostre convinzioni più profonde sul comportamento dei sistemi fisici.

John Stewart Bell, con il teorema che prende il suo nome, portò la questione dell'esistenza delle variabili nascoste dal piano concettuale a quello empirico. La scoperta di questo possibile approccio al problema, che A. Shimony definì *metafisica sperimentale*, fu il risultato di un'attenta analisi della teoria dell'onda pilota formulata da Bohm. Bell rimase profondamente colpito dalla sua teoria in quanto portava alle stesse previsioni della meccanica quantistica basandosi su uno schema perfettamente deterministico. L'interpretazione di Bohm, apparentemente, riusciva a spiegare la complessa fenomenologia della teoria quantistica facendo a meno di tutti i suoi aspetti più controintuitivi (la casualità, il principio di indeterminazione, etc). La maggiorparte della comunità scientifica reagì con indifferenza alla proposta della teoria dell'onda pilota: sul piano quantitativo non aggiungeva niente di nuovo alla meccanica quantistica, mentre sul piano teorico l'introduzione delle variabili nascoste sembrava una speculazione infondata, contraria ad una mentalità che aveva rinunciato alla conoscenza (e all'esistenza) del mondo oltre il processo di misura. Bell, invece, era convinto che l'analisi del lavoro di Bohm potesse portare ad una comprensione più dettagliata del mondo microscopico. Studiò a fondo la sua teoria in cerca di un punto debole, fino a scoprire che una conseguenza inevitabile della teoria stessa era la *non località*. Eventi che si verificano in un certo punto dello spazio producono effetti in regioni lontanissime e causalmente disconnesse.

Di fronte a questo fatto, Bell si chiese quale fosse l'origine della non località nello schema elaborato da Bohm. Si trattava di un elemento accidentale di questa specifica teoria, o era una conseguenza inevitabile della fenomenologia descritta? Nella seconda delle ipotesi, Bell dedusse che se l'evidenza sperimentale implica la non località, allora deve esistere un metodo diretto per verificare sperimentalmente che è impossibile formulare una teoria locale che renda conto delle previsioni quantistiche. Questo ragionamento lo portò, quindi, alla formulazione della sua famosa disuguaglianza.

3.1 La disuguaglianza di Bell

Il teorema di Bell si può enunciare come segue.

Nessuna teoria deterministica e locale è compatibile con le previsioni della meccanica quantistica.

Per dimostrare questo risultato facciamo riferimento ad uno specifico esperimento ideale. Consideriamo il sistema che avevamo preso in considerazione nella derivazione del paradosso EPR, formato da due atomi di spin $\frac{1}{2}$ nello stato di singoletto dato da (2.2). Le due particelle si separano all'istante iniziale e si dirigono in direzioni opposte. Ai due estremi dell'apparato sperimentale sono posti due strumenti, che chiameremo rispettivamente A e B, con i quali possiamo misurare la componente dello spin rispetto ad una qualsiasi direzione. L'esperimento è organizzato in modo che le misure da parte di A e di B siano effettuate simultaneamente, in modo che tra i due apparati non possa avvenire la comunicazione di un segnale fisico (a velocità minore o uguale di quella della luce) nell'intervallo temporale tra le due misure.

Ipotizziamo che esista una teoria a variabili nascoste che descrive correttamente i risultati di questo esperimento. Questa teoria codifica lo stato del sistema dei due atomi in un insieme di parametri λ di natura completamente generica (numeri reali, funzioni, vettori, etc). Per semplicità, supponiamo che λ sia un'unica variabile continua, senza perdere in generalità. Trattandosi di una teoria deterministica, il valore di ogni osservabile dei due atomi è una funzione ben definita della variabile λ . In particolare, gli osservabili rilevanti nel nostro esperimento sono

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \qquad B(\mathbf{b}, \lambda) = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$$

dove \mathbf{a} e \mathbf{b} sono due vettori unitari generici e $\boldsymbol{\sigma}$ è un vettore legato allo spin dalla relazione $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$. I pedici 1 e 2 si riferiscono alle particelle

rispettivamente nelle regioni A e B. Come è possibile verificare, i possibili valori di A e B sono

$$A = \pm 1 \qquad B = \pm 1 \qquad (3.1)$$

Le direzioni \mathbf{a} e \mathbf{b} rispetto alle quali si misura la componente dello spin sono parametri dei due apparati A e B che è possibile modificare dinamicamente tra due ripetizioni della stessa misura. È importante sottolineare che A dipende soltanto dalla scelta della direzione \mathbf{a} , che definisce l'osservabile, e dalla variabile λ , che ne determina il valore con certezza, ma risulta completamente indipendente dal parametro \mathbf{b} (e lo stesso avviene, simmetricamente, per B): questa è una conseguenza della nostra richiesta di località della teoria, che in questo modo diventa un'ipotesi fondamentale di tutto il ragionamento che segue. Dal momento che le due misure avvengono simultaneamente, l'esito della misura in A non può essere influenzato dalla scelta dell'osservabile da misurare in B, in quanto non può avvenire l'interazione tra i due apparati di misura.

Le teorie a variabili nascoste, come abbiamo osservato nel Capitolo 2, spiegano il comportamento (apparentemente) stocastico del mondo microscopico supponendo che l'osservatore non possa conoscere il valore esatto dei parametri λ . Pertanto, il massimo delle informazioni accessibili allo sperimentatore nel momento in cui prepara i due atomi nello stato iniziale è la distribuzione di probabilità della variabile λ , che chiameremo $\rho(\lambda)$. Introduciamo a questo punto una proprietà del sistema che ha un ruolo centrale nella nostra discussione. Definiamo la quantità $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda)$ come

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda) = A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)$$

Come è evidente, essa rappresenta la correlazione tra le misure effettuate sulle due particelle: se queste hanno componenti dello spin, rispetto alle direzioni scelte, aventi lo stesso segno, $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda) = 1$; in caso contrario, $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda) = -1$. Ripetendo l'esperimento diverse volte è possibile ricavare il valore medio di $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda)$, utile in quanto direttamente confrontabile con la previsione teorica

$$\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Gamma} d\lambda E(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda)$$

dove Γ rappresenta il dominio su cui è normalizzata la distribuzione delle variabili nascoste $\rho(\lambda)$. Per procedere, consideriamo per A la coppia di vettori

unitari \mathbf{a}, \mathbf{a}' , e per B la coppia \mathbf{b}, \mathbf{b}' . È facile mostrare che

$$\begin{aligned} \bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}') &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho \lambda [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)] = \\ &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho \lambda [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)(1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda))] - \\ &= \int_{\Gamma} d\lambda \rho \lambda [A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)(1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda))] \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo aggiunto e tolto il termine $\pm A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)$

Ricordando che il modulo di un integrale è sempre minore o uguale all'integrale del modulo, si ha

$$\begin{aligned} |\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda)(1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}', \lambda)) + \\ &+ \int_{\Gamma} d\lambda \rho(\lambda)(1 \pm A(\mathbf{a}', \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)) \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della considerazione (3.1). Sviluppando i calcoli, e usando la definizione di \bar{E} , si ottiene infine

$$|\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| \leq 2 \pm (\bar{E}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + \bar{E}(\mathbf{a}', \mathbf{b}))$$

$$|\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |\bar{E}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + \bar{E}(\mathbf{a}', \mathbf{b})| \leq 2 \quad (3.2)$$

Questo risultato è noto come *disuguaglianza CHSH* (dalle iniziali dei suoi ideatori: Clauser, Horne, Shimony e Horne [5]) e si tratta di una riformulazione dell'originaria disuguaglianza di Bell [2], con cui la possibilità di una teoria deterministica e locale viene messa alla prova degli esperimenti. Infatti, al primo membro compaiono quattro termini il cui valore è misurabile senza difficoltà: è sufficiente ripetere l'esperimento più volte per ciascuna coppia di direzioni possibili in A e in B.

L'algebra parla chiaro: se il fenomeno in esame è descritto correttamente da una generica teoria locale a variabili nascoste, la disuguaglianza deve essere verificata. Consideriamo invece le previsioni della meccanica quantistica relative al sistema composto dai due atomi.

La grandezza $A(\mathbf{a})B(\mathbf{b})$, in meccanica quantistica, è un osservabile del sistema delle due particelle rappresentato dall'operatore

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2$$

dove $\hat{\sigma}$, nel formalismo di Dirac, è l'operatore di Pauli dello spazio di Hilbert degli spin. Supponiamo che lo stato di preparazione delle due particelle sia nella solita forma entangled

$$|\psi\rangle = \frac{|\mathbf{n}, \uparrow\rangle |\mathbf{n}, \downarrow\rangle - |\mathbf{n}, \downarrow\rangle |\mathbf{n}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

dove \mathbf{n} è un generico vettore unitario dello spazio tridimensionale (ricordiamo che la scelta della direzione di \mathbf{n} è del tutto arbitraria nella rappresentazione di questo stato). Il valore medio del prodotto $A(\mathbf{a})B(\mathbf{b})$ previsto dalla meccanica quantistica nel suddetto stato si ottiene dalla nota formula

$$\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle A(\mathbf{a})B(\mathbf{b}) \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 | \psi \rangle$$

Sostituendo l'espressione di $|\psi\rangle$ data in (3.3), ponendo $\mathbf{n} = \mathbf{a}$ possiamo sviluppare il seguente calcolo

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 |\psi\rangle = \\ & = \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 \left(\frac{|\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{a}, \downarrow\rangle - |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{a}, \uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \\ & = (\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 |\mathbf{a}, \uparrow\rangle \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 |\mathbf{a}, \downarrow\rangle - \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 |\mathbf{a}, \downarrow\rangle \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 |\mathbf{a}, \uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ & = (|\mathbf{a}, \uparrow\rangle (1) \cdot \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 |\mathbf{a}, \downarrow\rangle - |\mathbf{a}, \downarrow\rangle (-1) \cdot \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 |\mathbf{a}, \uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}} = \end{aligned}$$

Applicando ora le relazioni (2.1), si ha

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 |\psi\rangle = \\ & = [|\mathbf{a}, \uparrow\rangle \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 (-|\mathbf{b}, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2}) + \\ & + |\mathbf{a}, \downarrow\rangle \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 (|\mathbf{b}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi})] \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ & = [|\mathbf{a}, \uparrow\rangle (-|\mathbf{b}, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2}) + \\ & + |\mathbf{a}, \downarrow\rangle (|\mathbf{b}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} - |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi})] \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ & = (-|\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{b}, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - |\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + \\ & + |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{b}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} - |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Quindi, il valore di aspettazione $A(\mathbf{a})B(\mathbf{b})$ si ottiene come

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 | \psi \rangle = \\
& = \langle \psi | (-|\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{b}, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - |\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + \\
& \quad + |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{b}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} - |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
& = \frac{\langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | - \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow |}{\sqrt{2}} (-|\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{b}, \uparrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - |\mathbf{a}, \uparrow\rangle |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} + \\
& \quad + |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{b}, \uparrow\rangle \cos \frac{\theta}{2} - |\mathbf{a}, \downarrow\rangle |\mathbf{b}, \downarrow\rangle \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
& = \frac{1}{2} (-\langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \cos \frac{\theta}{2} + \\
& \quad + \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \cos \frac{\theta}{2} - \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} - \\
& \quad - (-\langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \cos \frac{\theta}{2} + \\
& \quad + \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \cos \frac{\theta}{2} - \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) = \\
& = \frac{1}{2} (-\langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \langle \mathbf{a}, \downarrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \cos \frac{\theta}{2} + \\
& \quad - \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \uparrow | \cos \frac{\theta}{2} + \langle \mathbf{a}, \uparrow | \langle \mathbf{a}, \downarrow | \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi})
\end{aligned}$$

Riapplicando le formule (2.1), otteniamo infine

$$\begin{aligned}
& \langle \psi | \mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}_1 \mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}_2 | \psi \rangle = \\
& = \frac{1}{2} (-(-\sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - (\cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} - \\
& \quad - (\cos \frac{\theta}{2}) \cos \frac{\theta}{2} + (\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}) \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}) = \\
& = \frac{1}{2} (\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}) = \\
& = -\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = \\
& = -\cos \theta = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}
\end{aligned}$$

In definitiva, il nostro risultato è

$$\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle A(\mathbf{a})B(\mathbf{b}) \rangle_\psi = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Ora siamo in grado di ricavare il valore previsto dalla meccanica quantistica per l'espressione

$$|\bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \bar{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |\bar{E}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') + \bar{E}(\mathbf{a}', \mathbf{b})| \quad (3.4)$$

per qualsiasi scelta di \mathbf{a} , \mathbf{a}' , \mathbf{b} , \mathbf{b}' . A questo punto, assegniamo a tali vettori delle direzioni complanari, orientate in modo che gli angoli che esse formano

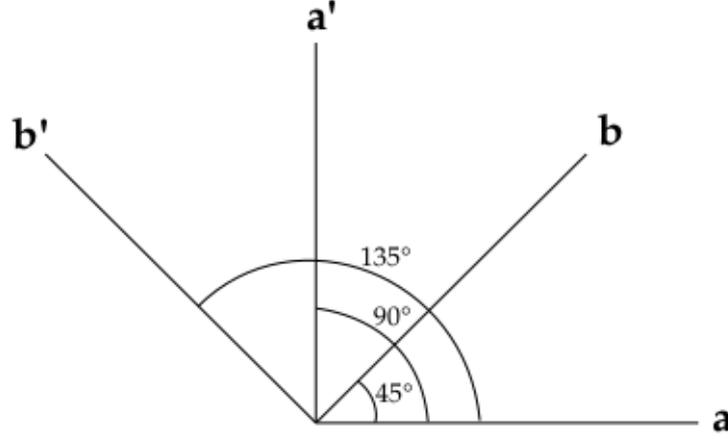


Figura 3.1: Scelta delle direzioni degli assi dei polarizzatori in A e in B.

abbiano i seguenti valori (Figura [3.1](#)):

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b} &= 45^\circ & \hat{a}\hat{b}' &= 135^\circ \\ \hat{a}'\hat{b} &= -45^\circ & \hat{a}'\hat{b}' &= 45^\circ \end{aligned}$$

La quantità [\(3.4\)](#) valutata per questa scelta dei versori, è data da

$$\begin{aligned} & |-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - (-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}')| + |-\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' - \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}| = \\ & = \left| -\cos(\hat{a}\hat{b}) + \cos(\hat{a}\hat{b}') \right| + \left| -\cos(\hat{a}'\hat{b}') - \cos(\hat{a}'\hat{b}) \right| = \\ & = \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Come è evidente, questo risultato contraddice la disuguaglianza CHSH, conseguenza diretta delle ipotesi di una generica teoria a variabili nascoste. La conclusione è che la meccanica quantistica prevede un fenomeno inspiegabile nel contesto di una teoria deterministica e locale, come enunciato dal teorema di Bell. Questo teorema, in realtà, potrebbe essere riformulato in termini più generali, in quanto il determinismo non è una condizione necessaria nella dimostrazione della disuguaglianza CHSH. Il suo enunciato avrebbe quindi la forma seguente:

Nessuna teoria locale può riprodurre le previsioni della meccanica quantistica.

Infatti, è possibile mostrare (si veda [\[8\]](#)) come la sola ipotesi di località dei processi fisici, secondo cui non possono generarsi istantaneamente

delle correlazioni tra eventi lontani nello spazio, sia sufficiente per arrivare al risultato (3.2), indipendentemente dal fatto che la teoria sia probabilistica o deterministica. Questo è il motivo per cui la teoria dell'onda pilota di Bohm, per arrivare agli stessi risultati della meccanica quantistica, rinuncia alla località: non si tratta di una caratteristica accidentale della teoria, ma di una condizione imprescindibile per riprodurre le previsioni quantistiche.

Inoltre, il teorema di Bell così riformulato ci porta a considerare il concetto di località da un diverso punto di vista. Se nessuna teoria locale può spiegare le predizioni quantistiche, e queste sono corrette, allora la non località va riconosciuta come una caratteristica intrinseca dei fenomeni microscopici. In altre parole, è la natura stessa ad essere non locale, indipendentemente dalla teoria che scegliamo per descriverla. Questo è il senso dell'espressione "*metafisica sperimentale*": il problema della località, che prima si riteneva trattabile solo con argomentazioni concettuali, con la disuguaglianza CHSH può essere risolto senza ambiguità basandosi sui risultati di una prova sperimentale. La scoperta di Bell ispirò quindi diverse realizzazioni materiali del suo esperimento mentale, l'esito delle quali ci dà una risposta definitiva: i processi fisici violano il principio di località.

Capitolo 4

Gli esperimenti sulla località

I primi test sperimentali della disuguaglianza di Bell furono effettuati negli anni '70, applicando diverse strategie per la realizzazione di una coppia di particelle in uno stato entangled: spesso si utilizzarono fotoni emessi in transizioni a cascata di diverse specie atomiche, in altri casi si fece ricorso sempre a coppie di fotoni generate dall'annichilazione elettrone-positrone, oppure a due protoni preparati in uno stato di singoletto dello spin.

In prima analisi, i risultati di gran parte di questi esperimenti violano la disuguaglianza di Bell e confermano le previsioni quantistiche. Tuttavia, diverse furono le critiche rivolte a questi primi tentativi di verificare il principio di località: in particolare, un difetto nell'apparato di misura poteva inficiare le condizioni ideali sotto cui il teorema di Bell risulta valido. In tutti questi esperimenti, infatti, i rivelatori A e B che misurano lo stato di polarizzazione (o l'orientamento dello spin) delle particelle coinvolte sono stati lasciati invariati per l'intera durata della misurazione: questo significa che i parametri \mathbf{a} e \mathbf{b} che specificano gli osservabili misurati in A e in B hanno un valore fissato molto tempo prima dell'istante di misura. Ricordiamo che l'ipotesi fondamentale della dimostrazione della disuguaglianza di Bell sta nel fatto che i processi di misura siano eventi causalmente disconnessi, in modo che tra essi non sia possibile alcuna comunicazione. L'atto di misura, tuttavia, comprende anche la scelta del parametro \mathbf{a} o \mathbf{b} . In tale configurazione sperimentale, quindi, per mezzo di un'ipotetica interazione sconosciuta, gli apparati A e B hanno il tempo per scambiarsi informazioni sul valore dei rispettivi parametri, e compromettere l'isolamento dei due processi di misura. Questa eventualità invalida la disuguaglianza di Bell e riconcilia i risultati dei primi esperimenti con le teorie a variabili nascoste: in tal senso, questi test non sono ritenuti conclusivi.

Nel 1982, A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger condussero un brillante esperimento sulle correlazioni tra fotoni in cui l'interazione tra i due rivelatori

fu resa un'eventualità molto remota. Per questo motivo, il lavoro dei tre ricercatori francesi rappresenta uno dei più rilevanti successi sperimentali nella verifica della non località.

4.1 L'esperimento di Aspect

In quello che segue facciamo riferimento a [1].

Aspect e i suoi collaboratori realizzarono una versione ottica dell'esperimento mentale con cui abbiamo derivato la disuguaglianza CHSH: il sistema di due particelle è rappresentato da una coppia di fotoni, e la variabile entangled è la polarizzazione anziché lo spin. In termini molto generali, questa variante dell'esperimento si articola nelle seguenti fasi:

1. **Generazione.** Due fotoni sono generati in uno stato in cui le rispettive polarizzazioni lineari sono correlate, e si allontanano dalla sorgente in direzioni opposte, rispettivamente verso gli apparati di misura A e B;
2. **Misura della polarizzazione.** Entrambe le particelle incontrano nel loro tragitto un polarizzatore lineare (il cui asse può assumere diverse direzioni), e un fotomoltiplicatore posto dietro a ciascun filtro verifica l'esito del test di polarizzazione;
3. **Conteggio delle coincidenze.** I segnali prodotti dai due fotorivelatori si ricongiungono in un circuito che conta il numero di casi in cui tutti e due i fotoni hanno superato i rispettivi test. A partire da tali misure sono quindi valutate le grandezze rilevanti per la verifica della disuguaglianza CHSH.

L'apparato sperimentale è schematizzato in Figura 4.1. La peculiarità dell'esperimento di Aspect stava nell'efficace soluzione che esso poneva al problema dell'isolamento dei processi di misura effettuati sulle due particelle. Per scongiurare una possibile interazione tra i due polarizzatori, il gruppo di Aspect li progettò in modo che la selezione degli orientamenti \mathbf{a} e \mathbf{b} dei loro assi avvenisse immediatamente prima della rivelazione dei fotoni, in modo da impedire la propagazione di un qualsiasi segnale fisico (ad una velocità minore o uguale a quella della luce) da un rivelatore all'altro nell'intervallo di tempo tra la scelta dell'orientamento e la misura di polarizzazione. In questo modo, anche ammettendo che tra i due polarizzatori sia possibile un'interazione (che in natura non è mai stata osservata), questi non avrebbero il tempo di scambiarsi informazioni sui relativi orientamenti prima che siano effettuate le misure sui fotoni.

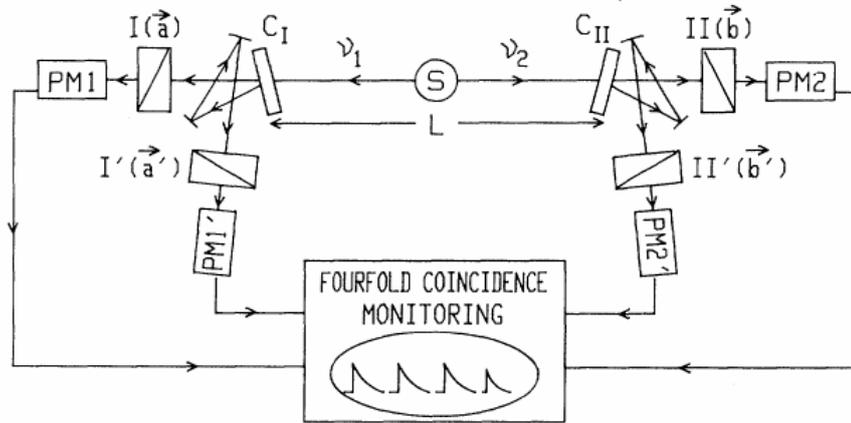


Figura 4.1: Schema dell'apparato sperimentale impiegato da Aspect. In S viene generata la coppia di fotoni entangled ν_1 e ν_2 . Ognuno di essi viene indirizzato dal corrispondente interruttore ottico (C_I/C_{II}) alternativamente verso due polarizzatori con asse orientato in diverse direzioni ($I(\mathbf{a})$, $I(\mathbf{a}')/II(\mathbf{b})$, $II(\mathbf{b}')$). I fotoni che superano i test di polarizzazione sono quindi raccolti dai fotomoltiplicatori PM, i quali inviano un segnale al circuito di controllo delle coincidenze (da [I](#)).

Per ottenere questo risultato, Aspect e il suo gruppo collocarono degli interruttori ottici lungo il percorso di ciascun fotone, in modo da dirigerlo alternativamente su polarizzatori con diversi orientamenti. Questa combinazione di un interruttore e due polarizzatori è equivalente a un unico filtro polarizzatore che cambia la direzione del proprio asse ad alta frequenza.

Analizziamo nel dettaglio i diversi passaggi in cui si sviluppa il fenomeno in esame.

1. **Generazione.** La sorgente di fotoni correlati è un campione di atomi di Calcio pompato nello stato eccitato $4p^2 \ ^1S_0$. La cascata radiativa $4p^2 \ ^1S_0 \rightarrow 4s4p \ ^1P_1 \rightarrow 4s^2 \ ^1S_0$, che riporta l'atomo nel suo stato fondamentale, genera una coppia di fotoni visibili e in uno stato di polarizzazione entangled. Il vantaggio di lavorare con radiazione nello spettro del visibile sta nella possibilità di realizzare i rivelatori a partire da semplici filtri polaroid e fotomoltiplicatori. È importante notare che la vita media del livello intermedio della cascata è di 5 ns, in quanto rappresenta il ritardo tra le emissioni dei due fotoni. Questi sono pertanto guidati in direzione dei rispettivi analizzatori per mezzo di sofisticati canali ottici.

2. **Misura di polarizzazione.** Ciascun interruttore ottico si trova ad una distanza di 6 m dalla sorgente: il tempo richiesto ad un segnale per propagarsi alla velocità della luce da un rivelatore all'altro è quindi di 40 ns. Il funzionamento dell'interruttore si basa sull'interazione acusto-ottica dei fotoni con delle onde stazionarie prodotte in acqua. Due trasduttori elettroacustici posti agli estremi di uno specchio d'acqua generano due onde ultrasoniche contropropaganti (ad una frequenza di circa 25 MHz), le quali interferiscono e producono delle onde stazionarie sulla superficie del liquido. I fotoni incidono nel dispositivo formando un angolo $\theta_B = 5 \times 10^{-3}$ rad rispetto ai fronti d'onda, valore dell'angolo di Bragg per l'acqua. In questo modo, attraversando il dispositivo in un certo istante, il fotone può procedere indisturbato se in quel punto l'ampiezza dell'onda è nulla, oppure essere deviato di un angolo $2\theta_B$ nel caso in cui l'ampiezza sia massima. Queste due possibilità si alternano al doppio della frequenza dell'onda sonora, perciò il tempo di switching è 10 ns. Notiamo che in questo intervallo di tempo è impossibile lo scambio di segnali fisici tra i due rivelatori, perciò i processi di misura eseguiti sui due fotoni si possono considerare a tutti gli effetti indipendenti.

Attraversato l'interruttore ottico, il fotone è sottoposto ad un test di polarizzazione lineare. Indichiamo l'orientamento degli assi dei polarizzatori con la solita notazione \mathbf{a} , \mathbf{a}' per la coppia in A e \mathbf{b} , \mathbf{b}' per la coppia in B: questi parametri possono essere opportunamente impostati prima dell'esecuzione dell'esperimento. Dietro ogni filtro polarizzatore, un fotomoltiplicatore raccoglie i fotoni che hanno superato il test di polarizzazione e produce un segnale destinato a successiva analisi da parte del circuito di controllo delle coincidenze. L'efficienza del rivelatore è relativamente bassa: questo aspetto rappresenta uno dei punti deboli della procedura sperimentale adottata da Aspect, come vedremo.

3. **Conteggio delle coincidenze.** Questa operazione è affidata a quattro circuiti, uno per ogni possibile combinazione di polarizzatori in A e in B ((\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$, $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$). Ognuno di essi conta il numero di coincidenze tra i segnali provenienti dai due fotomoltiplicatori, ovvero il numero di casi in cui entrambi i fotoni della coppia sono rivelati. Dividendo questo valore per la durata della misurazione si ottiene il rate medio di coincidenze per una specifica coppia di polarizzatori, quantità richiesta per la verifica della disuguaglianza CHSH.

Passiamo ora ad esaminare come viene effettuata l'acquisizione dei dati.

La procedura seguita da Aspect prevede il calcolo dei rate di coincidenze per tre diverse configurazioni dell'apparato sperimentale

- con tutti e quattro i polarizzatori attivi. I rate di coincidenze misurati dai quattro circuiti in questa situazione sono indicati con $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $N(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$, $N(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $N(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$;
- con tutti i polarizzatori rimossi dall'apparato sperimentale. In questo caso, i rate forniti dai quattro circuiti sono indicati con $N(\infty, \infty)$, $N(\infty, \infty')$, $N(\infty', \infty)$, $N(\infty', \infty')$;
- con un solo polarizzatore rimosso da A o da B, per la valutazione di $N(\mathbf{a}', \infty)$ e $N(\infty, \mathbf{b})$.

Poichè si vuole osservare il comportamento dei due fotoni quando essi sono sottoposti ad un test congiunto di polarizzazione rispetto ad una qualsiasi coppia di direzioni (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$, $(\mathbf{a}', \mathbf{b})$, $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$, le frequenze dei due interruttori ottici sono impostate su valori leggermente diversi (come già detto, intorno ai 50 MHz). In questo modo la coppia di polarizzatori selezionata cambia nel tempo in modo quasi-periodico, e in una misurazione prolungata nel tempo le quattro possibilità sopra elencate sono equiprobabili.

La disuguaglianza CHSH applicata al fenomeno studiato da Aspect ha la forma seguente

$$S = P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - P(\mathbf{a}') - P(\mathbf{b})$$

$$-1 \leq S \leq 0$$

dove $P(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ indica la probabilità che entrambi gli esiti dei test di polarizzazione rispetto alla direzione \mathbf{x} in A e \mathbf{y} in B siano positivi, e $P(\mathbf{z})$ la probabilità che un fotone superi un filtro polarizzatore orientato lungo \mathbf{z} . Questi termini sono calcolati direttamente come:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} \qquad P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) = \frac{N(\mathbf{a}', \mathbf{b})}{N(\infty', \infty)}$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b}')}{N(\infty, \infty')} \qquad P(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \frac{N(\mathbf{a}', \mathbf{b}')}{N(\infty', \infty')}$$

$$P(\mathbf{a}') = \frac{N(\mathbf{a}', \infty)}{N(\infty', \infty)} \qquad P(\mathbf{b}) = \frac{N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)}$$

Come è evidente, infatti, i primi quattro rapporti forniscono la frazione dei test di polarizzazione congiunti nei quali si è ottenuto lo stesso esito su

entrambi i lati dell'apparato sperimentale. Con un ragionamento analogo si spiegano le ultime due identità.

L'esperimento è stato eseguito scegliendo gli orientamenti dei polarizzatori in modo da massimizzare la discrepanza tra le previsioni della meccanica quantistica e la disuguaglianza di Bell. Gli angoli compresi tra queste direzioni sono

$$\hat{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a}'\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{a}'\hat{\mathbf{b}}' = 22.5^\circ \qquad \hat{\mathbf{a}}\mathbf{b}' = 67.5^\circ$$

Il valore misurato di S è

$$S_{exp} = 0.101 \pm 0.020$$

che viola la disuguaglianza di Bell di 5 deviazioni standard. D'altra parte, l'esito dell'esperimento è in ottimo accordo con il valore atteso sulla base dei calcoli quantistici, che prevedono $S_{qm} = 0.112$.

Nonostante l'evidenza di questo risultato, una parte della comunità scientifica che non voleva rassegnarsi all'abbandono del realismo locale analizzò la procedura sperimentale seguita da Aspect e, facendo leva su alcune sue caratteristiche, diede una spiegazione dei valori misurati di nuovo compatibile con il principio di località. L'esperimento di Aspect, pertanto, non chiuse definitivamente il dibattito aperto da Einstein, ma spinse i sostenitori delle teorie locali verso soluzioni sempre più complicate ed improbabili.

4.2 Il problema dei *loophole* e i successivi *Bell test*

L'esperimento di Aspect, malgrado portasse a delle conclusioni apparentemente inequivocabili, restava per diversi motivi una realizzazione insoddisfacente del gedankenexperiment di Bell. L'interazione tra i dispositivi di misura in A e in B è solo uno dei vari effetti che possono contraddire le ipotesi della disuguaglianza CHSH, rendendo i risultati dell'esperimento compatibili con una teoria realistica e locale: queste imperfezioni nell'apparato sperimentale sono detti *loophole*, e in linea di principio qualsiasi *Bell test* che ne presenti uno non può essere considerato significativo. In questi casi, per poter applicare il teorema di Bell bisogna introdurre delle ipotesi aggiuntive che, per quanto ragionevoli, non sono garantite da nessun principio fisico.

Nell'esperimento di Aspect sono rintracciabili almeno altri due *loophole*.

Il primo, come abbiamo accennato nel paragrafo precedente, riguarda l'efficienza dei fotomoltiplicatori. Dobbiamo precisare che il rate di coincidenze misurato dai vari circuiti non è quello reale (che indichiamo con \mathcal{N} ma è

sempre inferiore ad esso. Infatti, se entrambi i fotoni superano i polarizzatori, non è detto che questi siano automaticamente rivelati dai rispettivi fotomoltiplicatori. L'assunzione implicita che abbiamo fatto nel paragrafo precedente è che l'efficienza dei rivelatori sia indipendente dallo specifico fotone considerato, come suggerisce il buonsenso: in altre parole tutti i fotoni che superano il test di polarizzazione hanno la stessa probabilità di essere individuati dai fotomoltiplicatori. Sotto questa condizione, la relazione tra il rate di coincidenze misurato e quello reale è la seguente:

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \epsilon^2 \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dove ϵ indica l'efficienza e \mathbf{x}, \mathbf{y} rappresentano l'orientamento dei polarizzatori (oppure denotano la loro assenza). Il valore di S misurato, pertanto, coincide con quello ideale \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} S &= \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} - \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b}')}{N(\infty, \infty')} + \frac{N(\mathbf{a}', \mathbf{b})}{N(\infty', \infty)} \\ &+ \frac{N(\mathbf{a}', \mathbf{b}')}{N(\infty', \infty')} - \frac{N(\mathbf{a}', \infty)}{N(\infty', \infty)} - \frac{N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)} = \\ &= \frac{\epsilon^2 \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty, \infty)} - \frac{\epsilon^2 \mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')}{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty, \infty')} + \frac{\epsilon^2 \mathcal{N}(\mathbf{a}', \mathbf{b})}{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty', \infty)} \\ &+ \frac{\epsilon^2 \mathcal{N}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')}{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty', \infty')} - \frac{\epsilon^2 \mathcal{N}(\mathbf{a}', \infty)}{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty', \infty)} - \frac{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty, \mathbf{b})}{\epsilon^2 \mathcal{N}(\infty, \infty)} = \\ &= \frac{\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\mathcal{N}(\infty, \infty)} - \frac{\mathcal{N}(\mathbf{a}, \mathbf{b}')}{\mathcal{N}(\infty, \infty')} + \frac{\mathcal{N}(\mathbf{a}', \mathbf{b})}{\mathcal{N}(\infty', \infty)} \\ &+ \frac{\mathcal{N}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')}{\mathcal{N}(\infty', \infty')} - \frac{\mathcal{N}(\mathbf{a}', \infty)}{\mathcal{N}(\infty', \infty)} - \frac{\mathcal{N}(\infty, \mathbf{b})}{\mathcal{N}(\infty, \infty)} = \mathcal{S} \end{aligned}$$

Se però rinunciamo all'ipotesi sull'efficienza, questo ragionamento non è più applicabile e in linea di principio S può essere diverso da \mathcal{S} . Infatti, ragionando in termini di una teoria a variabili nascoste, nulla impedisce che la probabilità di rivelazione di un fotone da parte di un fotomoltiplicatore sia una funzione dello stato λ della coppia a cui appartiene. Se ammettiamo che esista tale dipendenza, è possibile che il sottoinsieme di fotoni rivelati manifesti correlazioni che violano la disuguaglianza CHSH, mentre la totalità delle coppie di fotoni generate continui ad essere descritta da una teoria realistica e locale. Questo problema è generalmente definito *fair sampling loophole*, in quanto dobbiamo ipotizzare che il campione di fotoni osservati riproduca correttamente le proprietà del loro insieme affinché l'esito dell'esperimento sia rilevante.

Per eliminare questo loophole dalla procedura sperimentale sarebbero necessari valori di efficienza molto elevati, tecnicamente irraggiungibili negli anni dell'esperimento di Aspect.

Anche se nulla ci assicura il contrario, la dipendenza tra l'efficienza dei rivelatori e lo stato dei fotoni è senza dubbio poco credibile. Anzitutto, l'origine fisica dell'efficienza di uno strumento di misura è sempre stata attribuita a fattori casuali e incontrollabili *insiti* nel dispositivo: l'idea che essa sia condizionata anche dalle proprietà dei fotoni incidenti lascia qualche perplessità. Inoltre, anche se ammettiamo che la probabilità di rivelazione vari a seconda dello stato del fotone, sembra comunque assurdo che l'effetto globale di questo complicato meccanismo sia la riproduzione delle previsioni quantistiche. È come se il sistema sotto osservazione e l'apparato di misura si fossero messi d'accordo per restituire agli sperimentatori un risultato compatibile con la teoria quantistica, mentre la realtà sottostante rimane locale e deterministica: una sorta di complotto a cui è difficile credere.

Di recente sono stati effettuati alcuni Bell test utilizzando rivelatori ad alta efficienza, come nell'esperimento di M. Giustina e collaboratori del 2013 [9], i quali hanno verificato una violazione della disuguaglianza di Bell facendo a meno dell'ipotesi di fair sampling.

La seconda falla nel metodo sperimentale adottato da Aspect sta nel sistema che determina la traiettoria dei fotoni e il test di polarizzazione a cui essi sono sottoposti. Infatti, come abbiamo notato nel paragrafo precedente, la configurazione dei due polarizzatori selezionati in A e in B non cambia in modo casuale nel tempo, ma presenta un periodo, anche se molto lungo. Pertanto, idealmente è possibile determinare con esattezza tale configurazione in un determinato istante, conoscendo le condizioni degli interruttori ottici all'avvio dell'acquisizione. Durante la preparazione dell'assetto sperimentale, prima che l'acquisizione abbia inizio, la sorgente e gli interruttori ottici hanno il tempo per scambiarsi informazioni riguardo all'impostazione iniziale di questi ultimi, e per quanto abbiamo detto sono "a conoscenza" della configurazione dei polarizzatori in ogni successivo istante di tempo. Questa comunicazione, alquanto inverosimile, tra i diversi elementi dell'apparato sperimentale viola l'indipendenza tra tutti i processi di misura che seguono, e invalida la disuguaglianza di Bell per gli stessi motivi discussi nell'introduzione a questo capitolo.

Questo problema è inevitabile se ragioniamo in un'ottica deterministica. Infatti, se consideriamo i dispositivi di misura A e B, risalendo indietro nel tempo troveremo sempre una situazione in cui essi hanno potuto interagire e quindi hanno rotto una volta per tutte il loro isolamento reciproco. In altre parole, il teorema di Bell non ha alcuna validità in un mondo dove tutto è prevedibile con certezza. Questo è il punto di vista dei sostenitori della cosiddetta "*ipotesi dell'armonia prestabilita*" [8], una via alternativa alla meccanica quantistica che garantisce il determinismo e la località. Questa teoria è coerente con se stessa, ma sul piano concettuale impone la rinuncia

al libero arbitrio. Giunti a questo punto, il problema non rientra più nell'ambito strettamente fisico e diventa oggetto di discussione filosofica, pertanto lasceremo aperta la questione. Tuttavia, vale la pena citare un esperimento che ha messo direttamente in correlazione l'esistenza del libero arbitrio e la validità della meccanica quantistica. Nel 2016 un'ampia collaborazione di gruppi scientifici provenienti da vari paesi ha lanciato un videogame online a cui hanno preso parte circa 100000 utenti nell'arco di 12 ore, come parte di un ambizioso progetto dal nome *The BIG Bell Test* [6]. Il gioco spronava i partecipanti a generare sequenze di numeri binari imprevedibili che venivano ricevute in tempo reale da 12 laboratori in diverse parti del mondo, dove sono state utilizzate per impostare i set-up sperimentali di 13 test sulla disuguaglianza di Bell realizzati con metodi differenti. L'esito di queste prove ha nuovamente confermato la non località, basandosi questa volta sul libero arbitrio degli esseri umani per modificare i parametri della misurazione: in questo modo, gli autori di questo progetto ritengono di aver chiuso il cosiddetto *freedom of choice loophole*.

Come si vede, gli esperimenti sulla località sono stati ripetuti di recente e continuano ad essere effettuati tuttora, raffinando le tecniche sperimentali in modo da eliminare il maggior numero possibile di loophole, con il duplice obiettivo di approfondire la nostra conoscenza della meccanica quantistica e sviluppare metodi pratici utili per varie applicazioni, tra i quali la crittografia quantistica.

Bibliografia

- [1] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. «Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers». In: *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), p. 1804.
- [2] J. S. Bell. «On the Einstein Podolsky Rosen paradox». In: *Physics* 1 (1964), p. 195.
- [3] J. S. Bell. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*. Cambridge University Press, 1987.
- [4] D. Bohm e Y. Aharonov. «Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky». In: *Phys. Rev.* 108 (1957), p. 1070.
- [5] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt. «Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories». In: *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969), p. 880.
- [6] The Big Bell Test Collaboration. «Challenging local realism with human choice». In: *Nature* 557 (2018), p. 212.
- [7] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?» In: *Phys. Rev.* 47 (1935), p. 777.
- [8] G. C. Ghirardi. *Un'occhiata alle carte di Dio. Gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo*. Il Saggiatore, 1997.
- [9] M. Giustina et al. «Bell Violation Using Entangled Photons Without The Fair-Sampling Assumption». In: *Nature* 497 (2013), p. 227.