

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

# Moto rigido di una figura piana nel suo piano

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Emanuela Caliceti

Presentata da:  
Fabio Bernabei

Sessione IV  
Anno Accademico 2017-2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>6</b>
<b>1 Moto del corpo rigido</b>	<b>7</b>
1.1 Alcune nozioni preliminari . . . . .	7
1.2 Generalità sul moto rigido . . . . .	9
1.3 Caratterizzazione dei moti del corpo rigido e teorema di Mozzi	16
1.3.1 Moto e stato cinetico di traslazione . . . . .	16
1.3.2 Moto e stato cinetico di rotazione . . . . .	17
1.3.3 Moto e stato cinetico elicoidale . . . . .	19
1.3.4 Composizione di stati cinetici e teorema di Mozzi . . .	19
<b>2 Il moto relativo</b>	<b>23</b>
2.1 Teorema di composizione delle velocità e teorema di Coriolis .	24
2.2 Sistemi equivalenti e composizione dei movimenti . . . . .	27
<b>3 Il moto rigido piano</b>	<b>31</b>
3.1 Moto di una figura piana nel suo piano. Centri istantanei . . .	31
3.2 Rotolamento di due curve. Rulletta e base . . . . .	34
3.3 Accelerazione nel moto di una figura piana nel suo piano . . .	40
3.4 Altri moti rigidi particolari . . . . .	43
3.4.1 Moto di un corpo rigido con un punto fisso . . . . .	43
3.4.2 Moto di precessione . . . . .	44
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>49</b>



# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è lo studio delle proprietà e delle caratteristiche del moto di una figura rigida piana nel suo piano nell'ambito della cinematica classica del corpo rigido. Per raggiungere questo obiettivo si sono dovuti introdurre ed analizzare preliminarmente alcuni concetti fondamentali in questo contesto. In particolare è stato necessario inserire un primo capitolo riguardante il moto del corpo rigido in generale, per poi concentrarsi sul caso piano. A partire quindi dalla nozione di corpo rigido come insieme di punti la cui distanza reciproca si mantiene costante nel tempo, si perviene alle formule di Poisson che permettono di esprimere le derivate dei versori di un sistema di riferimento solidale con il corpo, e da qui si arriva alla formula fondamentale della cinematica del corpo rigido, che fornisce la velocità di un generico punto  $P$  del corpo conoscendo la velocità di un altro dei suoi punti e il vettore di Poisson. Date queste premesse si passa a studiare e caratterizzare alcuni moti rigidi particolari. Vengono quindi studiati, nei dettagli, i moti traslatorio, rotatorio ed elicoidale, per ottenere poi due risultati importanti al fine di caratterizzare il moto rigido piano: il Teorema di Mozzi, che stabilisce che un corpo rigido in moto generico passa in ogni istante per uno stato cinetico elicoidale, e un teorema per il quale per un corpo che si muove con tutte le velocità parallele ad un piano esiste una sua sezione che si muove su un piano parallelo al dato, passando in ogni istante per uno stato cinetico di traslazione o di rotazione intorno ad un asse istantaneo normale al piano stesso. Combinando questi risultati si può iniziare a caratterizzare il moto rigido di una figura piana definendo anzitutto il centro istantaneo di rotazione come l'intersezione tra l'asse istantaneo di rotazione e il piano su cui giace la figura. Viene subito fatto notare che il moto preso in esame può essere sempre ricondotto ad un moto di rotazione: la traslazione viene infatti interpretata come una rotazione con centro istantaneo all'infinito. Nel caso di rotazione in senso proprio, si osserva che il centro istantaneo di rotazione non è fisso, bensì si muove nel piano definendo, rispetto all'osservatore a cui è riferito il moto, una curva detta *base*. Se però si considera un osservatore solidale alla figura, il centro istantaneo segue una diversa curva, la *rulletta*.

Per illustrare meglio questi concetti è stato inserito un capitolo a sé stante in cui si affronta la tematica della cinematica relativa del punto. Tornando al moto piano, successivamente si studiano alcune proprietà riguardanti l'accelerazione della figura rigida piana. Si ricorda, in via preliminare, che l'accelerazione presenta una componente centripeta e una tangenziale e si analizzano analiticamente la circonferenza dei flessi, il luogo dei punti in cui si annulla la prima, e il circolo di stazionarietà, il luogo dei punti in cui si annulla la seconda. Il lavoro si conclude con una rapida analisi di alcuni altri moti rigidi tra cui il moto di un corpo con un punto fisso, che presenta analogie con il caso piano.

Per la trattazione delle tematiche presentate in questa tesi ci si è basati principalmente sui trattati [1, 3], ai quali il lettore viene rinviato per ogni ulteriore approfondimento e dettaglio, in particolare per la dimostrazione di alcuni teoremi che non è qui stato possibile includere per necessità di sintesi. Per interessanti applicazioni dell'apparato tecnico qui illustrato si rimanda al testo [2].

# Capitolo 1

## Moto del corpo rigido

In questo capitolo verranno presentati i principali risultati riguardanti la cinematica del corpo rigido. Per la trattazione di questo argomento, come per il resto della tesi, ci si è basati principalmente sul trattato [1], tranne che per la Sezione 1.2 per la quale ci si è riferiti anche a [3].

### 1.1 Alcune nozioni preliminari

Come prima cosa si forniscono alcune definizioni e notazioni preliminari. Un vettore dello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{R}^3$  verrà indicato con una lettera latina minuscola sormontata da una freccia  $\vec{a}$  e rappresenterà la classe di equivalenza dei segmenti orientati (muniti di freccia) con stesso modulo, direzione e verso dove:

- il *modulo* è la lunghezza del segmento;
- la *direzione* è individuata dalla retta su cui giace il segmento;
- il *verso* è quello dato dalla freccia.

Nel caso in cui  $\vec{a}$  sia rappresentato da un segmento orientato di estremi  $A$  e  $B$  con freccia da  $A$  a  $B$ , si potrà scrivere

$$\vec{a} = \vec{AB} = B - A.$$

Il modulo di  $\vec{a}$  verrà denotato con la scrittura  $|\vec{a}|$ , o semplicemente  $a$ , e corrisponde a quello di ogni suo rappresentante. Il punto  $A$  sarà chiamato *origine* di  $\vec{AB}$  e  $B$  *secondo estremo*.

Introdotta un sistema di riferimento cartesiano centrato in  $O$  e di assi  $x, y, z$ , si può identificare un vettore  $\vec{a}$  con il suo unico rappresentante  $P - O$  avente

origine in  $O$ , quindi con il punto  $P$ . Questo, a sua volta, viene identificato con la terna  $(a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$  di numeri reali che corrispondono alle sue coordinate cartesiane.

Se si fissa ora  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  una base canonica di versori (vettori di norma unitaria) diretti e orientati come gli assi, quindi tali che

$$\begin{cases} \vec{i} &= (1, 0, 0) \\ \vec{j} &= (0, 1, 0) \\ \vec{k} &= (0, 0, 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

allora ogni vettore ammette un'ulteriore scrittura

$$\vec{a} \equiv P - O \equiv P = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

I versori in (1.1) vengono anche chiamati *versori elementari*.

**Definizione 1.1.** Si chiama prodotto scalare tra due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (indicato con la scrittura  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ) il numero reale dato, in forma intrinseca, da

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

dove  $\alpha$  rappresenta l'angolo tra i due vettori (compreso tra  $0$  e  $\pi$ ).

In forma cartesiana, se  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  e  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ , si ha

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Si ricorda che il prodotto scalare  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , che è commutativo, rappresenta la lunghezza della proiezione di  $\vec{a}$  lungo la direzione di  $\vec{b}$  moltiplicata per il modulo di  $\vec{b}$ . Inoltre, utilizzando la forma cartesiana è facile ottenere la relazione

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

**Definizione 1.2.** Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  (che possono sempre essere considerati con ugual origine  $O$ ) si definisce il loro prodotto vettoriale (indicato con  $\vec{a} \times \vec{b}$ ) un vettore  $\vec{c}$  di modulo  $ab \sin \alpha$  (dove  $\alpha$  è l'angolo compreso tra i due vettori), direzione normale al piano generato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e con verso tale che un osservatore disposto lungo  $\vec{c}$  (anch'esso con origine in  $O$ ) e che guardi  $\vec{b}$ , veda  $\vec{a}$  alla sua destra.

Per concludere questa sezione preliminare si inseriscono alcune nozioni relative al moto di un punto  $P \in \mathbb{R}^3$ .

Fissato un sistema di riferimento  $Oxyz$  con base canonica  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , sia  $P = P(t)$  l'equazione vettoriale del moto data da

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Leftrightarrow P(t) - O = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

che rappresenta la configurazione del punto  $P$  al generico istante temporale  $t \in \mathbb{R}^3$ .

**Definizione 1.3.** Verrà indicata con la scrittura  $\vec{v} = \vec{v}(P)$  la velocità del punto  $P$  all'istante  $t$ , data dalla relazione

$$\vec{v}(P) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d(P(t) - O)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (1.2)$$

In modo del tutto analogo si indicherà con  $\vec{a} = \vec{a}(P)$  l'accelerazione del punto  $P$  al tempo  $t$ , data dalla relazione

$$\vec{a}(P) = \frac{d^2P(t)}{dt^2} = \frac{d^2(P(t) - O)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}. \quad (1.3)$$

Per convenzione la derivata prima rispetto al tempo di una generica funzione di  $t$ , a valori scalari o vettoriali, verrà indicata sovrapponendo un punto al simbolo che denota la funzione mentre la derivata seconda sovrapponendone due. Con questa convenzione le (1.2) e (1.3) possono essere rispettivamente riscritte come

$$\begin{aligned} \vec{v}(P) &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{a}(P) &= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \end{aligned}$$

## 1.2 Generalità sul moto rigido

In questo capitolo ci si limiterà a studiare il moto dei cosiddetti *corpi rigidi*, dando per nota la cinematica del punto. Approssimare un intero corpo a un punto si dimostra sufficiente quando le dimensioni lineari che lo caratterizzano si possono trascurare rispetto alle grandezze che entrano in gioco durante il moto e quando non è rilevante diversificare il moto del corpo rispetto ad altre sue parti. In questo modo non ci si occupa del fatto che il corpo abbia una struttura propria. Però, se la struttura e l'estensione del corpo vengono prese in considerazione, questo modello non è più sufficiente.

Nel caso in cui vengano considerati dei solidi, per i quali risultano trascurabili le deformazioni, una buona schematizzazione è proprio quella del corpo rigido.

Un corpo viene definito *rigido* quando la distanza tra due suoi punti qualsiasi si mantiene indefinitamente costante nel tempo. Si osservi che un corpo rigido si può pensare come un insieme discreto di punti che soddisfano la condizione di rigidità. Il corpo rigido può essere identificato con l'insieme  $\mathbf{C} = \{P_s \in \mathbb{R}^3; \quad s = 1, 2, \dots, n\}$ , in cui la condizione di rigidità si traduce matematicamente nella condizione:

$$|P_r - P_s| = \text{costante}, \quad \forall r, s = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Invece, se il numero di punti del corpo rigido è molto elevato e le distanze dei punti tra loro più vicini sono molto piccole rispetto alle dimensioni lineari del corpo, è conveniente utilizzare lo *schema continuo*: in questo caso l'insieme dei punti che costituiscono il corpo rigido si rappresenta con un sottoinsieme  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^3$ , avente la potenza del continuo. Dunque la (1.4) può essere riscritta come

$$|P - Q| = \text{costante}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.5)$$

Si dice che è noto il moto di un corpo quando è noto quello di ogni suo punto, cioè quando è nota in ogni istante la sua posizione. Lo studio del moto di un corpo è quindi più complesso di quello del punto: infatti i suoi punti possono essere dotati di moti diversi uno dall'altro. Per il vincolo di rigidità vale il

**Teorema 1.4.** *Assegnata la posizione del corpo, ossia dei suoi punti, in un istante che si può assumere come iniziale, e nota, all'istante  $t$ , la posizione di tre punti di esso non allineati, risulta univocamente determinata la posizione di ogni altro punto all'istante  $t$ .*

In altre parole il moto di un corpo rigido resta completamente determinato nota la sua posizione iniziale ed il moto di almeno tre suoi punti non allineati. È bene notare che per determinare il moto di tre punti occorrono, in ogni istante, nove parametri (le tre coordinate di ogni punto); ricordando però che tra questi punti intercorrono le tre relazioni che esprimono l'invariabilità della loro mutua distanza, si evince che per studiare il moto del corpo rigido sono sufficienti sei parametri indipendenti (in casi particolari tale numero può ridursi ulteriormente).

Si considerino due punti generici  $P$  e  $Q$  di un corpo rigido. Se  $d$  è la distanza (costante) tra i punti si ha  $(P - Q)^2 = d^2$  e, derivando questa equazione, si ottiene

$$2(P - Q) \cdot \frac{d(P - Q)}{dt} = 2 \left[ (P - Q) \cdot \frac{dP}{dt} - (P - Q) \cdot \frac{dQ}{dt} \right] = 0,$$

da cui

$$(P - Q) \cdot \frac{dP}{dt} = (P - Q) \cdot \frac{dQ}{dt}, \quad (1.6)$$

ossia

$$\frac{dP}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{dQ}{dt} \cdot \vec{u}, \quad (1.7)$$

con  $\vec{u} = \frac{P-Q}{|P-Q|}$ ; l'ultima equazione è stata ottenuta dividendo entrambi i membri della (1.6) per  $|P-Q|$ . La (1.7) si può quindi interpretare così: *condizione necessaria e sufficiente affinché un moto si comporti come rigido consiste nell'uguaglianza della componente della velocità di due punti qualsiasi del corpo lungo la loro congiungente.*

Per studiare il moto di un corpo rigido conviene considerare, oltre il sistema di assi  $Oxyz$  a cui viene riferito il moto (chiamato, per convenzione, *sistema fisso*), un sistema di assi  $O_1x_1y_1z_1$  (detto *sistema mobile*) solidale con il corpo, ossia con l'origine  $O_1$  in un suo punto e tale che rispetto ad esso ogni punto del corpo risulti fisso. Si indicherà con  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  i tre versori paralleli e nello stesso verso, rispettivamente, di  $O_1x_1, O_1y_1$  e  $O_1z_1$ . È bene notare che ogni punto del corpo, in questo sistema di riferimento, ha coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  che sono invariabili nel tempo. Sono invece variabili le coordinate  $(x, y, z)$  del punto  $P$  rispetto al sistema fisso, che possono essere determinate tramite un cambiamento di coordinate, nota, in ogni istante, la posizione del sistema  $O_1x_1y_1z_1$  solidale con il corpo rispetto al sistema fisso  $Oxyz$ .

A questo scopo occorre conoscere, in ogni istante, le coordinate  $a, b, c$  del punto  $O_1$  rispetto a  $Oxyz$  e i coseni direttori delle rette  $O_1x_1, O_1y_1$  e  $O_1z_1$ , i quali possono essere riassunti nella seguente tabella

	$O_1x_1$	$O_1y_1$	$O_1z_1$	
$Ox$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\vec{i}$
$Oy$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$\vec{j}$
$Oz$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\gamma_3$	$\vec{k}$
	$\vec{i}_1$	$\vec{j}_1$	$\vec{k}_1$	

dove ogni lettera rappresenta il coseno dell'angolo tra gli assi segnati, rispettivamente, sulla riga e sulla colonna e anche il prodotto scalare tra i vettori unitari che vi si trovano. Anche per questo sistema di parametri vale l'osservazione fatta precedentemente: i nove coseni direttori sono legati tra loro dal fatto che i tre versori  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  costituiscono una base ortonormale in  $\mathbb{R}^3$ , ovvero hanno modulo unitario e sono a due a due ortogonali, cioè

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 = 1 \quad \text{e} \quad \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0.$$

Pertanto solo tre dei nove parametri  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2, 3$ , sono tra loro indipendenti. Per conoscere il moto del corpo, dunque, è sufficiente conoscere le coordinate di  $O_1$  e tali tre parametri.

Le trasformazioni precedentemente citate possono essere facilmente ricavate considerando l'espressione

$$P - O = P - O_1 + O_1 - O$$

ovvero

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

da cui, moltiplicando scalarmente per  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  si ottiene

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 \\ y = b + \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 \\ z = c + \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Infine, in vista di ciò che verrà approfondito tra poco, è bene definire un vettore che ha un ruolo fondamentale: il vettore di Poisson  $\vec{\omega}$ .

Anzitutto bisogna ricordare due importanti proprietà dei vettori.

**Lemma 1.5.** *Sia  $\vec{v} \neq 0$  un vettore variabile di modulo costante  $v$ . Allora la sua derivata  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  risulta ortogonale al vettore  $\vec{v}$ , ossia*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 0.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $\vec{v}$  è costante in modulo allora lo sarà anche il suo quadrato, per cui  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{costante}$ . Da qui, derivando entrambi i membri rispetto a  $t$ , si ha

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Essendo  $\vec{v} \neq 0$  e  $\frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0$  si ha necessariamente che  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  e  $\vec{v}$  sono ortogonali.  $\square$

**Lemma 1.6.** *Siano  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  due vettori tra loro ortogonali ( $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ). Allora  $\exists \vec{c}$  tale che  $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$*

*Dimostrazione.* Essendo  $\vec{a}$  ortogonale a  $\vec{b}$  si può considerare un sistema di riferimento con base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  per cui  $\vec{b} = b\vec{k}$  e  $\vec{a} = a\vec{j}$ . Prendendo  $\vec{c}_0 = \frac{b}{a}\vec{i}$  si ottiene

$$\vec{c}_0 \times \vec{a} = \frac{b}{a}\vec{i} \times a\vec{j} = \frac{b}{a}a(\vec{i} \times \vec{j}) = b\vec{k} = \vec{b}$$

che soddisfa l'enunciato. In generale un tale vettore non è unico in quanto la relazione vale per ogni  $\vec{c} = \vec{c}_0 + \lambda\vec{a}$ , al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Infatti, essendo nullo il prodotto vettoriale tra vettori paralleli

$$\vec{c} \times \vec{a} = \frac{b}{a} \vec{i} \times a\vec{j} + \lambda\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b}.$$

□

Si noti che la non unicità del vettore  $\vec{c}$  di questo teorema è data dall'arbitrarietà nella scelta di  $\lambda$ , quindi della sua componente lungo la direzione di  $\vec{a}$ , ovvero  $\vec{c} \cdot \vec{a}$ . Detto ciò, notiamo che  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$  e  $\vec{k}_1$ , essendo versori, hanno modulo costantemente uguale a 1. Usando quindi il Lemma 1.5 e utilizzando il simbolo  $\perp$  per indicare l'ortogonalità tra due vettori si ha

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \perp \vec{i}_1 \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} \perp \vec{j}_1 \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \perp \vec{k}_1$$

da cui, per il Lemma 1.6

$$\begin{aligned} \exists \vec{\omega}_1 \text{ tale che } \frac{d\vec{i}_1}{dt} &= \vec{\omega}_1 \times \vec{i}_1 \\ \exists \vec{\omega}_2 \text{ tale che } \frac{d\vec{j}_1}{dt} &= \vec{\omega}_2 \times \vec{j}_1 \\ \exists \vec{\omega}_3 \text{ tale che } \frac{d\vec{k}_1}{dt} &= \vec{\omega}_3 \times \vec{k}_1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove i vettori  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  e  $\vec{\omega}_3$  NON sono univocamente determinati.

**Teorema 1.7.**  $\exists! \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  tale che

$$\dot{\vec{i}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \quad \dot{\vec{j}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \quad \dot{\vec{k}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{k}_1.$$

Tale  $\vec{\omega}$  viene chiamato vettore di Poisson.

*Dimostrazione. Unicità*

Supponiamo che  $\exists \vec{\omega}, \vec{\omega}'$  diversi che soddisfino l'enunciato. Allora, utilizzando il simbolo  $//$  per denotare il parallelismo tra due vettori, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 = \vec{\omega}' \times \vec{i}_1 &\Rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{i}_1 = 0 \stackrel{\vec{\omega} \neq \vec{\omega}'}{\Rightarrow} \vec{\omega} - \vec{\omega}' // \vec{i}_1 \\ \dot{\vec{j}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 = \vec{\omega}' \times \vec{j}_1 &\Rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{j}_1 = 0 \Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}' // \vec{j}_1 \\ \dot{\vec{k}}_1 = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 = \vec{\omega}' \times \vec{k}_1 &\Rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{k}_1 = 0 \Rightarrow \vec{\omega} - \vec{\omega}' // \vec{k}_1. \end{aligned}$$

Ma questo crea un assurdo in quanto imporrebbe il parallelismo tra  $\vec{i}_1, \vec{j}_1$  e  $\vec{k}_1$ , che invece sono a due a due ortogonali. Pertanto deve necessariamente essere  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ .

### Esistenza

Come è già stato detto, esistono vettori  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$  non unici che soddisfano le (1.9). Si è anche osservato, in relazione al Lemma 1.6, che la loro non unicità è dovuta all'arbitrarietà della scelta di  $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{i}_1$  (quindi della proiezione di  $\vec{\omega}_1$  lungo la direzione di  $\vec{i}_1$ ),  $\vec{\omega}_2 \cdot \vec{j}_1$  e  $\vec{\omega}_3 \cdot \vec{k}_1$ . Si può quindi scegliere

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 \cdot \vec{i}_1 &= \vec{\omega}_2 \cdot \vec{i}_1 \\ \vec{\omega}_2 \cdot \vec{j}_1 &= \vec{\omega}_1 \cdot \vec{j}_1.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Le (1.10) dicono che i due vettori  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  hanno le stesse componenti lungo le direzioni di  $\vec{i}_1$  e  $\vec{j}_1$ . Per dimostrare l'uguaglianza basta mostrare che anche la terza componente, nella direzione di  $\vec{k}_1$ , è la stessa:  $\vec{\omega}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{\omega}_2 \cdot \vec{k}_1$ . A questo scopo si può osservare che, essendo  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  una base ortonormale,  $\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = 0$ , e derivando questa equazione rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = -\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1.\tag{1.11}$$

Da qui, utilizzando le formule (1.9) si ottiene

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = -\vec{\omega}_2 \times \vec{j}_1 \cdot \vec{i}_1.\tag{1.12}$$

Si ricorda ora che nel prodotto misto fra tre vettori è possibile scambiare tra loro il prodotto scalare e il prodotto vettoriale, ossia

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3.$$

Dalla (1.12) segue dunque

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = -\vec{\omega}_2 \cdot \vec{j}_1 \times \vec{i}_1,$$

ossia

$$\vec{\omega}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{\omega}_2 \cdot \vec{k}_1,$$

da cui, come già osservato, tenendo conto delle (1.10), segue che  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  hanno le tre componenti uguali. Quindi si può porre

$$\vec{\omega} := \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2.$$

Applicando lo stesso ragionamento ai vettori  $\vec{\omega}$  e  $\vec{\omega}_3$ , scegliendo cioè la componente di  $\vec{\omega}_3$  lungo la direzione di  $\vec{k}_1$  uguale a quella di  $\vec{\omega}$  e usando equazioni

analoghe alla (1.11), ottenute derivando le equazioni  $\vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0$  e  $\vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0$ , si può facilmente ottenere

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2.$$

□

Le equazioni

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 \end{cases} \quad (1.13)$$

chiamate *formule di Poisson*, esprimono quindi le derivate dei tre vettori fondamentali di un sistema di assi collegato con il corpo rigido. Si osservi che il vettore di Poisson è lo stesso per ogni punto del corpo rigido in moto ma, in generale, è variabile nel tempo.

Ritornando ora al problema iniziale relativo alla determinazione del moto di un generico punto  $P$  del corpo rigido, si riprende dalla relazione

$$P - O = P - O_1 + O_1 - O, \quad (1.14)$$

e derivando rispetto al tempo la relazione

$$P - O_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1. \quad (1.15)$$

Tenendo presente le equazioni di Poisson e il fatto che  $x_1, y_1, z_1$  sono costanti, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d(P - O_1)}{dt} &= x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \\ &= x_1 \vec{\omega} \times \vec{i}_1 + y_1 \vec{\omega} \times \vec{j}_1 + z_1 \vec{\omega} \times \vec{k}_1 = \\ &= \vec{\omega} \times (x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d(P - O_1)}{dt} = \vec{\omega} \times (P - O_1). \quad (1.16)$$

Derivando ora la (1.14), e indicando con  $\mathcal{C}$  il corpo rigido, si ottiene

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C} \quad (1.17)$$

ossia, in termini di velocità dei punti,

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}. \quad (1.18)$$

La (1.17), o equivalentemente la (1.18), è detta *formula fondamentale della cinematica del corpo rigido*. Essa esprime la velocità dei punti di un corpo rigido, in un certo istante, nota, in quell'istante, la velocità di uno di essi  $O_1$  e il vettore di Poisson  $\vec{\omega}$ .

Derivando ulteriormente la (1.17), si ottiene l'espressione generale dell'accelerazione dei punti di un corpo rigido:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O_1}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (P - O_1) + \vec{\omega} \times \frac{d(P - O_1)}{dt},$$

ossia

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O_1}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (P - O_1) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (P - O_1)]. \quad (1.19)$$

## 1.3 Caratterizzazione dei moti del corpo rigido e teorema di Mozzi

### 1.3.1 Moto e stato cinetico di traslazione

Nel caso particolare in cui  $\vec{\omega} = 0$  la (1.17) si riduce a

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dO_1}{dt}. \quad (1.20)$$

Ciò significa che tutti i punti hanno la stessa velocità. Se questo si verifica per tutta la durata del moto questo viene detto *moto di traslazione*.

Detto ora  $Q$  un secondo punto generico del corpo, dall'uguaglianza delle velocità dei due punti si ottiene

$$\frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \frac{d(P - Q)}{dt} = 0, \quad (1.21)$$

da cui si può dedurre l'invariabilità del vettore  $P - Q$  e la relazione

$$P(t) - P_0 = Q(t) - Q_0. \quad (1.22)$$

Si può quindi ricavare che *in un moto di traslazione gli spostamenti dei punti del corpo a partire dalla configurazione iniziale risultano, in ogni istante, tutti uguali tra loro*. Inoltre si può facilmente dimostrare che se in un moto rigido è soddisfatta la (1.20) allora  $\vec{\omega} = 0$ . Infatti combinando la (1.20) con la (1.17) si ottiene

$$\vec{\omega} \times (P - O_1) = 0, \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}. \quad (1.23)$$

Scegliendo  $P$  e  $O_1$  in modo che  $P - O_1$  non sia parallelo a  $\vec{\omega}$  la (1.23) impone che sia  $\vec{\omega} = 0$ .

Questo dimostra il seguente

**Teorema 1.8.** *Il moto di un corpo rigido è di traslazione se e solo se  $\vec{\omega} = 0$ .*

Si dice che *un corpo passa*, in un certo istante, *per uno stato cinetico di traslazione se*, in quell'istante, tutti i suoi punti hanno la stessa velocità.

Dalle formule di Poisson (1.13) si può anche notare che, scelto  $O_1x_1y_1z_1$ , il sistema solidale al corpo, in modo che inizialmente sia parallelo al sistema fisso, questo rimane tale in ogni istante se il corpo si muove di moto traslatorio. Infatti  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  rimangono costanti anche in direzione e verso (quindi sempre paralleli a  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ), essendo  $\vec{\omega} = 0$ .

Infine, derivando la (1.20), si ottiene

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O_1}{dt^2} \quad (1.24)$$

che si può interpretare dicendo che ogni punto di un corpo rigido che si muove di moto traslatorio ha la medesima accelerazione. Questa relazione può anche essere ottenuta dalla (1.19) ponendo  $\vec{\omega} = 0$ .

### 1.3.2 Moto e stato cinetico di rotazione

Si dice che un corpo rigido si muove di *moto di rotazione se*, istante per istante, si verifica che almeno due suoi punti  $A$  e  $B$ , che possono variare nel tempo, rimangono fissi, cioè hanno velocità istantanea nulla. Questo implica, per il vincolo di rigidità, che questa condizione vale anche per tutti i punti dell'asse  $AB$ , detto *asse (istantaneo) di rotazione*. Nella (1.17) può essere scelto come  $O_1$  un punto di quest'asse: questo implica che  $\frac{dO_1}{dt} = 0$  perciò la (1.17) viene modificata in

$$\frac{dP}{dt} = \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathcal{C}. \quad (1.25)$$

Questa formula consente di calcolare in ogni istante la velocità di un generico punto  $P$  del corpo, noto, nel medesimo istante, il vettore  $\vec{\omega}$  e un punto  $O_1$  dell'asse di rotazione. È facile verificare che la (1.25) rappresenta anche una condizione sufficiente affinché il moto di un corpo rigido sia di rotazione, ossia un moto è di rotazione se e solo se, istante per istante, esiste un suo punto  $O_1$  che è fisso. Infatti, se vale la (1.25), tutti i punti della retta passante per  $O_1$  e parallela a  $\vec{\omega}$  hanno velocità nulla. Per un punto  $P$  di tale retta si ha infatti

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1) = 0,$$

essendo i due vettori  $\vec{\omega}$  e  $P - O_1$  paralleli. Si è quindi dimostrato il

**Teorema 1.9.** *Il moto di un corpo rigido è di rotazione attorno all'asse  $PO_1$  se e solo se  $\vec{\omega}$  è parallelo a  $P - O_1$ .*

Dal teorema segue che in un moto di rotazione il vettore di Poisson  $\vec{\omega}$  è parallelo all'asse di rotazione.

Sia ora  $M$  la proiezione del punto  $P$  del corpo sull'asse di rotazione: durante il moto il punto  $P$  rimarrà sempre sul piano normale all'asse passante per  $M$ , altrimenti varierebbe la sua distanza dai punti dell'asse. Rimanendo costante il vettore  $P - M$  si deduce che il punto  $P$  percorre la circonferenza di centro  $M$  e raggio  $|P - M| = r$ . Poiché  $M$  è un punto dell'asse, si può far coincidere con  $O_1$ ; quindi, uguagliando i moduli della (1.25) e ricordando che  $\vec{\omega}$  è normale a  $P - M$ , si ottiene

$$v = \omega |P - M| = \omega r, \quad (1.26)$$

avendo indicato con  $v$  il modulo della velocità di  $P$ . Usando poi un sistema di riferimento intrinseco, si può riscrivere  $v$  come

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (1.27)$$

dove  $s = r\theta$  rappresenta la coordinata in lunghezza d'arco sulla circonferenza percorsa da  $P$  e  $\theta$  l'angolo  $\widehat{P_0MP}$  (con  $P_0$  origine degli archi). Confrontando la (1.27) con la (1.26) risulta che il modulo di  $\vec{\omega}$  uguaglia quello della velocità angolare del punto  $P$  rispetto al centro della circonferenza, ossia  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ . Essendo  $\vec{\omega}$  indipendente da  $P$ , la velocità angolare risulta comune a tutti i punti del corpo e può essere chiamata *velocità angolare (istantanea) del corpo*. Si ottiene dunque

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}, \quad (1.28)$$

essendo  $\vec{k}$  il versore diretto come l'asse di rotazione. Si può anche immaginare  $\theta$  come l'angolo tra la posizione iniziale di un semipiano, collegato con il corpo e limitato dall'asse di rotazione, e la posizione di tale semipiano all'istante generico  $t$ .

**Osservazione 1.10.** L'angolo  $\theta$ , che nel moto di rotazione è uguale per tutti i punti del corpo, corrisponde, in un certo senso, allo spostamento uguale per tutti i punti del corpo nel moto di traslazione, condizione espressa dalla (1.22).

Si dice che *un corpo passa*, in un certo istante, *per uno stato cinetico di rotazione* se la distribuzione delle velocità per i suoi punti, in quell'istante, avviene come se il corpo ruotasse intorno a un determinato asse. Per concludere, ricordando che per un moto circolare uniforme  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  (dove  $T$  è il

periodo del moto) e l'accelerazione è data da  $\vec{a} = \frac{-4\pi^2}{T^2}(P - M)$ , l'accelerazione dei punti di un corpo rigido che si muove di moto rotatorio si ottiene con la formula

$$\vec{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = -\omega^2(P - M), \quad (1.29)$$

cioè è proporzionale in modulo al quadrato della velocità angolare.

### 1.3.3 Moto e stato cinetico elicoidale

Un altro importante caso di moto rigido è quello del *moto elicoidale* (o di *rototraslazione*) che si ha quando una retta  $l_1$  solidale con il corpo scorre su una retta fissa  $l$ , detta *asse elicoidale*. Questo accade, per esempio, nel moto della vite. Sia  $M \in l_1$  un punto generico: allora la sua traiettoria è proprio la retta  $l$  e il suo vettore velocità è ad essa parallela. Questo vettore coincide con la sua proiezione lungo  $l$  e, per quanto osservato sulla (1.7), deve risultare uguale  $\forall M \in l_1$ .

In modo del tutto analogo al moto traslatorio e rotatorio, è semplice dimostrare il

**Teorema 1.11.** *Il moto di un corpo rigido è elicoidale di asse  $l_1$  se e solo se nella (1.17)  $\frac{dO_1}{dt}$  e  $\vec{\omega}$  sono entrambi paralleli ad una retta fissa  $l$  (dove  $l_1$  è la retta solidale con il corpo passante per  $O_1$  e parallela a  $l$ ).*

La formula (1.17) può essere interpretata in questo modo: *in un determinato istante la velocità dei punti di un corpo che si muove di moto elicoidale è la somma di due termini di cui il primo, uguale per tutti i punti del corpo, rappresenta uno stato cinetico di traslazione, mentre l'altro rappresenta uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo parallelo alla traslazione.*

Si dice che *un corpo passa*, in un certo istante, *per uno stato cinetico elicoidale o rototraslatorio* quando, agli effetti della velocità, si comporta come se si muovesse di moto elicoidale. La velocità di un generico punto  $P$  di un tale corpo è data dalla (1.17), dove  $\frac{dO_1}{dt}$  e  $\vec{\omega}$  sono vettori paralleli tra loro e uguali per tutti i punti del corpo. Analogamente l'accelerazione è data dalla formula generale espressa nella (1.19). Inoltre si verifica che l'asse istantaneo elicoidale contiene il vettore  $\vec{\omega}$  applicato a  $O_1$ .

### 1.3.4 Composizione di stati cinetici e teorema di Mozzi

Si consideri un corpo rigido in moto e sia  $\vec{v}(P)$  la velocità di un suo generico punto  $P$  in un certo istante  $t$ . Si dirà allora che il corpo passa, all'istante  $t$ , per uno stato cinetico definito dall'insieme di vettori  $\vec{v}(P)$ . In

molte questioni di meccanica lo stato cinetico  $\vec{v}(P)$ , in un determinato istante, si può presentare come somma di due stati cinetici  $\vec{v}_1(P)$  e  $\vec{v}_2(P)$ , ossia

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P), \quad \forall P \in \mathcal{C}.$$

Allora lo stato cinetico  $\vec{v}(P)$  si dirà *stato cinetico risultante, o composto, degli stati cinetici componenti*  $\vec{v}_1(P)$  e  $\vec{v}_2(P)$ . L'operazione per cui si passa dagli stati cinetici componenti a quello risultante si chiama *composizione di stati cinetici*.

Per concludere questo primo capitolo si citano, senza scendere nei dettagli delle dimostrazioni, alcuni importanti risultati riguardo la composizione degli stati cinetici.

1. Due stati cinetici di traslazione si compongono in uno stato cinetico di traslazione.
2. Due stati cinetici di rotazione intorno ad assi istantanei concorrenti si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo concorrente agli assi degli stati componenti.
3. Due stati cinetici di rotazione di uguale asse istantaneo e velocità angolare opposta si compongono in uno stato cinetico ovunque nullo.
4. Due stati cinetici di rotazione intorno ad assi istantanei paralleli, con la somma delle loro velocità angolari non nulla, si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse parallelo agli assi degli stati componenti.
5. Due stati cinetici di rotazione con assi istantanei paralleli e di velocità angolari uguali e di senso opposto si compongono in uno stato cinetico di traslazione in direzione normale al piano su cui giacciono gli assi. In particolare si può mostrare anche il viceversa: uno stato cinetico di traslazione si può scomporre in due stati cinetici di rotazione con assi istantanei paralleli e con velocità angolare uguale e opposta.
6. Uno stato cinetico di traslazione e uno di rotazione con asse istantaneo normale alla traslazione si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo parallelo all'asse della rotazione data.
7. Uno stato cinetico di traslazione e uno stato cinetico di rotazione si compongono sempre in uno stato cinetico elicoidale, che può ridursi in particolare ad uno stato cinetico di pura rotazione o di pura traslazione.
8. Due stati cinetici di rotazione intorno a due assi istantanei sghembi si compongono in uno stato cinetico elicoidale.

È importante, in questo ambito, citare anche i due seguenti teoremi, il secondo dei quali verrà approfondito in seguito. Per ulteriori dettagli si rinvia il lettore al trattato [1, pagg. 83-90].

**Teorema 1.12** (di Mozzi). *Un corpo rigido in moto generico passa in ogni istante per uno stato cinetico elicoidale (che può ridursi ad una traslazione o ad una rotazione), il cui asse è chiamato asse di Mozzi.*

Questo è di facile verifica: infatti il primo termine del secondo membro della (1.17), essendo indipendente da  $P$ , rappresenta uno stato cinetico di traslazione, mentre il secondo uno stato cinetico di rotazione. Si conclude applicando il punto 7 dell'elenco precedente.

È pure molto importante il caso in cui il corpo si muove in modo che le sue velocità siano sempre parallele ad un piano, che si può far coincidere con il piano  $xy$ . Scelti, in un certo istante, i piani  $xy$  e  $x_1y_1$  coincidenti, la figura intersezione del corpo con il piano  $x_1y_1$  rimane, durante il moto, sempre sul piano  $xy$ , altrimenti la velocità di un qualche punto della figura non sarebbe parallela al piano  $xy$ . Il piano  $x_1y_1$  si muove allora sul piano  $xy$  e il vettore  $\vec{k}_1$  rimane costante durante il moto. Si ha allora, per la terza delle formule di Poisson (1.13),

$$\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 = 0.$$

Perciò  $\vec{\omega}$  è nulla, e lo stato cinetico diventa di traslazione, oppure è parallela a  $\vec{k}_1$ , cioè normale a  $xy$ . Allora, poiché  $\frac{dO_1}{dt}$  (parallelo a  $xy$ ) è normale a  $\vec{\omega}$ , lo stato cinetico del corpo è di rotazione intorno ad un asse istantaneo normale al piano  $xy$ . Si è dunque dimostrato il

**Teorema 1.13.** *Se un corpo si muove con tutte le sue velocità parallele ad un piano, esiste una sezione del corpo che si muove sempre su un piano parallelo al dato, passando in ogni istante per uno stato cinetico o di traslazione o di rotazione intorno ad un asse istantaneo normale al piano della figura.*



## Capitolo 2

### Il moto relativo

Si abbiano due sistemi di riferimento  $Oxyz$  e  $O_1x_1y_1z_1$ , che verranno chiamati, rispettivamente, *sistemi degli osservatori* ( $O$ ) e ( $O_1$ ) (o più brevemente ( $O$ ) e ( $O_1$ )), che siano in moto l'uno rispetto all'altro. Il problema che ci si pone ora è il seguente: *noto il moto di un punto  $P$  rispetto a uno dei sistemi, per esempio ( $O_1$ ), e quello di ( $O_1$ ) rispetto a ( $O$ ), trovare il moto di  $P$  rispetto ad ( $O$ )*. Per esempio, noto il moto di un punto rispetto alla Terra e noto il moto della Terra rispetto al Sole, ricavare il moto del punto dato rispetto al Sole.

Dunque si supponga conosciuto il moto di un punto  $P$  rispetto all'osservatore ( $O_1$ ), cioè siano note le sue coordinate  $x_1, y_1, z_1$  come funzioni del tempo. Per risolvere il problema posto, cioè capire come variano nel tempo le coordinate  $x, y, z$  di  $P$  si possono utilizzare le formule (1.8)

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1x_1 + \beta_1y_1 + \gamma_1z_1 \\ y = b + \alpha_2x_1 + \beta_2y_1 + \gamma_2z_1 \\ z = c + \alpha_3x_1 + \beta_3y_1 + \gamma_3z_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

dove la terna  $(a, b, c)$  rappresenta le coordinate cartesiane di  $O_1$  rispetto a ( $O$ ).

Per quanto si dirà è importante ricordare che sono essenziali i postulati della meccanica classica. Anzitutto si suppone che la variabile *tempo* sia identica per i due osservatori ( $O$ ) e ( $O_1$ ); le (2.1), inoltre, presuppongono l'altro postulato della meccanica classica relativo all'uguaglianza delle distanze misurate dai due osservatori, da cui segue l'identità nella misurazione degli angoli, della distanza di un punto da un piano, delle coordinate di un punto rispetto a un sistema di riferimento, il fatto che un vettore sia unitario, ecc. Queste ipotesi sono implicite nella deduzione delle (2.1) e nelle dimostrazioni dei prossimi teoremi.

In analogia con quanto espresso dalle (2.1) per quanto riguarda le coordinate spaziali di un punto, si può stabilire la relazione tra le velocità e le accelerazioni dello stesso punto rispetto ai due sistemi.

**Notazione 2.1.** Verrà indicata con il simbolo  $\vec{v}(P) = \left. \frac{d(P-O)}{dt} \right|_{(O)}$  la velocità del punto  $P$  misurata dall'osservatore  $(O)$  (quindi considerando fissati  $O$  e i tre versori elementari  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ).

Verrà invece identificata, per distinguerla dalla precedente, con  $\vec{v}_1(P) = \left. \frac{d(P-O_1)}{dt} \right|_{(O_1)}$  la velocità del punto  $P$  misurata dall'osservatore  $(O_1)$  (in questo caso saranno fissati  $O_1$  e i tre versori fondamentali  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ ).

Più precisamente dalle relazioni

$$P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{e} \quad P - O_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \quad (2.2)$$

si ha

$$\vec{v}(P) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v}_1(P) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1. \quad (2.3)$$

Un'analogia notazione verrà adottata per differenziare le accelerazioni nei due diversi sistemi. È bene notare che rispetto all'osservatore  $(O)$  i tre vettori  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$  in generale non sono fissi, ma essendo collegati ad un corpo rigido le loro derivate rispetto al tempo vengono calcolate con le formule di Poisson (1.13).

## 2.1 Teorema di composizione delle velocità e teorema di Coriolis

Dalla relazione

$$P - O = P - O_1 + O_1 - O = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + (O_1 - O), \quad (2.4)$$

derivando rispetto al tempo e rispetto ad  $(O)$  e utilizzando la (2.3) si ottiene

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{v}_1(P) + x_1\dot{\vec{i}}_1 + y_1\dot{\vec{j}}_1 + z_1\dot{\vec{k}}_1. \quad (2.5)$$

Ricordando le formule di Poisson (1.13) la (2.5) può essere così riscritta

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1). \quad (2.6)$$

Ponendo  $\vec{v}_\tau(P) := \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1)$ , si osserva che  $\vec{v}_\tau(P)$ , detta *velocità di trascinamento di  $P$* , rappresenta la velocità che  $P$  avrebbe se fosse rigidamente collegato al sistema  $(O_1)$ , riguardato come corpo rigido, e da esso

trascinato nel suo moto (in questo caso si avrebbe infatti  $\vec{v}_1(P) = 0$  e dalla (2.6)  $\vec{v}(P) = \vec{v}_\tau(P)$ ). La (2.6) diventa dunque

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_\tau(P), \quad (2.7)$$

che esprime il teorema di composizione delle velocità.

**Teorema 2.2** (di composizione delle velocità). *La velocità di un punto rispetto ad un osservatore ( $O$ ) vale la velocità del punto rispetto ad un altro osservatore ( $O_1$ ) sommata alla velocità di trascinamento.*

**Esempio 2.3.** La velocità rispetto al suolo di una persona che si muove in un treno vale la velocità della persona rispetto al treno sommata con la velocità della persona come se fosse rigidamente connessa al treno cioè, siccome generalmente il treno si muove di moto traslatorio, con la velocità del treno.

**Esempio 2.4.** La velocità di una barca che, per effetto dei remi, si muove scendendo un fiume vale, rispetto ad un osservatore posto sulla riva, la velocità della barca rispetto alla corrente del fiume sommata alla velocità della barca come se fosse connessa rigidamente con la corrente, cioè (se il suo moto è di traslazione) alla velocità della corrente stessa.

La formula (2.7) permette facilmente lo studio del moto inverso, cioè il moto del corpo rispetto ad ( $O_1$ ) dei punti fissi rispetto ad ( $O$ ). In questo caso si ha  $\vec{v}(P) = 0$ , per cui

$$\vec{v}_1(P) = -\vec{v}_\tau(P), \quad (2.8)$$

cioè i punti fermi rispetto ad ( $O$ ) si muovono rispetto ad ( $O_1$ ) con velocità uguale e contraria alla velocità di trascinamento. Proprio per questo risultato si ha che la velocità rispetto a un veicolo (supposto in moto di traslazione) degli oggetti fermi rispetto al suolo è uguale e contraria alla velocità del veicolo.

Si considerino ora tre osservatori ( $O$ ), ( $O_1$ ) e ( $O_2$ ), che riferiscono il moto rispettivamente agli assi di  $Oxyz$ ,  $O_1x_1y_1z_1$  e  $O_2x_2y_2z_2$ . Se  $\vec{v}_2$  è la velocità di  $P$  rispetto all'osservatore ( $O_2$ ) e  $\vec{v}_{\tau_2}$  la velocità di trascinamento rispetto a ( $O_1$ ) di  $P$  collegato rigidamente con ( $O_2$ ) si ha, per la (2.7)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{\tau_2} \quad (2.9)$$

e, indicando per chiarezza con  $\vec{v}_{\tau_1}$  la velocità di trascinamento di  $P$  rispetto a ( $O$ ) quando il punto è collegato a ( $O_1$ ) e sostituendo la (2.9) nella (2.7), si ottiene

$$\vec{v} = \vec{v}_2 + \vec{v}_{\tau_1} + \vec{v}_{\tau_2} \quad (2.10)$$

L'estensione di questo risultato al caso di  $n$  osservatori è immediata.

Si riprenda ora la (2.4) e la si derivi due volte rispetto ad  $(O)$ . Si ottiene allora, ricordando ancora una volta le (1.13),

$$\begin{aligned}
 \vec{a}(P) &= \left. \frac{d^2(P-O)}{dt} \right|_{(O)} = \\
 &= \ddot{x}_1 \vec{i}_1 + \ddot{y}_1 \vec{j}_1 + \ddot{z}_1 \vec{k}_1 + x_1 \ddot{\vec{i}}_1 + y_1 \ddot{\vec{j}}_1 + z_1 \ddot{\vec{k}}_1 + \vec{a}(O) + 2(\dot{x}_1 \dot{\vec{i}}_1 + \dot{y}_1 \dot{\vec{j}}_1 + \dot{z}_1 \dot{\vec{k}}_1) = \\
 &= \vec{a}_1(P) + \vec{a}(O) + x_1 \ddot{\vec{i}}_1 + y_1 \ddot{\vec{j}}_1 + z_1 \ddot{\vec{k}}_1 + 2\vec{\omega} \times (\dot{x}_1 \vec{i}_1 + \dot{y}_1 \vec{j}_1 + \dot{z}_1 \vec{k}_1)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ora, ponendo  $\vec{a}_\tau(P) = \vec{a}(O) + x_1 \ddot{\vec{i}}_1 + y_1 \ddot{\vec{j}}_1 + z_1 \ddot{\vec{k}}_1$ , si osserva che  $\vec{a}_\tau(P)$  rappresenta la cosiddetta *accelerazione di trascinamento di  $P$* , definita in analogia a  $\vec{v}_\tau(P)$ , ossia l'accelerazione che  $P$  avrebbe se fosse rigidamente connesso con  $(O_1)$ : in tal caso infatti si avrebbe  $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = \dot{z}_1 = 0$ . Infine ponendo

$$\vec{a}_c(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1,$$

detta *accelerazione complementare, o di Coriolis*, dalla (2.11) si ottiene

$$\vec{a}(P) = \vec{a}_1(P) + \vec{a}_\tau(P) + \vec{a}_c(P), \tag{2.12}$$

che rappresenta la legge di composizione delle accelerazioni. È bene notare che l'accelerazione di Coriolis si annulla se

- $\vec{\omega} = 0$ , cioè se il corpo collegato al sistema  $(O_1)$  è privo di rotazione;
- $\vec{v}_1 = 0$ , cioè se il punto, in quel dato istante, è fermo rispetto al sistema  $(O_1)$ ;
- $\vec{\omega} // \vec{v}_1$ , cioè la velocità di  $P$  rispetto a  $(O_1)$  è parallela al vettore di Poisson di  $(O_1)$ .

La relazione (2.12) esprime il Teorema di Coriolis, che può essere così esplicitato.

**Teorema 2.5** (di Coriolis). *L'accelerazione di un punto rispetto a un sistema  $(O)$  vale l'accelerazione rispetto a un sistema  $(O_1)$  sommata all'accelerazione di trascinamento e all'accelerazione di Coriolis.*

## 2.2 Sistemi equivalenti e composizione dei movimenti

**Definizione 2.6.** Due sistemi  $(O)$  e  $(O_1)$  si dicono equivalenti, o inerziali, (e si scrive  $(O) \approx (O_1)$ ) se si muovono di pura traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro, ovvero la traslazione avviene con velocità costante nel tempo.

Data questa definizione è semplice dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 2.7.**  $(O) \approx (O_1)$  se e solo se  $\vec{a}(P) = \vec{a}_1(P)$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione. Condizione necessaria.*

Sia  $(O) \approx (O_1)$ . Per il Teorema 2.5 si sa che

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3.$$

Per ipotesi  $\vec{\omega} = 0$ , per cui  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1 = 0$ , ma anche  $\vec{a}_\tau = 0$  perché  $(O_1)$  si muove di moto traslatorio uniforme rispetto a  $(O)$ . Da qui, automaticamente, segue il risultato

$$\vec{a} = \vec{a}_1, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3.$$

**Condizione sufficiente.**

Bisogna mostrare che i)  $\vec{\omega} = 0$  e ii)  $\vec{a} = 0$ ,  $\forall P \in (O_1)$ .

ii) Per ogni  $P \in (O_1)$  si ha  $\vec{a}_1 = 0$  ma per ipotesi  $\vec{a} = \vec{a}_1$ . Da questo segue che

$$\vec{a} = 0, \quad \forall P \in (O_1). \quad (2.13)$$

i) Per ogni  $P \in \mathbb{R}^3$   $\vec{a}_\tau$  è l'accelerazione che  $P$  avrebbe se fosse solidale con  $(O_1)$ ; pertanto  $\vec{a}_\tau = 0$  per la (2.13). Ancora dal Teorema 2.5 si ha  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_\tau + \vec{a}_c$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}^3$ , che combinata con l'ipotesi  $\vec{a} = \vec{a}_1$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}^3$  e con quanto dimostrato ( $\vec{a}_\tau = 0$ ,  $\forall P \in \mathbb{R}^3$ ), determina

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1 = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}^3.$$

Per l'arbitrarietà della scelta del punto  $P$ , questo può essere scelto non solidale con il corpo ( $\Rightarrow \vec{v}_1 \neq 0$ ) e tale che  $\vec{\omega}$  non sia parallelo a  $\vec{v}_1$ . Questo implica che  $\vec{\omega} = 0$ , quindi  $(O_1)$  si muove rispetto ad  $(O)$  di moto traslatorio uniforme.

□

Si abbia ora un vettore

$$\vec{u} = P - Q$$

i cui estremi  $P$  e  $Q$  sono variabili nel tempo. Si vuole trovare, adesso, la relazione tra la derivata  $\frac{d\vec{u}}{dt}|_{(O)}$  calcolata rispetto all'osservatore  $(O)$  e la derivata  $\frac{d\vec{u}}{dt}|_{(O_1)}$  rispetto all'osservatore  $(O_1)$ . Se  $u_{x1}$ ,  $u_{y1}$ ,  $u_{z1}$  sono le componenti di  $\vec{u}$  sugli assi  $O_1x_1y_1z_1$  si ha

$$\vec{u} = u_{x1}\vec{i}_1 + u_{y1}\vec{j}_1 + u_{z1}\vec{k}_1. \quad (2.14)$$

Derivando questa equazione rispetto a  $(O)$ , ricordando le (1.13), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{(O)} &= \frac{du_{x1}}{dt}\vec{i}_1 + \frac{du_{y1}}{dt}\vec{j}_1 + \frac{du_{z1}}{dt}\vec{k}_1 + \\ &+ u_{x1}\vec{\omega} \times \vec{i}_1 + u_{y1}\vec{\omega} \times \vec{j}_1 + u_{z1}\vec{\omega} \times \vec{k}_1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

In questa espressione i primi tre termini al secondo membro si possono ottenere derivando la (2.14) rispetto all'osservatore  $(O_1)$ , quindi la loro somma coincide con  $\frac{d\vec{u}}{dt}|_{(O_1)}$ . Gli altri tre termini valgono  $\vec{\omega} \times \vec{u}$  (raccogliendo  $\vec{\omega}$  e ricordando la (2.14)), quindi si ha

$$\frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{(O)} = \frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{(O_1)} + \vec{\omega} \times \vec{u}.$$

In particolare, se  $\vec{u} = \vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{(O)} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{(O_1)},$$

cioè la derivata del vettore  $\vec{\omega}$  è la stessa per i due osservatori.

Si conclude questa sezione sul moto relativo fornendo qualche accenno sulla cosiddetta *composizione dei movimenti*.

Si dice che *il moto di un corpo rigido è composto dai moti  $M_1$  e  $M_2$*  in un certo intervallo di tempo quando il corpo ha il moto  $M_1$  rispetto all'osservatore  $(O_1)$ , mentre il sistema  $(O_1)$  ha il moto  $M_2$  rispetto ad  $(O)$ . Questa scrittura non è commutativa, infatti si può provare che se il corpo rigido si muovesse di un moto  $M_2$  rispetto a  $(O_1)$  e, rigidamente collegato con questo osservatore, si muovesse di moto  $M_1$  rispetto ad  $(O)$ , il moto composto sarebbe, in genere, diverso da quello precedentemente considerato.

**Definizione 2.8.** *Si dice che, in un certo intervallo di tempo, un moto  $M$  è equivalente ai moti  $M_1$  e  $M_2$  se con il moto  $M$  il corpo passa, nello stesso intervallo di tempo, dalla posizione iniziale a quella finale del moto composto.*

Sia ora, in un istante  $t$ ,  $\vec{v}_1(P)$  lo stato cinetico corrispondente al moto  $M_1$  e  $\vec{v}_2(P)$  lo stato cinetico corrispondente a  $M_2$ . Lo stato cinetico del moto composto all'istante  $t$ , per il Teorema 2.2 di composizione delle velocità e notando che  $\vec{v}_2$  rappresenta la velocità di trascinamento, è uguale a

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P).$$

Quindi si può dare la seguente interpretazione della composizione di due stati cinetici: *lo stato cinetico risultante dai due stati cinetici componenti, in un certo istante, è lo stato cinetico che assume il corpo (rispetto ad  $(O)$ ) se rispetto all'osservatore  $(O_1)$  ha lo stato cinetico  $\vec{v}_1(t)$  mentre, rigidamente collegato ad  $(O_1)$ , è dotato di uno stato cinetico  $\vec{v}_2(t)$  (i due stati cinetici s'intendono calcolati nel medesimo istante  $t$ ).*

Si passa ora ad analizzare il caso specifico in cui il corpo rigido, mobile rispetto ad  $(O_1)$ , si riduca ad un punto  $P$  (oppure, analogamente, si consideri un punto determinato del corpo stesso). Inoltre, per semplificare i calcoli, si suppone che  $(O_1)$  si muova di moto di traslazione rispetto ad  $(O)$ , cosicché il moto  $M_2$  sia caratterizzato dal moto del punto  $(O_1)$  o di un qualunque altro punto rigidamente collegato con  $(O_1)$ . Siano allora

$$x_1 = x_1(t) \quad y_1 = y_1(t) \quad z_1 = z_1(t) \quad (2.16)$$

le equazioni del moto di un punto  $P$  rispetto a  $(O_1)$  e

$$x_2 = x_2(t) \quad y_2 = y_2(t) \quad z_2 = z_2(t) \quad (2.17)$$

le equazioni del moto (traslatorio) di  $(O_1)$  rispetto a  $(O)$ . Per una generalizzazione delle (2.1) le equazioni del moto di  $P$  rispetto a  $(O)$ , che formano il cosiddetto *moto composto* o *risultante*, sono

$$\begin{cases} x(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ z(t) = z_1(t) + z_2(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

Tale moto risulta essere composto dai due moti  $M_1$ , definito dalle (2.16), ed  $M_2$ , definito dalle (2.17). In forma vettoriale, detti  $P_1(t) - O$ ,  $P_2(t) - O$ ,  $P(t) - O$  i vettori di componenti rispettivamente  $x_1, y_1, z_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$ ;  $x, y, z$  (cioè gli spostamenti dall'origine corrispondenti ai moti componenti e al moto composto), si ha

$$P(t) - O = P_1(t) - O + P_2(t) - O. \quad (2.19)$$

Tale relazione rivela che il moto risultante si ottiene sommando i vettori che rappresentano i moti componenti. Ponendo nella (2.19)  $t + h$  al posto di  $t$  e sottraendo l'equazione così ottenuta alla (2.19) stessa si ottiene

$$P(t + h) - P(t) = [P_1(t + h) - P_1(t)] + [P_2(t + h) - P_2(t)]. \quad (2.20)$$

In generale si è quindi visto che lo spostamento, in un certo intervallo di tempo, del moto composto di  $P$  si ottiene sommando vettorialmente gli spostamenti dovuti ai moti componenti e relativi allo stesso intervallo.

# Capitolo 3

## Il moto rigido piano

### 3.1 Moto di una figura piana nel suo piano. Centri istantanei

Come è già stato accennato alla fine del primo capitolo, un corpo in moto con le velocità sempre parallele ad un piano (che possiamo identificare con il piano  $Oxy$ ) passa, in ogni istante, per uno stato cinetico di traslazione o di rotazione attorno ad un asse istantaneo perpendicolare a  $Oxy$ . Inoltre, la figura sezione del corpo con  $Oxy$  non esce mai da questo piano. È facile notare che, noto il moto di questa figura, resta determinato il moto del corpo intero (perché certamente si conosce il moto di tre suoi punti non allineati). Da questo si ricava che il moto in esame si riduce allo studio del *moto di una figura piana nel suo piano*. Per quanto riguarda lo stato cinetico di rotazione, viene chiamato *centro istantaneo di rotazione*  $C$  l'intersezione dell'asse istantaneo con il piano.

Agli effetti del calcolo delle velocità, la figura si comporta come se ruotasse intorno al centro istantaneo. La velocità intensiva  $v$  (cioè il modulo della velocità) è quindi espressa dalla (1.26), cioè

$$v = \omega r, \quad (3.1)$$

dove  $r$  è la distanza del punto  $P$  considerato da  $C$  e  $\omega$  è il modulo della velocità angolare (o velocità angolare intensiva). La direzione della velocità è tangente al cerchio di centro  $C$  e raggio  $CP$ , cioè è normale alla retta  $CP$ . Più sinteticamente, se  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare all'istante  $t$  ed essendo  $C$  un punto dell'asse, si può scrivere

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times (P - C). \quad (3.2)$$

Con queste osservazioni è immediato provare il seguente teorema.

**Teorema 3.1.** *Noto, in un certo istante, il centro istantaneo e la velocità di un punto della figura, sono determinate le velocità di tutti gli altri punti della figura stessa (in quello stesso istante).*

*Dimostrazione.* Siano  $Q$  un punto di tale figura e  $\vec{v}_1$  e  $r_1$  rispettivamente la sua velocità e la distanza dal centro istantaneo  $C$ .  $\vec{v}_1$  è determinata in direzione, perché normale a  $CQ$ , in verso, perché concorde con la velocità  $\vec{v}$  espressa nella (3.2), e in modulo in quanto, per la (3.1), si può scrivere

$$v_1 = \omega r_1,$$

quindi

$$v_1 = \frac{vr_1}{r},$$

dove la seconda espressione è stata ottenuta dalla prima dividendo per la (3.1). □

Se  $C$  tende all'infinito allora le rette  $CP$  e  $CQ$  tendono a diventare parallele, quindi  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}$  assumono uguale direzione. Inoltre, per questo stesso limite, si ha che  $\frac{r_1}{r}$  tende all'unità: questo implica che  $v = v_1$ , da cui  $\vec{v} = \vec{v}_1$ . È quindi immediato verificare che quando il centro istantaneo tende all'infinito, lo stato cinetico della figura tende a diventare di traslazione. Dunque un tale stato cinetico può essere interpretato come di rotazione con centro istantaneo all'infinito e in direzione normale alle velocità. Di conseguenza il moto di una figura piana nel suo piano si può supporre di rotazione con centro istantaneo al finito o all'infinito. Si noti che il punto della figura che coincide con il centro istantaneo (se esiste) ha velocità nulla, essendo nella (3.1)  $r = 0$ .

Si consideri ora una retta  $a$  fissa e una retta  $a_1$  collegata con la figura mobile. Sia  $\theta$  l'angolo tra  $a$  e  $a_1$  e si costruiscano due rette  $b$  e  $b_1$ , passanti per il centro istantaneo  $C$  in un generico istante  $t$ , orientate rispettivamente come  $a$  e  $a_1$ . Allora l'angolo tra tali rette è ancora  $\theta$ . Ci si concentri adesso, a partire dall'istante  $t$ , sulla retta  $b_1$  rigidamente connessa con la figura. Questa è sempre parallela ad  $a_1$  perciò, se all'istante  $t + dt$  l'angolo tra  $a$  e  $a_1$  vale  $\theta + d\theta$ , tale è pure l'angolo tra  $b$  e  $b_1$ . Perciò, nell'intervallo infinitesimo  $dt$ , la retta  $b_1$  ruota intorno al centro istantaneo  $C$  dell'angolo  $d\theta$ , quindi la velocità angolare della figura intorno a  $C$  è data, all'istante  $t$ , da  $\frac{d\theta}{dt}$ . Dunque dalla (1.28) (essendo l'asse di rotazione parallelo a  $\vec{k}$ ) si ha

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}. \tag{3.3}$$

Si analizzano ora alcuni metodi di ricerca per via geometrica del centro istantaneo di rotazione. Siano note le traiettorie  $\lambda_P$  e  $\lambda_Q$  di due punti  $P$  e  $Q$  della figura e, in un certo istante, la posizione di tali punti. La velocità di  $P$  è tangente a  $\lambda_P$ , quindi il centro istantaneo si trova sulla normale a  $\lambda_P$  in  $P$ . In modo analogo il centro istantaneo si trova sulla normale a  $\lambda_Q$  in  $Q$ , quindi sull'intersezione di queste due normali.

**Esempio 3.2.** Si abbia un'asta rigida, schematizzata (Figura 3.1) da un segmento  $AB$ , mobile nel piano in modo che  $A$  percorra l'asse  $Ox$  e  $B$  l'asse  $Oy$ . In tal caso il centro istantaneo si trova nel punto  $C$  intersezione delle normali a  $Ox$  in  $A$  e a  $Oy$  in  $B$ .

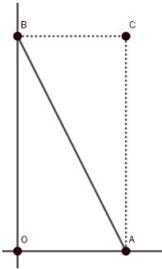


Figura 3.1: Ricerca per via geometrica del centro istantaneo per l'Esempio 3.2.

Per indicare un altro metodo di ricerca dei centri istantanei occorre premettere alcune considerazioni. Sia  $\pi$  il piano  $Oxy$  su cui si muove la figura e si consideri, sovrapposto a  $\pi$ , un altro piano ideale  $\pi_1$  che si muove rimanendo sempre rigidamente connesso alla figura mobile. I due piani  $\pi$  e  $\pi_1$  verranno rispettivamente chiamati *piano fisso* e *piano mobile*. Si consideri poi, oltre all'osservatore ( $O$ ) a cui è riferito il moto, un secondo osservatore ( $O_1$ ) solidale con la figura mobile, quindi con  $\pi_1$ . Si prenda in considerazione adesso una curva  $\sigma_1$  del piano mobile che durante il moto della figura involupa una curva  $\sigma$  del piano fisso, cioè che rimane sempre tangente a  $\sigma$  in un suo punto  $M$ . Questo punto, al trascorrere del tempo, si muove percorrendo la curva  $\sigma$  rispetto all'osservatore ( $O$ ) (perché tale curva è ferma rispetto a lui) e la curva  $\sigma_1$  rispetto ad ( $O_1$ ) (per lo stesso motivo). Detto ciò risulta evidente che le velocità  $\vec{v}$  e  $\vec{v}_1$  di  $M$  rispetto ad ( $O$ ) e ( $O_1$ ) sono dirette entrambe lungo la tangente comune a  $\sigma$  e  $\sigma_1$  in  $M$ . Per il Teorema 2.2 di composizione delle velocità si ha

$$\vec{v}_\tau = \vec{v} - \vec{v}_1, \quad (3.4)$$

dove  $\vec{v}_\tau$  è la velocità del punto  $M$  pensato come rigidamente connesso con la figura. Quindi il centro istantaneo, che si deve trovare sulla normale in  $M$  a  $\vec{v}_\tau$ , si trova, per la (3.4), sulla normale in  $M$  alla tangente comune alle due curve. In questo modo si ottiene una retta su cui si trova il centro istantaneo.

**Esempio 3.3.** Si abbia (Figura 3.2) un segmento  $AB$  che muovendosi involupa una circonferenza di centro  $O$ , mentre il suo estremo  $A$  si muove sulla retta  $r$  tangente in un punto  $T$  alla circonferenza. Il centro istantaneo si trova all'incontro tra la retta  $OM$ , normale al segmento e alla circonferenza nel loro punto di contatto  $M$ , e la perpendicolare a  $r$  in  $A$ .

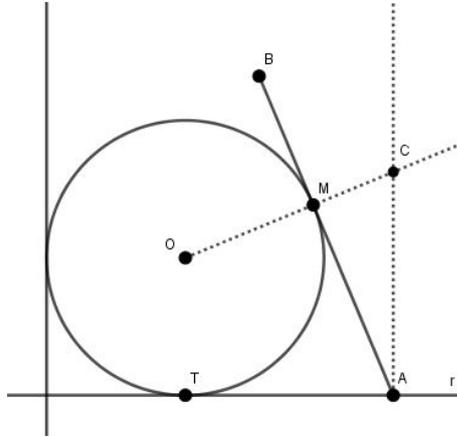


Figura 3.2: Ricerca per via geometrica del centro istantaneo per l'Esempio 3.3.

### 3.2 Rotolamento di due curve. Rulletta e base

Come è già stato detto, il centro istantaneo di rotazione  $C$  cambia posizione da istante a istante; si muove quindi sul piano  $\pi$  descrivendo una curva  $c$  detta *base*. Si può però anche considerare il moto di  $C$  rispetto all'osservatore ( $O_1$ ) definito precedentemente (cioè solidale con la figura rigida). In questo caso  $C$  descrive una seconda curva  $c_1$ , chiamata *rulletta*, che giace nel piano  $\pi_1$  collegato con la figura mobile e quindi fissa rispetto a ( $O_1$ ). È chiaro che, mentre la base è fissa, la rulletta è mobile. Le due curve hanno però, in ogni istante, un punto in comune: il centro istantaneo. Si dimostrerà che non solo si intersecano in ogni istante, ma una rotola senza strisciare sull'altra.

Si dice che la curva  $c_1$  *rotola senza strisciare* sulla curva  $c$  quando nel suo moto involuppa  $c$ , e il punto comune a  $c$  e a  $c_1$  si muove sulle due curve in versi concordi, percorrendo archi uguali in tempi uguali. Si può già enunciare e dimostrare un primo importante teorema.

**Teorema 3.4.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché la curva  $c_1$  rotoli senza strisciare sulla  $c$  è che sia nulla in ogni istante la velocità  $\vec{v}_T$  del punto della figura coincidente con l'intersezione tra le due curve.*

*Dimostrazione. Condizione necessaria*

Si considerino due curve  $c_1$  e  $c$ , rispettivamente sul piano mobile e fisso, e si supponga che  $c_1$  rotoli senza strisciare su  $c$ . Siano  $\vec{v}$  e  $\vec{v}_1$  rispettivamente le velocità del punto di contatto  $T$  rispetto agli osservatori ( $O$ ) e ( $O_1$ ). Poiché la curva  $c_1$  involuppa  $c$ , il vettore  $\vec{v}$  è parallelo al vettore  $\vec{v}_1$ . Muovendosi poi  $T$  sulle due curve nello stesso senso, perché  $c_1$  rotola senza strisciare su  $c$ , i

due vettori sono uguali anche in verso. Infine, poiché gli archi  $s$  e  $s_1$  percorsi nello stesso tempo da  $T$  sulle due curve sono uguali, si verifica

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}, \quad (3.5)$$

cioè anche i moduli delle due velocità sono uguali. Si verifica quindi che

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \quad (3.6)$$

da cui, usando il Teorema 2.2 di composizione delle velocità, risulta  $\vec{v}_\tau = 0$ .

### Condizione sufficiente

Se  $\vec{v}_\tau = 0$  segue, utilizzando nuovamente il Teorema 2.2, la (3.6). Ma  $\vec{v}$  e  $\vec{v}_1$  sono rispettivamente le tangenti a  $c$  e a  $c_1$  nel loro punto di intersezione  $T$ . Dunque le due curve hanno uguale tangente, quindi la curva mobile involupa la curva fissa. Inoltre, avendo  $\vec{v}$  e  $\vec{v}_1$  lo stesso verso, il punto  $T$  percorre le due curve nello stesso senso. Infine dalla (3.6) deriva l'uguaglianza delle velocità scalari, cioè la (3.5), che si può riscrivere come

$$\frac{d(s - s_1)}{dt} = 0,$$

da cui risulta che  $s - s_1$  è costante. Ma tale costante è nulla se inizialmente i due archi su  $c$  e  $c_1$  si assumono entrambi nulli. Dunque si ottiene che  $s = s_1$  da cui si ricava che la  $c_1$  rotola senza strisciare sulla  $c$ .  $\square$

Detto questo è facile dimostrare che solo la rulletta e la base rotolano l'una sull'altra senza strisciare. Infatti la velocità  $\vec{v}_\tau$  del punto della figura che coincide con l'intersezione delle due curve è sempre nulla, essendo esso proprio il centro istantaneo. Viceversa, se  $c_1$  rotola senza strisciare su  $c$ , il punto della figura che coincide con il punto di contatto ha velocità di trascinamento nulla, quindi deve essere il centro istantaneo. Si è dunque dimostrato il seguente teorema.

**Teorema 3.5.** *Nel moto di una figura piana nel suo piano esistono sempre due curve tali che una, sul piano della figura mobile, durante il moto rotola senza strisciare sull'altra, sul piano fisso. Tali curve sono, rispettivamente, la rulletta e la base.*

Per le considerazioni fatte è evidente che il punto di intersezione delle due curve è il centro istantaneo. Dunque, conoscendo la rulletta e la base, si conosce anche, istante per istante, il centro istantaneo.

Come applicazione dei risultati ottenuti, si consideri anzitutto il moto cicloidale. Si abbia una ruota che si muove senza strisciare su un binario rettilineo.



Figura 3.3: Applicazione dei Teoremi 3.4 e 3.5.

Una sua sezione con un piano normale all'asse è una circonferenza che rotola senza strisciare sulla retta intersezione del binario con il piano. Il moto di tale circonferenza sulla retta è chiamato *moto cicloidale*, perché i punti collegati con la figura mobile descrivono delle curve chiamate, appunto, *cicloidì*. Il centro istantaneo  $C$  è il punto di contatto della circonferenza con la retta. È evidente, per la (3.1), che se  $\vec{v}_0$  è la velocità del centro della circonferenza, la velocità del punto  $P$  diametralmente opposto a  $C$  vale  $2\vec{v}_0$ . Questa relazione spiega il fatto che spostando un carrello appoggiato a dei rulli, questi restano, dopo un po' di tempo, sorpassati dal carrello. Infatti mentre i rulli si spostano con la velocità del loro centro, il carrello si muove circa con la velocità di quei punti dei rulli con cui è a contatto, cioè con velocità doppia rispetto a quella dei rulli.

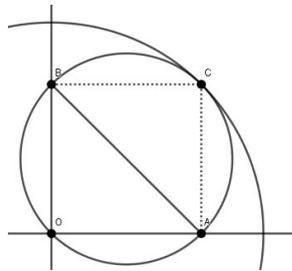


Figura 3.4: Rulletta e base per l'Esempio 3.2.

Oltre al moto cicloidale, sono anche importanti i moti *epicicloidale* e *ipocicloidale*: il primo è il moto di una circonferenza che rotola senza strisciare all'esterno di una circonferenza fissa; il secondo moto è analogo al primo ma la circonferenza mobile si sposta internamente alla circonferenza fissa. Le curve descritte nei due moti dai punti connessi con la figura mobile si chiamano rispettivamente *epicicloidì* e *ipocicloidì*.

Si recuperino ora gli Esempi 3.2 e 3.3 per calcolare le rispettive basi e rullette.

Nel primo esempio (moto di un'asta  $AB$  di cui l'estremo  $A$  percorre l'asse  $Ox$  e l'estremo  $B$  l'asse  $Oy$ ) il centro istantaneo ha una distanza dall'origine  $CO = BA = l$  costante (dove  $l$  è la lunghezza dell'asta). Il luogo dei punti  $C$  rispetto all'osservatore fisso ( $O$ ), la base, è banalmente la circonferenza centrata in  $O$  e di raggio  $l$ . Invece, per stabilire il luogo dei centri istantanei rispetto all'osservatore ( $O_1$ ), occorre riferirsi alla retta  $AB$ , che è fissa rispetto a ( $O_1$ ). Poiché  $\widehat{ACB}$  è un angolo retto

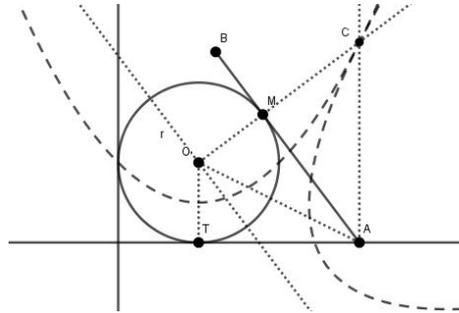


Figura 3.5: *Rulletta e base per l'Esempio 3.3.*

si può dire che il luogo dei centri istantanei rispetto ad  $(O_1)$  è il luogo dei punti da cui si vede  $AB$  secondo un angolo retto, cioè una circonferenza di diametro  $AB$ . Il moto in esame è quindi ipocicloidale, perché la rulletta è una circonferenza che rotola internamente su un'altra circonferenza (vedi Figura 3.4). Viceversa, ogni moto ipocicloidale con la circonferenza fissa con diametro doppio rispetto alla ruotante, si può realizzare facendo scorrere su due rette, passanti per il centro della circonferenza fissa, un diametro della circonferenza mobile (Teorema di Cardano).

La Figura 3.5, invece, si riferisce all'Esempio 3.3. Si osservi che, essendo il triangolo  $OAC$  isoscele (infatti gli angoli  $\widehat{CAO}$  e  $\widehat{AOT}$  sono uguali in quanto complementari di  $\widehat{OAT}$ , quindi, essendo  $\widehat{COA}$  uguale a  $\widehat{AOT}$ , ne risulta  $\widehat{COA} = \widehat{CAO}$ , cioè il triangolo è isoscele), si ha

$$CO = AC, \quad (3.7)$$

cioè il centro istantaneo  $C$  è sempre equidistante dal centro della circonferenza  $O$  e dalla retta  $AT$ . Il luogo di questi punti (base) è una parabola di fuoco  $O$  e direttrice  $AT$ . Per l'osservatore  $(O_1)$ , invece, sono fissi il punto  $A$  e la retta  $r$  passante per  $O$  e parallela ad  $AB$  (retta fissa per  $(O_1)$ ). Allora, usando nuovamente la (3.7), si ha che la rulletta è il luogo dei punti equidistanti da  $A$  e da  $r$ , cioè una parabola di fuoco  $A$  e direttrice  $r$ .

Viene ora trattata la ricerca analitica della rulletta e della base.

Si considerino i due sistemi  $Oxy$  e  $O_1x_1y_1$ , collegati rispettivamente con il piano fisso e con il piano mobile. Sia  $\theta$  l'angolo tra  $O_1x_1$  e  $Ox$ . Allora i coseni direttori  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  e  $\beta_2$ , definiti nella Sezione 1.2, valgono rispettivamente

$$\alpha_1 = \cos \theta \quad \alpha_2 = \sin \theta \quad \beta_1 = -\sin \theta \quad \beta_2 = \cos \theta.$$

Utilizzando ora le (1.8), limitandosi a studiarne le coordinate  $x, y, x_1, y_1$  e ricordando che  $a, b$  sono le coordinate di  $O_1$ , si ha

$$\begin{aligned}x &= a + x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\y &= b + x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta,\end{aligned}\tag{3.8}$$

che sono le formule di trasformazione delle coordinate nel piano. Derivando queste equazioni, tenendo presente le (3.8) stesse e notando che  $x_1, y_1$  sono invariabili con il tempo, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} - (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{da}{dt} - (y - b) \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{db}{dt} + (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{db}{dt} + (x - a) \frac{d\theta}{dt},\end{aligned}\tag{3.9}$$

che esprimono, nell'ordine, le componenti della velocità di un punto  $P$  della figura mediante le sue coordinate rispetto a  $O_1x_1y_1$  ed a  $Oxy$ .

Siano ora  $\xi$  e  $\eta$  le coordinate del centro istantaneo rispetto ad  $Oxy$ . Ponendo negli ultimi termini di (3.9) tali coordinate al posto di  $x$  e  $y$ , il punto  $P$  della figura viene a coincidere con il centro istantaneo  $C$ , la cui velocità di trascinamento è nulla (dunque anche  $\frac{d\xi}{dt}$  e  $\frac{d\eta}{dt}$  lo sono). Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}0 &= \frac{da}{dt} - (\eta - b) \frac{d\theta}{dt} \\ 0 &= \frac{db}{dt} + (\xi - a) \frac{d\theta}{dt},\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\xi = a - \frac{db}{d\theta} \quad \eta = b + \frac{da}{d\theta}.\tag{3.10}$$

Queste equazioni, note  $a$  e  $b$  in funzione di  $\theta$ , esprimono le coordinate rispetto a  $Oxy$  del centro istantaneo in funzione del parametro  $\theta$ : rappresentano quindi le *equazioni parametriche della base*.

Siano invece  $\xi_1$  e  $\eta_1$  le coordinate del centro istantaneo rispetto a  $O_1x_1y_1$ . Seguendo un ragionamento simile al precedente (sostituendo, cioè,  $\xi_1$  a  $x_1$  e  $\eta_1$  a  $y_1$  nelle (3.9)) si ottiene

$$\xi_1 \sin \theta + \eta_1 \cos \theta = \frac{da}{d\theta} \quad \xi_1 \cos \theta - \eta_1 \sin \theta = -\frac{db}{d\theta},$$

da cui, risolvendo rispetto a  $\xi_1$  e  $\eta_1$ ,

$$\xi_1 = \frac{da}{d\theta} \sin \theta - \frac{db}{d\theta} \cos \theta \quad \eta_1 = \frac{da}{d\theta} \cos \theta + \frac{db}{d\theta} \sin \theta.\tag{3.11}$$

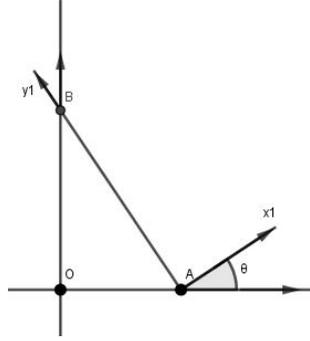


Figura 3.6: Ricerca analitica di rulletta e base per l'Esempio 3.2.

Le (3.11), note  $a$  e  $b$  come funzioni di  $\theta$ , esprimono le coordinate  $\xi_1$  e  $\eta_1$  del centro istantaneo rispetto al sistema  $O_1x_1y_1$  mobile: quindi rappresentano le equazioni parametriche della rulletta.

Si recuperi l'Esempio 3.2: si calcolano ora la base e la rulletta in forma analitica.

Posta l'origine degli assi mobili in  $A$ , l'asse  $y_1$  lungo  $AB$  e l'asse  $x_1$  normale a  $y_1$  (Figura 3.6), si ha

$$a = l \sin \theta \quad b = 0,$$

quindi, usando le (3.10),

$$\xi = l \sin \theta \quad \eta = l \cos \theta.$$

Elevando al quadrato le due equazioni e sommandole risulta

$$\xi^2 + \eta^2 = l^2. \quad (3.12)$$

Infine, per le (3.11), si ha

$$\begin{aligned} \xi_1 &= l \sin \theta \cos \theta = \frac{l}{2} \sin 2\theta \\ \eta_1 &= l \cos^2 \theta = \frac{l}{2}(1 + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

Portando nella seconda di queste ultime  $\frac{l}{2}$  al primo membro, elevando entrambe al quadrato e sommandole tra loro, si ottiene

$$\xi_1^2 + \left(\eta_1 - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2. \quad (3.13)$$

È evidente che la (3.12) rappresenta una circonferenza di raggio  $l$  centrata nell'origine, mentre la (3.13) una circonferenza di raggio  $\frac{l}{2}$  e con centro sull'asse  $y_1$  a distanza  $\frac{l}{2}$  da  $A$  (cioè una circonferenza di diametro  $l$ ). Si ritrovano così per via analitica i risultati ottenuti per via geometrica.

### 3.3 Accelerazione nel moto di una figura piana nel suo piano

Per ottenere l'accelerazione di un punto  $P$  di una figura piana mobile nel suo piano si può derivare la (3.2), dopo aver sostituito  $\vec{\omega}$  con la sua espressione (3.3). In tal modo si ottiene

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k} \times (P - C) + \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \times \frac{dP}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \times \frac{dC}{dt}$$

e, ponendo al secondo membro di questa equazione ancora l'espressione (3.2) di  $\frac{dP}{dt}$ , con il valore dato dalla (3.3) di  $\vec{\omega}$  si ottiene

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k} \times (P - C) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{k} \times [\vec{k} \times (P - C)] - \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \times \frac{dC}{dt}. \quad (3.14)$$

È chiaro che  $\vec{k} \times (P - C)$  si ottiene ruotando  $P - C$  di  $\frac{\pi}{2}$  da destra verso sinistra per un osservatore disposto lungo  $\vec{k}$  ( $\vec{k}$  ha origine in  $C$ ). Inoltre  $\vec{k} \times [\vec{k} \times (P - C)]$  si ottiene facendo subire a  $P - C$  un'ulteriore rotazione di  $\frac{\pi}{2}$ : tale vettore vale dunque  $-(P - C)$ . In tal modo, ponendo  $\vec{u} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{k} \times \frac{dC}{dt}$ , si ottiene

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{k} \times (P - C) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (P - C) + \vec{u}. \quad (3.15)$$

L'accelerazione del punto  $P$  ha ovviamente una componente lungo la retta  $PC$ , detta *accelerazione centripeta*, e una normale a tale retta, chiamata *accelerazione tangenziale*.

Per cercare il luogo dei punti  $P$  in cui si annulla l'accelerazione centripeta si moltiplichi scalarmente la (3.15) per  $P - C$ . Per i punti  $P$  per cui si annulla la  $\frac{d^2P}{dt^2}$  lungo la  $PC$ , il primo membro dell'equazione così ottenuta è nullo perché rappresenta la proiezione del vettore accelerazione in direzione normale alla velocità. Si ottiene quindi

$$0 = -\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 (P - C)^2 + \vec{u} \cdot (P - C)$$

e, indicando con  $r$  la distanza  $PC$  e con  $\varphi$  l'angolo che il vettore  $P - C$  forma con il vettore  $\vec{u}$ , si ottiene

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 r^2 = ru \cos \varphi.$$

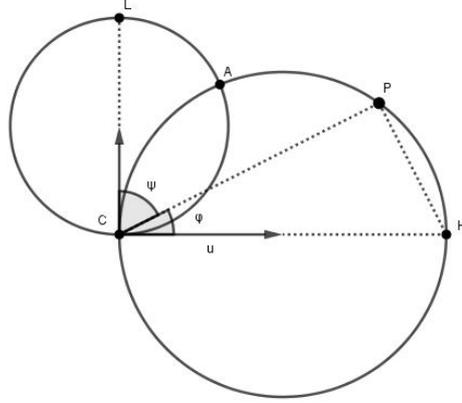


Figura 3.7: *Circonferenza dei flessi e circolo di stazionarietà.*

Dunque, per  $r \neq 0$  (cioè non considerando il punto  $C$ ), si ottiene

$$r = m \cos \varphi \quad \text{con} \quad m = \frac{u}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = \frac{\left|\frac{dC}{dt}\right|}{\omega}. \quad (3.16)$$

Poiché  $m \geq 0$  si ha quindi  $\cos \varphi \geq 0$ , da cui  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ . La (3.16) è quindi l'equazione di una circonferenza che passa per  $C$  con diametro  $|H - C| = m$ , parallelo ad  $\vec{u}$  e tale che  $H - C$  abbia lo stesso verso di  $\vec{u}$ , come si può vedere nella Figura 3.7. Tale curva è chiamata *circonferenza dei flessi*.

Per cercare, invece, il luogo dei punti dove si annulla l'accelerazione tangenziale, si moltiplichi scalarmente la (3.15) per  $\vec{k} \times (P - C)$ . Per i punti  $P$  del luogo in discorso si ottiene un'equazione con il primo membro nullo, quindi, dopo alcuni passaggi, si giunge a

$$0 = \frac{d^2\theta}{dt^2} [\vec{k} \times (P - C)] \cdot [\vec{k} \times (P - C)] - \frac{d\theta}{dt} \left( \vec{k} \times \frac{dC}{dt} \right) \cdot [\vec{k} \times (P - C)].$$

Il termine che moltiplica  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  vale il quadrato del modulo di  $P - C$ . Inoltre si può notare che il prodotto scalare tra  $\vec{k} \times \frac{dC}{dt}$  e  $\vec{k} \times (P - C)$  coincide proprio con il prodotto scalare tra  $P - C$  e  $\frac{dC}{dt}$ . Quindi, usando la notazione  $\ddot{\theta} := \frac{d^2\theta}{dt^2}$  e  $\dot{\theta} := \frac{d\theta}{dt}$  si ha

$$\ddot{\theta} |P - C|^2 = \dot{\theta} \left[ \frac{dC}{dt} \cdot (P - C) \right].$$

Ora, sempre per  $P \neq C$ , indicando con  $\psi$  l'angolo tra  $P - C$  e  $\frac{dC}{dt}$  e con  $n$  l'espressione

$$n = \frac{\left|\frac{dC}{dt}\right| \dot{\theta}}{\ddot{\theta}},$$

si ottiene

$$|P - C| = n \cos \psi. \quad (3.17)$$

Questa è l'equazione di una circonferenza di diametro  $|L - C| = |n|$  parallelo a  $\frac{dC}{dt}$  (vedi Figura 3.7). Se  $n > 0$ ,  $L - C$  ha lo stesso verso di  $\frac{dC}{dt}$ , mentre ha verso opposto nel caso contrario. Tale curva è chiamata *circolo di stazionarietà* (Figura 3.7).

Ovviamente i due circoli di stazionarietà e dei flessi variano da istante a istante e si incontrano, oltre che nel punto  $C$  (che però non appartiene ai due luoghi), in un altro punto  $A$  in cui l'accelerazione totale è nulla, essendo nulle entrambe le componenti normale e tangenziale. Ponendo nella (3.14)  $A$  al posto di  $P$  e sostituendo  $\vec{\omega}$  a  $\frac{d\theta}{dt}\vec{k}$ , si ottiene

$$0 = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (A - C) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (A - C)] - \vec{\omega} \times \frac{dC}{dt}.$$

Sottraendo quest'ultima alla (3.14) stessa si ha

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (P - A) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (P - A)]. \quad (3.18)$$

Adesso, se anziché ruotare istantaneamente intorno a  $C$  la figura ruotasse permanentemente e con velocità angolare  $\vec{\omega}$  intorno al punto  $A$ , che dovrebbe quindi essere supposto fermo, la velocità del generico punto  $P$  sarebbe

$$\frac{dP}{dt} = \vec{\omega} \times (P - A) \quad (3.19)$$

mentre la sua accelerazione si otterrebbe derivando questa espressione, risultando

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (P - A) + \vec{\omega} \times \frac{dP}{dt}.$$

Sostituendo qui la (3.19) si ritrova l'accelerazione effettiva espressa dalla (3.18). Si è quindi provato il seguente risultato:

**Teorema 3.6.** *Nel moto di una figura piana nel suo piano esiste, per ogni istante, un punto detto polo delle accelerazioni tale che, agli effetti del calcolo delle accelerazioni, in quello stesso istante, si può considerare la figura ruotante (permanentemente e con velocità angolare  $\vec{\omega}$ ) intorno a quel punto, che deve essere considerato fisso.*

In queste pagine è stato supposto  $\dot{\theta} \neq 0$  e  $\ddot{\theta} \neq 0$ . Comunque il polo delle accelerazioni esiste anche senza queste ipotesi, purché non si verifichi contemporaneamente  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ .

## 3.4 Altri moti rigidi particolari

### 3.4.1 Moto di un corpo rigido con un punto fisso

Si consideri un corpo rigido  $\mathcal{C}$  che si muova in modo che un suo punto  $O_1$  rimanga fermo. La sua velocità  $\frac{dO_1}{dt}$  è nulla, quindi per la (1.17) si ha

$$\frac{dP}{dt} = \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathcal{C} \quad (3.20)$$

per cui il corpo passa in ogni istante per uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo passante per  $O_1$  e parallelo a  $\vec{\omega}$ .

È facile dimostrare che l'asse istantaneo è contenuto nel piano passante per  $P$  e normale alla sua velocità. Si manda infatti per  $P$  la parallela  $r$  all'asse istantaneo. Poiché  $\vec{v}(P)$  è contenuta in un piano normale all'asse,  $\vec{v}(P)$  è anche normale a  $r$ . Inoltre  $\vec{v}(P)$ , per la (3.20), è normale alla retta  $PO_1$ , quindi il piano passante da  $P$  e normale a  $\vec{v}(P)$  è determinato da  $r$  e da  $PO_1$  e contiene l'asse istantaneo di rotazione e il punto  $O_1$ . Allora, nota la velocità al medesimo istante di due punti  $P$  e  $Q$  del corpo, si determina immediatamente l'asse istantaneo intersecando i piani passanti per  $P$  e  $Q$  e normali alla loro velocità, essendo contenuto in entrambi i piani.

Questa costruzione presenta una certa analogia con la ricerca dei centri istantanei nel moto di una figura piana nel suo piano. Si può osservare, infatti, che la figura sferica  $S$  sezione del corpo con una sfera di centro  $O_1$  rimane sempre sulla sfera stessa, in quanto, per il vincolo di rigidità, non può variare la distanza dei punti di  $S$  da  $O_1$ . Poiché una volta noto il moto della figura  $S$  è noto anche il moto del corpo e viceversa, ne consegue il teorema

**Teorema 3.7.** *Il moto di un corpo rigido con un punto fisso si riconduce al moto di una figura sferica su una sfera.*

Si chiama *polo istantaneo* l'intersezione  $C$  della sfera con l'asse istantaneo, intersezione scelta in modo che  $C - O_1$  abbia lo stesso verso di  $\vec{\omega}$ . Poiché l'asse istantaneo è contenuto nel piano passante per  $P$  e normale alla sua velocità,  $C$  si trova sull'intersezione di tale piano con la sfera (tale intersezione rappresenta un cerchio massimo).

Nel moto di una figura piana nel suo piano, tutte le costruzioni relative al centro istantaneo sono state dedotte ricordando che tale punto giace sempre sulla retta passante per un punto della figura e perpendicolare alla sua velocità. La stessa proprietà vale per il moto di una figura sferica sulla sfera, purché si sostituisca alla retta il cerchio massimo. Quindi si possono formulare teoremi analoghi a quelli del moto piano per il moto sferico.

Così, ad esempio, se  $\lambda_P$  e  $\lambda_Q$  sono le traiettorie di due punti  $P$  e  $Q$  della

figura mobile sulla sfera, il polo istantaneo si trova nell'intersezione dei due cerchi massimi normali in  $P$  e in  $Q$  a  $\lambda_P$  e  $\lambda_Q$ . Più precisamente, poiché si hanno due intersezioni diametralmente opposte, è scelto in modo che  $C - O_1$  sia dello stesso verso di  $\vec{\omega}$ .

Si consideri ora, oltre all'osservatore ( $O$ ) a cui è riferito il moto, un osservatore ( $O_1$ ) collegato con la figura (o, ugualmente, con il corpo rigido) e, oltre alla sfera  $\Sigma$  su cui si muove la figura, una seconda sfera  $\Sigma_1$  collegata alla figura stessa. Le due sfere vengono chiamate, rispettivamente, *fissa* e *mobile*. Sia  $\sigma_1$  una curva della sfera mobile che durante il moto inviluppa una curva  $\sigma$  della sfera fissa: il polo istantaneo si trova allora sul cerchio massimo normale a  $\sigma$  e a  $\sigma_1$  nel loro punto di contatto. Se si considerano le curve  $c$  e  $c_1$  luoghi dei poli istantanei rispetto agli osservatori ( $O$ ) ed ( $O_1$ ), giacenti rispettivamente su  $\Sigma$  e  $\Sigma_1$ , si può dimostrare, analogamente a quanto è stato fatto per il moto piano, che  $c_1$  rotola senza strisciare su  $c$ . Il punto di contatto di tali curve, dette rispettivamente *poloide* ed *erpoloide sferica*, è proprio il polo istantaneo di rotazione. Proiettando dal centro della sfera  $O_1$  la poloide e l'erpoloide sferica si ottengono due coni, uno fisso e l'altro collegato con il corpo mobile. Quest'ultimo cono rotola senza strisciare sul primo.

**Teorema 3.8.** *Nel moto di un corpo rigido con un punto fisso esiste sempre un cono collegato al corpo che, durante il moto, rotola senza strisciare su un cono fisso.*

Infine è bene osservare che il cono fisso è formato dalle rette passanti per il punto  $O_1$  e per il luogo dei poli istantanei rispetto all'osservatore ( $O$ ). Dunque il cono fisso è il luogo degli assi istantanei rispetto all'osservatore fisso, in quanto passano per  $O_1$  e per il polo. Analogamente il cono mobile è il luogo degli assi istantanei rispetto all'osservatore mobile.

### 3.4.2 Moto di precessione

Si abbia un corpo rigido con un punto fisso  $O_1$  il cui stato cinetico sia, in ogni istante, la somma di due stati cinetici (necessariamente di rotazione con asse istantaneo passante per  $O_1$ ), uno con velocità angolare  $\vec{\omega}_1$  costante in modulo e diretta sempre secondo una retta del corpo passante per  $O_1$ , detta *asse di figura*, l'altro con velocità angolare  $\vec{\omega}_2$  costante in modulo, direzione e verso. La velocità dei punti  $P$  del corpo è data da

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times (P - O_1) + \vec{\omega}_2 \times (P - O_1) = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (P - O_1). \quad (3.21)$$

Se il punto  $P$  cade lungo l'asse di figura,  $P - O_1$  diventa parallela a  $\vec{\omega}_1$  e il primo termine a secondo membro della (3.21) si annulla. Dunque, poiché  $\vec{\omega}_2$

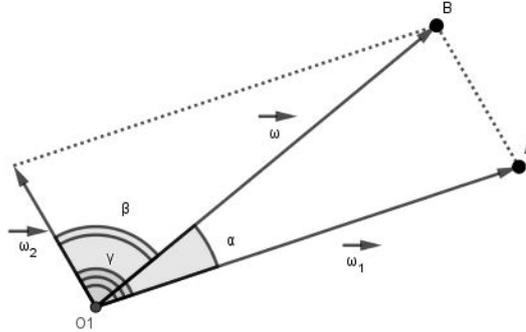


Figura 3.8: In questa figura si è indicato con  $\vec{\omega}$  il vettore  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ .

è costante, l'asse di figura si muove di rotazione uniforme intorno ad un asse fisso, ovviamente passante per  $O_1$  e parallelo a  $\vec{\omega}_2$ .

Dunque, poiché il primo termine a secondo membro della (3.21) rappresenta una rotazione uniforme intorno all'asse di figura, si può concludere che tale moto, detto *moto di precessione (regolare)*, consiste di un moto  $M_1$  di rotazione uniforme intorno ad un asse del corpo, il quale a sua volta ruota di moto uniforme  $M_2$  intorno ad un asse fisso. Viceversa, se un corpo è soggetto a un moto di precessione, composto dai moti  $M_1$  ed  $M_2$  definiti sopra, allora la velocità di un generico punto  $P$  del corpo è espressa dalla (3.21).

Esempi di moto di precessione sono il moto della trottola (supponendo, in ogni istante, nullo lo spostamento della sua punta) e il moto della Terra, prescindendo dal suo moto intorno al Sole (cioè riferendo il moto della Terra al sistema terrestre-stellare, quello con origine nel suo centro e orientato con le stelle fisse).

Riprendendo la formula (3.21) si può notare che un corpo in moto di precessione passa, in ogni istante, per uno stato cinetico di rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ . Il suo asse istantaneo passa per  $O_1$  e contiene  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ .

Per determinare i due coni di cui si è parlato per il moto generico di un corpo con un punto fisso, si può mostrare preliminarmente che sono costanti gli angoli  $\beta$  e  $\alpha$  tra l'asse istantaneo e gli assi fisso e di figura (vedi Figura 3.8). Si noti che, poiché l'asse di figura ruota intorno all'asse fisso, l'angolo  $\theta$  formato da queste due rette rimane costante. Dunque, essendo per il Teorema di Carnot

$$|\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \theta},$$

si può concludere che il modulo della velocità angolare è costante al trascorrere del tempo. Infine, per il teorema dei seni applicato al triangolo  $AO_1B$

della Figura 3.8, si ha

$$\frac{\sin \beta}{\sin \theta} = \frac{\omega_1}{|\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2|},$$

ed essendo il secondo membro costante, anche  $\beta$  lo è; dunque l'angolo formato dall'asse istantaneo e da quello fisso è costante. Il luogo degli assi istantanei rispetto all'osservatore ( $O$ ) è dunque un cono rotondo con apertura  $2\beta$  di asse coincidente con  $\vec{\omega}_2$ . Essendo poi  $\alpha = \theta - \beta$ , si ha che è costante anche  $\alpha$ , cioè l'angolo formato dall'asse istantaneo e dalla retta di figura, fissa rispetto all'osservatore ( $O_1$ ). Il luogo degli assi istantanei rispetto all'osservatore ( $O_1$ ) è dunque un cono rotondo di apertura  $2\alpha$  e asse coincidente con quello di figura. Quindi si ottiene un ultimo teorema.

**Teorema 3.9.** *In un moto di precessione esiste un cono rotondo collegato con la figura mobile che rotola senza strisciare su un cono rotondo fisso.*

# Bibliografia

- [1] D. Graffi, *Elementi di meccanica razionale*, Patron, Bologna, 1973
- [2] D. Graffi, *Esercizi di meccanica razionale*, Patron, Bologna, 1970
- [3] A. Strumia, *Meccanica razionale, vol. 1*, Nautilus, Bologna, 2000



# Ringraziamenti

Ringrazio, in primo luogo, tutti i miei compagni di corso, che mi hanno affiancato e fornito sostegno e risate in questi tre anni di studio condiviso, e tutti i professori che ho avuto il piacere di conoscere e che mi hanno permesso di appassionarmi ancora di più a questo meraviglioso universo che è la matematica.

Ringrazio Sara, Giulia e Francesco, amici preziosi di cui non potrei fare a meno.

Ma soprattutto ringrazio i miei genitori e la mia "sorellina", che con il loro amore e il loro sostegno, mi hanno reso l'uomo che sono.