

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Studi sulla risoluzione angolare nel tracciamento dell'esperimento MUonE

Relatore:
Prof. Domenico Galli

Presentata da:
Eugenia Spedicato

Correlatore:
Dott. Umberto Marconi

Indice

Indice	1
1 Introduzione	2
2 Teoria	4
2.1 Il muone	4
2.2 Teoria sui momenti magnetici e il momento magnetico anomalo $g - 2$. . .	5
3 Il sistema di tracciamento per l'esperimento MUonE	7
3.1 Sviluppo dell'analisi	7
3.2 Determinazione delle coordinate del punto di passaggio delle particelle nei piani di rivelazione	9
3.3 Errore di misura del punto di passaggio y delle particelle nei piani di rivelazione	10
3.4 Ricostruzione della traccia e valutazione degli errori	11
4 Studio della risoluzione angolare	17
4.1 Dipendenza della $\delta\theta$ dall'energia E	19
4.2 Numero ottimale di piani al silicio	20
4.3 Rivelatori CBC2 per il trigger della traccia a HL-LHC	22
5 Conclusioni	25
Bibliografia	27

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio sviluppato in questo elaborato consiste nell'analisi degli errori di misura del sistema ottimale di tracciamento della proposta di esperimento MUonE, per valutare la risoluzione angolare dell'apparato.

La proposta di esperimento MUonE ha lo scopo di misurare la variazione della costante di accoppiamento elettromagnetica $\alpha(t)$, dove $t = q^2$ è il valore del quadrimpulso, di tipo space-like, trasferito nel processo di collisione elastica di muoni di alta energia su elettroni atomici di un bersaglio a basso Z :

$$\mu(150 \text{ GeV}) + e^-(rest) \longrightarrow \mu + e^-. \quad (1.1)$$

Per mezzo della misura della sezione d'urto differenziale elastica del processo, si potrà misurare il contributo adronico dominante a_μ^{HLO} all'anomalia del momento magnetico $g - 2$ del muone. La sezione d'urto differenziale potrà essere misurata in funzione degli angoli di diffusione, misurati con elevata precisione tramite un sistema di tracciamento costituito da un numero n di rivelatori al silicio da stabilire, di spessore s , posti ad uguale distanza relativa d .

Ad oggi, a_μ è una delle più precise grandezze fisiche misurate, ma c'è una non trascurabile discrepanza tra il valore sperimentale e quello predetto dal Modello Standard, attorno alle 3-4 σ , e risulta essere

$$\Delta a_\mu(Exp - SM) \sim (28 \pm 8) \times 10^{-10} \quad (1.2)$$

ed è considerato uno dei più interessanti indicatori di fisica oltre al Modello Standard. Per questo motivo è necessaria un'elevata precisione nella nuova misura che si intende farne.

La mia analisi consiste nella determinazione della configurazione ottimale dei sensori di silicio, cioè quella che permette di rendere minimo l'errore di misura della direzione della traiettoria delle particelle dopo l'attraversamento degli n piani del rivelatore.

Per ottenere questo risultato ho simulato il passaggio delle particelle cariche attraverso il rivelatore con il metodo Monte Carlo.

Per ogni traiettoria ho registrato le n coordinate di passaggio attraverso i rivelatori.

Ho quindi determinato l'espressione della retta che approssima la traiettoria con il metodo matriciale dei minimi quadrati, realizzando un'ottimizzazione dei parametri di questa per determinare la direzione. I dati dell'esperimento simulato sono stati raccolti

in istogrammi. La distribuzione degli angoli θ ricostruiti mediante la procedura di adattamento fornisce una misura dell'errore con il quale è possibile definire la direzione di propagazione delle particelle dopo la collisione elastica.

Per poter conseguire un'accurata valutazione della risoluzione, lo studio richiede una precisa analisi degli errori che intervengono nella determinazione delle traiettorie.

È stato necessario utilizzare la matrice di covarianza V delle coordinate misurate dai diversi piani di silicio in modo da considerare le correlazioni fra gli errori di misura dovute alla diffusione multipla coulombiana. La procedura di adattamento della retta per i punti misurati restituisce l'errore sui parametri determinati.

Ho verificato che l'errore sull'angolo θ restituito dalla procedura di adattamento fosse in accordo con la deviazione standard σ_θ della distribuzione dei valori angolari restituiti dopo l'adattamento.

Il programma che ho sviluppato per realizzare questa analisi consente di valutare la configurazione ideale del rivelatore, tramite la variazione dei parametri caratteristici del sistema: variando lo spessore s , il numero di piani n , la distanza d tra questi e l'energia E delle particelle che si suppone di tracciare.

Confrontando i risultati ottenuti è possibile definire la condizione ottimale per ottenere la misura angolare più precisa.

Capitolo 2

Teoria

2.1 Il muone

Nel 1912 Hess scoprì una radiazione di particelle cariche che aveva origine oltre l'atmosfera terrestre, i cosiddetti "raggi cosmici". Questi furono un ricco banco di scoperta per la fisica delle particelle all'inizio del 1900.

Grazie a questi infatti, nel 1937 Street, Stevenson, Anderson e Neddermeyer scoprirono una particella "meno massiva del protone ma più penetrante dell'elettrone", che fu identificata come muone, anche se una sua prima osservazione fu compiuta nel 1933 da Kunze, in una camera a nebbia di Wilson.

Il muone è relativamente instabile, avendo una vita media dell'ordine di

$$\tau \sim 2.15 \mu\text{s}, \quad (2.1)$$

dopo la quale decade per interazione debole

$$\mu^- \longrightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e. \quad (2.2)$$

Nella tabella 2.1, sono riportate le principali caratteristiche del muone [3].

μ Properties (PDG 18)	
J	1/2
m_μ	$105.6583745 \pm 0.0000024 \text{ MeV}$
τ	$2.1969811 \pm 0.0000022 \mu\text{s}$
$a_\mu (\times 10^{-10})$	$11659208 \pm 54 \pm 3.3$

Figura 2.1. Proprietà del muone.

Nel Modello Standard fa parte della seconda generazione dei leptoni, in termini di massa è successiva all'elettrone ed è accoppiata con il neutrino muonico ν_{mu} .

2.2 Teoria sui momenti magnetici e il momento magnetico anomalo $g - 2$

In meccanica quantistica il momento magnetico di una particella è direttamente proporzionale allo spin μ_s della una particella [1].

Il rapporto tra queste due grandezze è definito come

$$\frac{\mu_s}{s} = -g \frac{e}{2mc} \quad (2.3)$$

dove $\frac{e}{2mc}$ è il fattore di Landè, mentre g è una quantità adimensionale, detta rapporto giromagnetico. Quest'ultimo caratterizza il momento magnetico di una data particella, legando il momento magnetico al numero quantico di spin s .

Misure dell'effetto Zeeman anomalo, permisero di stabilire che il valore di g dovesse essere pari a 2. Il primo a fornire una spiegazione del valore di g fu Dirac, con la sua teoria dell'elettrone quantistico relativistico. L'equazione di Dirac per l'elettrone si legge:

$$(i\gamma_\mu p^\mu + m) \Psi = 0 \quad (2.4)$$

Il limite non relativistico della teoria di Dirac mostra che il valore di g dovesse essere uguale a 2 per una particella puntiforme di spin $s = \frac{1}{2}$.

Misure di precisione successive mostrarono l'insufficienza della teoria di Dirac nel rendere conto della discrepanza dal valore $g = 2$ che si osserva per l'elettrone, come per il muone.

Si scoprì che i processi virtuali previsti dalla QED davano un contributo alla deviazione di g dell'ordine dell'effetto misurato. Infatti, l'elettrone ha una probabilità determinata di emettere e assorbire quanti del campo, in processi che modificano il rapporto $\frac{e}{m}$ caratterizzante il rapporto giromagnetico. Dai processi virtuali di QED deriva che g non ha esattamente il valore 2 previsto dalla teoria di Dirac. La correzione al momento magnetico dipende dal valore della costante di accoppiamento elettromagnetica che caratterizza la probabilità dei processi di foto emissione:

$$\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \quad (2.5)$$

e al primo ordine risulta essere

$$a = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.00116, \quad (2.6)$$

contributo calcolato da Schwinger da cui partì per il calcolo dei successivi ordini.

Ai processi virtuali elettromagnetici si devono aggiungere quelli legati all'interazione debole e alla QCD. In particolare i contributi della QCD all'anomalia del momento magnetico del muone costituiscono la maggiore incertezza nel calcolo teorico.

Pauli propose di utilizzare un termine per esemplificare la deviazione del valore misurato, detto momento magnetico anomalo e definito come:

$$\frac{g - 2}{2} \frac{e\hbar}{2m} \quad (2.7)$$

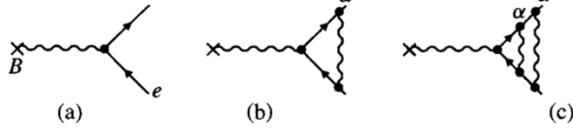


Figura 2.2. Grafici di alcune delle correzioni relative alla QED al momento magnetico dei leptoni.

dove $g - 2$ è detta anomalia, e il fattore $\frac{g-2}{2}$ quantifica in modo evidente la deviazione di g da 2. Sperimentalmente, sia l'anomalia dell'elettrone che quella del muone sono state calcolate molto precisamente

$$a_e^{exp} = 1\,159\,652\,180.73(28) \times 10^{-12} \pm 0.21 \text{ ppb} \quad (2.8)$$

$$a_\mu^{exp} = 1\,159\,920\,89(63) \times 10^{-11} \pm 0.54 \text{ ppm}. \quad (2.9)$$

Nel Modello Standard, l'anomalia del muone a_μ ha quindi tre contributi:

$$a_\mu = a^{QED} + a^{Weak} + a^{Had} \quad (2.10)$$

che sono rispettivamente il contributo dovuto all'interazione elettromagnetica, e all'interazione forte. I contributi dei processi elettro-deboli sono stati calcolati con enorme precisione. Il contributo dovuto alla QCD, che interviene nei processi di polarizzazione del vuoto, con creazione di coppie virtuali di quark e antiquark, può essere valutato con precisione limitata e quindi richiede misure dedicate.

Il contributo adronico all'ordine più basso per l'elettrone risulta essere 1.5 ppb di a_e , mentre per il muone è ~ 60 ppm [6]. Quindi con una minore precisione, l'anomalia del muone è sensibile a scale di massa di centinaia di GeV. Questo potrebbe indurre a pensare che non ci sia solamente un contributo da parte dei bosoni W e Z , ma forse altri contributi da nuove e ancora non scoperte particelle, come i partner supersimmetrici dei bosoni dell'interazione elettrodebole.

Capitolo 3

Il sistema di tracciamento per l'esperimento MUonE

3.1 Sviluppo dell'analisi

L'apparato sperimentale che abbiamo considerato per le simulazioni delle misure e per l'analisi consiste di un sistema di tre o quattro piani ideali di rivelatore a *strip* di silicio. Lo spessore s dei sensori, la loro distanza relativa d , il numero n dei piani, da utilizzare per il tracciamento sono parametri del sistema, da determinare in maniera da ottenere la migliore risoluzione possibile nella misura della direzione di propagazione delle particelle cariche.

Lo scopo di questo studio è determinare la configurazione ottimale del sistema di tracciamento per la proposta di esperimento MUonE, ed è necessario per rivelare gli eventi di urto elastico di un fascio di muoni di alta energia con elettroni a riposo di un bersaglio a basso numero atomico Z (Berillio o Carbonio).

Il sistema di tracciamento dovrà consentire di realizzare una misura precisa degli angoli di collisione del muone incidente sul bersaglio, e del muone e dell'elettrone dopo la collisione.

Per realizzare la simulazione ho considerato che nel passaggio di una particella attraverso un piano sensibile del rivelatore a *strip* di silicio il segnale prodotto permette di localizzare il punto di passaggio (*hit*) con un errore dovuto alla risoluzione intrinseca di misura. La risoluzione di un rivelatore a *strip* di silicio dipende dalla distanza fra le *strip* (elementi sensibili) e dal sistema di lettura del segnale di raccolta delle cariche liberata nella ionizzazione.

Nel caso si ricorra alla lettura binaria del segnale la risoluzione δx dipende dalla distanza fra le *strip* (*pitch*) come

$$\delta x = \frac{p}{\sqrt{12}} \quad (3.1)$$

Nell'attraversare il silicio, la particella subisce diffusione coulombiana multipla (*multiple scattering*); subisce inoltre perdite di energia per irraggiamento (*bremsstrahlung*).

Per questo studio abbiamo trascurato l'effetto della perdita di energia per irraggiamento. L'effetto della perdita di energia è di allungare le code della distribuzione angolare dovuta alla diffusione coulombiana multipla.

Con buona approssimazione la diffusione coulombiana multipla produce una deflessione angolare gaussiana, con deviazione standard valutabile per mezzo della espressione seguente:

$$\sigma_0 = \frac{13.6 \text{ (MeV)}}{E} \sqrt{\frac{d}{X_0}} \left[1 + 0.038 \cdot \ln \frac{d}{X_0} \right] \quad (3.2)$$

dove X_0 è la lunghezza di radiazione del materiale, ovvero la lunghezza alla quale l'energia della particella si riduce di un fattore $\frac{1}{e}$ a causa dell'irraggiamento.

Considerato l'effetto della diffusione multipla, l'angolo di uscita della particella da ciascun piano, è distribuito rispetto alla direzione d'ingresso secondo la distribuzione di Gauss con deviazione standard definita come nella (3.2):

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} \exp \left[-\frac{\theta^2}{2\sigma_\theta^2} \right] \quad (3.3)$$

Supponendo che il piano di rivelazione al silicio misuri la coordinata y del punto di passaggio della particella, la risoluzione intrinseca della misura del punto di passaggio y è anch'essa descritta da una distribuzione gaussiana:

$$h_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp \left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right] \quad (3.4)$$

dove σ_y è stata posta pari a 10 μm .

Per simulare il processo di misura ho realizzato un programma al calcolatore che usa il metodo Monte Carlo per la generazione di N eventi casuali. Il numero di eventi preso in considerazione sarà sempre 100000, l'errore statistico legato alla dimensione del campione è trascurabile nel nostro tipo di analisi, poichè quello che andiamo a valutare è l'errore medio delle singole misure e non l'errore sulla misura media.

Ho simulato il passaggio dei muoni attraverso gli m piani del rivelatore e ho registrato le coordinate dei punti colpiti sui diversi piani del rivelatore (y_1, y_2, \dots, y_m) .

Per ogni n -pla di coordinate (y_1, y_2, \dots, y_m) eseguo l'adattamento di una retta ai punti. Tramite il metodo dei minimi quadrati è possibile ricavare il coefficiente angolare e l'intercetta della retta e determinare l'angolo della traiettoria rispetto alla direzione iniziale (la direzione uscente del fascio).

Possiamo dunque suddividere il processo di simulazione e analisi in tre parti:

1. Valutazione delle coordinate;
2. Determinazione degli errori di misura della coordinata spaziale y ;
3. Determinazione dei parametri del *fit* e dei loro errori.

Grazie a questo studio è possibile ottenere la risoluzione angolare raggiungibile dal sistema di misura e ottimizzarne il progetto, considerando il numero di piani, lo spessore dei sensori e la distanza relativa tra un piano e il successivo.

3.2 Determinazione delle coordinate del punto di passaggio delle particelle nei piani di rivelazione

Si sono considerati N eventi che simulano la propagazione di una particella attraverso i piani di silicio. Per ogni evento sono state registrate le coordinate y di passaggio della particella attraverso ciascun piano.

La diffusione angolare ad ogni piano è definita come:

$$\theta_i = f(\theta_{i-1}, \sigma_0) \quad (3.5)$$

dove σ_0 è la deviazione standard dovuta alla diffusione multipla, definita nella (3.2).

Le coordinate che rappresentano i punti di passaggio sono calcolati come:

$$y_i = y_{i-1} + d \cdot \tan(\theta_{i-1}) \quad (3.6)$$

dove d è la distanza relativa fra i piani.

I valori delle coordinate misurate sono ottenute dalle coordinate y_i aggiungendo l'effetto di risoluzione intrinseca di misura dell'apparato:

$$\tilde{y}_i = y_i + f(0, \sigma_y); \quad (3.7)$$

dove $\sigma_y = 10 \mu\text{m}$ rappresenta la risoluzione intrinseca dello strumento.

Osserviamo che la misura del punto di passaggio della particella per il piano i -esimo è correlata alla misura effettuata nel piano precedente. Questo fatto ha una importanza fondamentale nella valutazione dell'errore di misura δy .

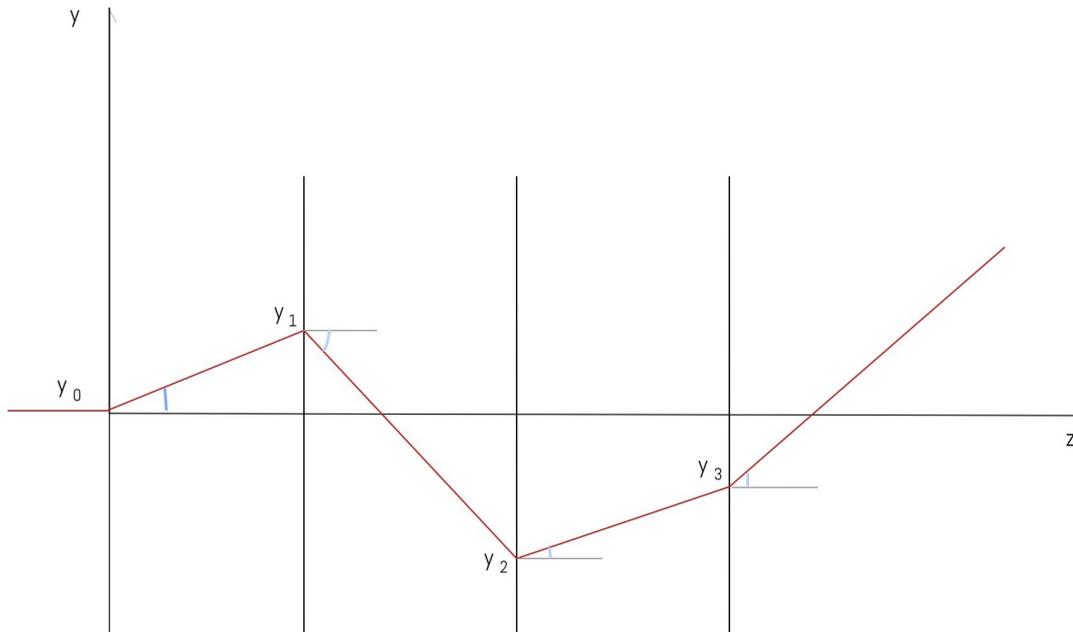


Figura 3.1. Raffigurazione del sistema e simulazione di un evento.

3.3 Errore di misura del punto di passaggio y delle particelle nei piani di rivelazione

Supponiamo che gli m piani di rivelazione siano posti ad una distanza reciproca d e che il primo di essi sia posizionato nell'origine del sistema di riferimento, come mostrato in *fig. 3.1*.

Vediamo come si possano determinare gli errori sulle singole y .

Come anticipato c'è una correlazione tra il valore della coordinata y misurata su un piano e le misure effettuate sui piani a monte, che dipende dalla geometria del sistema di tracciamento e dalla diffusione multipla [5].

I parametri che intervengono nella determinazione dell'errore sono la σ_0 descritta dalla teoria di Molière e dalla distanza d tra un piano e l'altro.

La deflessione angolare dipende della radice quadrata dello spessore del rivelatore, della natura del materiale (tramite la lunghezza di radiazione) e dal reciproco dell'energia delle particelle.

Scriviamo l'espressione dell'errore che si commette nella misura della coordinata y_i , rispetto alla direzione d'incidenza iniziale, sul piano i -esimo.

Il fascio, dopo l'impatto con il bersaglio, arriva senza alcuna perturbazione sul piano zero, dunque non ci sono effetti che variano la coordinata:

$$\delta y_0 = 0; \quad (3.8)$$

All'uscita, dal primo piano la particella percorrerà una distanza d prima di raggiungere il piano successivo. La direzione di uscita non coinciderà più con quella del fascio, in quanto la diffusione multipla ha perturbato la traiettoria all'interno del piano 0.

La coordinata y sul piano 1 avrà un valore pari a

$$\delta y_1 = \delta_0; \quad (3.9)$$

dove δ_0 è la deviazione causata solamente dal passaggio attraverso il piano 0.

All'uscita del piano 2 la direzione di propagazione della particella sarà influenzata dall'effetto del passaggio attraverso il piano 1 e dall'effetto dovuto al passaggio per il piano 0 precedente.

Quest'ultimo contribuisce in misura proporzionale alla distanza fra i due piani:

$$\delta y_2 = \delta_1 + \delta_0 \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}; \quad (3.10)$$

Procedendo analogamente troviamo che per la y del terzo piano si ha:

$$\delta y_3 = \delta_2 + \delta_1 \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} + \delta_0 \frac{z_3 - z_0}{z_1 - z_0}; \quad (3.11)$$

È possibile generalizzare l'espressione come

$$\delta y_i = \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \frac{z_i - z_k}{z_{k+1} - z_k} \quad (3.12)$$

dove δ_k è la deviazione della coordinata al piano k -esimo.

L'errore complessivo di misura sulla coordinata è dovuto alla diffusione multipla e alla risoluzione intrinseca e si ottiene sommando in quadratura i due contributi:

$$\sigma_{y_i} = \sqrt{\delta y_i^2 + \sigma_y^2} \quad (3.13)$$

Per un fascio di particelle di energia fissata, l'errore di misura della posizione non dipende dall'evento particolare, ma solo dalle caratteristiche del sistema di misura. Stabilite le caratteristiche dell'apparato avremo un'errore di misura crescente piano dopo piano (*si veda* fig. 3.2 a pag. 12).

Definiamo la matrice di covarianza V_{ij} delle misure rispetto al valore atteso. Gli elementi della matrice, rappresentano le covarianze tra la y_i e la y_j , e sono definiti come:

$$V_{ij} = \langle \delta y_i \cdot \delta y_j \rangle = \sigma_\theta^2 [(z_i - z_0)(z_j - z_0) + \dots + (z_i - z_{i-1})(z_j - z_{i-1})] \quad (3.14)$$

per ogni $i \leq j = 1, 2, \dots, m$.

Per determinare l'espressione della matrice ad ogni elemento della diagonale è necessario sommare in quadratura il valore della deviazione standard dovuta alla risoluzione intrinseca σ_y . La matrice è simmetrica e uguale per tutti gli n eventi generati.

Prendendo come esempio un sistema di quattro piani al silicio, ciascuno di spessore 600 μm (immaginiamo di avere due sensori per la misura delle coordinate x e y), posti lungo l'asse z , in posizione: $z_0 = 0$ cm, $z_1 = 25$ cm, $z_2 = 50$ cm e $z_3 = 75$ cm rispettivamente. Supponendo che il fascio abbia energia di 10 GeV, otteniamo una matrice (in unità $\mu^2\text{m}$) con i seguenti valori:

$$V = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 581.7 & 963.3 & 1445 \\ 0 & 9.633 & 2508 & 3853 \\ 0 & 1445 & 3853 & 6843 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

la cui inversa dà un indice dei pesi che le singole correlazioni hanno sull'errore finale dei parametri, calcolati con la (3.25) nel §3.4:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.004753 & -0.002101 & 0.0001795 \\ 0 & -0.02101 & 0.003882 & -0.001742 \\ 0 & 0.001795 & -0.001742 & 0.001089 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.4 Ricostruzione della traccia e valutazione degli errori

Una volta determinata l'espressione della matrice degli errori, per determinare i parametri della retta che rappresenti la migliore stima della traiettoria, si procede con un adattamento della espressione generale tramite il metodo dei minimi quadrati [4].

Per applicare il metodo dei minimi quadrati, si introduce la grandezza X^2 , un indicatore dell'accordo tra la distribuzione dei valori osservati e quella dei valori stimati secondo la retta. Il X^2 è definito come

$$X^2 = \sum_{i=0}^n \left[\frac{y_i - f(z_i)}{\sigma_{y_i}} \right]^2 \quad (3.17)$$

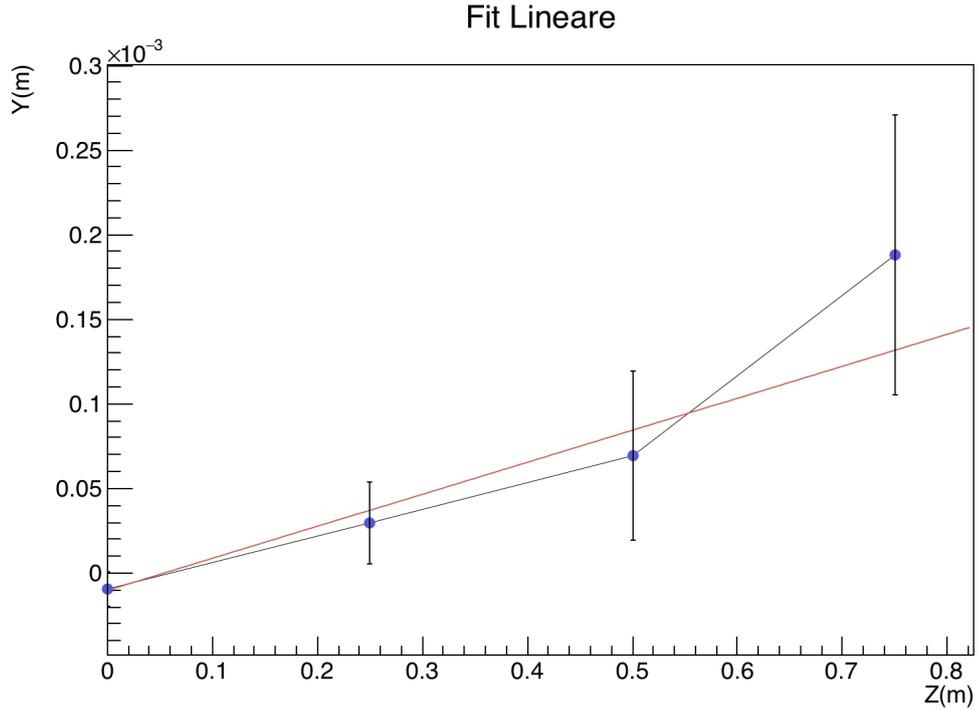


Figura 3.2. Esempio di un evento generato tramite il metodo Monte Carlo. La retta rossa rappresenta il *fit* che meglio approssima la spezzata.

dove y_i è la coordinata osservata nell' i -esimo piano, mentre $f(z_i)$ è il valore atteso

$$f(z_i) = p z_i + q \quad (3.18)$$

essendo la relazione esistente di tipo lineare.

Poiché c'è correlazione tra le coordinate y di un certo insieme, il X^2 è definito tramite la matrice di covarianza [4], [5].:

$$X^2 = (Y - H A_Y)^T V^{-1} (Y - H A_Y) \quad (3.19)$$

dove:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ 1 & z_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad A_Y = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

H è una matrice che definisce la geometria del sistema, mentre X è la matrice contenente i punti registrati dai sensori. A_Y invece contiene i parametri della retta.

Definito il X^2 , si può procedere con la minimizzazione, cioè con la determinazione dei valori di p e q che lo rendono minimo. Il valore dei parametri di minimo sono tali da rendere massima la probabilità dell'osservazione, considerato che per la probabilità di osservazione si può scrivere come:

$$p(y_0, \dots, y_m) = p(y_0) \cdots p(y_m) \propto \exp \left[-\frac{X^2}{2} \right] \quad (3.21)$$

A questo punto si procede con la minimizzazione, imponendo le due condizioni:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial \chi^2}{\partial y_z} = 0 \quad (3.22)$$

dalle quali si ottiene:

$$H^T V^{-1} (Y - H A_Y) = 0. \quad (3.23)$$

La risoluzione del sistema lineare porta alla definizione dei parametri come

$$A_y = (H^T V^{-1} H)^{-1} (H^T V^{-1} Y) \quad (3.24)$$

e le loro varianze sono definite dagli elementi diagonali della matrice di covarianza tra le grandezze q e p :

$$\delta A_y^2 = (H^T V^{-1} H)^{-1}. \quad (3.25)$$

Il valore dei parametri dipende delle osservazioni effettuate, mentre gli errori non dipendono dal campione considerato, ma solamente alla configurazione del sistema. Per cui è possibile definire, ad esempio per il caso del fascio di 10 GeV nel sistema precedente, gli errori assegnati ai parametri della retta rappresentante la traccia come la radice quadrata degli elementi diagonali della matrice di covarianza δA_y :

$$\sigma_p = 9.78 \times 10^{-5} \quad \sigma_q = 9.45 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (3.26)$$

Il valore dell'errore σ_p , restituito dalla procedura di adattamento, può essere confrontato con quello che si ottiene dalla deviazione standard della distribuzione dei valori angolari, raccolti in un istogramma per un dato campione di eventi e ottenuti tramite il *fit* dei punti generati con Monte Carlo. Come vedremo nella sezione successiva, il valore di θ è approssimabile al valore di p della retta di *fit*, per piccoli angoli.

Il *fit* è eseguito in modo da considerare tutte le correlazioni. A tal fine si sono ricavati i valori di p e q dalla (3.24), che sono i valori che minimizzano il χ^2 . Questi sono stati assegnati come parametri della retta di *fit* per ogni singolo evento generato.

La distribuzione degli angoli segue quella gaussiana, con media nell'intorno dell'angolo iniziale di entrata fig. 3.3.

La sigma risulta

$$\sigma_p = 9.78 \times 10^{-2} \text{ mrad}. \quad (3.27)$$

È interessante notare come avremmo una sovrastima dell'errore se non considerassimo nel *fit* la matrice di covarianza. Infatti, raccogliendo in due istogrammi differenti gli angoli ottenuti con un *fit* lineare di ROOT e quelli ottenuti con il *fit* eseguito utilizzando i parametri p e q della soluzione esatta ottenuta con il calcolo matriciale, confrontando poi la σ_{fit} e la σ_p con il δp ottenuto dal calcolo matriciale 3.25, otteniamo:

$E = 1 \text{ GeV}$	$E = 10 \text{ GeV}$	$E = 100 \text{ GeV}$
$\sigma_{\text{fit}} = 8.94 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\sigma_{\text{fit}} = 9.72 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\sigma_{\text{fit}} = 2.20 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
$\sigma_\theta = 8.79 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\sigma_\theta = 9.75 \times 10^{-2} \text{ mrad}$	$\sigma_\theta = 2.10 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
$\delta p = 8.79 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta p = 9.78 \times 10^{-2} \text{ mrad}$	$\delta p = 2.10 \times 10^{-2} \text{ mrad}$

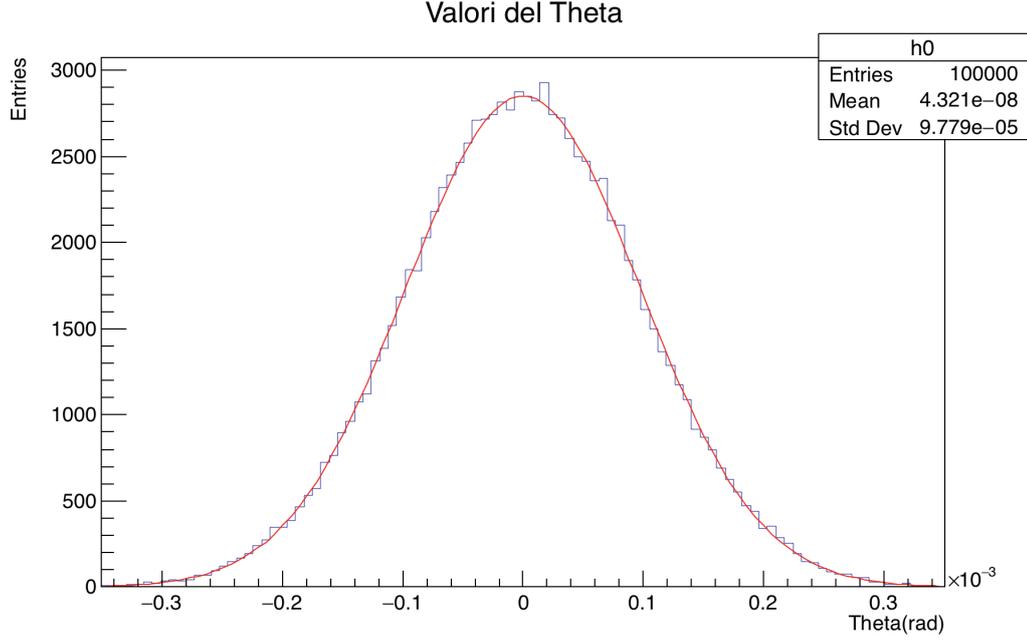


Figura 3.3. Distribuzione degli $N=10000$ angoli θ ricavati dal *fit*.

Come ci si aspettava, σ_p e δp sono molto simili. In questo caso infatti il *fit* tiene conto di tutte le correlazioni in gioco nella procedura di adattamento per il calcolo di p e δp .

È invece evidente come, specialmente a basse energie, la discrepanza tra σ_{fit} e δp non sia affatto trascurabile. Risulta un errore relativo del $\sim 12\%$.

Aumentando l'energia, questa discrepanza diminuisce progressivamente. Il motivo di questo comportamento, come si approfondirà maggiormente nelle sezioni successive, è la minor rilevanza, all'aumentare dell'energia, dell'effetto di *diffusione multipla* (si veda l'espressione (3.2) alla pag. 8). Poiché la correlazione degli errori, che determina gli elementi non diagonali della matrice, dipende solamente da questo effetto, essa ha un peso che diminuisce all'aumentare dell'energia.

Confrontando le matrici inverse V^{-1} possiamo effettivamente notare come i pesi degli elementi diagonali aumentino progressivamente in misura maggiore rispetto a quelli degli elementi non diagonali (in unità μm^{-2}):

$$V^{-1}(1 \text{ GeV}) = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.223 \times 10^{-4} & -8.11 \times 10^{-5} & 2.013 \times 10^{-5} \\ 0 & -8.11 \times 10^{-5} & 1.019 \times 10^{-4} & -4.085 \times 10^{-5} \\ 0 & 2.013 \times 10^{-5} & -4.085 \times 10^{-5} & 2.051 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$V^{-1}(10 \text{ GeV}) = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.753 \times 10^{-3} & -2.101 \times 10^{-3} & 1.795 \times 10^{-4} \\ 0 & -2.101 \times 10^{-3} & 3.882 \times 10^{-3} & -1.742 \times 10^{-3} \\ 0 & 1.795 \times 10^{-4} & -1.742 \times 10^{-3} & 1.089 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$V^{-1}(100 \text{ GeV}) = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.688 \times 10^{-3} & -5.304 \times 10^{-4} & -7.14 \times 10^{-4} \\ 0 & -5.304 \times 10^{-4} & 8.708 \times 10^{-3} & -1.958 \times 10^{-3} \\ 0 & -7.14 \times 10^{-4} & -1.958 \times 10^{-3} & 6.485 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Tramite questo metodo, è possibile raccogliere i valori del X^2 per ogni evento. L'andamento che ci si aspetta è quello tipico di una funzione $\chi^2(2)$, a due gradi di libertà, poiché il numero di parametri fissati dal metodo è due (p e q).

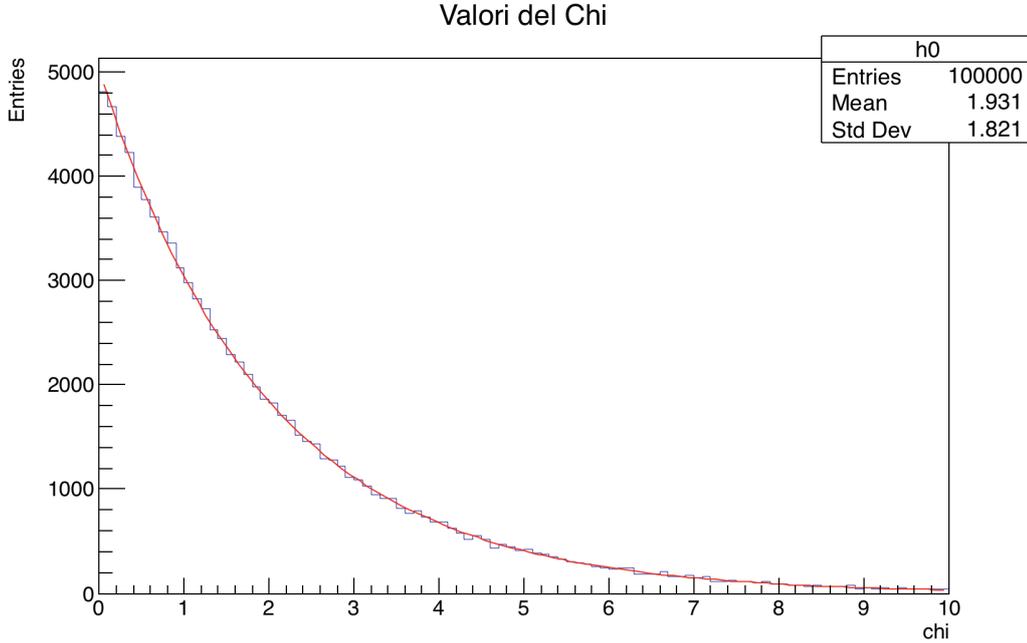


Figura 3.4. Distribuzione degli $N=100000$ valori di χ^2 per ogni evento.

Il valore medio del χ^2 deve essere paragonabile al numero di gradi di libertà del nostro sistema che in questo caso è $\text{DOF} = 4 - 2$. Dall'istogramma otteniamo che

$$\bar{\chi}^2 = 1.931. \quad (3.31)$$

Valutando il $\bar{\chi}_{\text{rid}}^2$ otteniamo che

$$\bar{\chi}_{\text{rid}}^2 = \frac{1.931}{2} = 0.97 \sim 1 \quad (3.32)$$

Questa grandezza è un indicatore della bontà dei nostri dati rispetto alla distribuzione attesa. Essendo circa pari ad 1, l'accordo è buono, si può dunque dire che la valutazione da noi compiuta per la stima della direzione delle particelle diffuse, attraverso il calcolo matriciale, descrive coerentemente il comportamento simulato.

Possiamo studiare che cosa succede se l'angolo di entrata non è zero, bensì $\theta_1 = 10$ mrad o $\theta_2 = 20$ mrad. Consideriamo il caso di un fascio di $E = 10$ GeV attraverso quattro piani di silicio di spessore $s = 600$ μm distanti tra loro $d = 25$ cm :

La media delle due gaussiane risulta rispettivamente:

$$\bar{\theta}_1 = 10.0001 \text{ mrad}, \quad (3.33)$$

quando l'angolo di entrata è $\theta_1 = 10$ mrad, e

$$\bar{\theta}_2 = 20.0024 \text{ mrad}, \quad (3.34)$$

quando l'angolo di entrata è $\theta_2 = 20$ mrad.

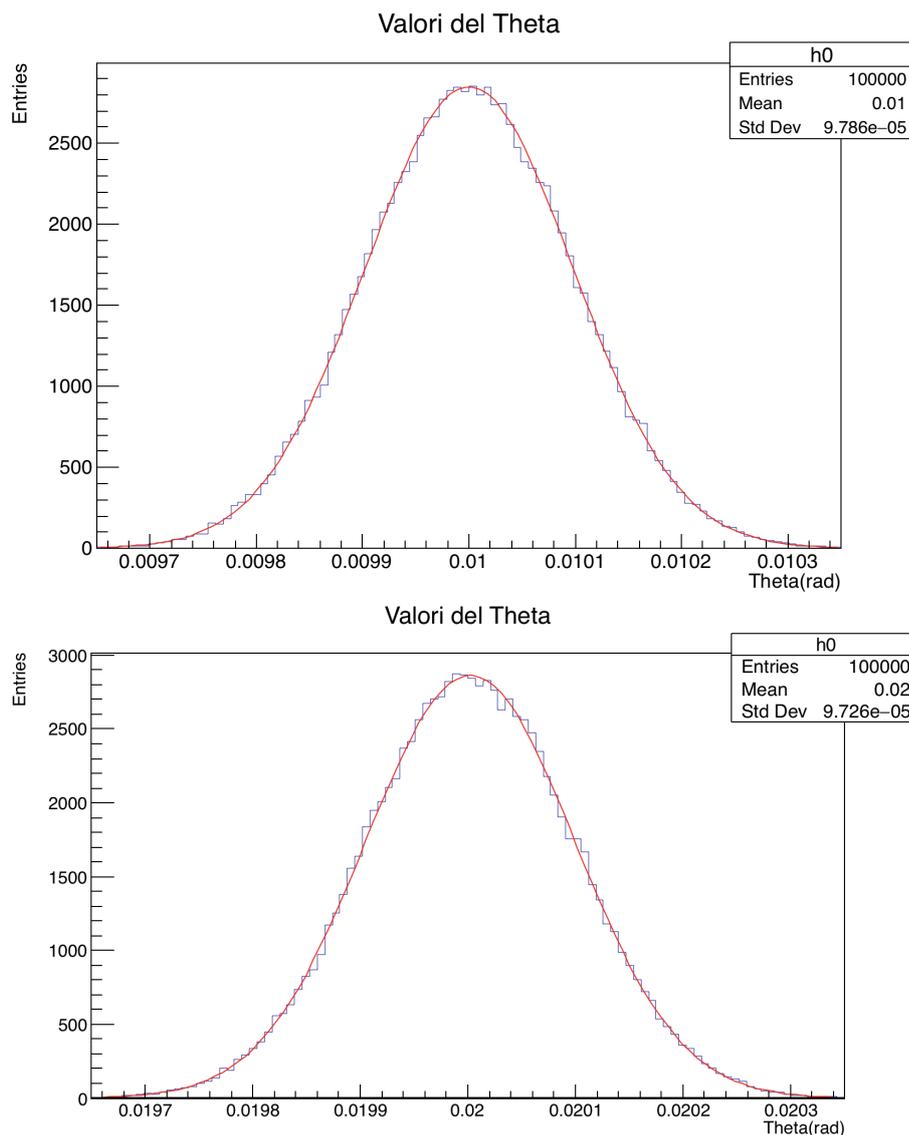


Figura 3.5. Distribuzione dei valori angolari con angoli di entrata rispettivamente $\theta_1 = 10$ mrad e $\theta_2 = 20$ mrad.

Si noti che vi è un errore sistematico nelle due misure medie delle gaussiane rispetto all'angolo di entrata. In questi casi l'ordine di grandezza è pari a quello statistico, ma, considerando anche il caso in cui θ era posto uguale a zero, l'errore sistematico tende lentamente a crescere. Dunque il nostro modello avrà un limite massimo, dal quale in poi l'errore sistematico non potrà più essere trascurato.

Capitolo 4

Studio della risoluzione angolare

Il nostro scopo è ora quello di determinare la precisione di misura dell'angolo di incidenza della particelle.

Come già discusso, la precisione di misura dei parametri della retta che meglio si adatta ai punti colpiti sui piani del rivelatore, la quale approssima la traiettoria della particella, è limitata: (a) dalla precisione del rivelatore, (b) dalla perturbazione sulla traccia della particella, indotta ogni piano di misura.

Dal *fit* ripetuto sui diversi eventi si può stimare la precisione della misura angolare, considerando la dispersione del coefficiente lineare p della retta. Avendo calcolato anche direttamente l'errore sul parametro p , si può inoltre verificare che l'errore stimato per l'angolo di deflessione corrisponda effettivamente alla larghezza della distribuzione dell'angolo di deflessione.

L'angolo θ della retta rispetto alla direzione del fascio incidente può definirsi come

$$\theta = \arctan p \quad (4.1)$$

l'errore può essere considerato equivalente a quello che si commette nella misura di p , considerata l'approssimazione di piccoli angoli, possibile per via del piccolo valore delle deflessioni angolari attese:

$$\tan \theta \simeq \theta \simeq p \quad (4.2)$$

perciò

$$\delta\theta = \delta p \quad (4.3)$$

Dati N eventi, posso determinare, in corrispondenza delle N misure, altrettanti valori dell'angolo θ della retta che approssima la traiettoria. Raccogliendo i risultati delle misure angolari in un istogramma, si ottiene una distribuzione di tipo gaussiano, centrata attorno allo zero, ch'è il valore vero dell'angolo di entrata della particella nel rivelatore, (in riferimento al primo piano del rivelatore), con deviazione standard σ_θ (assunta $\sim \sigma_p$) comparabile con l'errore $\delta\theta$ stimato dal *fit* ed espresso dalla (4.3).

Come precedentemente evidenziato, la deviazione standard σ_θ per un valore fissato dell'energia del fascio dipende soltanto (a) dallo spessore dei sensori; (b) dalla geometria del sistema di tracciamento.

Ci poniamo a questo punto l'obiettivo di individuare la configurazione del rivelatore che ne ottimizzi la risoluzione, per una assegnata estensione longitudinale L del rivelatore.

Spessore	$E = 1 \text{ GeV}$	$E = 10 \text{ GeV}$	$E = 100 \text{ GeV}$
600 μm	$\delta\theta = 8.80 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 8.79 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 9.78 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 9.75 \times 10^{-2} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 2.10 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 2.10 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
800 μm	$\delta\theta = 1.03 \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.03 \text{ mrad}$	$\delta\theta = 1.12 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.12 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 2.20 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 2.20 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
1200 μm	$\delta\theta = 1.28 \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.28 \text{ mrad}$	$\delta\theta = 1.37 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.37 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 2.40 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 2.40 \times 10^{-2} \text{ mrad}$

Tabella 4.1. Misura dell'angolo della retta che approssima la traiettoria per un rivelatore di quattro piani di silicio con distanza relativa di 25 cm. L'errore di misura del valore dell'angolo di uscita $\delta\theta = \delta p$ è calcolato come risultato della procedura di adattamento; $\sigma_\theta = \sigma_p$ è la deviazione standard della distribuzione dei valori ottenuti con la procedura di adattamento.

Spessore	$E = 1 \text{ GeV}$	$E = 10 \text{ GeV}$	$E = 100 \text{ GeV}$
600 μm	$\delta\theta = 8.85 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 8.85 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 1.09 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.09 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 3.74 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 3.74 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
800 μm	$\delta\theta = 1.03 \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.03 \text{ mrad}$	$\delta\theta = 1.24 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.24 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 3.80 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 3.81 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
1200 μm	$\delta\theta = 1.29 \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.29 \text{ mrad}$	$\delta\theta = 1.50 \times 10^{-1} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 1.50 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\delta\theta = 3.92 \times 10^{-2} \text{ mrad}$ $\sigma_\theta = 3.92 \times 10^{-2} \text{ mrad}$

Tabella 4.2. Misura dell'angolo della retta che approssima la traiettoria per un rivelatore di quattro piani di silicio con distanza relativa di 12.5 cm.

Inoltre, ci chiediamo come la precisione di misura della direzione dipenda dall'energia delle particelle del fascio.

Successivamente dobbiamo valutare come, per una data energia, vari la precisione della misura dell'angolo variando la configurazione del rivelatore, in particolare variando il numero dei piani di silicio.

Consideriamo il caso di 4 piani di rivelazione distribuiti uniformemente su una lunghezza totale $L = 1 \text{ m}$, con distanza relativa $d = 0.25 \text{ m}$. Come mostrato nella tab. 4.1, osserviamo che all'aumentare dello spessore del sensore la precisione angolare peggiora. Tanto da avere, per $E = 1 \text{ GeV}$ una differenza di quasi 0.5 mrad tra $s = 600 \mu\text{m}$ e 1200 μm .

Possiamo spiegare questo comportamento considerando che il fascio, all'aumentare dello spessore del sensore, è costretto ad attraversare progressivamente più materiale; dunque sarà maggiore il numero delle collisioni fra le particelle del fascio da rivelare e gli atomi di silicio del sensore. L'espressione della diffusione angolare multipla secondo la teoria di Molière, mostra la dipendenza come \sqrt{d} dell'effetto della diffusione multipla dallo spessore del materiale d (*si veda* la (3.2) a pag. 8).

Studiamo ora le prestazioni di un sistema di rivelazione che si sviluppi su una lunghezza totale ridotta a $L = 0.5 \text{ m}$, con distanza relativa fra i piani $d = 0.125 \text{ m}$ (*si veda* tab. 4.2).

Confrontando le due tabelle, è lieve la differenza, ma già si può intuire come l'aumentare della distanza migliori la precisione sulla misura dell'angolo, anche se non così sensibilmente come quando si agisce sullo spessore.

Valutiamo ora come, per un dato apparato di rivelazione, l'errore su θ dipenda dall'energia del fascio.

4.1 Dipendenza della $\delta\theta$ dall'energia E

Simulando con ROOT un certo numero di eventi a diverse energie, nell'intervallo [1, 10] GeV, è possibile studiare la dipendenza dell'errore su θ dall'energia E della particella.

Per ogni gruppo di generazioni, sono stati raccolti i valori di θ e disposti in un istogramma. Questo istogramma segue una distribuzione gaussiana, la cui deviazione standard deve essere compatibile con l'errore $\delta\theta$. Possiamo generare più eventi a diverse energie e raccogliere i risultati in un grafico.

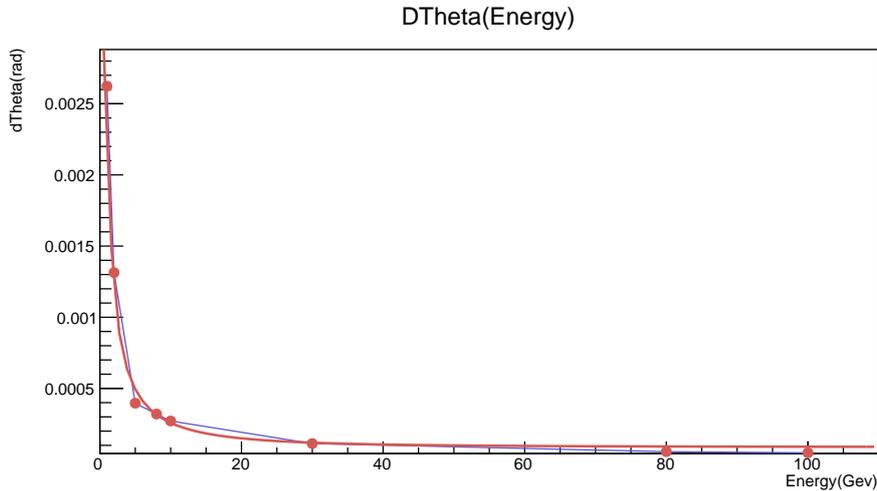


Figura 4.1. Andamento dell'errore sull'angolo in funzione dell'energia del fascio.

Come si nota dal grafico in fig. 4.1, l'errore ha un comportamento asintotico che tende all'errore intrinseco, il quale corrisponde alla precisione massima del rivelatore, che si ottiene quando l'effetto del MCS è trascurabile e l'unica incertezza è data dalla risoluzione dell'apparato stesso.

È evidente anche dalla formula di Molière (3.2) a pag. 8 che l'errore sull'angolo legato alla diffusione multipla dipenda inversamente dall'energia del fascio: più essa è alta e meno probabilità c'è per il fascio di interagire con gli atomi del silicio.

I contributi all'errore di θ possono infatti essere esemplificati in questo modo:

$$\delta\theta = \sqrt{c_1^2 + \left(\frac{c_2}{E}\right)^2} \quad (4.4)$$

cioè dal termine legato alla precisione del rivelatore e da un termine dipendente inversamente dall'energia. Il *fit* è stato eseguito utilizzando questa funzione, e, come si può osservare in fig. 4.1, esso è coerente con la distribuzione.

Il risultato del *fit* è:

$$\begin{aligned} c_1 &= (2.96 \pm 0.78) \times 10^{-2} \text{ mrad} \\ c_2 &= (8.36 \pm 0.17)^{-1} \text{ mrad;} \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'effetto di diffusione multipla previsto secondo la formula di Molière è infatti pari a:

$$\begin{aligned} &\approx 8.778 \times 10^{-1} \text{ mrad} \quad \text{per} \quad 1 \text{ GeV} \\ &\approx 8.778 \times 10^{-2} \text{ mrad} \quad \text{per} \quad 10 \text{ GeV} \\ &\approx 8.778 \times 10^{-3} \text{ mrad} \quad \text{per} \quad 100 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (4.6)$$

confrontabile con c_2 ed è inoltre sempre più trascurabile rispetto i 10^{-2} mrad intrinseci al rivelatore, dati dal parametro c_1 .

Con un fascio di alta energia, è possibile ottenere una più precisa prestazione da parte del sistema di tracciamento e quindi una risoluzione angolare migliore.

Si noti che per i risultati precedenti, si è usato un sistema di 4 piani, spessi 600 μm e distanti $d = 25$ cm. Con uno studio di questo genere, è dunque possibile stimare la risoluzione massima del nostro sistema di piani in silicio. Probabilmente la simulazione presa in considerazione in questo elaborato, semplifica il sistema da studiare. Ciò che ci fornisce è una valutazione approssimata dandoci una stima del limite superiore dell'ordine di grandezza della risoluzione dell'apparato.

4.2 Numero ottimale di piani al silicio

Ci domandiamo ora quanto migliori $\delta\theta$ togliendo un piano dei quattro che avevo a disposizione. Adoperando il metodo precedente, si può studiare il sistema di tre piani distribuiti su una certa lunghezza L e confrontare i risultati con quelli ottenuti distribuendo, sulla stessa lunghezza, quattro piani.

Consideriamo tre valori di energia: 1 GeV, 10 GeV e 100 GeV. Prendiamo quattro pannelli disposti ad una distanza $d = 25$ cm, distribuiti cioè su una lunghezza di 1 m, e spessi 600 μm . Simulando n eventi, otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 \text{ GeV} : \quad \sigma = \delta\theta &= 8.79 \times 10^{-1} \text{ mrad} \\ 10 \text{ GeV} : \quad \sigma = \delta\theta &= 9.46 \times 10^{-2} \text{ mrad} \\ 100 \text{ GeV} : \quad \sigma = \delta\theta &= 2.10 \times 10^{-2} \text{ mrad} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Consideriamo ora tre pannelli distribuiti sulla stessa lunghezza, distanziati l'uno dall'altro $d = 33.3$ cm. Il risultato è:

$$\begin{aligned} 1 \text{ GeV} : \quad \sigma = \delta\theta &= 8.78 \times 10^{-1} \text{ mrad} \\ 10 \text{ GeV} : \quad \sigma = \delta\theta &= 9.43 \times 10^{-2} \text{ mrad} \\ 100 \text{ GeV} : \quad \sigma = \delta\theta &= 2.34 \times 10^{-2} \text{ mrad} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Facendo un *fit* analogo a quello della sezione precedente otteniamo che

$$\begin{aligned} c_1 &= (3.02 \pm 0.75) \times 10^{-2} \text{ mrad} \\ c_2 &= (8.34 \pm 0.16)^{-1} \text{ mrad;} \end{aligned} \quad (4.9)$$

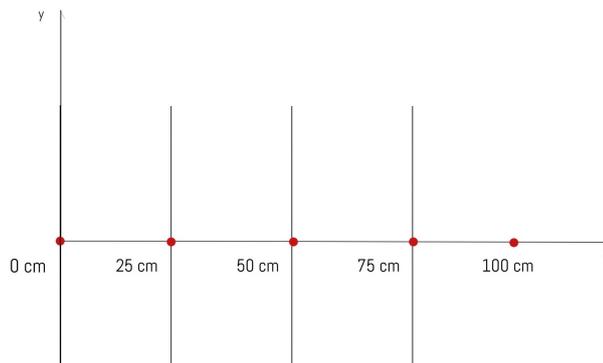


Figura 4.2. Sistema a quattro piani equidistanziati su una lunghezza complessiva di 1 metro.

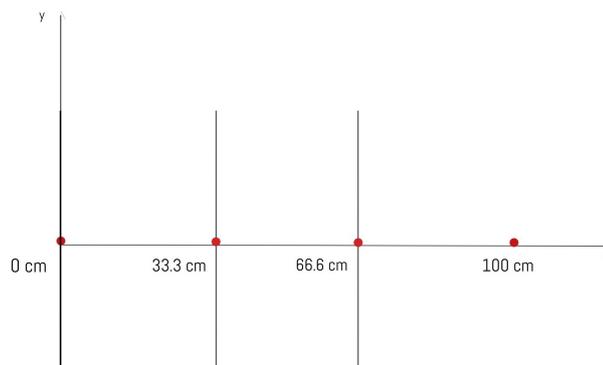


Figura 4.3. Sistema a tre piani equidistanziati su una lunghezza complessiva di 1 metro.

Vediamo che la convenienza nell'averne tre piuttosto che quattro è vera solo fino ad una certa energia. Da un certo valore in poi, tra i 40 GeV e i 50 GeV, $\delta\theta$ con quattro piani risulta minore di quella nel sistema a tre piani.

A basse energie, avere una maggiore distanza tra i piani ($d = 33.3$ cm) è più conveniente che averne quattro, nonostante otterremmo un punto in più per il tracciamento della traiettoria e quindi un'informazione maggiore. Questo perché, a quelle energie, l'incertezza legata alla diffusione multipla accresce in modo importante l'errore sulla y da un piano all'altro, a causa della correlazione mostrata nel §3.3 a pag. 10.

Se l'errore fosse identico per ogni coordinata, la convenienza starebbe invece nell'averne un punto in più per il tracciamento della traiettoria, anche se con un braccio minore. Dunque, a parità di errore, risulterebbe migliore avere quattro piani piuttosto che tre, per qualsiasi valore di E , come mostra il grafico in fig. 4.5:

Tornando alla considerazione sulla fig. 4.5, ad elevate energie è conveniente avere un rivelatore in più. L'effetto della diffusione, come mostrato nel §3.1 a pag. 7, diminuisce sempre di più, avendo come risultato un'errore dipendente solo dalla risoluzione intrinseca del rivelatore, che rende gli errori approssimativamente uguali da un piano all'altro. Dunque a questo *range*, è migliore la configurazione che dà maggiori informazioni sulla traiettoria, quindi quattro piani.

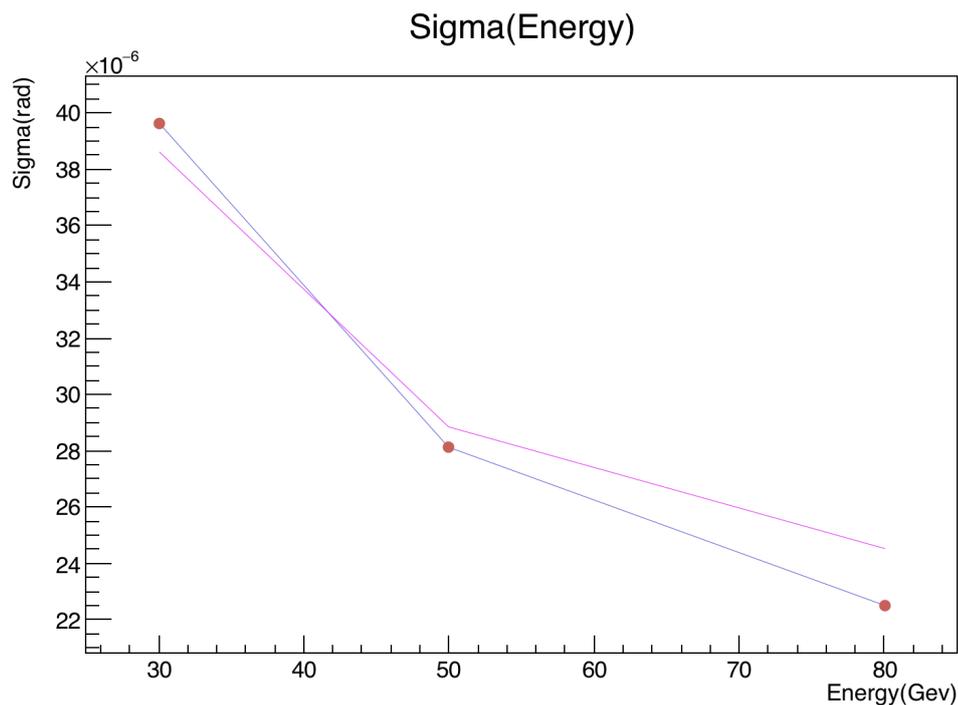


Figura 4.4. Grafico dell'andamento di $\delta\theta(E)$ con tre piani (in rosa) e con quattro piani (in blu).

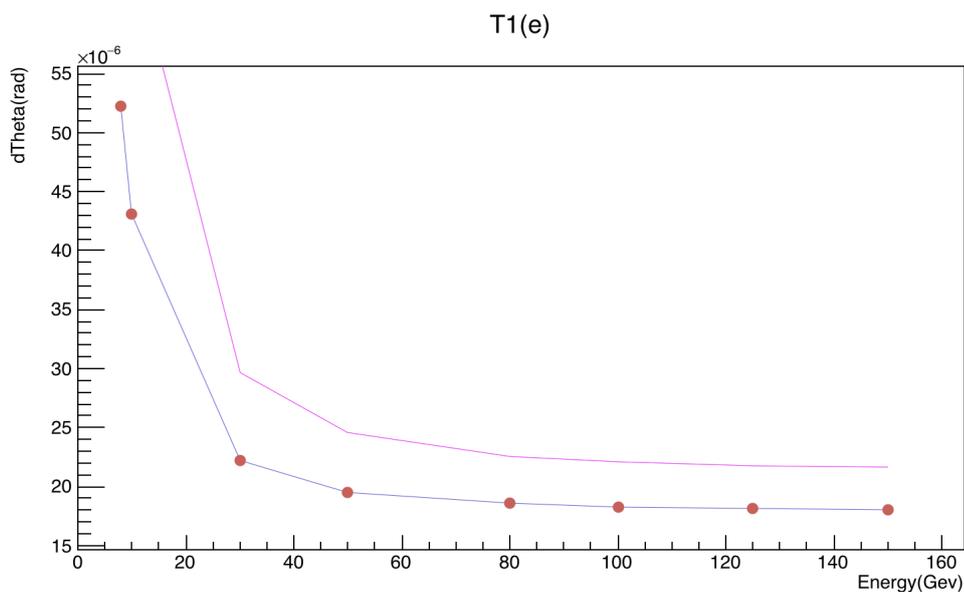


Figura 4.5. Grafico dell'andamento di $\delta\theta(E)$ con tre piani (in rosa) e con quattro piani (in blu). Le coordinate y_i hanno tutti il medesimo errore.

4.3 Rivelatori CBC2 per il trigger della traccia a HL-LHC

Nel concreto non sarà possibile costruire il rivelatore perfetto per il nostro caso, a causa di limiti di tempo e risorse umane.

Per questo motivo uno dei possibili candidati da utilizzare nell'esperimento proposto è

il CBC2, il chip ASIC a logica binaria per i moduli del trigger della traccia dell'esperimento CMS [7].

Il rivelatore consiste in due sensori al silicio (fig. 4.7), a *microstrip* allineate, uno sopra all'altro, separati da 1-2 mm come mostrato in fig. 4.6.

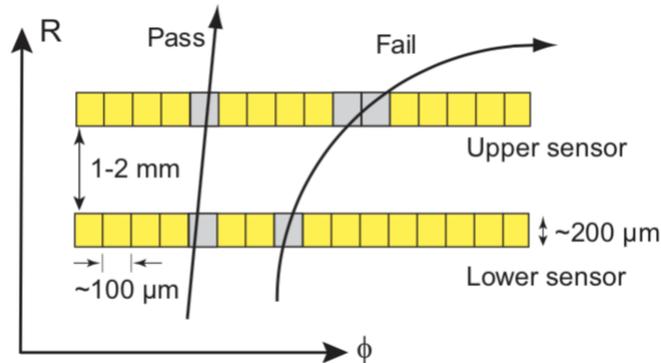


Figura 4.6. I due piani di sensori che comporranno il modulo per il tracking di CMS.

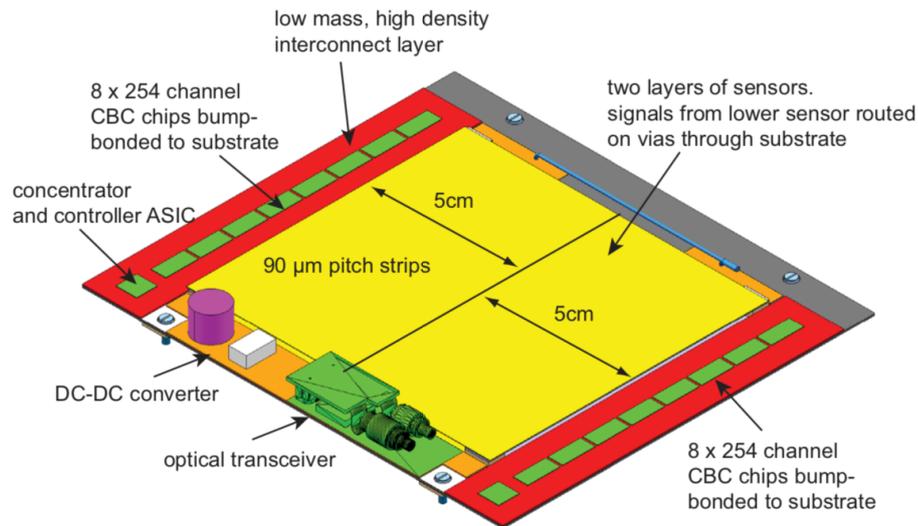


Figura 4.7. Il modulo contenente i sensori di CMS.

Questi due sensori sono composti da *microstrip* in silicio con un *pitch* pari a $90 \mu\text{m}$. Il motivo di questo doppio sensore è poter rigettare quelle particelle con una bassa componente trasversale del momento.

Per i nostri scopi sarebbe sufficiente avere solamente una serie di *strip*, anche perché questi doppi strati aumentano la risoluzione interna e soprattutto hanno uno spessore $s = 1200 \mu\text{m}$, quando dalla nostra analisi precedente abbiamo visto che la condizione ideale si ha a spessori minori.

La risoluzione interna dei *layer* dipende dalla geometria di questi. In particolare quando una particella attraversa il sensore, il segnale viene raccolto sulle *strip* e, a seconda dell'intensità, può essere identificata la posizione geometrica. La risoluzione attesa si può calcolare assumendo una distribuzione uniforme per la probabilità di ottenere una misura

Spessore	$E = 1 \text{ Gev}$	$E = 10 \text{ Gev}$	$E = 100 \text{ Gev}$
4 piani	$\sigma_\theta = 1.29 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\sigma_\theta = 1.56 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\sigma_\theta = 4.90 \times 10^{-2} \text{ mrad}$
3 piani	$\sigma_\theta = 1.28 \text{ mrad}$	$\sigma_\theta = 1.80 \times 10^{-1} \text{ mrad}$	$\sigma_\theta = 1.11 \times 10^{-1} \text{ mrad}$

Tabella 4.3. Risoluzione angolare dell'apparato di MUonE con i rivelatori proposti per l'upgrade di CMS.

nell'intervallo di larghezza del *pitch*, dunque si ottiene che

$$\delta x = \frac{p}{\sqrt{12}} \quad (4.10)$$

che, nel caso del CBC2, è $p = 90 \text{ }\mu\text{m}$, dunque $\sigma_{\text{intr}} = 26 \text{ }\mu\text{m}$.

Ma andiamo ad analizzare due configurazioni che si potrebbero pensare con questi rivelatori:

1. una configurazione di quattro rivelatori spessi $s = 1200 \text{ }\mu\text{m}$ disposti su una lunghezza $L = 1 \text{ m}$ ($d = 0.25 \text{ m}$);
2. una configurazione di quattro rivelatori spessi $s = 1200 \text{ }\mu\text{m}$ disposti su una lunghezza $L = 0.5 \text{ m}$ ($d = 0.167 \text{ m}$).

I risultati che otteniamo sono riportati in tab. 4.3.

È evidente che la seconda configurazione ha una pessima risoluzione, pari a 0.1 mrad, paragonati agli 0.02 mrad del nostro sistema ideale.

Dalla prima configurazione invece otteniamo una risoluzione di 0.05 mrad che è sicuramente migliore rispetto a quella con tre piani.

Capitolo 5

Conclusioni

In base a quanto sviluppato nei capitoli precedenti, abbiamo avuto modo di osservare come la diffusione multipla coulombiana abbia un ruolo fondamentale nella precisione dell'apparato di rivelazione. In particolare è stato possibile evidenziare come, a seconda dell'energia, il suo effetto influenzi in modo differente la risoluzione angolare, come evidente nel §4.1 a pag. 19.

L'energia del fascio è un parametro decisivo per capire quale sia il sistema ottimale. Poiché nella proposta dell'esperimento l'energia è dell'ordine di 150 GeV, traiamo le conclusioni in relazione a questo dato. Con un fascio di muoni a 150 GeV, le particelle diffuse dopo l'urto acquisiscono un'energia in un'intervallo compreso tra 0.5 GeV e 150 GeV.

Dalla nostra analisi risulta che a energie basse, attorno a 1 GeV, gli errori di misura angolari siano relativamente grandi, in qualsiasi configurazione del sistema. A energie progressivamente più elevate, l'errore diminuisce sempre più, come mostrato nel §4.2 a pag. 20.

Dall'analisi dello spessore, è risultato preferibile il piano di minore spessore s . È stato infatti osservato l'andamento decrescente, a parità di energia, della risoluzione. Non è possibile ridurre lo spessore oltre un certo limite a causa dei limiti tecnici, ma dalla nostra analisi di confronto tra $s_1 = 600 \mu\text{m}$, $s_2 = 800 \mu\text{m}$ e $s_3 = 1200 \mu\text{m}$, risulta che l'errore con un rivelatore a *strip* di spessore s_1 risulta ridotto di circa 0.5 mrad rispetto a quello di s_3 . Naturalmente lo studio è stato esteso agli spessori dei rivelatori al silicio già disponibili sul mercato per altri esperimenti, in quanto i tempi e i fondi non consentono il progetto di un rivelatore *ad hoc*.

L'andamento con lo spessore è dovuto al fatto che a spessori maggiori, il fascio percorre una distanza maggiore dentro al mezzo, dunque interagisce mediamente con un maggior numero di atomi di silicio. Per questo motivo la diffusione multipla ha un effetto maggiore per sensori più spessi.

La valutazione sulla distanza d tra un piano e il successivo porta a concludere che, aumentando d , quindi aumentando il braccio, l'errore sull'angolo θ diminuisce, secondo l'andamento

$$\delta\theta = \sqrt{2} \frac{\delta y}{L}; \quad (5.1)$$

per cui, fissato il numero di piani, aumentando d migliora la precisione del tracciamento.

Nell'analisi sul numero m di piani — fissata la lunghezza L su cui essi sono distribuiti — a energia minore di 40 GeV–50 GeV risulta preferibile avere bracci maggiori piuttosto

che avere un numero maggiore di piani. Pertanto, a basse energie, è preferibile avere 3 piani piuttosto che 4 piani, in quanto l'effetto della diffusione multipla si accresce aumentando il numero di piani, quindi aumentando lo spessore complessivo attraversato dalla particella.

Ad alte energie questa considerazione non è più valida, in quanto la diffusione multipla diviene sempre più trascurabile a E elevate. Prevale quindi, come contributo maggiore all'errore, la costante data dalla risoluzione intrinseca del sistema. La sensibilità del sistema è stata stimata essere ~ 0.02 mrad (*si veda* il grafico in fig. 4.1 a pag. 19). È perciò preferibile, a energie elevate, la configurazione con un numero di piani pari a 4, cioè quella che permette di avere un'informazione maggiore per il tracciamento del fascio, sebbene essa comporti un braccio minore. Poiché l'effetto di diffusione multipla è già diminuito dall'aumento dell'energia, non è più necessario aumentare la distanza tra i piani per diminuirlo.

Si conclude dunque che il sistema formato da quattro piani di silicio, disposti su una lunghezza $L = 1$ m e spessi $s = 600$ μm risulta essere il sistema ottimale per un fascio quando le energie in gioco sono alte. A energie basse converrebbe la configurazione a tre sensori, ma visto che la deviazione che darebbe averne uno in più a basse energie è di livello minore rispetto a quella che porta averne tre ad alte E , si predilige la configurazione di quattro, in modo da avere una certa precisione anche su un *range* in cui l'angolo di diffusione delle particelle cariche è piccolo.

Bibliografia

- [1] D. H. Perkins *Introduction to High Energy Physics*, Chapter 6. Addison-Wesley, University of Oxford, 1987
- [2] G. Abbiendi, C. M. Carloni Calame, U. Marconi, C. Matteuzzi, G. Montagna, M. Passera, O. Nicosin, F. Piccinini, R. Tenchini, L. Trentadue, G. Venanzoni *Measuring the leading hadronic contribution to the muon $g-2$ via μ - e scattering*. Eur. Phys. J. C (2017) 77:139, 7 January 2017
- [3] K. Hikasa et al. Particle Data Group *Review of Particle Properties*. Physical Review D45/II, III15, (1992)
- [4] J. R. Taylor *Introduzione all'Analisi degli Errori: lo studio delle incertezze nelle misure fisiche*, Chapter 8, 9, 12. Zanichelli, Bologna, 2015 August 1993
- [5] M. Pentia, G. Iorgovan *Multiple Scattering error propagation in particle track reconstruction*. Bucharest, ROMANIA (1994).
- [6] T. Blum, A. Denig, I. Logashenko, E. de Rafael, B. Lee Roberts, T. Teubner, G. Venanzoni *The Muon ($g-2$) Theory Value: Present and Future* arXiv:1311.2198v1, (2013).
- [7] G. Hall a,n, M. Pesaresi a, M. Raymond a, D. Braga b, L. Jones b, P. Murray b, M. Prydderch b, D. Abbaneo c, G. Blanchot c, A. Honma c, M. Kovacs c, F. Vasey c *CBC2: A CMS microstrip readout ASIC with logic for track-trigger modules at HL-LHC* Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 765 (2014) 214-218