

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

SULL' EFFETTO UNRUH

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Giulio Neri

Anno Accademico 2017/2018

Abstract

L'effetto Unruh è sicuramente uno dei risultati più interessanti e dibattuti della teoria quantistica dei campi su uno spaziotempo piatto. Oltre ad essere importante di per sé in quanto dimostra che il contenuto quantistico di un campo non è un concetto assoluto, apre anche le porte alla comprensione di altri fenomeni come la radiazione di Hawking, cui è strettamente collegato.

Lo scopo di questa tesi è presentare una sintesi dell'effetto Unruh, con maggiore attenzione agli elementi necessari alla comprensione piuttosto che alle sue conseguenze. Dopo aver introdotto alcuni concetti quali la quantizzazione canonica e lo spazio di Rindler, derivò l'effetto con due metodi diversi: uno basato sul calcolo dei coefficienti di Bogoliubov e l'altro sulla costruzione dei cosiddetti modi di Unruh. Il risultato è che un osservatore con accelerazione α non concorda sulla descrizione di ciò che un osservatore inerziale definisce vuoto (campo totalmente diseccitato), ma vede in esso un bagno di particelle a temperatura $T = \hbar\alpha/2\pi k_B c$. Infine analizzo il modello del *detector* di Unruh-DeWitt, strumento molto utile per interpretare il fenomeno e condurre i calcoli, dedicando particolare riguardo alla questione della conservazione dell'energia.

A Valeria, che mi ha supportato.

Indice

1	Introduzione	3
2	Quantizzazione canonica	5
2.1	Quantizzazione di una particella	6
2.1.1	Oscillatore armonico	6
2.2	Quantizzazione di un campo	9
2.2.1	Campo scalare nello spaziotempo piatto	11
2.2.2	Ruolo delle simmetrie dello spaziotempo	13
2.2.3	Trasformazioni di Bogoliubov	15
2.3	Considerazioni sul concetto di particella in QFT	16
3	Spaziotempo di Rindler	18
3.1	Moto uniformemente accelerato	18
3.2	Spaziotempo di Rindler	21
3.3	Osservatore di Rindler	22
3.4	Orizzonte di Rindler	24
4	Effetto Unruh	26
4.1	Modi di Rindler	26
4.2	Derivazione dell'effetto Unruh	29
4.2.1	Calcolo dei coefficienti di Bogoliubov	29
4.2.2	Metodo di Unruh	31
4.3	Commento sui risultati	34
5	Detector di Unruh-DeWitt	35
5.1	Trattazione perturbativa	36
5.1.1	Calcolo delle ampiezze di transizione	37
5.1.2	Calcolo dei <i>rate</i> di transizione	38
5.2	Conservazione dell'energia	40

Capitolo 1

Introduzione

Con la presente tesi intendo descrivere l'effetto Unruh. In primo luogo introduco gli elementi necessari all'inquadramento del fenomeno nel *framework* della teoria quantistica dei campi, passando poi a una trattazione diffusa sull'argomento, che non intende essere esauriente ma corretta dal punto di vista matematico e chiara nelle considerazioni fisiche.

Quando una teoria scientifica effettua una previsione sulla base dei propri assiomi, questa deve passare al vaglio sperimentale affinché ne sia determinata la validità, a meno di errori nel processo di misura: in caso positivo la teoria intera ne esce corroborata, in caso contrario si apre la possibilità di spiegare la discrepanza con teorie alternative.

Una delle problematiche maggiori relative all'effetto Unruh – e forse una delle sue caratteristiche più note – è proprio la difficoltà nel misurarlo. Laddove ciò abbia probabilmente contribuito alla nascita di dubbi sulla realtà del fenomeno (si veda ad esempio [1]), è da considerarsi “buon segno” che la sua previsione sia stata ottenuta in letteratura con molti approcci diversi.

In questa tesi non mi occuperò del problema di ottenere prove sull'effetto Unruh tramite misure dirette o interpretazione di fenomeni inspiegati [2], ma concordo con gli autori di [3] sul fatto che esso “non richiede conferma sperimentale più di quanto non lo faccia la teoria quantistica dei campi liberi”.

Un po' di storia: l'effetto prende il nome da W. Unruh, che ne diede una derivazione semplificata nel 1976 [4] – la scoperta si deve a Fulling e risale al 1973 [5] – mentre studiava il fenomeno della radiazione dei buchi neri, scoperto da Hawking e pubblicato l'anno precedente [6].

Il suo intento era revisionare il lavoro di Hawking per discriminare i fattori essenziali che determinano l'insorgere della radiazione e fornire una descrizione più semplice, ma equivalente, del problema del collasso gravitazionale.

Unruh dimostrò che lo stato di vuoto, così descritto da un osservatore inerziale, è visto come uno stato a molte particelle da un osservatore in accelerazione rispetto al primo. Inoltre, introducendo un modello che riscuoterà parecchio successo, chiarì il significato fisico di quello che sarà poi chiamato effetto Unruh e mise in risalto la stretta relazione esistente con il fenomeno della radiazione di Hawking: tale analogia era già nota poiché Davies aveva derivato l'effetto utilizzando proprio la procedura di Hawking [7].

Negli anni successivi i calcoli di Unruh vennero ripetuti, messi in discussione, poi confermati e generalizzati, derivando l'effetto con formalismi differenti.

La tesi è organizzata come segue: nel capitolo 2 descrivo la procedura di quantizzazione canonica, applicandola a due sistemi semplici ma paradigmatici, lasciando spazio alla fine per considerazioni sul significato che il concetto di particella riveste in una teoria di campi; nel capitolo 3 introduco lo spazio di Rindler, “teatro” naturale dell'effetto Unruh, la cui geometria sarà molto utile per i calcoli successivi; il capitolo 4 è interamente dedicato alla derivazione matematica dell'effetto, realizzata con due diversi metodi; il capitolo 5 presenta il modello del *detector* di Unruh-DeWitt, interpretando i risultati del famoso esperimento ideale di Unruh dal punto di vista di un osservatore inerziale e di uno comovente al *detector* alla luce di quanto dimostrato nel capitolo precedente.

Utilizzerò il sistema di unità naturali in cui $c = \hbar = k_B = G = 1$. Indicherò con lettere greche gli indici delle componenti spaziotemporali $(0, 1, \dots)$ e con lettere latine quelli delle componenti spaziali $(1, 2, \dots)$, dove non chiaramente utilizzate per indicizzare gli elementi di un insieme generico.

Capitolo 2

Quantizzazione canonica

La formulazione *standard* della meccanica quantistica – presentata nei corsi di laurea di primo livello – è quella operatoriale, anche detta hamiltoniana: essa si basa sostanzialmente sulla costruzione dello spazio di Hilbert cui appartengono gli stati del sistema¹, e sulla definizione di operatori autoaggiunti² che agiscono su di esso, messi in corrispondenza con gli osservabili. Uno degli aspetti più critici di tale formulazione è il cosiddetto problema della quantizzazione, ovvero la determinazione di una regola per associare gli operatori alle funzioni di fase – osservabili classici. Dopo il successo della meccanica quantistica sono stati fatti numerosi tentativi di risolvere il problema, la maggior parte basati su analogie con il mondo classico e incapaci di riprodurre correttamente i risultati sperimentali. In questa tesi descrivo e utilizzo la procedura di quantizzazione canonica, sorvolando su difficoltà come il problema dell'ordinamento, non rilevanti per ciò che intendo trattare.

La quantizzazione canonica è una prescrizione per quantizzare una teoria classica imponendo delle relazioni di commutazione tra le variabili canonicamente coniugate della meccanica hamiltoniana, promosse ad operatori autoaggiunti. Nelle sezioni successive applico questa procedura alla descrizione di una particella, estendibile a qualunque sistema con un numero finito di gradi di libertà, e a quella del campo. Entrambi i casi sono accompagnati da un esempio che specializza la trattazione generale.

¹A rigor di termini nello spazio di Hilbert sono definiti gli elementi matematici che rappresentano gli stati del sistema, *e.g.* i ket. Ciononostante userò *stato* e *ket* – oppure *osservabile* ed *operatore* – come sinonimi, commettendo un leggero abuso di linguaggio.

²La proprietà di autoaggiunzione non solo garantisce che lo spettro dell'operatore sia reale, ma anche la possibilità di fare predizioni sugli esiti di una misura dell'osservabile corrispondente.

Un'introduzione di questo tipo è ormai prassi comune per qualunque testo pedagogico sull'effetto Unruh (ad esempio [8][9][10]).

2.1 Quantizzazione di una particella

Una particella classica può essere vista come un punto materiale, dotato di alcune proprietà intrinseche (massa, carica elettrica, *etc.*), la cui configurazione nello spazio è determinata da un certo numero di variabili q_i , $i = 1, 2, \dots, f$, collettivamente indicate con q , che prendono il nome di coordinate. Il numero di gradi di libertà di tale sistema è f .

La descrizione classica può essere realizzata introducendo la cosiddetta funzione di Lagrange del sistema $L(q, \dot{q}, t)$. Essa determina completamente la dinamica attraverso il principio di minima azione: le leggi del moto vengono infatti ricavate come equazioni di Eulero-Lagrange a partire dal funzionale $S[q] = \int dt L(q, \dot{q}, t)$ imponendo opportune condizioni al contorno; le traiettorie risultanti $q(t)$ corrispondono ai punti stazionari dell'azione.

Il momento coniugato alla coordinata q_i è definito come $p^i \equiv \partial L / \partial \dot{q}_i$. Le variabili q_i e p^i vengono dette coniugate canonicamente in quanto sono legate in modo semplice dalle parentesi di Poisson: in generale si hanno le seguenti relazioni

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad (2.1)$$

La quantizzazione canonica si realizza sostituendo alle parentesi di Poisson (2.1) il commutatore delle rispettive grandezze, promosse ad operatori in un opportuno spazio di Hilbert

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (2.2)$$

Il fattore $i\hbar$ viene introdotto per recuperare le dimensioni e le proprietà corrette del commutatore. D'ora in poi eviterò di scrivere \hbar e altre costanti fondamentali, avendole poste uguali a 1.

2.1.1 Oscillatore armonico

Come esempio della procedura appena descritta si consideri un oscillatore armonico monodimensionale: il sistema è di per sé uno dei più studiati in fisica – e uno dei pochi che ammette soluzione analitica nel formalismo della meccanica quantistica –, ma è anche propedeutico ai calcoli successivi, permettendo di introdurre e familiarizzare con concetti molto importanti. Indicando con m e ω rispettivamente la massa e la frequenza caratteristica

dell'oscillatore – entrambe costanti positive –, la lagrangiana che lo descrive è

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (2.3)$$

Variando q nell'azione si ottiene la ben nota equazione

$$\ddot{q} + \omega^2q = 0 \quad (2.4)$$

le cui soluzioni per $\omega \neq 0$ sono combinazioni lineari di $e^{\pm i\omega t}$.

Nella rappresentazione (*picture*) di Heisenberg la (2.4) diventa un'equazione per l'operatore posizione \hat{q} . Se $f(t)$ è una soluzione classica si può scrivere in modo generale

$$\hat{q}(t) = \hat{a}f(t) + \hat{a}^\dagger f^*(t) \quad (2.5)$$

con \hat{a} e \hat{a}^\dagger operatori costanti non hermitiani.

Nell'insieme delle soluzioni di (2.4) si può definire un prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = im(f^* \partial_t g - g \partial_t f^*) \equiv im(f^* \overleftrightarrow{\partial}_t g) \quad (2.6)$$

dove ho introdotto il simbolo $\overleftrightarrow{\partial}$ per la differenza tra i prodotti con le derivate alternate.

Una proprietà fondamentale che si può dimostrare facilmente è che questo prodotto si conserva durante l'evoluzione temporale. Ha senso quindi utilizzarlo per distinguere le soluzioni in base al segno del modulo quadrato:

- $\langle f, f \rangle > 0$: la soluzione è detta modo a frequenza positiva e soddisfa $\dot{f} = -i\omega f$
- $\langle f, f \rangle < 0$: la soluzione è detta modo a frequenza negativa e soddisfa $\dot{f} = +i\omega f$

Le due equazioni precedenti possono essere viste come “radici quadrate” della (2.4). Ovviamente se f è un modo a frequenza positiva, f^* è a frequenza negativa, e viceversa; con ancor minor difficoltà si vede che f e f^* sono ortogonali rispetto al prodotto definito.

Dalla (2.3) si vede che il momento coniugato alla coordinata q è uguale alla quantità di moto $p = m\dot{q}$. Imponendo l'unica non banale delle (2.2) si dimostra che

$$[\langle f, \hat{q} \rangle, \langle \hat{q}, g \rangle] = \langle f, g \rangle \quad (2.7)$$

Scegliendo f nella (2.5) come un modo a frequenza positiva normalizzato si ottengono le formule

$$\hat{a} = \langle f, \hat{q} \rangle \quad (2.8)$$

$$\hat{a}^\dagger = -\langle f^*, \hat{q} \rangle \quad (2.9)$$

le quali, per mezzo della (2.7), danno la seguente relazione di commutazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.10)$$

La precedente è di notevole importanza nella teoria degli operatori: essa caratterizza \hat{a} e \hat{a}^\dagger come operatori di distruzione e creazione.

Tali nomi ne rispecchiano l'azione sugli autoket dell'operatore $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$: si dimostra che lo spettro di questo operatore, anche detto numero, è composto dagli interi non negativi. Sia quindi $|n\rangle$ l'autoket di autovalore n , si ha allora

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (2.11)$$

$$\hat{a} |n\rangle = |n-1\rangle \sqrt{n}, \quad n > 0 \quad (2.12)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle \sqrt{n+1} \quad (2.13)$$

L'importanza delle formule (2.10) - (2.13) si manifesta nel caso in cui si riesca a scrivere un osservabile come funzione dell'operatore numero: approfondirò questo discorso nella sezione 2.3.

Si consideri l'operatore hamiltoniano dell'oscillatore armonico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2 \quad (2.14)$$

Sostituendo $\hat{p} = m\hat{q}$, utilizzando la (2.5) e il fatto che f sia un modo a frequenza positiva, si può esprimere l'hamiltoniano come funzione semplice dell'operatore numero

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.15)$$

Ciò comporta che gli autovalori dell'energia siano discreti ed equispaziati: a differenza di quanto risulta da una trattazione classica, l'energia dell'oscillatore non può assumere con continuità tutti i valori positivi, ma può cambiare solo per quantità finite, dette quanti; l'autoket $|n\rangle$, comune a \hat{H} e \hat{N} , rappresenta uno stato con n quanti.

Essendo il potenziale armonico non negativo, deve esistere un autovalore minimo dell'energia, in base a quanto detto l'autostato relativo avrà anche il minor numero possibile di quanti, ovvero 0. Il ket $|0\rangle$ rappresenta il *ground state* e a partire da esso si può costruire una base per lo spazio di Hilbert

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (2.16)$$

2.2 Quantizzazione di un campo

Dato che i concetti di base e molte proprietà interessanti dei campi con spin – tra cui proprio l’effetto Unruh – si trovano già in quelli scalari, e poiché, per il livello che intendo raggiungere, la descrizione delle interazioni è solo un’inutile complicazione, considererò solamente campi scalari reali liberi. Estendere la procedura di quantizzazione dell’oscillatore armonico a questo caso è immediato: infatti i campi scalari possono essere visti come un insieme infinito di oscillatori armonici. Una delle difficoltà maggiori sta forse nell’interpretazione del campo stesso come variabile dinamica in quanto non osservabile e, per di più, a infiniti gradi di libertà.

Nonostante l’effetto Unruh emerga nella teoria quantistica dei campi (*Quantum Field Theory* o QFT) in spaziotempi patti, presento prima brevemente la procedura di quantizzazione di un campo in uno spaziotempo curvo. Per mostrare il grado di generalità della teoria considero un numero arbitrario di dimensioni: sia quindi lo spaziotempo una varietà differenziabile $n + 1$ -dimensionale con metrica di segnatura $(- + \dots +)$ e determinante $g < 0$, di classe C^∞ e globalmente iperbolica³: le ultime due proprietà garantiscono la possibilità di scrivere equazioni differenziali con adeguate condizioni al contorno [11].

Sia data una densità di Lagrangiana della forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.17)$$

in cui si è trascurata la possibilità che il campo ϕ interagisca con quello gravitazionale, generalmente introdotta tramite un termine di accoppiamento locale con lo scalare di curvatura.

Variando nell’azione $S \equiv \int d^{n+1}x \mathcal{L}(x)$ il campo ϕ e richiedendo stazionarietà si arriva all’equazione di Klein-Gordon

$$(\square - m^2)\phi = 0 \quad (2.18)$$

dove \square è dato da $\nabla^\mu \nabla_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$. Le soluzioni della (2.18) sono univocamente determinate dalla scelta dei dati iniziali su una certa superficie di Cauchy Σ di cui è garantita l’esistenza.

Lo spazio delle soluzioni reali ha una struttura simplettica data dal prodotto

$$\phi_\alpha \wedge \phi_\beta = \int_\Sigma dS^\mu \sqrt{\gamma} (\phi_\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_\beta)$$

³Uno spaziotempo è globalmente iperbolico se in esso esiste almeno una superficie di Cauchy: ovvero una (iper)superficie spaziale tale che ogni curva inestensibile non di tipo spazio la interseca una e una sola volta.

dove $dS^\mu = n^\mu dS$, con n^μ versore normale a Σ orientato verso il futuro e γ determinante della metrica γ_{ij} indotta su Σ . Il teorema di Darboux garantisce l'esistenza di una base canonica $(\phi_\alpha, \phi'_\alpha)$ tale che

$$\phi_\alpha \wedge \phi'_\beta = 1, \quad \phi_\alpha \wedge \phi_\beta = \phi'_\alpha \wedge \phi'_\beta = 0$$

Con tale base si possono dividere le soluzioni reali in coppie (ϕ, ϕ') tali che $\phi \wedge \phi' = 1$. Ne segue che le soluzioni complesse $\psi = (\phi - i\phi')/\sqrt{2}$ hanno norma 1 rispetto al prodotto hermitiano

$$|\psi|^2 = \phi \wedge \phi' = i \int_\Sigma dS^\mu \sqrt{\gamma} (\psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) \equiv \langle \psi, \psi \rangle$$

Quello appena introdotto è noto come prodotto di Klein-Gordon. In generale, per due soluzioni complesse, si definisce

$$\langle \psi, \varphi \rangle = i \int_\Sigma dS^\mu \sqrt{\gamma} (\psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi) \quad (2.19)$$

dove ho utilizzato la stessa notazione di (2.6) per evidenziare l'analogia tra i due casi. Il termine $\psi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi \equiv J_\mu(\psi, \varphi)$ prende il nome di corrente di Klein-Gordon: è immediato vedere che la sua divergenza è nulla ($\nabla^\mu J_\mu = 0$) se ψ e φ risolvono (2.18). Il teorema di Stokes garantisce che la definizione del prodotto di Klein-Gordon sia ben posta, ovvero che non dipende dall'ipersuperficie Σ scelta, a patto che le soluzioni si annullino all'infinito spaziale.

Si può quindi costruire una base di soluzioni complesse ψ_i tali che

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = -\langle \psi_i^*, \psi_j^* \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \psi_i, \psi_j^* \rangle = 0 \quad (2.20)$$

Ciò equivale a decomporre lo spazio delle soluzioni in una somma diretta di sottospazi ortogonali, l'uno coniugato dell'altro.

Scelta una base ψ_i il campo può essere espanso in termini di ψ_i e ψ_i^* – per semplicità di notazione assumo che i rappresenti una collezione di indici discreti – nel modo seguente

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i \psi_i + \hat{a}_i^\dagger \psi_i^*) \quad (2.21)$$

Per realizzare la quantizzazione canonica bisogna passare alla descrizione hamiltoniana: sia quindi $x = (t, \mathbf{x})$ con t la coordinata temporale⁴. Si definisce

⁴Nonostante la scelta di uno specifico sistema di coordinate rompa la covarianza, ogni previsione osservabile della teoria può essere scritta nel formalismo tensoriale, come richiesto dal principio di relatività generale.

il campo di momento coniugato

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\sqrt{-g} g^{\mu t} \partial_{\mu} \phi \quad (2.22)$$

dove ho indicato con un puntino la derivata parziale rispetto a t .

Le relazioni di commutazioni canoniche da imporre sugli operatori coniugati sono ovvie generalizzazioni delle (2.2):

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] &= \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] &= [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{x}')] = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Da notare che i commutatori sono presi allo stesso tempo. La richiesta che gli operatori commutino per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ segue dal principio di causalità: dato che gli eventi (t, \mathbf{x}) e (t, \mathbf{x}') sono separati da un intervallo di tipo spazio, un'eventuale misura fatta in \mathbf{x} non può in alcun modo influenzare il risultato di una misura simultanea in \mathbf{x}' .

Anche in questo caso si può dimostrare un analogo della (2.7) utilizzando la (2.19) e le (2.23). In questo modo, a partire da una base, si può ripetere la costruzione dello stato di vuoto, definito da

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0 \quad \forall i$$

e della base per lo spazio di Hilbert – anche detto spazio di Fock in un contesto di seconda quantizzazione

$$\{|0\rangle, \hat{a}_i^{\dagger} |0\rangle, \hat{a}_i^{\dagger} \hat{a}_j^{\dagger} |0\rangle, \dots\} \quad (2.24)$$

Gli stati successivi al vuoto sono detti, in ordine, stati a una particella, a due particelle, *etc*; rimando alla sezione 2.3 il perché di questi nomi.

Prima di mettere in luce il punto critico della costruzione, applico la procedura descritta al caso dello spazio di Minkowski: oltre ad essere un buon esercizio, ciò permette di evidenziare le proprietà dello spaziotempo sfruttate in QFT e che si perdono passando a spaziotempi generici.

2.2.1 Campo scalare nello spaziotempo piatto

Lo spazio di Minkowski \mathcal{M} è uno spaziotempo piatto, ossia una soluzione dell'equazione di Einstein con il tensore di Riemann identicamente nullo. In coordinate cartesiane il tensore metrico di \mathcal{M} è quella della relatività

ristretta $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. In queste coordinate l'equazione (2.18) ha ovviamente la stessa forma, ma le derivate covarianti si riducono a quelle parziali⁵. Un insieme completo di soluzioni è dato dalle onde piane

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}}t} \quad (2.25)$$

con $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ e dalle loro complesse coniugate $\varphi_{\mathbf{k}}^*$. La normalizzazione è fatta rispetto al prodotto di Klein-Gordon, calcolato ad esempio sulle ipersuperfici a $t = \text{const.}$, che sono superfici di Cauchy. Avendo in questo caso un *set* di numeri quantici continui, le condizioni di ortonormalità da imporre coinvolgono distribuzioni

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}'} \rangle = -\langle \varphi_{\mathbf{k}}^*, \varphi_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \langle \varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}'}^* \rangle = 0 \quad (2.26)$$

Dall'espressione della densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.27)$$

si ricava che il campo di momento è $\pi = \dot{\phi}$. Per implementare la quantizzazione canonica basta imporre le (2.23) con $g = \eta$.

La decomposizione del campo in onde piane

$$\hat{\phi} = \int d^3k (\hat{a}_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\varphi_{\mathbf{k}}^*) \quad (2.28)$$

porta alla definizione degli operatori di creazione e distruzione e, attraverso questi, dello stato di vuoto

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (2.29)$$

Ripetendo la costruzione già vista si può formare una base per lo spazio di Fock. Si consideri adesso la densità di hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$, ovvero

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (2.30)$$

Dall'espansione del campo in onde piane e dalle relazioni di commutazioni canoniche risulta che l'hamiltoniana si può scrivere nel seguente modo

$$\hat{H} = \int d^3k \left(\hat{N}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\delta^3(0) \right) \omega_{\mathbf{k}} \quad (2.31)$$

⁵Avere uno spaziotempo piatto non garantisce che i simboli di Christoffel siano identicamente nulli perché questi non sono tensori. Affinché sia così bisogna anche scegliere un particolare sistema di coordinate, detto normale.

introducendo l'operatore $\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$, che “conta” il numero di quanti presenti nell'onda piana di vettore \mathbf{k} .

È evidente che con una scelta diversa della base non si sarebbe ottenuta un'espressione così semplice. Ciascun'onda contribuisce indipendentemente all'energia totale del campo: se questo si trova nello stato $|\psi\rangle \propto (\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}}} |0\rangle$, solamente l'onda \mathbf{k} contiene quanti, in numero $n_{\mathbf{k}}$, e l'energia risulta $n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$ al di sopra dell'energia di punto zero

$$\frac{1}{2} \int d^3k \delta^3(0) \omega_{\mathbf{k}}$$

il cui valore è infinito, ma costante – restringere il dominio di definizione del campo non basta ad eliminare la divergenza a causa del termine $\omega_{\mathbf{k}}$, che può diventare arbitrariamente grande.

2.2.2 Ruolo delle simmetrie dello spaziotempo

La scelta della base ottimale in cui espandere il campo è suggerita dalle simmetrie dello spaziotempo. \mathcal{M} è uno spazio massimamente simmetrico, possiede infatti dieci campi vettoriali di Killing indipendenti, appartenenti al cosiddetto gruppo di Poincaré: quattro traslazioni lungo gli assi, tre rotazioni sui piani spaziali e tre *boost* – assimilabili a rotazioni iperboliche sui piani spazio-temporali. Tra l'infinità delle basi disponibili risulta naturale utilizzare quella che rispecchi al meglio tali isometrie. Le onde piane sono infatti autofunzioni dell'energia e del momento

$$i\partial_t \varphi_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}, \quad i\nabla \varphi_{\mathbf{k}} = -\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}, \quad (2.32)$$

o, in notazione tensoriale

$$i\partial_\mu \varphi_{\mathbf{k}} = -k_\mu \varphi_{\mathbf{k}} \quad (2.33)$$

dove k^μ è il quadrivettore d'onda $(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$, di norma $k_\mu k^\mu = -m^2$.

Come si può vedere dal calcolo diretto, la prima delle (2.32) implica che $\langle \phi_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}'} \rangle > 0$ mentre $\langle \phi_{\mathbf{k}}^*, \phi_{\mathbf{k}'}^* \rangle < 0$. Per analogia con il caso dell'oscillatore armonico si può quindi estendere la definizione di modo allo spazio delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon:

- ϕ è un modo a frequenza positiva se vale $i\partial_t \phi = \omega \phi$ con $\omega > 0$;
- ϕ è un modo a frequenza negativa se vale $i\partial_t \phi = -\omega \phi$ con $\omega > 0$.

Questa terminologia è particolarmente utile se si pensa che la costruzione dello spazio di Fock è, in ultima analisi, determinata dalla distinzione dei

modi nell'espansione (2.21) e dall'interpretazione fisica dei relativi coefficienti.

La condizione utilizzata per distinguere le frequenze non è a prima vista Lorentz-invariante, mentre ci si aspetta che i risultati della QFT lo siano, in conformità al principio di relatività ristretta: si può infatti dimostrare che le definizioni date sono invarianti per trasformazioni di Lorentz ortocrone[10]. Ciò significa che tutti gli osservatori inerziali concordano sulla separazione dei modi e, di conseguenza, essi condividono lo stesso stato di vuoto – da qui in poi chiamato vuoto di Minkowski e indicato con $|0_M\rangle$ – e la stessa base dello spazio di Fock. La QFT è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Tuttavia – e qui sta il problema – in uno spaziotempo generico non ci si aspetta di trovare particolari isometrie. Senza un campo vettoriale di Killing di tipo tempo che dia un senso intrinseco al concetto di frequenza non è possibile stabilire in modo oggettivo che una certa soluzione sia a frequenza positiva o negativa: ciascun osservatore può utilizzare il suo tempo proprio τ per definire le frequenze

$$i \frac{d}{d\tau} \varphi = \omega \varphi$$

e costruire lo stati di vuoto *etc.*, ma in genere nessun altro osservatore concorderà sulla descrizione degli stati del campo.

I casi in cui è possibile trovare dei modi validi in tutto lo spaziotempo sono molto pochi. In seguito però tratterò solo spaziotempi statici – \mathcal{M} o suoi sottoinsiemi – e perciò concludo mostrando che in questi è sempre possibile definire un vuoto naturale.

Uno spaziotempo è statico quando esiste un campo vettoriale di Killing di tipo tempo K ortogonale alle ipersuperfici di livello del suo parametro affine. Sia $x^0 \equiv t$ la coordinata temporale tale che

$$K = \partial_t \tag{2.34}$$

e \mathbf{x} le coordinate spaziali (arbitrarie). Con questa scelta si può mettere la metrica nella forma

$$ds^2 = -\alpha^2(\mathbf{x})dt^2 + \gamma_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j \tag{2.35}$$

L'operatore di D'Alembert diventa

$$-\frac{1}{\alpha^2} \partial_t^2 + \frac{1}{\alpha \sqrt{\gamma}} \partial_i (\alpha \sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \partial_j) \tag{2.36}$$

ed è quindi ragionevole tentare di risolvere l'equazione di Klein-Gordon con un *ansatz* del tipo

$$\phi_\lambda(t, \mathbf{x}) = e^{-i\lambda t} f_\lambda(\mathbf{x})$$

Per determinare f bisogna risolvere il problema agli autovalori

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\gamma}} \partial_i (\alpha\sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \partial_j) f_\lambda = \left(m^2 - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right) f_\lambda$$

Scegliendo $\lambda > 0$ le funzioni ϕ_λ risultano essere i modi a frequenza positiva e, con le loro complesse coniugate, formano un insieme completo su cui espandere il campo. Lo stato di vuoto definito da questa scelta – ovvero quello annichilito dai coefficienti delle ϕ_λ – viene detto vuoto statico. Per come è costruito, tale stato preserva la simmetria di traslazione temporale.

2.2.3 Trasformazioni di Bogoliubov

In uno spaziotempo privo di particolari isometrie la scelta dei modi su cui espandere il campo è arbitraria, tuttavia anche in uno spazio altamente simmetrico come \mathcal{M} esistono quantizzazioni inequivalenti, legate a scelte diverse di coordinate: ciò non deve spaventare, d'altronde uno degli insegnamenti della relatività generale è che le coordinate non hanno significato fisico.

Si supponga di aver trovato due insiemi completi di modi a frequenza positiva f_i e g_i – per semplicità considero ancora indici discreti – per lo spazio delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon, ortonormali rispetto al prodotto (2.19). Il campo ϕ ammette entrambe le espansioni seguenti

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*) \quad (2.37)$$

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^*) \quad (2.38)$$

con \hat{a}_i e \hat{b}_i gli operatori di distruzione attraverso cui si definiscono rispettivamente i vuoti $|0_A\rangle$ e $|0_B\rangle$. Dato che l'insieme dei modi f_i è completo, ciascun modo g_i può essere scritto come combinazione lineare di questi

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (2.39)$$

e viceversa

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* g_j - \beta_{ji} g_j^*) \quad (2.40)$$

dove i coefficienti sono stati legati attraverso le proprietà del prodotto interno. Gli elementi α_{ij} e β_{ij} della matrice di trasformazioni sono detti coefficienti di Bogoliubov: una trasformazione di Bogoliubov non è altro che un cambio di base. Utilizzando la (2.39) e le proprietà di ortonormalità dei modi si ottengono le seguenti espressioni

$$\alpha_{ij} = \langle f_j, g_i \rangle, \quad \beta_{ij} = -\langle f_j^*, g_i \rangle \quad (2.41)$$

Si vede quindi che i coefficienti β contengono l'informazione sul miscelamento dei modi a frequenza negativa di una base e quelli a frequenza positiva dell'altra.

Per dare un'interpretazione fisica ai coefficienti di Bogoliubov si consideri che le trasformazioni tra i modi si riflettono sugli operatori di distruzione e creazione: esplicitamente

$$\hat{a}_i = \sum_j (\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger) \quad (2.42)$$

$$\hat{b}_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij} \hat{a}_j^\dagger) \quad (2.43)$$

ottenute inserendo rispettivamente (2.39) in (2.38) e (2.40) in (2.37). Come ci si poteva aspettare la presenza di coefficienti β non nulli fa sì che gli operatori di distruzione in una base contengano anche una certa frazione degli operatori di creazione dell'altra. Ne segue che gli stati quantistici non sono equivalenti finché $\beta_{ij} \neq 0$.

Per dimostrare l'affermazione precedente si calcola in genere il valore di aspettazione dei quanti presenti in un dato modo g_i nello stato di vuoto definito dai modi f_j , ovvero $|0_A\rangle$: si ha infatti

$$\langle 0_A | \hat{N}_i^B | 0_A \rangle = \langle 0_A | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0_A \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2$$

ovvero un valore diverso da zero – contrariamente ai valori di aspettazione degli $\hat{N}_i^A = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ – a meno che tutti i β_{ij} siano nulli. Ciò significa che il vuoto definito da un osservatore può non essere “vuoto” secondo un altro: l'effetto Unruh non è che un caso particolare di questo fatto.

2.3 Considerazioni sul concetto di particella in QFT

Nella teoria dei campi quantistici l'ente fisico fondamentale è riconosciuto essere il campo, il cui concetto è assunto come primitivo. La nozione di

particella diventa invece derivata, quindi se ne può dare una definizione in termini di campo ed osservabili.

Si considerino gli elementi della base dello spazio di Fock in (2.24): il ket $\hat{a}_i^\dagger |0\rangle$ rappresenta uno stato in cui tutti i modi del campo sono vuoti ad eccezione dell' i -esimo. Nel caso in cui sia possibile esprimere l'hamiltoniana in funzione degli operatori numero \hat{N}_i come in (2.31), il risultato di una misura di energia nello stato $\hat{a}_i^\dagger |0\rangle$ è predicibile con certezza: il valore sarà esattamente uguale all'autovalore relativo⁶

$$\langle 0 | \hat{a}_i \hat{H} \hat{a}_i^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \hat{H} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_i [\hat{H}, \hat{a}_i^\dagger] | 0 \rangle = \omega_i \langle 0 | \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger | 0 \rangle = \omega_i \delta(0)$$

Se si fossero utilizzati modi normalizzati, la $\delta(0)$ sarebbe sostituita da 1. Possiamo quindi dire che tale stato ha energia definita. Il ragionamento vale per qualsiasi altro stato in (2.24).

Se si riesce a fare la stessa cosa con l'operatore momento totale – quindi solo nel caso in cui questo commuti con gli operatori numero⁷ – possiamo dire che gli stati della base hanno anche impulso definito. Considerando che nella descrizione classica le particelle sono considerate enti portatrici di certe quantità di energia e impulso, è possibile interpretare come tali gli stati del campo ad energia e impulso definiti appena visti.

Essendo basato sull'espansione del campo in modi a frequenza definita, in genere definiti in tutto lo spaziotempo, il concetto di particella è fondamentalmente non locale, mentre le quantità fisiche rilevanti, frutto di misure, sono locali e oggettive – ovvero esprimibili per mezzo di tensori.

Per darne una definizione operativa, si può dire che una particella è ciò che viene rilevato da un *detector* di particelle: ad esempio le tracce in una camera a bolle o la fila di scintillatori attivati all'esterno del punto di interazione in un acceleratore moderno. Tuttavia, affinché la rilevazione di particelle abbia un senso fisico, è necessario specificare come è avvenuto il processo di misura, dato che un *detector* identico potrebbe, in differenti condizioni di moto, non rilevare alcunché [12].

⁶Ho trascurato il contributo dell'energia di punto zero.

⁷Nello spazio di Minkowski si ha $\hat{P}^i = - \int d^3x \hat{\pi} \partial^i \hat{\phi} = \int d^3k \left(\hat{N}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \delta^3(0) \right) k^i$, espandendo il campo in onde piane.

Capitolo 3

Spaziotempo di Rindler

In questo capitolo introduco e descrivo lo spazio di Rindler, una delle quattro regioni in cui lo spazio di Minkowski viene separato dal moto iperbolico di un osservatore uniformemente accelerato.

Nonostante si ritenga che l'effetto Unruh compaia in modo generale in presenza di accelerazione, l'analisi del moto con accelerazione uniforme è inevitabile per vari motivi: innanzitutto è il caso trattato da Unruh nella sua derivazione e ha quindi un'importanza storica; inoltre è uno dei pochi che ammetta una formulazione esatta del fenomeno e, proprio per questo, viene usato come punto di partenza per approcci perturbativi.

3.1 Moto uniformemente accelerato

Siano $x^\mu = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x})$ le coordinate cartesiane definite ovunque in \mathcal{M} : la metrica è notoriamente

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.1)$$

Un osservatore la cui linea di mondo è una curva integrale del campo vettoriale ∂_t è detto di Minkowski e risulta inerziale nel senso definito in relatività generale: le curve a $\mathbf{x} = \text{const.}$ sono geodetiche in \mathcal{M} .

La quadrivelocità di una particella che segue la linea di mondo $x^\mu(\tau)$ può essere calcolata come

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma, \gamma\mathbf{v}) \quad (3.2)$$

dove $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$ è il fattore di Lorentz e τ il tempo proprio della particella, legato al tempo coordinato da $dt = \gamma d\tau$. Il modulo quadrato della velocità è $u_\mu u^\mu = -1$ come per tutte le traiettorie spaziotemporali seguite dalle particelle massive, derivando rispetto a τ tale relazione si vede che

la quadriaccelerazione è sempre ortogonale al suo *rate* di variazione, ovvero alla quadriaccelerazione

$$\alpha^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} \right) \quad (3.3)$$

Nel sistema inerziale istantaneamente in quiete con la particella si ha ovviamente $\gamma = 1$, quindi l'accelerazione propria è $\alpha^\mu|_0 = (0, \mathbf{a}_0)$, dove \mathbf{a}_0 è l'accelerazione tridimensionale ordinaria. Si definisce moto uniformemente accelerato quello che avviene ad accelerazione propria costante.

Per determinare la linea di mondo di un corpo – supposto puntiforme – uniformemente accelerato rispetto a un dato osservatore di Minkowski si può sfruttare il fatto che il modulo quadrato di un quadriettore è uguale in tutti i sistemi di riferimento: si ha

$$\alpha_\mu\alpha^\mu = -\gamma^2 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} \right)^2 = \alpha_\mu\alpha^\mu|_0 \equiv \alpha^2 \quad (3.4)$$

Considerando solo moti lungo l'asse z^1 , si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt}(\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{a}_0 \quad (3.5)$$

risolta, per $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, da

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{a}_0 t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}} \quad (3.6)$$

Per tempi brevi si ha la legge classica $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{a}_0 t$; per $t \rightarrow \pm\infty$ si ha $|\mathbf{v}| \rightarrow 1$. Integrando ancora si trova la legge del moto

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{\alpha^2} \sqrt{1 + (\alpha t)^2} \quad (3.7)$$

con condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}_0/\alpha^2$, ottenuta annullando la costante di integrazione – ricordo che il moto avviene solo lungo z , quindi $\mathbf{a}_0 = (0, 0, \pm\alpha)$. Il tempo proprio si ottiene integrando la relazione $dt = \gamma d\tau$ con l'ausilio della (3.6):

$$\tau(t) = \frac{1}{\alpha} \log \left(\sqrt{(\alpha t)^2 + 1} + \alpha t \right) \quad (3.8)$$

La traiettoria (3.7) è rappresentata da uno dei rami dell'iperbole

$$(\alpha z)^2 - (\alpha t)^2 = 1 \quad (3.9)$$

¹In una dimensione vale infatti $\mathbf{v}^2 \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 = (\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt})^2$ e si ha l'equivalenza tra le espressioni (3.4) e (3.5).

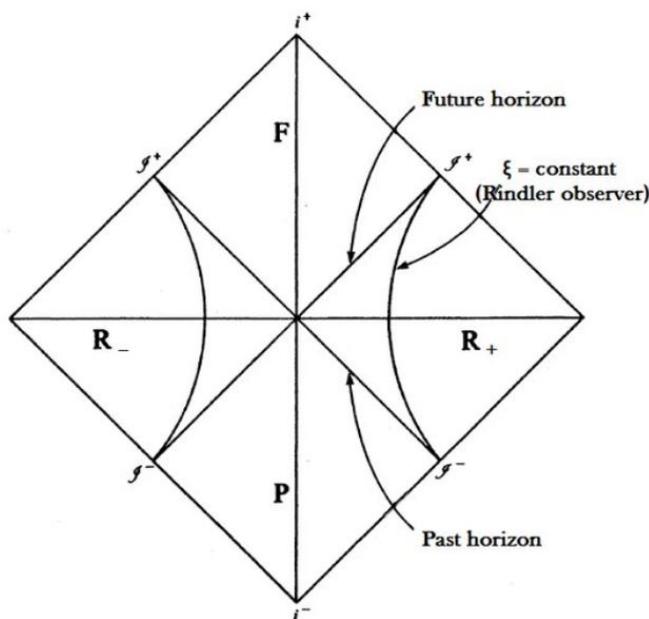


Figura 3.1: Diagramma di Penrose dello spazio di Minkowski \mathcal{M} con raffigurate le linee di mondo degli osservatori di Rindler nelle regioni \mathcal{R} e \mathcal{L} (le due curve in \mathbf{R}_{\pm}). Si vede che entrambe raggiungono \mathcal{J}^+ e non i^+ essendo asintoticamente nulle; i segmenti diagonali indicati rappresentano dunque degli orizzonti: ad esempio, gli eventi al di sopra dell'orizzonte futuro non possono essere osservati dall'osservatore destro. Tratta da [13]

a seconda del segno di α : nel caso $\alpha > 0$ il corpo parte da $(t = -\infty, z = +\infty)$ con velocità -1 , si avvicina all'origine rallentando finché non si arresta a distanza $1/\alpha$ dall'origine, invertendo il moto, in seguito si allontana verso $(t = +\infty, z = +\infty)$ raggiungendo asintoticamente la velocità della luce. La linea di mondo dell'oggetto uniformemente accelerato parte dall'infinito nullo passato e finisce sull'infinito nullo futuro (curva $\xi = \text{constant}$ in Figura 3.1). Invertendo la (3.8) ed inserendola nella (3.7) si ottengono le equazioni parametriche della curva di mondo, che risulteranno molto utili in seguito

$$z(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau), \quad t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \quad (3.10)$$

3.2 Spaziotempo di Rindler

Il moto di un oggetto uniformemente accelerato induce una divisione dello spazio di Minkowski in quattro parti, come si vede dalla Figura 3.2

$$\mathcal{R} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M} \mid z > |t|\} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{L} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M} \mid z < -|t|\} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{P} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M} \mid t < -|z|\} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{F} := \{(t, x, y, z) \in \mathcal{M} \mid t > |z|\} \quad (3.14)$$

dette rispettivamente cuneo di Rindler destro, sinistro, passato e futuro. Gli iperpiani $z = \pm t$ separano completamente tali regioni.

L'insieme delle curve parametrizzate da (3.10) con $\alpha \in (0, +\infty)$ riempiono \mathcal{R}^2 , quelle con $\alpha \in (-\infty, 0)$ riempiono \mathcal{L} . Considerando le iperboli (3.9) si vede che queste ricoprono $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$ al variare di α positivo: nel limite $\alpha \rightarrow 0$ tendono alle rette verticali $z = \pm\infty$, corrispondenti alle linee di mondo di osservatori di Minkowski infinitamente lontani, per $\alpha \rightarrow \infty$ tendono alla coppia di rette $z = \pm t$, le quali rappresentano i raggi di luce propaganti nei due versi dell'asse z .

Spazio di Rindler è solo un altro nome per il cuneo destro, comunemente scelto – a causa della preponderanza dei destrimani – per studiare la fisica di un corpo uniformemente accelerato.

Essendo sottoinsiemi di \mathcal{M} , \mathcal{R} , \mathcal{L} , \mathcal{P} e \mathcal{F} sono spaziotempi piatti, tuttavia solamente \mathcal{R} e \mathcal{L} conservano la staticità, come mostrerò tra poco.

Si consideri il quadrivettore B , generatore dei *boost* di Lorentz lungo la direzione z :

$$B = z\partial_t + t\partial_z \quad (3.15)$$

Il fatto che sia un vettore di Killing in \mathcal{M} segue dalla verifica diretta dell'omonima equazione con la metrica (3.1)

$$\partial_\mu B_\nu + \partial_\nu B_\mu = 0$$

o più semplicemente dal fatto che i *boost*, essendo trasformazioni di Lorentz lasciano invariato $\eta_{\mu\nu}$ per definizione. Il modulo quadrato di B è

$$B_\mu B^\mu = t^2 - z^2 \quad (3.16)$$

²Ovviamente bisogna includere anche le curve con x e y diversi da zero, ma per semplicità continuerò a considerare solo la traiettoria che giace sull'asse z , dando per scontata l'estensione quando necessaria.

e risulta quindi positivo in \mathcal{P} e \mathcal{F} , negativo in \mathcal{R} e \mathcal{L} e nullo sull'iperpiano luce $z = \pm t$: in altre parole, B è di tipo tempo solo in \mathcal{R} e \mathcal{L} . Il motivo per cui ho introdotto tale vettore – o meglio tale campo vettoriale – è che il suo flusso genera le iperboli (3.9): utilizzando come parametro $\alpha\tau$ piuttosto che τ nelle (3.10) e calcolandone la derivata si ottiene infatti

$$\frac{dz}{d(\alpha\tau)} = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) = t, \quad \frac{dt}{d(\alpha\tau)} = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau) = z$$

Ciò significa che i rami dell'iperbole, percorsi ad α volte la quadrivelocità, sono curve integrali di B : allo stesso risultato conduce l'applicazione attiva della trasformazione di Lorentz a un dato evento sull'iperbole

$$\begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(\tau_0) \\ z(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\tau_0 + \psi/\alpha) \\ z(\tau_0 + \psi/\alpha) \end{pmatrix}$$

Il *boost* equivale ad un avanzamento lungo la linea di mondo di un tempo pari a ψ/α . Si noti che in \mathcal{L} il campo B è diretto verso il passato: un *boost* con parametro $\psi > 0$ diminuisce il valore di t in quanto $\alpha < 0$.

Ovviamente le curve integrali di B non corrispondono in genere ad alcuna traiettoria fisica: il vettore tangente alla curva deve essere interpretabile come la quadrivelocità dell'oggetto in moto ed avere quindi modulo quadrato -1 .

3.3 Osservatore di Rindler

I fatti precedenti inducono a pensare che un vettore proporzionale a B permetta di definire degli osservatori statici in \mathcal{R} e \mathcal{L} ; se così fosse, ad esempio in \mathcal{R} , dovrebbe esistere un sistema di coordinate (η, x, y, ξ) ivi definito tale che $B \propto \partial_\eta$ e la metrica sia nella forma (2.35).

Considerando che una parametrizzazione delle curve di mondo in \mathcal{R} è data dalle (3.10) con $\alpha > 0$, è naturale introdurre una coordinata η che quantifichi il passare del tempo per un certo osservatore uniformemente accelerato e una coordinata ξ che permetta di passare con continuità da un osservatore all'altro al variare dell'accelerazione: seguendo questa idea si arriva a

$$\begin{cases} t(\eta, \xi) = \frac{f(\xi)}{a} \sinh(a\eta) \\ z(\eta, \xi) = \frac{f(\xi)}{a} \cosh(a\eta) \end{cases}$$

con $a > 0$ e f una funzione in gran parte arbitraria: utilizzerò $f(\xi) = e^{a\xi}$ in modo da ottenere le cosiddette coordinate di Lass

$$\begin{cases} t(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh(a\eta) \\ z(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\eta) \end{cases} \quad (3.17)$$

Lasciando variare $\eta, \xi \in \mathbb{R}$, la regione di \mathcal{M} coperta dalle nuove coordinate coincide proprio con lo spazio di Rindler. La metrica assume inoltre la forma desiderata

$$ds^2 = e^{2a\xi}(-d\eta^2 + d\xi^2) + dx^2 + dy^2 \quad (3.18)$$

confermando la congettura che \mathcal{R} sia statico rispetto al tempo η .

Si definisce osservatore di Rindler (destro) quello che si muove sulle curve integrali di $\partial_\eta = aB$. Per ogni dato ξ esiste una famiglia di osservatori di Rindler – in corrispondenza biunivoca con i punti del piano xy –, tutti in moto con la stessa accelerazione propria

$$\alpha = ae^{-a\xi} \quad (3.19)$$

e lo stesso tempo proprio

$$d\tau = e^{a\xi}d\eta \quad (3.20)$$

Trascurando le coordinate x, y , le curve a η costante sono rette passanti per l'origine dello spazio di Minkowski, precisamente si ha $t = z \tanh(a\eta)$: per $\eta = 0$ si ottiene l'asse z , per $\eta \rightarrow \pm\infty$ le rette nulle $z = \pm t$. Si dimostra che tali insiemi sono superfici di Cauchy in \mathcal{R} , che è quindi globalmente iperbolico [14].

Nel cuneo sinistro si procede in modo analogo introducendo le coordinate $(\bar{\eta}, x, y, \bar{\xi})$, definite in modo implicito dalla trasformazione

$$\begin{cases} t(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = -\frac{e^{a\bar{\xi}}}{a} \sinh(a\bar{\eta}) \\ z(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = -\frac{e^{a\bar{\xi}}}{a} \cosh(a\bar{\eta}) \end{cases} \quad (3.21)$$

con $a > 0$ e $\bar{\eta}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}$. Poiché la metrica si ottiene da (3.18) con le sostituzioni $\eta \rightarrow \bar{\eta}$ e $\xi \rightarrow \bar{\xi}$, anche \mathcal{L} è statico, inoltre si dimostra analogamente che è globalmente iperbolico con superfici di Cauchy quelle a $\bar{\eta}$ costante.

L'accelerazione propria e il tempo proprio di un osservatore che si muove sulle curve coordinate di $\bar{\eta}$ si ottengono semplicemente da (3.19) e (3.20) con la sostituzione già vista.

Ricordo però che, seguendo le curve integrali di $\partial_{\bar{\eta}} = aB$, gli osservatori di Rindler sinistri si muovono indietro nel tempo t .

Per quanto riguarda \mathcal{P} e \mathcal{F} è ovvio che anche in essi esistono curve integrali di B : il problema è che sono di tipo spazio e non corrispondono quindi ad alcun moto fisico. Una combinazione che risulta di tipo tempo è data da $t\partial_t + z\partial_z$, ma poiché la metrica in tali regioni è analoga a (3.18), è evidente che non rappresenti un campo vettoriale di Killing.

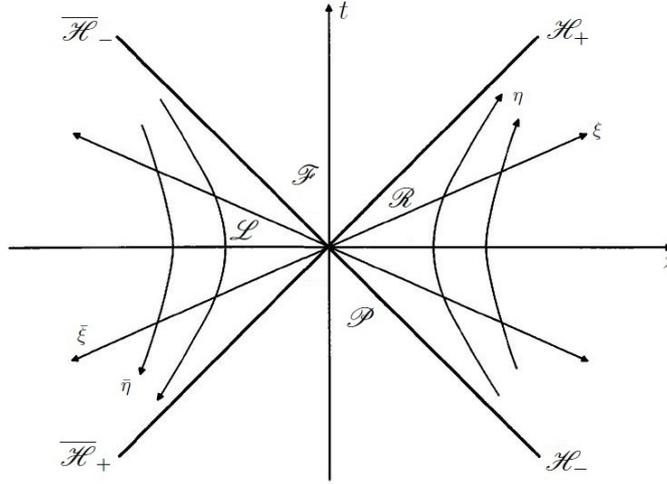


Figura 3.2: Separazione dello spazio di Minkowski indotta dal moto di un osservatore uniformemente accelerato. Le linee a ξ (o $\bar{\xi}$) costante, curve integrali riparametrizzate del generatore dei *boost*, sono le linee di mondo degli osservatori di Rindler, quelle a η (o $\bar{\eta}$) costante sono i piani di simultaneità per tali osservatori. In figura sono mostrati anche gli orizzonti passato e futuro. Riadattamento da una figura in [8]

I cunei \mathcal{P} e \mathcal{F} non sono stazionari, nè tantomeno statici: i nomi *spazio degenero di Kasner in contrazione* (\mathcal{P}) e *spazio degenero di Kasner in espansione* (\mathcal{F}) evidenziano questa proprietà.

3.4 Orizzonte di Rindler

Una delle conseguenze più interessanti della trattazione relativistica del moto uniformemente accelerato rispetto a quella newtoniana è la comparsa di un orizzonte per un osservatore in tale condizione: il fatto che esso si allontani, e allontanandosi aumenti la propria velocità fino a raggiungere asintoticamente quella della luce, preclude agli eventi di una certa regione dello spaziotempo la possibilità di influenzarlo.

Tale caratteristica è sicuramente degna di nota nello studio dell'effetto Unruh, perché avvalorata la corrispondenza tra l'osservatore di Rindler nello spazio di Minkowski e quello statico nello spaziotempo di Schwarzschild all'esterno di un buco nero alla base dell'analogia con il fenomeno della radiazione di Hawking.

Si consideri un osservatore destro di Rindler in \mathcal{M} : si vede facilmente che gli eventi con $z \leq t$ non possono entrare in contatto causale con l'osservatore, dato che i segnali luminosi inviati verso destra si mantengono paralleli alla retta $z = t$ e raggiungono l'infinito futuro nullo in \mathcal{F} , dove l'osservatore non

penetra. Analogamente gli eventi con $z \geq t$ sono invisibili per un osservatore sinistro. Ciononostante le quattro regioni non sono causalmente sconnesse: è infatti possibile per un osservatore di Rindler mandare segnali in \mathcal{F} e riceverne da \mathcal{P} ; le uniche componenti realmente indipendenti sotto questo punto di vista sono \mathcal{R} e \mathcal{L} .

Dal punto di vista di un osservatore destro di Rindler, nessuna informazione può uscire dalla semiretta $z = t$, $z > 0$ o entrare attraverso $z = -t$, $z > 0$, quindi queste rappresentano dei veri e propri orizzonti per lui. Nello specifico

$$\mathcal{H}_- := \{\eta \rightarrow -\infty, \xi \rightarrow -\infty, \xi - \eta \text{ finito}\} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{H}_+ := \{\eta \rightarrow +\infty, \xi \rightarrow -\infty, \xi + \eta \text{ finito}\} \quad (3.23)$$

sono gli orizzonti passato e futuro in \mathcal{R} . Considerazioni analoghe per un osservatore sinistro comportano che

$$\overline{\mathcal{H}}_- := \{\bar{\eta} \rightarrow -\infty, \bar{\xi} \rightarrow -\infty, \bar{\xi} - \bar{\eta} \text{ finito}\} \quad (3.24)$$

$$\overline{\mathcal{H}}_+ := \{\bar{\eta} \rightarrow +\infty, \bar{\xi} \rightarrow -\infty, \bar{\xi} + \bar{\eta} \text{ finito}\} \quad (3.25)$$

siano gli orizzonti passato e futuro in \mathcal{L} . Tali ipersuperfici risultano orizzonti di Killing in quanto su di essi si annulla la norma del vettore di Killing B .

Risulterà comodo, soprattutto per descrivere la fisica degli orizzonti, introdurre delle coordinate nulle analoghe ai tempi ritardato $U = t - z$ ed avanzato $V = t + z$ utilizzate nello spazio di Minkowski:

$$u = \eta - \xi \quad v = \eta + \xi \quad (3.26)$$

$$\bar{u} = \bar{\eta} - \bar{\xi} \quad \bar{v} = \bar{\eta} + \bar{\xi} \quad (3.27)$$

Da (3.17) e (3.21) si derivano le seguenti trasformazioni

$$U = \begin{cases} -a^{-1}e^{-au} & \text{in } \mathcal{R} \\ a^{-1}e^{-a\bar{u}} & \text{in } \mathcal{L} \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} a^{-1}e^{av} & \text{in } \mathcal{R} \\ -a^{-1}e^{a\bar{v}} & \text{in } \mathcal{L} \end{cases}$$

Come la metrica nello spazio di Minkowski si riduce in forma antidiagonale in queste coordinate $ds^2 = -dUdV + d\mathbf{x}_\perp^2$ ³, così quella dello spazio di Rindler diventa $ds^2 = -e^{a(v-u)}dudv + d\mathbf{x}_\perp^2$.

³Per convenienza si introduce il vettore delle coordinate trasverse $\mathbf{x}_\perp \equiv (x, y)$, il quale rimane inalterato nel passaggio alle coordinate di Rindler.

Capitolo 4

Effetto Unruh

Un osservatore uniformemente accelerato rispetto a uno inerziale descrive lo spaziotempo in modo diverso: la quantizzazione che esso opera con le sue coordinate non produce stati di Fock equivalenti a quelli classici della QFT su spaziotempo piatto. In particolare l'effetto Unruh descrive il fatto che il vuoto di Minkowski, ristretto allo spazio di Rindler, ha le proprietà di uno stato termico.

4.1 Modi di Rindler

Sia ϕ un campo scalare reale libero che obbedisce all'equazione di Klein-Gordon. Dato che lo spazio di Rindler è statico, la quantizzazione canonica si può effettuare trovando una base ortonormale di modi a frequenza definita rispetto al tempo η

$$i\partial_\eta\psi = \pm\omega\psi \quad (4.1)$$

ed espandendo su di essi il campo ϕ : ai coefficienti dei modi a frequenza positiva si associa poi il ruolo di operatori di distruzione, attraverso i quali si definisce il vuoto statico.

Per rendere il tutto più esplicito si consideri per prima cosa l'operatore di D'Alembert nelle coordinate di Rindler in \mathcal{R} :

$$e^{-2\alpha\xi}(-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2) + \partial_x^2 + \partial_y^2 \quad (4.2)$$

in accordo con (2.36). Come già mostrato una base delle soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon può essere composta dai modi a frequenza positiva, proporzionali a $e^{-i\lambda\eta}$ con $\lambda > 0$, e dai loro complessi coniugati. È chiaro che si può assumere una dipendenza da \mathbf{x}_\perp nella forma $e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}$, analogamente alle onde piane, dato che la trasformazione (3.17) lascia inalterato il vettore delle coordinate trasverse. Il termine rimanente $g_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}(\xi)$ deve soddisfare

l'equazione agli autovalori

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + e^{2a\xi}(\mathbf{k}_\perp^2 + m^2) \right] g_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}(\xi) = \lambda^2 g_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}(\xi) \quad (4.3)$$

Da semplici teoremi di algebra segue che le soluzioni di (4.3) sono reali e normalizzabili in senso generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi g_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}(\xi) g_{\lambda', \mathbf{k}_\perp}(\xi) = \delta(\lambda - \lambda') \quad (4.4)$$

Inoltre considerazioni di carattere fisico impongono che la soluzione tenda a zero per $\xi \rightarrow +\infty$, dato che il “potenziale” diverge in tale limite, ed oscilli a frequenza λ per $\xi \rightarrow -\infty$. Tali richieste determinano la forma della funzione cercata

$$g_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}(\xi) = \sqrt{\frac{2\lambda \sinh(\pi\lambda/a)}{a\pi^2}} K_{i\frac{\lambda}{a}}\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\xi}\right) \quad (4.5)$$

con $\kappa = (\mathbf{k}_\perp^2 + m^2)^{1/2}$ e K_ν funzione di Bessel modificata del secondo tipo [3]. I modi a frequenza positiva rispetto a η sono quindi

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R(x) = \sqrt{\frac{\sinh(\pi\lambda/a)}{4a\pi^4}} K_{i\frac{\lambda}{a}}\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\xi}\right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\lambda\eta} \quad (4.6)$$

e saranno chiamati modi destri di Rindler. Per costruzione tali modi soddisfano delle condizioni di ortonormalità rispetto al prodotto (2.19) in \mathcal{R} simili a quelle delle onde piane nello spazio di Minkowski:

$$\langle v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R, v_{\lambda', \mathbf{k}'_\perp}^R \rangle = \delta(\lambda - \lambda') \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp), \quad \langle v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R, v_{\lambda', \mathbf{k}'_\perp}^{R*} \rangle = 0 \quad (4.7)$$

Il campo ϕ , ristretto a \mathcal{R} , può essere espanso nei modi destri di Rindler

$$\hat{\phi} = \int d^2\mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} d\lambda (\hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R + \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R\dagger} v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R*}) \quad (4.8)$$

con $\hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R$ e $\hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R\dagger}$ dotati delle seguenti relazioni di commutazione

$$[\hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R, \hat{a}_{\lambda', \mathbf{k}'_\perp}^{R\dagger}] = \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(\lambda - \lambda') \quad (4.9)$$

Per avere un insieme completo di funzioni nell'intero spazio di Minkowski è necessario – e sufficiente – definire una seconda base per il campo in \mathcal{L} , questo perché l'unione di ipersuperfici a η e $\bar{\eta}$ costanti sono superfici di Cauchy in \mathcal{M} .

La quantizzazione per un osservatore sinistro di Rindler procede in modo

analogo poiché la metrica in \mathcal{L} è identica a quella in \mathcal{R} a meno dei cambi $\eta \rightarrow \bar{\eta}$ e $\xi \rightarrow \bar{\xi}$. L'unica differenza sta nella classificazione dei modi. Nella sezione 3.3 ho accennato al fatto che per tali osservatori – in base alla definizione che ne ho dato io¹ – il tempo t diminuisce all'aumentare di $\bar{\eta}$: a differenza di un osservatore destro, questi si muovono indietro nel tempo rispetto a un osservatore inerziale; di conseguenza i tempi degli osservatori destro e sinistro scorrono in senso opposto. È quindi opportuno utilizzare $\partial_{-\bar{\eta}}$ piuttosto che $\partial_{\bar{\eta}}$ per definire le frequenze in modo coerente su \mathcal{R} e \mathcal{L} .

Così facendo i modi sinistri di Rindler a frequenza positiva risultano essere

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L(x) = \sqrt{\frac{\sinh(\pi\lambda/a)}{4a\pi^4}} K_{i\frac{\lambda}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\bar{\xi}} \right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp + i\lambda\bar{\eta}} \quad (4.10)$$

Vale quindi la relazione funzionale $v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \mathbf{x}_\perp) = v_{\lambda, -\mathbf{k}_\perp}^{R*}(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \mathbf{x}_\perp)$, dato che $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$.

I modi destri e sinistri devono essere definiti anche nelle regioni opposte per poter formare una base in tutto \mathcal{M} : un'estensione naturale è

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sinh(\pi\lambda/a)}{4a\pi^4}} K_{i\frac{\lambda}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\xi} \right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\lambda\eta} & \text{in } \mathcal{R} \\ 0 & \text{in } \mathcal{L} \end{cases}$$

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ \sqrt{\frac{\sinh(\pi\lambda/a)}{4a\pi^4}} K_{i\frac{\lambda}{a}} \left(\frac{\kappa}{a} e^{a\bar{\xi}} \right) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\lambda\bar{\eta}} & \text{in } \mathcal{L} \end{cases}$$

Tali modi, dove non nulli, sono a frequenza positiva rispetto a un osservatore uniformemente accelerato che si muove avanti nel tempo t^2 . Ovviamente nessuno dei due modi è a frequenza positiva rispetto al vettore di Killing ∂_t . La costruzione dello spazio di Fock procede dall'espansione

$$\hat{\phi} = \int d^2\mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} d\lambda (\hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R + \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L + \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R\dagger} v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R*} + \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{L\dagger} v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{L*}) \quad (4.11)$$

valida in tutto lo spazio di Minkowski, nonostante i modi siano stati definiti solo in $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$ [3]. Il vuoto di Rindler è lo stato annichilito dagli operatori di distruzione destri e sinistri

$$a_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R |0_R\rangle = a_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L |0_R\rangle = 0, \quad \forall \lambda, \mathbf{k}_\perp \quad (4.12)$$

¹Alcuni autori non inseriscono il segno meno nella trasformazione di t in (3.21), così facendo l'osservatore si muove avanti nel tempo.

²L'uso degli stessi simboli per le funzioni di partenza e le estensioni non sarà motivo di confusione essendo chiaro dal contesto, caso per caso, il dominio in cui si intende lavorare.

4.2 Derivazione dell'effetto Unruh

Nelle prossime sezioni illustrerò due dei metodi utilizzati per derivare l'effetto Unruh. Spesso in letteratura, soprattutto nei testi pedagogici, si preferisce evitare il primo, ossia il calcolo diretto dei coefficienti di Bogoliubov tra i modi di Rindler e quelli di Minkowski, ricorrendo a un'idea dello stesso Unruh.

Ritengo tuttavia di poter esporre tale calcolo, poiché non ho particolari restrizioni di lunghezza come chi scrive un articolo, e anche che possa essere illuminante, per alcuni, sia il procedimento sia il risultato finale.

4.2.1 Calcolo dei coefficienti di Bogoliubov

Secondo quanto visto in 2.2.3 ci si aspetta che l'espansione in modi di Rindler non conduca a stati quantistici equivalenti a quelli definiti attraverso l'uso delle onde piane (2.28): la differenza, qualora presente, sarà quantificata dai coefficienti di Bogoliubov. Nonostante abbia già derivato delle formule per calcolarli direttamente, ritengo utile ripartire dal principio.

Dalla completezza delle onde piane seguono le espansioni

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R = \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R e^{ik_z z - i\omega_{\mathbf{k}} t} + \beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R e^{-ik_z z + i\omega_{\mathbf{k}} t} \right) \quad (4.13)$$

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L = \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^L e^{ik_z z - i\omega_{\mathbf{k}} t} + \beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^L e^{-ik_z z + i\omega_{\mathbf{k}} t} \right) \quad (4.14)$$

dato che i coefficienti α con $\mathbf{k}'_\perp \neq \mathbf{k}_\perp$ e quelli β con $\mathbf{k}'_\perp \neq -\mathbf{k}_\perp$ sono evidentemente nulli. Nelle espressioni precedenti, corrispondenti alla (2.39), z e t vanno espressi come funzioni di η e ξ in \mathcal{R} e di $\bar{\eta}$ e $\bar{\xi}$ in \mathcal{L} . Dalla relazione $v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \mathbf{x}_\perp) = v_{\lambda, -\mathbf{k}_\perp}^{R*}(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \mathbf{x}_\perp)$ si deduce che

$$\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^L = \alpha_{\lambda, -\mathbf{k}_\perp, k_z}^{R*}, \quad \beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^L = \beta_{\lambda, -\mathbf{k}_\perp, k_z}^{R*} \quad (4.15)$$

Quindi per trovare tutti i coefficienti è sufficiente calcolare quelli relativi ai modi destri. Dall'ortonormalità generalizzata delle onde piane (2.26) si ricava

$$\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R \delta(0) = \langle \varphi_{\mathbf{k}}, v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R \rangle, \quad \beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R \delta(0) = -\langle \varphi_{\mathbf{k}}^*, v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R \rangle \quad (4.16)$$

dove le $\delta(0)$ vengono dall'integrazione in \mathbf{x}_\perp . In queste formule – e in altre che seguono – si intende che $\mathbf{k} = (\pm \mathbf{k}_\perp, k_z)$ a seconda del coefficiente considerato.

Il calcolo è difficile, ma lineare. Dato che il prodotto di Klein-Gordon è indipendente dall'ipersuperficie sulla quale si effettua l'integrale, è conveniente considerare il limite delle ipersuperfici a $\eta = \text{const.}$ per $\eta \rightarrow +\infty$ con

$\xi \rightarrow -\infty$, ovvero \mathcal{H}_+ – in realtà si dovrebbe prendere $\mathcal{H}_+ \cup \overline{\mathcal{H}_+}$ ma i modi destri sono nulli in \mathcal{L}

$$\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R \delta(0) = i \int_{\Sigma} dS^\mu \sqrt{\gamma} (\varphi_{\mathbf{k}}^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R) \quad (4.17)$$

Per ogni ipersuperficie a $\eta = \text{const.}$ si ha che il vettore normale è $e^{-a\xi} \partial_\eta$, mentre la metrica indotta ha determinante $e^{2a\xi}$, cosicché il prodotto $dS^\mu \sqrt{\gamma} \partial_\mu$ risulta $d\xi \partial_\eta$. Nel limite considerato $\partial_\eta \rightarrow 2aV \partial_V$ mentre $d\xi$ va sostituito con $dV/2aV$: l'integrale diventa quindi

$$2\pi i \int_0^{+\infty} dV^\mu (\varphi_{\mathbf{k}}^* \overleftrightarrow{\partial}_V v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R)$$

avendo considerato che l'integrazione sulle coordinate trasverse dà $2\pi\delta(0)$. Su \mathcal{H}_+ le onde piane si comportano come

$$\varphi_{\mathbf{k}} \simeq N_{\mathbf{k}} e^{i(k_z - \omega_{\mathbf{k}})V/2} \quad (4.18)$$

Relativamente ai modi di Rindler si ha che l'esponenziale $e^{-i\lambda\eta} = e^{-i\lambda v/2} e^{-i\lambda u/2}$ ha una componente finita e una che oscilla infinitamente per $u \rightarrow +\infty$ – la quale può essere scartata costruendo pacchetti d'onda – mentre per le funzioni di Bessel vale l'andamento asintotico per $\xi \rightarrow -\infty$:

$$v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R \simeq -\frac{i}{4\pi} \frac{(a \sinh(\pi\lambda/a))^{-1/2}}{\Gamma(1 - i\lambda/a)} (\kappa/2a)^{-i\lambda/a} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\lambda v} \quad (4.19)$$

Considerando tutto ciò, integrando per parti ed eliminando i contributi oscillanti al contorno, si arriva a

$$\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R = -\frac{i}{4} \frac{(\kappa/2a)^{-i\lambda/a}}{\Gamma(1 - i\lambda/a)} \frac{\omega_{\mathbf{k}} - k_z}{\sqrt{\pi a \omega_{\mathbf{k}} \sinh(\pi\lambda/a)}} \int_0^{+\infty} dV (aV)^{-i\lambda/a} e^{-i(k_z - \omega_{\mathbf{k}})V/2}$$

in cui l'integrale può essere visto come limite della funzione Gamma di Eulero $\Gamma(z)$ per $\Re(z) \rightarrow 0$.

$$\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R = \frac{e^{\pi\lambda/2a}}{\sqrt{4\pi a \omega_{\mathbf{k}} \sinh(\pi\lambda/a)}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} + k_z}{\omega_{\mathbf{k}} - k_z} \right)^{-i\lambda/2a} \quad (4.20)$$

avendo notato che $\kappa = (\mathbf{k}_\perp^2 + m^2)^{1/2} = (\omega_{\mathbf{k}}^2 - k_z^2)^{1/2}$. Il calcolo dei coefficienti $\beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R$ è analogo, perciò riporto solo il risultato

$$\beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R = -\frac{e^{-\pi\lambda/2a}}{\sqrt{4\pi a \omega_{\mathbf{k}} \sinh(\pi\lambda/a)}} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} + k_z}{\omega_{\mathbf{k}} - k_z} \right)^{-i\lambda/2a} \quad (4.21)$$

Si noti che vale la relazione

$$\beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R = -e^{-\pi\lambda/a} \alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R \quad (4.22)$$

I coefficienti per i modi sinistri seguono dalle (4.15).

Un osservatore di Rindler destro utilizza l'espansione (4.8) che, nel paradigma delle trasformazioni di Bogoliubov, corrisponde alla (2.38). Utilizzando la (4.13) si arriva a

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \int_0^{+\infty} d\lambda (\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R + \beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^{R*} \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R\dagger}) \quad (4.23)$$

ovvero la (2.42). Invertendo questa si ottiene

$$\hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z (\alpha_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^{R*} \hat{a}_{\mathbf{k}} - \beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^{R*} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (4.24)$$

da cui si ricava il valore di aspettazione delle “particelle destre” di Rindler nel vuoto di Minkowski

$$\langle 0_M | \hat{N}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R | 0_M \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z |\beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp, k_z}^R|^2 = \frac{\varkappa}{4\pi a} \frac{1}{e^{2\pi\lambda/a} - 1} \quad (4.25)$$

avendo indicato con \varkappa l'integrale divergente $\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z / \omega_{\mathbf{k}}$, dovuto all'uso di modi non normalizzabili – limitando la regione di definizione del campo, e quindi le frequenze permesse, si avrebbe una costante finita [14]. Le stesse formule valgono anche per un osservatore sinistro in quanto si può verificare che $\langle 0_M | \hat{N}_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^R | 0_M \rangle = \langle 0_M | \hat{N}_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^L | 0_M \rangle$.

Prima di interpretare il risultato, riporto anche il metodo utilizzato più comunemente.

4.2.2 Metodo di Unruh

La derivazione originale di Unruh si basa su un'idea ingegnosa: invece di confrontare i modi di Rindler direttamente con quelli di Minkowski, *i.e.* le onde piane, egli li confronta con dei modi “equivalenti” a questi, ma costruiti a partire da quelli di Rindler; in tal modo la derivazione dell'effetto non richiede il calcolo di integrali.

Il corpo della dimostrazione consiste nel trovare un insieme completo di funzioni, definite in tutto \mathcal{M} , tali che

- siano automodi del generatore dei *boost*, ovvero esistano coefficienti $\alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U$ e $\beta_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U$ per i quali

$$\begin{aligned} w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp} &= \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U v_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^R + \beta_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U v_{\Omega, -\mathbf{k}_\perp}^{L*} \\ w_{-\Omega, \mathbf{k}_\perp} &= \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U v_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^L + \beta_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U v_{\Omega, -\mathbf{k}_\perp}^{R*} \end{aligned} \quad (4.26)$$

si verifica infatti la relazione $B w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp} = -i(\Omega/a)w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}$;

- siano combinazioni lineari di modi di Minkowski a frequenza positiva³:

$$\begin{aligned} w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z A_{\Omega, \mathbf{k}_\perp, k_z} \varphi_{\mathbf{k}} \\ w_{-\Omega, \mathbf{k}_\perp} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z B_{\Omega, \mathbf{k}_\perp, k_z} \varphi_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

con $\Omega > 0$. Tali modi, detti di Unruh, forniscono una rappresentazione che condivide il vuoto con quella delle onde piane, nel senso che gli operatori di distruzione definiti dall'espansione in modi di Unruh annichiliscono $|0_M\rangle^4$: la seconda condizione equivale infatti a richiedere che non ci sia *mixing* tra frequenze di segno opposto nella trasformazione di Bogoliubov [15].

Per determinare i coefficienti della combinazione (4.26) in modo che sia soddisfatta la (4.27) è comodo invocare un teorema secondo il quale le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon in più di 2 dimensioni sono caratterizzate dal comportamento sull'orizzonte passato o futuro [16].

Si considerino le onde piane espresse in termini dei tempi avanzato e ritardato:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(U, V, \mathbf{x}_\perp) = \frac{e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+k_z)U/2} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-k_z)V/2}$$

Si vede facilmente che tali funzioni sono analitiche e limitate nei semipiani complessi inferiori $\Im(U) < 0$ e $\Im(V) < 0$, in quanto $\text{sgn}(\omega_{\mathbf{k}} \pm k_z) = \text{sgn}(\omega_{\mathbf{k}})$. Ponendosi ad esempio sull'orizzonte futuro si ha $U = 0$ e V finito, ciò implica che i modi di Rindler hanno una componente che oscilla infinitamente in quanto $u, \bar{u} \rightarrow +\infty$ e una finita

$$\begin{aligned} v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R &\simeq -\frac{i}{4\pi} \frac{(a \sinh(\pi\lambda/a))^{-1/2}}{\Gamma(1-i\lambda/a)} (\kappa/2a)^{-i\lambda/a} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - i\lambda v} \propto (aV)^{-i\lambda/a} \quad \text{su } \mathcal{H}_+ \\ v_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^L &\simeq +\frac{i}{4\pi} \frac{(a \sinh(\pi\lambda/a))^{-1/2}}{\Gamma(1+i\lambda/a)} (\kappa/2a)^{+i\lambda/a} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp + i\lambda \bar{v}} \propto (-aV)^{i\lambda/a} \quad \text{su } \overline{\mathcal{H}_+} \end{aligned}$$

³Nelle formule che seguono si deve considerare $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_z)$.

⁴Da notare il fatto che solo lo stato di vuoto è condiviso, mentre gli stati a più particelle possono differire.

Si ha quindi

$$w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp} \propto \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U \theta(V) (aV)^{-i\Omega/a} + \beta_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U \theta(-V) (-aV)^{-i\Omega/a} \quad (4.28)$$

dato che i modi destri (sinistri) sono nulli per $V < 0$ ($V > 0$). Ci sono due problemi: la funzione $V^{-i\lambda/a} = e^{-i(\lambda/a)\ln V}$ è polidroma e singolare nell'origine, il che comporta la necessità di scegliere se passare sopra o sotto di essa per estenderla analiticamente.

Per rendere il logaritmo una funzione monodroma basta praticare un taglio nel piano complesso, ad esempio sul semiasse reale negativo, e scegliere una certa falda: questa scelta limita l'argomento dei numeri complessi all'intervallo $[-\pi, \pi[$. Così facendo si può scrivere

$$w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp} \propto \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U \theta(V) e^{\frac{\Omega}{a} \arg(aV)} + \beta_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U \theta(-V) e^{\frac{\Omega}{a} \arg(-aV)} \quad (4.29)$$

Per risolvere l'ambiguità sull'estensione si può considerare che una funzione è combinazione lineare di soli modi a frequenza positiva se e solo se è analitica e limitata nella metà inferiore del piano complesso della variabile V [4]: in effetti la presenza di una minima componente a frequenza negativa sarebbe sufficiente a far divergere la funzione per $\Im(V) \rightarrow \infty$.

Questo criterio impone di spostare la singolarità nel semipiano superiore per soddisfare la (4.27), ovvero di estendere il logaritmo passando sotto all'origine: coerentemente si prende $\arg(aV) \in [-\pi, 0]$ e $\arg(-aV) = \arg(aV) + \pi$. In questo modo si arriva alla relazione

$$\beta_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U = e^{-\pi\Omega/a} \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U \quad (4.30)$$

con $\alpha_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^U$ fissato dalla normalizzazione.

I modi di Unruh sono dunque

$$\begin{aligned} w_{\Omega, \mathbf{k}_\perp} &= [2 \sinh(\pi\Omega/a)]^{-1/2} (e^{\pi\Omega/2a} v_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^R + e^{-\pi\Omega/2a} v_{\Omega, -\mathbf{k}_\perp}^{L*}) \\ w_{-\Omega, \mathbf{k}_\perp} &= [2 \sinh(\pi\Omega/a)]^{-1/2} (e^{\pi\Omega/2a} v_{\Omega, \mathbf{k}_\perp}^L + e^{-\pi\Omega/2a} v_{\Omega, -\mathbf{k}_\perp}^{R*}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

e, per costruzione, definiscono un vuoto equivalente a quello di Minkowski. La dimostrazione dell'effetto Unruh è immediata considerando che quelli trovati sono proprio i coefficienti di Bogoliubov della trasformazione dai modi di Rindler ai modi di Unruh. Un semplice calcolo mostra che

$$\langle 0_M | \hat{N}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R | 0_M \rangle = \delta(0) |\beta_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}|^2 = \frac{1}{e^{2\pi\lambda/a} - 1} \delta(0) \quad (4.32)$$

dove la $\delta(0)$ è analoga al coefficiente $\varkappa/4\pi a$ trovato in precedenza.

Per verificare ulteriormente la compatibilità dei due metodi, si possono utilizzare le espansioni (4.13) e (4.14) per dedurre i coefficienti di $\varphi_{\mathbf{k}}$ in (4.27)

$$\begin{aligned} A_{\Omega, \mathbf{k}_{\perp}, k_z} &= [2 \sinh(\pi\Omega/a)]^{-1/2} (e^{\pi\Omega/2a} \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_{\perp}, k_z}^R + e^{-\pi\Omega/2a} \beta_{\Omega, -\mathbf{k}_{\perp}, k_z}^{L*}) \\ B_{\Omega, \mathbf{k}_{\perp}, k_z} &= [2 \sinh(\pi\Omega/a)]^{-1/2} (e^{\pi\Omega/2a} \alpha_{\Omega, \mathbf{k}_{\perp}, k_z}^L + e^{-\pi\Omega/2a} \beta_{\Omega, -\mathbf{k}_{\perp}, k_z}^{R*}) \end{aligned}$$

notando che quelli $\varphi_{\mathbf{k}}^*$ si cancellano perfettamente grazie alla relazione (4.22).

4.3 Commento sui risultati

Le (4.25) e (4.32) indicano che il valore di aspettazione del numero di quanti presenti nei vari modi di Rindler nello stato $|0_M\rangle$, ristretto a \mathcal{R} o \mathcal{L} , segue la statistica di Bose-Einstein, ovvero la distribuzione caratteristica di un insieme di particelle scalari immerse in un bagno termico.

Per determinare la temperatura di equilibrio si deve prima considerare che, per un osservatore destro ad esempio, le frequenze λ sono definite rispetto al tempo η , il quale non coincide col tempo proprio a meno che $\xi = 0$. Vale però la relazione

$$\frac{d\tau}{d\eta} = \frac{a}{\alpha} \quad (4.33)$$

da cui discende che le frequenze effettivamente misurate subiscono un *redshift* dato da $\lambda_0/\alpha = \lambda/a$. L'esponenziale al denominatore della distribuzione va quindi interpretato come $e^{2\pi\lambda_0/\alpha}$, da cui si ricava la temperatura del bagno

$$T_0 = \frac{\hbar \alpha}{2\pi k_{BC}} \quad (4.34)$$

nota come temperatura di Unruh. Ho reinserito le costanti dimensionali per dare un'idea di quanto sia piccolo l'effetto Unruh: il fattore di proporzionalità tra T e α vale circa $4.05 \cdot 10^{-21} K s^2 m^{-1}$. Per un dato valore di a , la temperatura misurata tende a 0 per $\xi \rightarrow +\infty$ (l'osservatore diventa asintoticamente inerziale) e diverge per $\xi \rightarrow -\infty$, limite ovviamente irrealizzabile in quanto la traiettoria diventerebbe di tipo luce.

Uno spettro energetico con la giusta forma non basta a dimostrare che uno stato sia termico; bisognerebbe anche provare che in tale stato la probabilità di avere un certo numero di particelle sia quella di un *ensemble* gran canonico. Il calcolo è stato fatto per $|0_M\rangle$ e conferma l'effetto Unruh [3].

Capitolo 5

Detector di Unruh-DeWitt

Ci si chiede adesso quale sia l'interpretazione fisica dell'effetto Unruh e, soprattutto, come si possa misurare la temperatura corrispondente (4.34). La risposta alla seconda domanda è ovviamente "con un termometro", mentre le conseguenze dell'effetto Unruh dipenderanno dal termometro scelto, ovvero da come l'osservatore di Rindler decide di rilevare i quanti nel vuoto di Minkowski. Quello che andrò a considerare è un termometro molto semplice, una variante del *detector* elaborato da Unruh (1976) e DeWitt (1979). Il modello originale è costituito da una particella di Schrödinger chiusa dentro una scatola, in modo da avere livelli energetici discreti, accoppiata al campo scalare, ma per quanto riguarda la dimostrazione seguente è sufficiente considerare una particella puntiforme con due soli stati possibili $|+\rangle$ e $|-\rangle$: quando questa si eccita, si può dire che il *detector* ha rilevato dei quanti. Si immagini adesso di portare questo strumento su una traiettoria uniformemente accelerata: quale è la probabilità che la particella, partendo dal *ground state*, finisca nello stato eccitato?

Come ogni esperimento mentale il *detector* di Unruh-DeWitt è uno strumento flessibile e potente in quanto permette di dare una formulazione matematica, e quindi fare previsioni, su condizioni di accelerazione più realistiche di quella uniforme – per sviluppi in questo senso si veda [17]. Detto ciò passo alla descrizione dell'esperimento realizzato dall'osservatore di Rindler e, parallelamente, tratto anche il caso inerziale, ovvero quello che misurerebbe un osservatore di Minkowski con lo stesso apparato, in modo da permettere un confronto.

5.1 Trattazione perturbativa

L'hamiltoniana del *detector* libero è

$$\hat{H}_0 = E |+\rangle \langle +| \quad (5.1)$$

avendo scelto come zero l'energia dello stato fondamentale. L'accoppiamento al campo ϕ può essere descritto da un termine di monopolo

$$\hat{H}_{int} = c \hat{m} \hat{\phi} \quad (5.2)$$

dove c è una funzione che ne determina l'intensità e $\hat{m} = |+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|$ è il momento di monopolo del *detector*.

Per descrivere il processo è conveniente utilizzare la rappresentazione di Dirac (*picture*): in essa l'evoluzione temporale degli operatori è determinata dall'hamiltoniana \hat{H}_0 , indipendente dal tempo

$$\hat{m}(\tau) = e^{i\hat{H}_0\tau} \hat{m}(0) e^{-i\hat{H}_0\tau} \quad (5.3)$$

mentre gli stati seguono l'equazione di Schrödinger con hamiltoniana \hat{H}_{int} . Se il valore di c è molto piccolo, si può utilizzare la teoria perturbativa dipendente dal tempo per calcolare la probabilità della transizione. Ovviamente tale processo deve coinvolgere anche il campo: distinguo quindi i processi di eccitazione e diseccitazione del *detector* con emissione di un quanto

$$|\mp\rangle |0_M\rangle \rightarrow |\pm\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle \quad (5.4)$$

e quelli accompagnati da un assorbimento

$$|\mp\rangle |1_{\mathbf{k}}\rangle \rightarrow |\pm\rangle |0_M\rangle \quad (5.5)$$

Al primo ordine perturbativo la probabilità dei processi di eccitazione con emissione e diseccitazione con assorbimento sono uguali, come quella dei processi di eccitazione con assorbimento e diseccitazione con emissione, essendo in un certo senso inversi; per questo motivo nel seguito tratterò solo i processi di emissione (5.4), le cui relative ampiezze risultano¹

$$\mathcal{A}_{ecc,\mathbf{k}} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) \langle +|\hat{m}(\tau)|-\rangle \langle 1_{\mathbf{k}}|\hat{\phi}(x^\mu(\tau))|0_M\rangle \quad (5.6)$$

$$\mathcal{A}_{dis,\mathbf{k}} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau c(\tau) \langle -|\hat{m}(\tau)|+\rangle \langle 1_{\mathbf{k}}|\hat{\phi}(x^\mu(\tau))|0_M\rangle \quad (5.7)$$

¹Si noti che a quest'ordine le transizioni possono coinvolgere solo stati a una particella di Minkowski.

5.1.1 Calcolo delle ampiezze di transizione

Gli elementi di matrice di \hat{m} seguono facilmente da (5.3)

$$\langle \pm | \hat{m}(\tau) | \mp \rangle = e^{\pm iE\tau} \quad (5.8)$$

Dato che la differenza tra $\mathcal{A}_{ecc,\mathbf{k}}$ e $\mathcal{A}_{dis,\mathbf{k}}$ è solo nell'elemento considerato è comodo trattare simultaneamente i due casi, indicando le ampiezze dei processi di eccitazione e diseccitazione rispettivamente con $\mathcal{A}_{+,\mathbf{k}}$ e $\mathcal{A}_{-,\mathbf{k}}$.

L'elemento di matrice di $\hat{\phi}$ richiesto si può calcolare espandendo il campo in onde piane (2.28)

$$\langle 1_{\mathbf{k}} | \hat{\phi}(x^\mu(\tau)) | 0_M \rangle = \varphi_{\mathbf{k}}^*(x^\mu(\tau)) \quad (5.9)$$

e dipende dalla linea di mondo seguita dal *detector*.

Se l'intensità dell'accoppiamento varia molto lentamente nel tempo, il termine $c(\tau)$ può essere considerato costante – il risultato non dipende sensibilmente dalla forma esatta della funzione a patto che sia almeno continua [18]. Con la notazione introdotta le (5.6) e (5.7) si possono riscrivere in modo compatto

$$\mathcal{A}_{\pm,\mathbf{k}} = -ic \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{\pm iE\tau} \varphi_{\mathbf{k}}^*(x^\mu(\tau)) \quad (5.10)$$

Risulta quindi che le ampiezze sono proporzionali alle trasformate di Fourier della funzione $\varphi_{\mathbf{k}}^*(x^\mu(\tau))$, valutata alle frequenze $\mp E$, ossia alla separazione tra i livelli energetici del *detector*.

Una linea di mondo inerziale – apice (*in*) – è

$$(\gamma\tau, \mathbf{x}_0 + \gamma\mathbf{v}\tau)$$

da cui segue

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(in)*}(\tau) = \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\gamma\tau} \quad (5.11)$$

Le ampiezze dei processi con emissione sono

$$\mathcal{A}_{\pm,\mathbf{k}}^{(in)} = -ic \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}}{\sqrt{4\pi\omega_{\mathbf{k}}}} \delta(\pm E + \gamma(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})) \quad (5.12)$$

Considerando che $\omega_{\mathbf{k}} > \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$ e $\gamma \geq 1$, l'ampiezza $\mathcal{A}_{+,\mathbf{k}}^{(in)}$ è nulla, mentre la diseccitazione è possibile emettendo un quanto nel modo \mathbf{k} tale che $\gamma(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}) = E$. Entrambi i risultati sono dirette conseguenze del principio di conservazione dell'energia che, ad esempio, proibisce un'eccitazione (diseccitazione) del *detector* con simultanea emissione (assorbimento) di un

quanto nel campo.

La linea di mondo di un corpo con accelerazione uniforme parallela all'asse z - apice (ac) - è

$$\left(\frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau), \mathbf{x}_\perp, \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau) \right)$$

da cui segue

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{(ac)*}(\tau) = \frac{e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3} 2\omega_{\mathbf{k}}} \exp\left(\frac{i}{\alpha}(\omega_{\mathbf{k}} \sinh(\alpha\tau) - k_z \cosh(\alpha\tau))\right) \quad (5.13)$$

Le ampiezze risultano

$$\mathcal{A}_{\pm, \mathbf{k}}^{(ac)} = -ic \frac{2e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp}}{\sqrt{(2\pi)^3} 2\omega_{\mathbf{k}}} \frac{e^{\mp\pi E/2\alpha}}{\alpha} \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} + k_z}{\omega_{\mathbf{k}} - k_z} \right)^{\pm iE/2\alpha} K_{i\frac{E}{\alpha}}\left(\frac{\kappa}{\alpha}\right) \quad (5.14)$$

utilizzando la rappresentazione integrale di $2K_\nu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{-z \cosh(s) + \nu s}$. Al di là dell'espressione analitica, è interessante notare che il rapporto tra le probabilità di eccitazione e di diseccitazione con emissione di un quanto nel modo \mathbf{k} è

$$\frac{P_{+, \mathbf{k}}^{(ac)}}{P_{-, \mathbf{k}}^{(ac)}} = \left| \frac{\mathcal{A}_{+, \mathbf{k}}^{(ac)}}{\mathcal{A}_{-, \mathbf{k}}^{(ac)}} \right|^2 = e^{\mp 2\pi E/\alpha} \quad (5.15)$$

pari al fattore di Boltzmann per un bagno alla temperatura di Unruh.

5.1.2 Calcolo dei *rate* di transizione

Conoscere la probabilità di eccitazione con emissione di quanti in un solo modo non è del tutto soddisfacente: quello che più ha rilevanza fisica è la probabilità di transizione per qualsiasi valore di \mathbf{k} . Ricavo quindi una formula generale per calcolarla, partendo dalla (5.10)

$$P_\pm = \int d^3k |\mathcal{A}_{\pm, \mathbf{k}}|^2 = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 e^{\pm iE(\tau_2 - \tau_1)} W[\phi(\tau_1), \phi(\tau_2)] \quad (5.16)$$

dove

$$W[\phi(x), \phi(x')] = \langle 0_M | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | 0_M \rangle \quad (5.17)$$

è la funzione a due punti di Wightman, o funzione di autocorrelazione. La probabilità è data dal prodotto di due termini: c^2 , che determina l'accoppiamento del *detector* al campo, e il doppio integrale sui tempi, chiamato funzione di risposta, indipendente dalle caratteristiche del *detector* e quindi universale.

Per quanto riguarda la trattazione seguente considero il caso in cui il campo sia senza massa: per i campi massivi varrebbero le stesse considerazioni, ma sarebbe più difficile estrarre informazioni dalle funzioni di Wightman.

Per un campo scalare reale non massivo la funzione di Wightman, calcolabile in coordinate sferiche, vale notoriamente

$$W[\phi(x), \phi(x')] = \int d^3k \varphi_{\mathbf{k}}(x) \varphi_{\mathbf{k}}^*(x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t-t'-i\epsilon)^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \quad (5.18)$$

L'aggiunta della parte immaginaria $i\epsilon$, necessaria a far convergere l'integrale, sposta il polo della funzione nel semipiano superiore $\Im(t-t') > 0$.

Nel caso in cui il *detector* segua una traiettoria stazionaria, ossia la curva integrale di un campo vettoriale di Killing di tipo tempo, la funzione $W[\phi(\tau_1), \phi(\tau_2)]$ dipende solo dalla combinazione $\tau_1 - \tau_2$ e la probabilità totale diverge. Ciò è intuitivo: in condizioni di stazionarietà il *detector* si trova in equilibrio dinamico con il campo e la probabilità di (dis)eccitazione in un dato intervallo di tempo è costante; integrando una costante non nulla su un intervallo infinito si ottiene un ovvio risultato.

In questi casi ha senso introdurre il *rate* di (dis)eccitazione, ovvero la probabilità del processo relativo per unità di tempo

$$R_{\pm} = \frac{dP_{\pm}}{d\tau} = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{\mp iEs} W(s) \quad (5.19)$$

avendo indicato con s l'intervallo $\tau_1 - \tau_2$. A meno di costanti, il *rate* di (dis)eccitazione coincide con la trasformata di Fourier della funzione di Wightman alle frequenze $\pm E$ – la somiglianza con (5.10) non è casuale [15].

Le traiettorie considerate nella sezione 5.1.1 sono entrambe stazionarie: vale la pena calcolare il *rate* di eccitazione attraverso la (5.19) – lo stesso risultato si otterrebbe partendo dalle ampiezze (5.12) e (5.14) nel limite $m \rightarrow 0$.

Per un *detector* in moto uniforme si ha

$$W^{(in)}(s) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(s-i\epsilon)^2} \quad (5.20)$$

ovvero una funzione analitica nel semipiano inferiore $\Im(s) < 0$ e con un polo di ordine due in $s = i\epsilon$. Con il teorema dei residui si vede immediatamente che la trasformata di Fourier di una funzione con queste proprietà è nulla per frequenze positive: dunque il *rate* di eccitazione è pari a 0, in linea con il principio di conservazione dell'energia, mentre il *rate* di diseccitazione è

$$R_-^{(in)} = \frac{c^2 E}{2\pi} \quad (5.21)$$

Per un *detector* in moto uniformemente accelerato si ha invece

$$W^{(ac)}(s) = -\frac{\alpha^2}{16\pi^2} \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\alpha s}{2} - i\epsilon\right)} \quad (5.22)$$

A differenza di $W^{(in)}$ questa funzione ha un insieme numerabile s_n di poli doppi nel piano complesso di s equamente spazati

$$s_n = \frac{2\pi i n}{\alpha} + i\epsilon \quad (5.23)$$

che derivano dalla periodicità della funzione $\sinh(z)$ lungo l'asse immaginario. La trasformata di Fourier ha un valore diverso da zero a frequenze sia positive sia negative. Si ha perciò

$$R_{\pm}^{(ac)} = \pm \frac{c^2 E}{2\pi} \frac{1}{e^{\pm 2\pi E/\alpha} - 1} \quad (5.24)$$

dato che il polo s_0 dà contributo solo in R_- .

Il *rate* di eccitazione per un *detector* uniformemente accelerato nel vuoto di Minkowski è uguale a quello che si avrebbe se il *detector* fosse fermo, immerso in un bagno di particelle di Rindler alla temperatura $\alpha/2\pi$. Non sorprende a questo punto che il rapporto tra i *rate* sia il fattore di Boltzmann (relazione nota come *principle of detailed balance*).

5.2 Conservazione dell'energia

La questione dell'interpretazione dell'effetto Unruh sembra rimasta parzialmente insoluta. Come si concilia il fatto che il *detector* possa eccitarsi nel vuoto, emettendo oltretutto un quanto nel campo ϕ , con il principio di conservazione dell'energia?

Per arrivare alla spiegazione è opportuno descrivere ciò che accade secondo il punto di vista dell'osservatore di Rindler.

Nella derivazione della (5.10) ho utilizzato l'espansione del campo in onde piane, tuttavia la base naturale per un osservatore di Rindler è quella dei modi $v_{\lambda, \mathbf{k}_{\perp}}^R$. Utilizzando la (4.8) si possono riscrivere le ampiezze dei processi (5.10) come somma dei contributi derivanti dalla creazione o dalla distruzione di una particella di Rindler nel vuoto di Minkowski, il quale non ne è affatto privo secondo la (4.25).

Utilizzando le coordinate di Rindler (3.17), la linea di mondo del detector si

scrive $(\eta(\tau), \mathbf{x}_\perp, \xi)$ con \mathbf{x}_\perp e ξ costanti e η legato a τ da (3.20): l'integrazione sul tempo dà

$$\mathcal{A}_{\pm, \mathbf{k}} = -\frac{ic e^{a\xi}}{\sqrt{2}} \int d^2 \mathbf{k}_\perp \int_0^{+\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} g_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}(\xi) (\langle 1_{\mathbf{k}} | \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^R | 0_M \rangle e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \delta(\pm E e^{a\xi} - \lambda) + \langle 1_{\mathbf{k}} | \hat{a}_{\lambda, \mathbf{k}_\perp}^{R\dagger} | 0_M \rangle e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \delta(\pm E e^{a\xi} + \lambda))$$

dove la comparsa delle funzioni $\delta(x)$ è dovuta al fatto che un *detector* uniformemente accelerato è in quiete rispetto a un osservatore di Rindler che si muove con la stessa accelerazione propria (3.19), in analogia a quanto si ha in (5.12).

Al di là del risultato numerico – che deve essere uguale a (5.14) dato che l'ampiezza di probabilità è uno scalare – si vede facilmente che il processo di eccitazione è dovuto all'assorbimento (distruzione) da parte del *detector* di una particella di Rindler dal modo $(E e^{a\xi}, \mathbf{k}_\perp)$, mentre la diseccitazione avviene per emissione di un quanto nello stesso modo. Si ricordi ora che la frequenza effettivamente misurata è legata a λ da $\lambda_0 = \lambda e^{-a\xi}$, da cui segue che l'energia del campo cambia nel processo di (dis)eccitazione di una quantità pari a $\mp E$: il principio di conservazione dell'energia non è violato secondo l'osservatore di Rindler.

Quanto detto dimostra che il *detector*, seppur si trovi in uno spaziotempo altamente simmetrico, dotato di un tempo universale t , non utilizza questo per definire le frequenze, ma il suo tempo proprio [4].

Per quanto riguarda l'osservatore inerziale la situazione è descritta in maniera diversa – coerentemente con il principio di relatività. Una rapida osservazione esclude infatti la possibilità che il *detector* assorba l'energia dal campo: l'osservatore inerziale ne misura il contenuto energetico per mezzo del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, il quale si trasforma linearmente nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro, dunque l'annullarsi di $\langle 0_M | T_{\mu\nu} | 0_M \rangle$ nel suo sistema implica $\langle 0_M | T'_{\mu\nu} | 0_M \rangle = 0$ in qualsiasi altro.

La sorgente di energia che eccita il *detector* è identificata con la forza accelerante. Essendo accoppiato al campo, il moto non uniforme del *detector* causa l'emissione di quanti, il cui effetto netto è quello di una forza frenante. Per mantenersi sulla giusta linea di mondo è necessario che il meccanismo di accelerazione del *detector* fornisca un'energia pari a quella dissipata [12].

Ovviamente le transizioni del *detector* non sono dovute alla forza esterna perché, qualora fosse $c = 0$, le ampiezze (5.10) sarebbero nulle e i processi relativi impossibili, nonostante l'energia fornita.

Bibliografía

- [1] N. B. Narozhny, A. M. Fedotov, B. M. Karnakov, V. D. Mur, and V. A. Belinskii. “Boundary conditions in the Unruh problem”. *Phys. Rev., D* **65**:025004, Jan 2002.
- [2] I. Peña and D. Sudarsky. “On the possibility of measuring the Unruh effect”. *Found. Phys.*, **44**, Jun 2014.
- [3] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, and G. E. A. Matsas. “The Unruh effect and its applications”. *Rev. Mod. Phys.*, **80**:787–838, Jul 2008.
- [4] W. G. Unruh. “Notes on black hole evaporation”. *Phys. Rev., D* **14**: 870–892, Aug 1976.
- [5] S. A. Fulling. “Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time”. *Phys. Rev., D* **7**:2850–2862, May 1973.
- [6] S. W. Hawking. “Particle creation by black holes”. *Commun. in Math. Phys.*, **43**:199–220, Aug 1975.
- [7] P. C. W. Davies. “Scalar production in Schwarzschild and Rindler metrics”. *J. Phys., A* **8**:609–616, 1975.
- [8] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Pearson, 2004.
- [9] T. Jacobson. “Introduction to quantum fields in curved spacetime and the Hawking effect”. In *Lectures on quantum gravity. Proceedings, School of quantum gravity, Valdivia, Chile, January 4-14, 2002*, pages 38–39, Aug 2003.
- [10] E. Frodden and N. Valdés. “Unruh Effect: Introductory notes to quantum effects for accelerated observers”. *Int. J. Mod. Phys., A* **33**, Jun 2018.

- [11] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [12] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. “*Quantum fields in curved space*”. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1982.
- [13] G. Luciano. “*Mixing of quantum fields in Rindler spacetime*”. Tesi di laurea magistrale, Università degli Studi di Catania, Jan 2015.
- [14] M. Socolovsky. “Rindler space and Unruh effect”. Apr 2013.
- [15] D. Campo and N. Obadia. “Why does the Unruh effect rely on Lorentz invariance, while Hawking radiation does not?”. Feb 2010.
- [16] R. M. Wald. *Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995.
- [17] D. Kothawala and T. Padmanabhan. “Response of Unruh–DeWitt detector with time-dependent acceleration”. *Phys. Lett.*, B **690**:201 – 206, Jun 2010.
- [18] A. Higuchi, G. E. A. Matsas, and C. B. Peres. “Uniformly accelerated finite-time detectors”. *Phys. Rev.*, D **48**:3731–3734, Oct 1993.