

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# La condensazione di Bose-Einstein come transizione di fase

**Relatore:**  
Prof. Loris Ferrari

**Presentata da:**  
Jonathan Frassinetti

Anno Accademico 2017/2018

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Gas di Bose ideale: proprietà termodinamiche</b>	<b>4</b>
1.1 Condensato di bosoni non interagenti . . . . .	4
1.2 Gas di Bose confinato in un volume $V$ . . . . .	7
1.3 Gas di Bose confinato in un potenziale armonico . . . . .	11
<b>2 Transizioni di fase</b>	<b>16</b>
2.1 Matrice densità e funzioni di correlazione . . . . .	16
2.2 Parametro d'ordine . . . . .	20
2.3 Lunghezza di correlazione ed esponenti critici . . . . .	23
<b>3 BEC come transizione di fase</b>	<b>27</b>
3.1 Funzioni di correlazione per un gas di Bose ideale . . . . .	28
3.1.1 Funzioni di correlazione di primo e secondo ordine sopra $T_C$ . . . . .	28
3.1.2 Funzioni di correlazione di primo e secondo ordine sotto $T_C$ . . . . .	31
3.2 Lunghezza di correlazione per un gas di Bose ideale . . . . .	32
<b>Conclusioni</b>	<b>36</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>38</b>

# Introduzione

All'inizio del 1900, lo studio della natura quantistica della radiazione elettromagnetica si sviluppò notevolmente; Max Planck per primo determinò che la radiazione di corpo nero è comprensibile solamente ammettendo che la materia emette energia sotto forma di radiazione in quanti discreti. Tutto questo portò Albert Einstein nel 1905 a concludere che è la radiazione stessa ad essere quantizzata, in quanti di luce chiamati successivamente fotoni.

Nel 1924, il fisico S.N. Bose della Dacca University in India scrisse un articolo a Einstein in cui la legge di distribuzione di Planck per i fotoni era stata ottenuta sfruttando esclusivamente argomentazioni statistiche, senza ricorrere ad alcun risultato dell'elettrodinamica classica. Einstein comprese l'importanza di tale risultato, ed elaborò egli stesso in breve tempo la teoria quantistica delle particelle bosoniche: nacque così il concetto di particelle obbedienti alla statistica di Bose-Einstein, che oggi sappiamo esser caratteristica delle entità fisiche con spin intero.

Einstein osservò che, ammettendo la conservazione del numero di particelle, anche un sistema non interagente di particelle (un gas ideale) esibisce una brusca transizione di fase a temperature sufficientemente basse: tale transizione è definita come condensazione di Bose-Einstein, ed è caratterizzata da un'occupazione estensiva e macroscopica dello stato energetico più basso, ossia lo stato fondamentale, per un sistema costituito da molte particelle. Per lungo tempo, questo è stato l'unico sistema fisico conosciuto ad esibire questo particolare fenomeno; dopo l'osservazione del comportamento superfluido dell'elio  $^4\text{He}$ , London propose nel 1938 che tale fenomeno potesse essere la manifestazione della condensazione di Bose-Einstein degli atomi di elio. Fu così che soprattutto negli anni '50 e '60 lo studio teorico di sistemi di bosoni portò a nuove conoscenze sia sul condensato di Bose-Einstein, sia su fenomeni ad essi collegati, come superfluidità e superconduttività.

Nel Capitolo 1, si descriverà il condensato di Bose-Einstein per particelle non interagenti e se ne descriveranno le principali proprietà e i fenomeni termodinamici che lo caratterizzano; si discuteranno in particolare le configurazioni di un gas di Bose confinato in un volume  $V$  e di un gas di Bose confinato in un potenziale armonico.

Nel Capitolo 2, si descriveranno le caratteristiche principali delle transizioni di fase in senso moderno, coinvolgendo solo aspetti puramente statistici e di natura quantistica: si cercherà di spiegare a fondo alcuni aspetti come il parametro d'ordine, le funzioni di

correlazione e la lunghezza di correlazione per un sistema di particelle non interagenti, mettendo in luce come queste quantità mostrino degli aspetti interessanti quando il sistema subisce una transizione da una fase ad un'altra.

Nel Capitolo 3, si descriverà il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein attraverso gli argomenti descritti nel capitolo 2, cercando di mostrare come nel punto critico della condensazione avvenga una vera e propria transizione di fase puramente quantistica; mostreremo il comportamento delle funzioni di correlazione per un gas ideale di Bose e la divergenza della lunghezza di correlazione all'avvicinarsi del punto critico, calcolando esplicitamente l'esponente critico associato a tale osservabile fisico.

# Capitolo 1

## Gas di Bose ideale: proprietà termodinamiche

In questo primo capitolo partiamo dal concetto di bosoni non interagenti (che obbediscono alla statistica di Bose-Einstein) che verranno trattati nel Limite Termodinamico, ossia per un numero di particelle  $N$  molto grande; si mostreranno le principali caratteristiche del condensato, come la frazione di particelle nello stato fondamentale e la temperatura di transizione. Verranno inoltre messi a confronto i condensati di due sistemi bosonici ideali, uno confinato in un volume  $V$  e uno confinato tramite l'utilizzo di un potenziale armonico isotropo, e se ne discuteranno le principali caratteristiche termodinamiche.

### 1.1 Condensato di bosoni non interagenti

In questa sezione prenderemo largamente spunto dagli appunti scritti nella referenza [10]. Consideriamo un gas di bosoni nel Limite Termodinamico<sup>1</sup> ( $LT$ ), nel quale trascuriamo d'ora in poi i gradi di libertà legati allo spin. Supponiamo inoltre di essere nel limite di bosoni fortemente degeneri, ossia dove esiste la probabilità di occupazione multipla di uno stesso stato quantico.

Siano  $\varepsilon_0 = 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_\alpha < \dots$  i livelli energetici dello stato  $\alpha$  di ogni singolo bosone, con  $g_\alpha$  le molteplicità di stati corrispondenti; avremo quindi l'espressione delle popolazioni:

$$n_\alpha = \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\varepsilon_\alpha - \mu)} - 1} \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup> $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty, \frac{N}{V} = \text{cost.}$ ; inoltre, per i gas il Limite Termodinamico discende dal Limite Continuo.

a cui segue l'equazione per il numero totale  $N$  di bosoni:

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}}{e^{\beta(\varepsilon_{\alpha}-\mu)} - 1} \quad (1.2)$$

dove  $\mu$  è il potenziale chimico e  $\beta$  è definito come  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , con  $k_B$  costante di Boltzmann. L'equazione per  $\mu$  può essere scritta facilmente dalla (1.2) come:

$$N = n_0(T) \left[ 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{g_{\alpha}}{g_0} e^{-\beta\varepsilon_{\alpha}} \frac{1 - e^{\beta\mu}}{1 - e^{\beta(\mu-\varepsilon_{\alpha})}} \right] \quad (1.3)$$

dove si è esplicitata la dipendenza dalla temperatura  $T$  delle particelle nello stato fondamentale. Dall'equazione (1.1) vediamo subito come  $\mu \leq 0$  (altrimenti otterremmo  $n_0 < 0$ , il che è impossibile); inoltre, l'equazione (1.3) implica che per  $T = 0$ , ossia per lo stato di minima energia del gas, tutti i bosoni vanno a finire nel condensato, ossia  $n_0 = N$ . Riscriviamo tutto questo in forma equivalente utilizzando le frazioni di bosoni; sia:

$$\rho(T, \Delta) = \sum_{\varepsilon_{\alpha} < \Delta} \underbrace{\frac{n_{\alpha}}{N}}_{\rho_{\alpha}} \quad (1.4)$$

la frazione di bosoni avente energia minore di una quantità  $\Delta > 0$ . Seguendo ciò, in base all'equazione precedente si ha  $\lim_{T \rightarrow 0} \rho(T, \Delta) = 1$ , valido per ogni  $\Delta$ ; eseguire il Limite Continuo<sup>2</sup> ( $LC$ ) a questo punto non cambia, ovviamente, il risultato.

Supponiamo ora che il  $LC$  sia fatto prima di porre il sistema nel limite  $T \rightarrow 0$ , e che otteniamo una densità degli stati:

$$g(\varepsilon) = N g'(\varepsilon) \quad (1.5)$$

dove  $g'(\varepsilon)$  è una<sup>3</sup> funzione invariante nel  $LT$ . Utilizzando questa nuova densità degli stati, il passaggio al Limite Continuo delle equazioni (1.2) e (1.4) diventa quindi:

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{g'(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (1.6)$$

$$\rho(T, \Delta) = \int_0^{\Delta} \frac{g'(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \leq^4 \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^{\Delta} \frac{g'(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \leq k_B T \lim_{\xi \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\xi}^{\Delta} \frac{g'(\varepsilon) d\varepsilon}{\varepsilon}}_{f(\Delta, \xi)} \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>Approssimazione applicabile nel limite in cui  $V \rightarrow \infty$ : i livelli energetici tendono ad infittirsi e possiamo considerare le somme sui livelli energetici come integrali.

<sup>3</sup>In realtà, la densità degli stati  $g'(\varepsilon)$  dipende dal volume  $V$  (nel caso di un sistema a 3 dimensioni), ma poiché siamo nel Limite Continuo (che implica il Limite Termodinamico) la relazione è equivalente.

<sup>4</sup>La prima disuguaglianza segue dal fatto che  $\mu$  è non positivo, mentre la seconda segue dalla relazione  $e^x - 1 \geq x$  se  $x \geq 0$ .

Se  $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\Delta, \xi)$  è infinito, le disuguaglianze precedenti sono sempre soddisfatte; se, invece, la funzione integrale  $f(\Delta, 0)$  è finita, ossia:

$$f(\Delta, 0) = \int_0^\Delta \frac{g'(\varepsilon)d\varepsilon}{\varepsilon} < \infty \quad (1.8)$$

allora l'equazione (1.7) porta a  $\lim_{T \rightarrow 0} \rho(T, \Delta) = 0$  per ogni valore di  $\Delta$ , facendo sparire tutti i bosoni con energia minore di qualunque valore positivo quando ci troviamo a  $T = 0$ . Questo risultato (apparentemente assurdo) ci mostra che, se  $f(\Delta, 0) < \infty$ , il  $LC$  e  $T \rightarrow 0$  sono interscambiabili se e solo se l'equazione (1.7) rappresenta il numero di bosoni con energia strettamente positiva, cioè escludendo quelli che si trovano nello stato fondamentale.

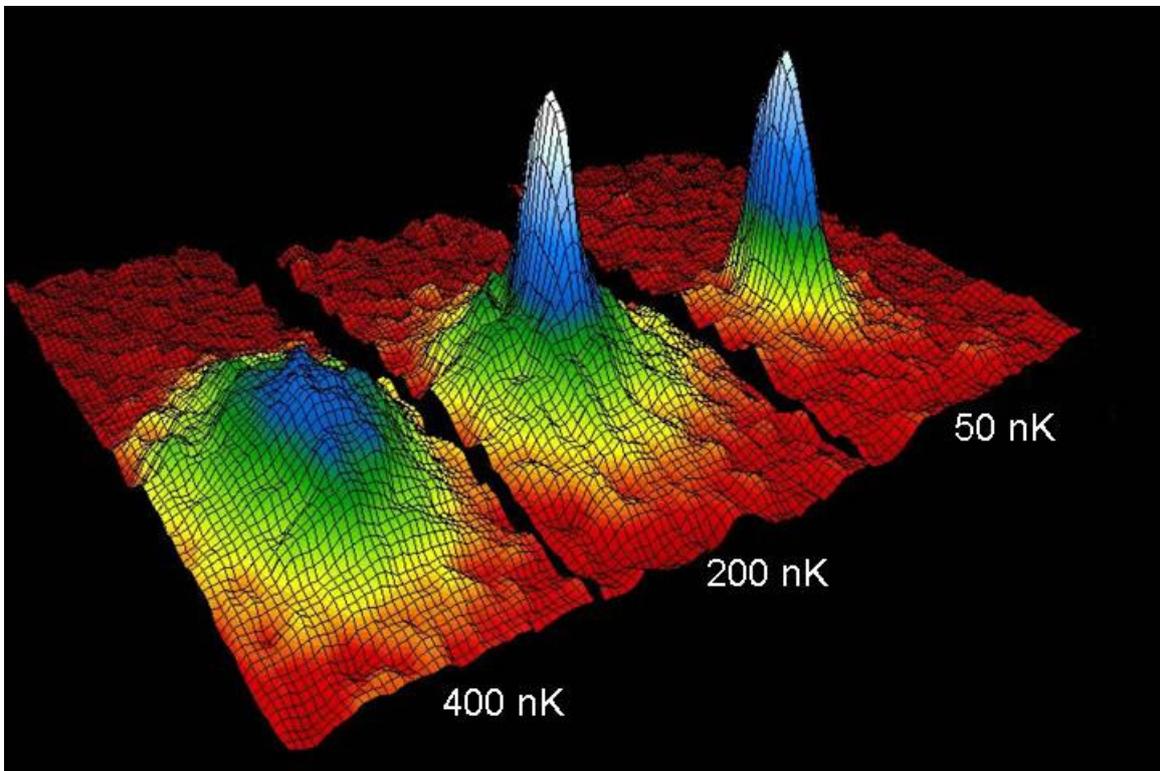


Fig.1.1: Distribuzione spaziale di 3 nubi (partendo da sinistra) costituite da: particelle termiche, particelle termiche + particelle di condensato, particelle di condensato, per 3 diverse temperature (tratto da [3]).

Il  $LC$  cancella, quindi, un'informazione importante, ossia l'esistenza di un livello fondamentale che può ricevere un numero estensivo di bosoni, nonostante la sua molteplicità  $g_0$  sia una quantità finita. Come ulteriore conseguenza abbiamo anche che la funzione:

$$F(\beta) = \int_0^\infty \frac{g'(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \quad (1.9)$$

assume valori finiti per ogni  $\beta$  reale e positivo. Inoltre,  $F(\beta)$  è non crescente e  $\lim_{\beta \rightarrow 0} F(\beta) = \infty$  e  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} F(\beta) = 0$ , dunque esiste sempre uno ed uno solo  $\beta_C = 1/(k_B T_C)$  tale per cui:

$$1 = \int_0^\infty \frac{g'(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{(\varepsilon/k_B T_C)} - 1} \quad (1.10)$$

Ricordando la (1.6), la (1.10) implica che  $\mu(T_C) = 0$ ; tuttavia si ha che  $\partial\mu/\partial T \leq 0$ , quindi  $\mu$  è una funzione non crescente di  $T$ : essendo  $\mu$  anche non positivo, abbiamo inoltre che  $\mu(T) = 0$  per ogni  $T < T_C$ .

Per concludere, si ha una transizione brusca da  $\mu < 0$  per  $T > T_C$  a  $\mu = 0$  per  $T < T_C$ , nella quale il potenziale chimico  $\mu$  si annulla alla temperatura  $T_C$  in modo continuo, ma  $d^m \mu/dT^m$  contiene una discontinuità per qualche ordine  $m$ : questo processo critico è denominato condensazione di Bose-Einstein (in inglese BEC), e la (1.8) è condizione necessaria e sufficiente affinché essa avvenga.

## 1.2 Gas di Bose confinato in un volume $V$

Nella presente sezione ci rifaremo ad alcune parti scritte nelle referenze [16] e [1]. Applichiamo il formalismo descritto nella sezione 1.1 per descrivere il problema di un gas di Bose ideale confinato in un volume  $V^5$ . In questo caso l'hamiltoniana di ogni singolo bosone ha la forma:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (1.11)$$

dove  $p$  è la quantità di moto di ogni singola particella e  $m$  la sua massa; le autofunzioni di questa hamiltoniana sono le seguenti onde piane:

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \quad (1.12)$$

con energia  $\varepsilon = p^2/2m$ .

La densità degli stati ha la seguente forma:

$$g(\varepsilon) = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\hbar^3\pi^2} \varepsilon^{1/2} \quad (1.13)$$

e si usa per calcolare il numero di bosoni fuori dal condensato.

Per ricavarci la temperatura critica  $T_C$  della BEC dobbiamo utilizzare la formula (1.2) e sostituire le sommatorie con gli integrali ( $LC$ ), sapendo che questa temperatura si ottiene quando tutte le particelle negli stati eccitati di energia (escludendo lo stato

---

<sup>5</sup>Nel caso di un sistema a 3 dimensioni; per sistemi a 2 e 1 dimensione abbiamo, rispettivamente, un'area  $A$  e una lunghezza  $L$ .

fondamentale) eguagliano il numero totale di particelle  $N$  per  $\mu = \varepsilon_0 = 0$ ; in definitiva otteniamo la popolazione critica  $N_C$ :

$$N = N_C = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta_C\varepsilon} - 1} = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\hbar^3\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta_C\varepsilon} - 1} \quad (1.14)$$

Possiamo calcolare questo integrale utilizzando la relazione  $\frac{1}{e^x-1} = \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}$ , con  $x = \beta_C\varepsilon$  (dove  $\beta_C = 1/k_B T_C$  è associato alla temperatura critica):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta_C\varepsilon} - 1} &= \beta_C^{-3/2} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nx} x^{1/2} dx \\ &= \beta_C^{-3/2} \sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{t} dt \\ &= \beta_C^{-3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove  $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \sum_{n=1}^\infty n^{-3/2}$  è la funzione zeta di Riemann e  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{t} dt$ . Sostituendo la (1.15) nella (1.14) riusciamo ad ottenere la densità di bosoni critica per la BEC:

$$n_C = \frac{N_C}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \left(\frac{m}{\beta_C \hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612 \frac{1}{\lambda_{T_C}^3} \quad (1.16)$$

Qui abbiamo  $\lambda_{T_C} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T_C}}$ , che rappresenta la lunghezza d'onda termica di De Broglie alla temperatura critica  $T_C$ .

Quando la temperatura  $T$  è più bassa di  $T_C$  (o equivalentemente la densità è maggiore di  $n_C$ ) si forma la mistura tra la popolazione del condensato con  $\varepsilon_0 = 0$  e la popolazione degli stati eccitati con  $\varepsilon > 0$ :

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2.612}{\lambda_T^3} + n_0 \quad (1.17)$$

La condizione critica per la BEC è spesso espressa in termini della funzione di Bose  $g_p(z)$  definita come:

$$g_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty dx x^{p-1} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^p} \quad (1.18)$$

dove  $z = e^{\beta\mu}$  è la fugacità e  $\Gamma(p) = (p-1)!$  (vedi l'equazione (1.15)); inoltre, la funzione di Bose è collegata alla funzione zeta di Riemann tramite la relazione  $g_p(1) = \zeta(p)$  e soddisfa le relazioni di ricorrenza:

$$g_p(z) = z \frac{dg_{p+1}(z)}{dz} \quad (1.19)$$

che torneranno utili nel calcolo del calore specifico.

Nel nostro caso, poiché nel punto critico abbiamo  $\mu = 0$  e inoltre ci troviamo in un sistema 3D,  $z = 1$  e  $p = \frac{3}{2}$ . Alla temperatura critica  $T_C$  tutti i bosoni si trovano negli stati eccitati con  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{V}{\lambda_{T_C}^3} g_{\frac{3}{2}}(1) = N \quad (1.20)$$

mentre a temperature minori di  $T_C$  la popolazione eccitata  $N_T$  è minore:

$$\frac{V}{\lambda_T^3} g_{\frac{3}{2}}(1) = N_T < N \quad (1.21)$$

Facendo il rapporto tra (1.19) e la (1.20) otteniamo:

$$\frac{\lambda_T^3}{\lambda_{T_C}^3} = \frac{N}{N_T} \quad (1.22)$$

Da questa relazione, la frazione di particelle nel condensato è espressa come:

$$\frac{N_0}{N} = \frac{N - N_T}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \quad (1.23)$$

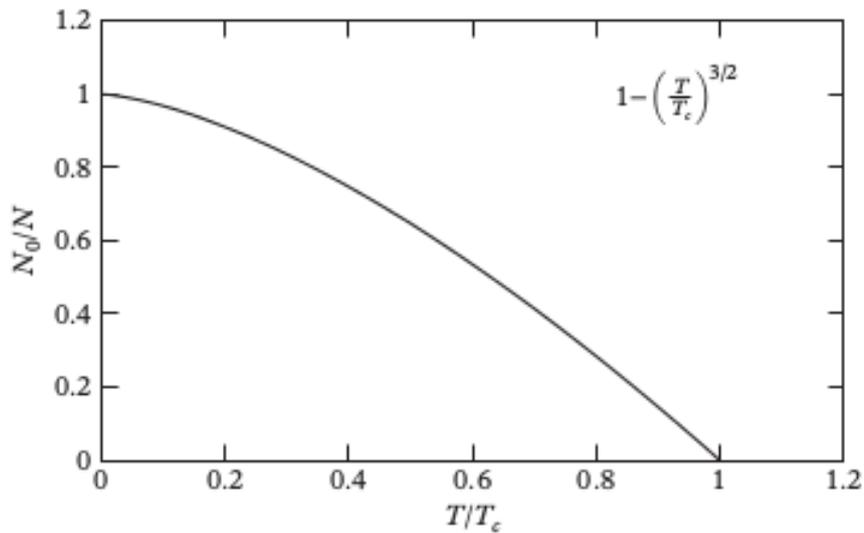


Fig.1.2: Frazione di condensato  $N_0/N$  in rapporto alla temperatura per un gas ideale di Bose uniforme. La frazione di condensato è diversa da zero sotto la temperatura critica  $T_C$  quando il sistema mostra la condensazione di Bose-Einstein.

La temperatura critica  $T_C$  si può facilmente ricavare dalla (1.20), ponendo  $n = N/V$  come densità del sistema e ottenendo:

$$T_C = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left( \frac{n}{g_{3/2}(1)} \right)^{2/3} \quad (1.24)$$

Comunque, non bisogna confondere il criterio<sup>6</sup> microscopico:

$$k_B T \ll (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \simeq \frac{\hbar^2}{mV^{2/3}} \quad (1.25)$$

con la condizione  $N_T \ll N$  (che richiede la condizione più stringente  $T \ll T_C$ ); in questo caso  $\varepsilon_1$  è l'energia del primo stato eccitato di energia.

Una questione irrisolta riguarda l'esatto valore di  $\mu$ , che è stato messo uguale a  $\varepsilon_0$  nel calcolo del risultato (1.14); il vero valore di  $\mu$  può essere valutato dalla relazione:

$$\varepsilon_0 - \mu = k_B T \ln \left( 1 + \frac{1}{N_0} \right) \simeq \frac{k_B T}{N_0} \quad (1.26)$$

che si ricava dall'equazione per il calcolo della popolazione dello stato fondamentale  $N_0$ , prendendo la (1.1) e ponendo  $\alpha = 0$  e  $g_0 = 1$ :

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} \quad (1.27)$$

Si vede come  $\mu \rightarrow \varepsilon_0$  solo nel  $LT$ <sup>7</sup>, dove  $N_0 \rightarrow \infty$ ; rimpiazzare  $\mu$  con  $\varepsilon_0$  nel calcolo della popolazione eccitata  $N_T$  è quindi giustificato solo se la condizione  $N_0 \gg k_B T V^{2/3} 2m/\hbar^2$  è soddisfatta; come ulteriore prova, nella referenza [9] vi è il calcolo di  $\mu$  in rapporto alla temperatura  $T$ .

Ora possiamo calcolarci le principali funzioni termodinamiche, in questo caso ci soffermeremo sul calcolo dell'energia  $E$  e del calore specifico  $C_V$ ; l'energia è data dalla formula:

$$E = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \quad (1.28)$$

che diventa, per  $T < T_C$ :

$$E = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) \quad (1.29)$$

mentre per  $T > T_C$  abbiamo:

$$E = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) \quad (1.30)$$

---

<sup>6</sup>Questo criterio è la condizione necessaria affinché si possa applicare il Limite Continuo.

<sup>7</sup>Come accennato prima, il Limite Termodinamico discende, per i gas, dal Limite Continuo, nel quale le somme sugli stati discreti vengono sostituite da integrali; inoltre,  $N_0 \rightarrow \infty$  se ovviamente  $N \rightarrow \infty$ .

dove  $g_{5/2}(z)$  corrisponde alla funzione di Bose (1.18) con  $p = 5/2$ .

Per quanto riguarda il calore specifico  $C_V = \partial E / \partial T$  utilizziamo la relazione (1.19) e le formule (1.29) e (1.30) trovando, per  $T < T_C$ :

$$\frac{C_V}{k_B N} = \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) \quad (1.31)$$

mentre, per  $T > T_C$ :

$$\frac{C_V}{k_B N} = \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda_T^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad (1.32)$$

Il calore specifico mostra una tipica cuspidè per  $T = T_C$  ma rimane una funzione continua durante la transizione di fase; questo perché la funzione di Bose  $g_{1/2}(z)$  diverge per  $z \rightarrow 1$ , ossia quando ci avviciniamo a  $T_C$ , rendendo il secondo membro dell'equazione nullo e le relazioni (1.31) e (1.32) perfettamente uguali.

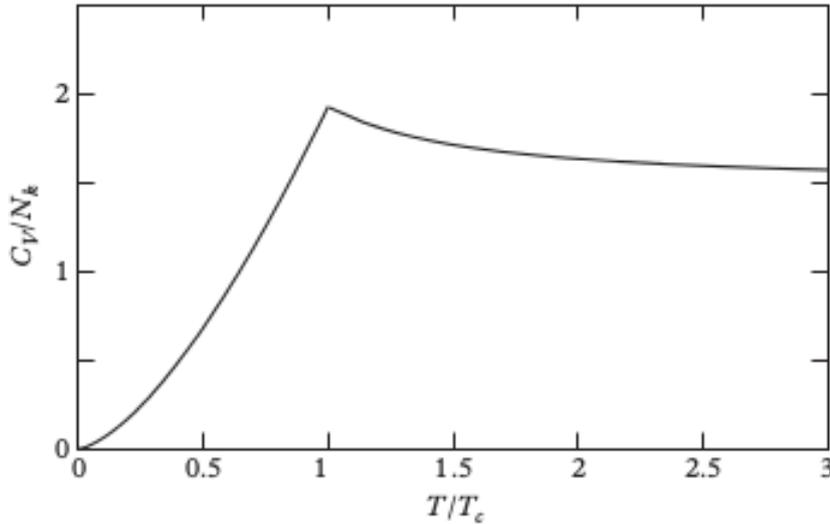


Fig.1.3: Calore specifico per un gas ideale di Bose uniforme in rapporto alla temperatura. Per temperature alte la curva tende al valore classico  $3/2$ ; la curva mostra una cuspidè per  $T = T_C$ .

### 1.3 Gas di Bose confinato in un potenziale armonico

Prendendo spunto da quanto scritto nelle referenze [16], [7] e [4], ora tratteremo il caso di un gas ideale di Bose confinato tramite l'utilizzo di un potenziale armonico esterno<sup>8</sup>,

<sup>8</sup>Il potenziale armonico esterno viene preso isotropo ed omogeneo.

della forma:

$$V_{ext}(r) = \frac{1}{2}m\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2 \quad (1.33)$$

dove  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  sono le frequenze dell'oscillatore nelle tre direzioni spaziali.

L'hamiltoniana in questo problema è data da:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{ext}(r) \quad (1.34)$$

i cui autovalori di energia sono:

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_z \quad (1.35)$$

dove  $n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots$  sono i numeri quantici che caratterizzano le soluzioni della corrispondente equazione di Schroedinger. Le autofunzioni di questa hamiltoniana sono date da:

$$\varphi_0(r) = \left(\frac{m\omega_{ho}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right] \quad (1.36)$$

dove si è introdotta la media geometrica:

$$\omega_{ho} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \quad (1.37)$$

delle frequenze dell'oscillatore. La dimensione del condensato è indipendente da  $N$  (poiché la distribuzione di densità del sistema a  $N$ -corpi diventa  $n(r) = N|\varphi_0(r)|^2$  e cresce all'aumentare di  $N$ ) ed è fissata dalla lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico:

$$a_{ho} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{ho}}\right)^{1/2} \quad (1.38)$$

che corrisponde alla media geometrica delle ampiezze della Gaussiana (1.36) nelle tre direzioni spaziali.

La densità degli stati ha la seguente forma:

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2(\hbar\omega_{ho})^3} \varepsilon^2 \quad (1.39)$$

e possiamo usarla per calcolare la popolazione critica del condensato  $N_C$ , utilizzando la (1.2) e applicando lo stesso procedimento fatto per il gas confinato in un volume  $V^9$ :

$$N = N_C = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta_C\varepsilon} - 1} = \frac{1}{2(\hbar\omega_{ho})^3} \int_0^\infty \varepsilon^2 \frac{d\varepsilon}{e^{\beta_C\varepsilon} - 1} \quad (1.40)$$

---

<sup>9</sup>In questo passaggio, poniamo  $\mu = \varepsilon_0 = 0$  grazie al fatto di essere nel  $LT$  del sistema, alla temperatura critica  $T_C$ .

Possiamo calcolare questo integrale utilizzando la relazione  $\frac{1}{e^x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ , con  $x = \beta_C \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon^2 \frac{d\varepsilon}{e^{\beta_C \varepsilon} - 1} &= \beta_C^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^2 dx \\ &= \beta_C^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3} \int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt \\ &= \beta_C^{-3} \zeta(3) \Gamma(3) \end{aligned} \quad (1.41)$$

dove  $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$  e  $\Gamma(3) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^2 dt$ . Sostituendo la (1.41) nella (1.40) riusciamo ad ottenere la popolazione critica  $N_C$ :

$$N = N_C = \frac{1}{2(\beta_C \hbar \omega_{ho})^3} \zeta(3) \Gamma(3) \simeq \frac{1.202}{(\beta_C \hbar \omega_{ho})^3} \quad (1.42)$$

Dalla precedente equazione ci possiamo ricavare la temperatura critica  $T_C$  come:

$$T_C = \frac{\hbar \omega_{ho}}{k_B} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \quad (1.43)$$

dove  $\zeta(3) \simeq 1.202$ . Alla temperatura critica  $T_C$  tutti i bosoni si trovano negli stati eccitati con  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{\zeta(3) k_B^3 T_C^3}{(\hbar \omega_{ho})^3} = N \quad (1.44)$$

mentre a temperature  $T < T_C$  la popolazione degli stati eccitati  $N_T$  è minore:

$$\frac{\zeta(3) k_B^3 T^3}{(\hbar \omega_{ho})^3} = N_T < N \quad (1.45)$$

Utilizzando la relazione  $N = N_0 + N_T$ , con  $N_0$  uguale alla popolazione del condensato per  $T < T_C$ , possiamo ricavarci la frazione di bosoni nel condensato:

$$\frac{N_0}{N} = \frac{N - N_T}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^3 \quad (1.46)$$

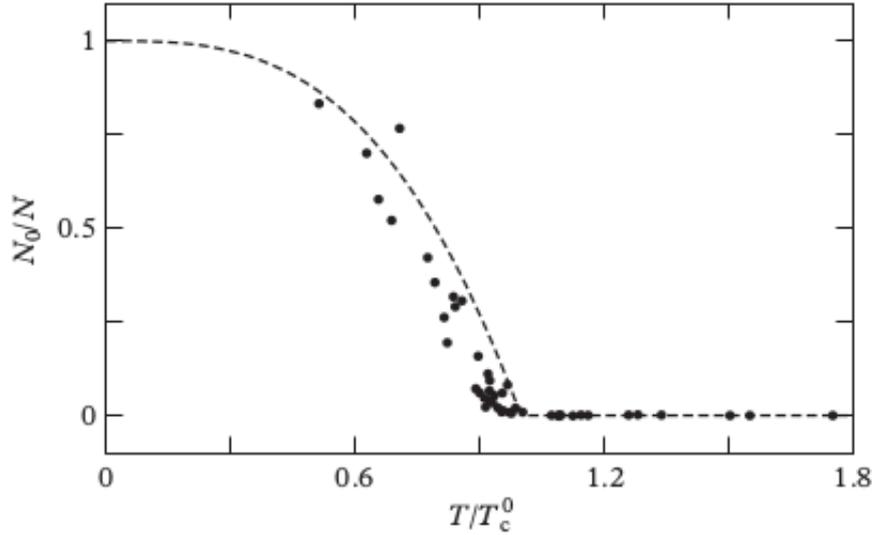


Fig.1.4: Frazione di condensato per un gas ideale di Bose confinato in un potenziale armonico, in rapporto alla temperatura. I punti sono tratti dai risultati sperimentali di Ensher et al. (1996), mentre la linea tratteggiata corrisponde all'equazione (1.46).

Nell'aver effettuato tutti i calcoli precedenti si è implicitamente assunto di aver posto il sistema nel Limite Termodinamico<sup>10</sup> ( $LT$ ); mentre nella sezione 1.2 il gas era confinato in un volume  $V$ , e il  $LT$  implicava  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  e la densità  $N/V = cost.$ , in un sistema confinato in un potenziale armonico la densità di bosoni non rimane costante, perché il volume  $V$  non è definito: ecco perché, in questo caso, il  $LT$  implica  $N \rightarrow \infty$ ,  $\omega_{ho} \rightarrow 0$  con l'ulteriore condizione sul prodotto  $N\omega_{ho}^3 = cost.$  Così facendo possiamo sostituire le somme sui livelli discreti con degli integrali, mentre la temperatura critica (1.43) e la frazione del condensato (1.46) assumono un valore limite.<sup>11</sup>

Ora che abbiamo puntualizzato tutto ciò, possiamo calcolarci alcune funzioni termodinamiche per il gas di Bose confinato in un potenziale armonico; come per la sezione precedente, ci soffermeremo sul calcolo dell'energia  $E$  e del calore specifico  $C_V$ . L'energia diventa, per  $T < T_C$ :

$$E = 3k_B T \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^3 g_4(1) \quad (1.47)$$

mentre, per  $T > T_C$ :

$$E = 3k_B T \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^3 g_4(z) \quad (1.48)$$

<sup>10</sup>Nella pratica, il passaggio al Limite Termodinamico (Limite Continuo) viene effettuato aumentando la temperatura  $T$  del sistema.

<sup>11</sup>Il valore di  $T_C$ , in realtà, è sempre ben definito, anche nel caso discreto.

Per calcolare il calore specifico  $C_V = \partial E / \partial T$  utilizziamo la relazione (1.19) applicandola alle formule (1.47) e (1.48), trovando per  $T < T_C$ :

$$\frac{C_V}{k_B N} = \frac{12}{N} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^3 g_4(1) \quad (1.49)$$

mentre, per  $T > T_C$ :

$$\frac{C_V}{k_B N} = \frac{12}{N} \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega_{ho}} \right)^3 g_4(z) - 9 \frac{g_3(z)}{g_2(z)} \quad (1.50)$$

Al contrario del gas confinato in un volume  $V$ , in questo caso il calore specifico mostra una discontinuità<sup>12</sup> quando il sistema passa da  $T < T_C$  a  $T > T_C$ , e la discontinuità vale precisamente  $-9 \frac{g_3(z)}{g_2(z)}$ .

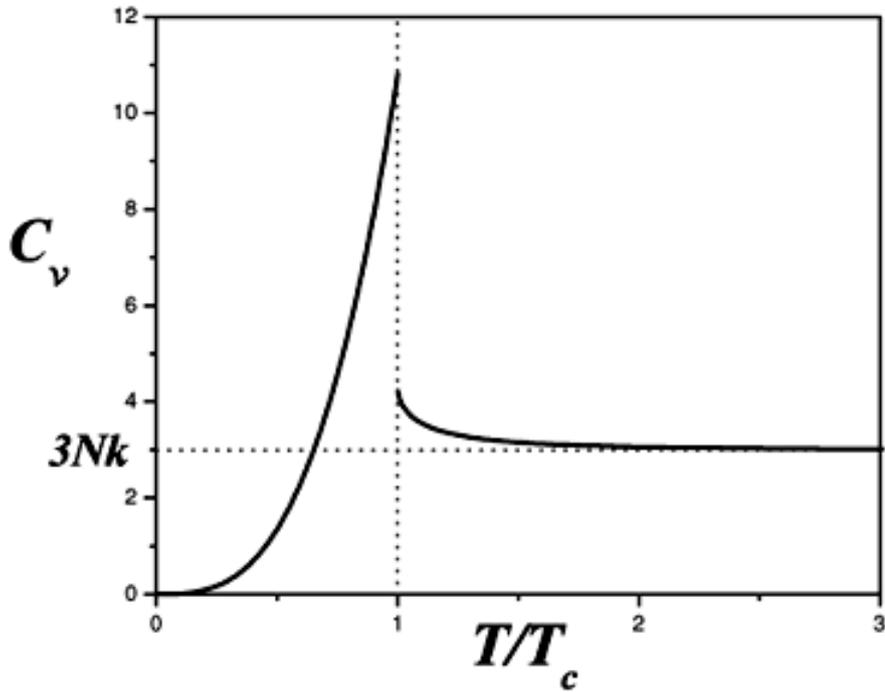


Fig.1.5: Calore specifico per un gas ideale di Bose confinato in un potenziale armonico, in rapporto alla temperatura (tratto da [17]). La curva mostra una discontinuità per  $T = T_C$ , come mostrato nell'equazione (1.50).

<sup>12</sup>Questo perché la funzione di Bose  $g_2(z)$  non diverge per  $z \rightarrow 1$ , al contrario della funzione  $g_{1/2}(z)$  nella formula (1.32).

# Capitolo 2

## Transizioni di fase

In questo capitolo cercheremo di presentare alcuni aspetti fondamentali che caratterizzano le transizioni di fase in chiave moderna, coinvolgendo solamente aspetti puramente statistici e quantistici e ricorrendo ad un'adeguata trattazione matematica. Parleremo, in queste tre sezioni, del parametro d'ordine (legato alla rottura spontanea di simmetria del sistema), della matrice densità, delle funzioni di correlazione delle fluttuazioni e degli esponenti critici associati alle varie quantità statistiche del sistema; inoltre, ci soffermeremo sulla definizione di lunghezza di correlazione, che gioca un ruolo chiave nella comprensione delle transizioni di fase, e di quali siano gli esponenti critici associati a tale osservabile.

### 2.1 Matrice densità e funzioni di correlazione

Iniziamo la nostra discussione introducendo la matrice densità ridotta ad una particella, utilizzando come fonte principale la referenza [14]:

$$n^{(1)}(r, r') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}(r') \rangle \quad (2.1)$$

dove  $\hat{\Psi}^\dagger(r)(\hat{\Psi}(r))$  è l'operatore di campo che crea (annichila) una particella nel punto  $r$ ; come si può facilmente notare, la matrice  $n^{(1)}$  è hermitiana. Per un sistema di bosoni gli operatori di campo dell'equazione (2.1) soddisfano le seguenti relazione di commutazione:

$$[\hat{\Psi}(r), \hat{\Psi}^\dagger(r')] = \delta(r - r') \quad [\hat{\Psi}(r), \hat{\Psi}(r')] = [\hat{\Psi}^\dagger(r), \hat{\Psi}^\dagger(r')] = 0 \quad (2.2)$$

La matrice (2.1) contiene informazioni su importanti osservabili fisici; ponendo  $r = r'$  troviamo la densità del sistema bosonico:

$$n(r) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}(r) \rangle = n^{(1)}(r, r) \quad (2.3)$$

Da questa ci possiamo ricavare la normalizzazione della matrice densità:

$$1 = \int n(r)dr = \int n^{(1)}(r, r)dr \quad (2.4)$$

La matrice densità (2.1) determina anche la densità nello spazio degli impulsi  $p$ , definita come:

$$n(p) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(p) \hat{\Psi}(p) \rangle \quad (2.5)$$

dove abbiamo posto:

$$\hat{\Psi}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-ip\cdot r/\hbar} \hat{\Psi}(r)dr \quad (2.6)$$

dove  $\hat{\Psi}(p)$  è l'operatore di campo nello spazio degli impulsi. Inserendo l'espressione appena scritta per  $\hat{\Psi}(p)$  all'interno dell'equazione (2.5) troviamo direttamente la relazione tra la matrice densità ad un corpo e la densità nello spazio degli impulsi:

$$n(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int n^{(1)}\left(R + \frac{s}{2}, R - \frac{s}{2}\right) e^{-ip\cdot s/\hbar} dR ds \quad (2.7)$$

dove  $s = r - r'$  e  $R = (r + r')/2$ ; la densità nello spazio  $p$  ha la stessa normalizzazione  $\int n(p)dp = 1$  della matrice densità. Consideriamo ora il caso di un sistema uniforme ed isotropo di  $N$  particelle, confinate in un volume  $V$  in assenza di potenziali esterni; nel Limite Termodinamico, dove  $N, V \rightarrow \infty$  mentre la densità  $n = N/V$  è mantenuta costante, la matrice densità dipende solo dal modulo della distanza relativa tra due particelle  $s = r - r'$ ; abbiamo quindi  $n^{(1)}(r, r') = n^{(1)}(s)$  e possiamo scrivere:

$$n^{(1)}(s) = \frac{1}{V} \int n(p) e^{ip\cdot s/\hbar} dp \quad (2.8)$$

Per un sistema normale la densità nello spazio degli impulsi possiede un andamento regolare, per piccoli impulsi, e di conseguenza la matrice densità ad un corpo svanisce quando  $s \rightarrow \infty$ ; la situazione è diversa in presenza della condensazione di Bose-Einstein, poichè abbiamo un'occupazione macroscopica dello stato fondamentale con impulso  $p = 0$  e quindi la densità nello spazio  $p$  contiene un termine proporzionale alla delta di Dirac:

$$n(p) = n_0\delta(p) + \tilde{n}(p) \quad (2.9)$$

il cui peso  $n_0$  è proporzionale alla densità del sistema  $n$ ; la quantità  $n_0 = N_0/N \leq 1$  viene chiamata frazione del condensato. Prendendo la trasformata di Fourier (2.8) possiamo vedere come, in presenza di BEC, la matrice densità ad un corpo non svanisce per larghe distanze ma tende al valore finito:

$$n^{(1)}(s)_{s \rightarrow \infty} \rightarrow n_0 \quad (2.10)$$

Questo comportamento<sup>1</sup> viene definito come off-diagonal long-range order perché coinvolge le componenti non diagonali ( $r \neq r'$ ) della matrice (2.1).

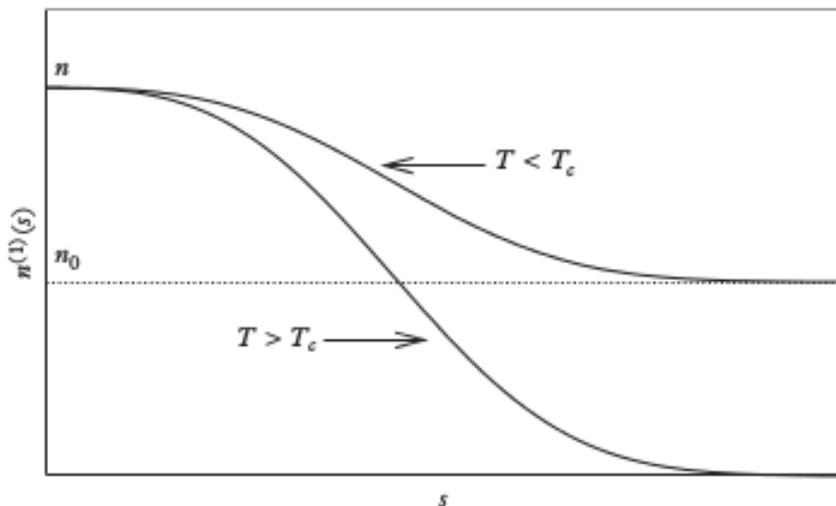


Fig.2.1: Densità ad un corpo in funzione della distanza relativa  $s$ . Per temperature sotto la temperatura critica  $T_C$ ,  $n^{(1)}(s)$  tende, per  $s$  molto grandi, al valore  $n_0 = N_0/V$ , dove  $N_0$  è il numero di particelle nello stato fondamentale. Per  $s = 0$ ,  $n^{(1)}(s)$  coincide con la densità del sistema  $n = N/V$ .

L'ordine a lungo raggio mostrato dalla matrice densità ad un corpo è fortemente collegato al comportamento dei suoi autovalori  $n_i$ , che si ricavano dalla soluzione dell'equazione agli autovalori:

$$\int n^{(1)}(r, r') \varphi_i(r') dr' = n_i \varphi_i(r) \quad (2.11)$$

Le soluzioni della (2.10), ossia gli autovalori  $n_i$ , e la conoscenza delle autofunzioni  $\varphi_i$  ci permettono di scrivere la matrice densità in forma diagonale (più utile):

$$n^{(1)}(r, r') = \sum_i n_i \varphi_i^*(r) \varphi_i(r') \quad (2.12)$$

La condensazione di Bose-Einstein avviene quando lo stato  $\varphi_0$  (ossia lo stato fondamentale) viene occupato in maniera macroscopica, cioè quando  $n_{i=0} \equiv n_0$  è un numero diverso da zero (nel  $LT$ )<sup>2</sup>, mentre tutti gli altri stati hanno un'occupazione uguale a zero

<sup>1</sup>Questo comportamento della matrice densità fu mostrato da Landau e Lifshitz (1951) e da Penrose e Onsager (1956).

<sup>2</sup>Nel Limite Termodinamico, poiché  $N \rightarrow \infty$ , si ha il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein se e solo se  $N_0 \rightarrow \infty$ , cioè se la frazione di condensato  $n_0 = N_0/N$  è un numero finito.

(sempre nel  $LT$ )<sup>3</sup>; in questo caso possiamo riscrivere l'equazione (2.11) in una forma separata:

$$n^{(1)}(r, r') = n_0 \varphi_0^*(r) \varphi_0(r') + \sum_{i \neq 0} n_i \varphi_i^*(r) \varphi_i(r') \quad (2.13)$$

Nel  $LT$  la sommatoria con  $i \neq 0$  può essere sostituita con un integrale che tende a 0 per grandi distanze  $s = |r - r'|$ ; al contrario, il contributo del condensato rimane finito al variare di  $|r - r'|$ , ed è fissato dall'estensione della funzione  $\varphi_0$ .

Per sistemi<sup>4</sup> uniformi, le soluzioni dell'equazione (2.11) sono onde piane:

$$\varphi_{p_i}(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ip_i r / \hbar} \quad (2.14)$$

In questo caso possiamo trovare una relazione diretta tra i numeri di occupazione  $n_{p_i}$  e la densità nello spazio degli impulsi  $n(p)$ ; infatti, inserendo la (2.13) nella (2.7) si ricava il seguente risultato:

$$n(p) = n_0 \delta(p) + \sum_{p_i \neq 0} n_{p_i} \delta(p - p_i) \quad (2.15)$$

da cui, sostituendo la sommatoria sugli stati  $p_i \neq 0$  con l'integrale  $V/(2\pi\hbar)^3 \int dp$ , si ottiene l'equazione (2.9) con la seguente identificazione:

$$\tilde{n}(p) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} n_p \quad (2.16)$$

Passiamo ora ad un altro punto chiave della nostra trattazione; dalla definizione di matrice densità possiamo ricavarci la definizione di funzione di correlazione di primo ordine  $G^1(r, r')$ , che rappresenta la probabilità di trovare una particella nella posizione  $r$  invece che nella posizione  $r'$ , e di secondo ordine  $G^2(r, r')$ , che rappresenta la probabilità congiunta di trovare due particelle nelle posizioni  $r$  ed  $r'$ , definite come:

$$G^1(r, r') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}(r') \rangle = n^{(1)}(r, r') \quad (2.17)$$

$$G^2(r, r') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}^\dagger(r') \hat{\Psi}(r') \hat{\Psi}(r) \rangle \quad (2.18)$$

Queste due funzioni descrivono la correlazione, al primo e al secondo ordine rispettivamente, tra particelle di uno stesso sistema statistico. Le funzioni di correlazione  $G^1(r, r')$  e  $G^2(r, r')$  sono importanti nella trattazione delle transizioni di fase poiché, come verrà mostrato nella sezione 2.3, esse descrivono l'andamento della correlazione (ossia quanto

---

<sup>3</sup>In questo caso, poiché nella BEC il numero di particelle negli stati eccitati  $N_T$  tende a zero per  $T \rightarrow 0$ , la frazione di particelle esterne al condensato  $n_i = N_i/N$  (con  $i \neq 0$ ) si annulla al diminuire della temperatura.

<sup>4</sup>In caso di sistemi non uniformi, le soluzioni non sono più onde piane.

una particella influisce sul comportamento di un'altra) attraverso la temperatura critica del sistema  $T_C$ , e di come questa correlazione aumenta il suo raggio d'azione a mano a mano che ci si avvicina al punto critico.

Per questioni di comodità, spesso le due funzioni  $G^1(r, r')$  e  $G^2(r, r')$  sono normalizzate all'unità nel seguente modo:

$$g^1(r, r') = \frac{G^1(r, r')}{\sqrt{G^1(r, r)}\sqrt{G^1(r', r')}} \quad (2.19)$$

$$g^2(r, r') = \frac{G^2(r, r')}{G^1(r, r)G^1(r', r')} \quad (2.20)$$

in modo da avere un risultato pari a 1 quando il sistema mostra una perfetta correlazione. Queste formule ritorneranno utili nel capitolo 3 quando verranno applicate al caso bosonico, in particolare al fenomeno della condensazione di Bose-Einstein.

## 2.2 Parametro d'ordine

Passiamo ora alla definizione di parametro d'ordine, utilizzando come fonti le referenze [11] e [12]. Proviamo a modellizzare un sistema ferromagnetico vicino alla temperatura di Curie, ossia la temperatura critica alla quale avviene la transizione di fase ferromagnetica; le due fasi, corrispondenti al sistema con temperatura sopra e sotto la temperatura critica, hanno diverse simmetrie spaziali: questo perché sopra  $T_C$ , quando non c'è magnetizzazione, il sistema è invariante per rotazioni (non vi sono direzioni privilegiate nello spazio), mentre sotto  $T_C$ , quando vi è magnetizzazione spontanea, il vettore magnetizzazione definisce una direzione privilegiata nello spazio, eliminando l'invarianza rotazionale. Poiché vi è una simmetria che viene a mancare a transizione di fase avvenuta, le due fasi devono essere descritte da funzioni termodinamiche diverse tra loro, che non potranno essere analiticamente continue attraverso il punto critico. Inoltre, essendovi una riduzione di simmetria, occorrerà un parametro addizionale al fine di descrivere la termodinamica della fase a bassa temperatura: questo parametro è detto parametro d'ordine.

Le autofunzioni ricavate dall'equazione (2.12) possono essere utilizzate per scrivere l'operatore di campo  $\hat{\Psi}(r)$  nella seguente forma:

$$\hat{\Psi}(r) = \sum_i \varphi \hat{a}_i \quad (2.21)$$

dove  $\hat{a}_i(\hat{a}_i^\dagger)$  sono gli operatori di annichilazione (creazione) di una particella nello stato  $\varphi_i$  che obbediscono alle regole di commutazione:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (2.22)$$

La funzione d'onda relativa all'autovalore macroscopico  $N_0$  gioca un ruolo cruciale nella condensazione di Bose-Einstein e caratterizza la funzione d'onda del condensato. È conveniente separare il termine del condensato ( $i = 0$ ) dalle altri componenti all'interno dell'operatore di campo  $\hat{\Psi}$ :

$$\hat{\Psi}(r) = \varphi_0(r)\hat{a}_0 + \sum_{i \neq 0} \varphi_i(r)\hat{a}_i \quad (2.23)$$

Da questa equazione possiamo introdurre l'approssimazione di Bogoliubov, che consiste nel rimpiazzare gli operatori  $\hat{a}_0$  e  $\hat{a}_0^\dagger$  con il numero  $\sqrt{N_0}$ ; questo è equivalente ad ignorare la non-commutatività degli operatori  $\hat{a}_0$  e  $\hat{a}_0^\dagger$  ed è una buona approssimazione per descrivere il fenomeno macroscopico della BEC<sup>5</sup>. In realtà, il commutatore tra gli operatori  $\hat{a}_0$  e  $\hat{a}_0^\dagger$  è uguale a 1, mentre gli operatori stessi sono dell'ordine di  $\sqrt{N_0}$ .

Usare l'approssimazione di Bogoliubov è equivalente a trattare le componenti macroscopiche  $\varphi_0\hat{a}_0$  dell'operatore di campo (2.23) come un campo classico; in questo modo, l'equazione (2.23) può essere riscritta come:

$$\hat{\Psi}(r) = \Psi_0(r) + \delta\hat{\Psi}(r) \quad (2.24)$$

dove abbiamo definito:

$$\Psi_0 = \sqrt{N_0}\varphi_0 \quad \delta\hat{\Psi} = \sum_{i \neq 0} \varphi_i a_i \quad (2.25)$$

La funzione  $\Psi_0(r)$  viene chiamata funzione d'onda del condensato e gioca il ruolo di parametro d'ordine. È una quantità complessa, caratterizzata da un modulo ed una fase:

$$\Psi_0(r) = |\Psi_0(r)|e^{iS(r)} \quad (2.26)$$

Il modulo determina il contributo del condensato alla densità (2.3), mentre la fase  $S(r)$  caratterizza la coerenza del sistema. Il parametro d'ordine caratterizza la fase condensata di un sistema bosonico e svanisce al di sopra della temperatura critica  $T_C$ ; inoltre, il parametro d'ordine  $\Psi_0 = \sqrt{N_0}\varphi_0$  è definito a meno di un fattore  $e^{i\alpha}$ , ossia di un fattore di fase costante: questo riflette la simmetria di gauge mostrata da tutte le variabili fisiche. Quando il sistema sceglie un preciso valore del parametro d'ordine al fine di minimizzare l'energia libera di Helmholtz  $F$  si ha una rottura spontanea<sup>6</sup> di simmetria, come effetto di una perturbazione arbitrariamente piccola<sup>7</sup> che lo discosta dalla posizione di equilibrio.

---

<sup>5</sup>In questo fenomeno, abbiamo che la frazione di condensato  $N_0$  è pari a  $N_0 = \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \gg 1$ .

<sup>6</sup>Si dice spontanea perché la perturbazione è nulla solo nel  $LT$ ; in questo modo, sembra che il sistema abbia ridotto la sua simmetria spontaneamente, quando in realtà vi è l'effetto, seppure piccolo, di una perturbazione.

<sup>7</sup>Nel Limite Termodinamico, questa perturbazione può eventualmente svanire; nonostante ciò, essa è presente e perturba il sistema.

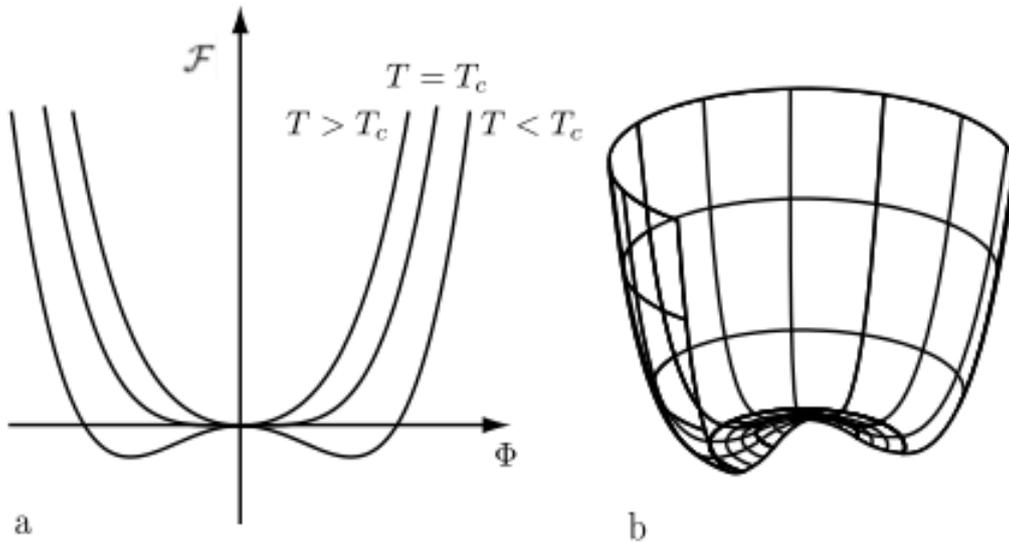


Fig.2.2: Dipendenza dell'energia libera  $F$  dal valore del parametro d'ordine  $\Phi$ . (a) mostra la situazione per un parametro d'ordine a una dimensione, per 3 diverse temperature; sopra  $T_C$ , l'energia libera possiede solamente un minimo, che si appiattisce per  $T = T_C$ , mentre per temperature al di sotto di  $T_C$  appaiono due minimi dell'energia libera, e il sistema viene posto in uno dei due attraverso l'azione di una perturbazione esterna. (b) mostra la situazione per un parametro d'ordine a 2 dimensioni quando  $T < T_C$ , dove la degenerazione è continua.

L'equazione (2.24) può essere interpretata dicendo che il valore di aspettazione  $\langle \hat{\Psi} \rangle$  dell'operatore di campo è diverso da zero; questo significa che, dal punto di vista fisico, la rottura di simmetria implica il fatto di avere una riserva di particelle nello stesso stato, ossia il condensato: infatti, poichè  $N_0 \gg 1$ , aggiungere una particella ad esso non cambia le proprietà fisiche del sistema<sup>8</sup>. Come ultima cosa abbiamo che la dipendenza temporale del parametro d'ordine, avendo posto l'energia dello stato fondamentale  $\varepsilon_0 = 0$ , è pari a:

$$\Psi_0(r, t) = \Psi_0(r) e^{-i\mu t/\hbar} \quad (2.27)$$

dove  $\mu = E(N) - E(N - 1) \simeq \partial E / \partial N$  è il potenziale chimico.

<sup>8</sup>In altre parole, gli stati  $|N\rangle$ ,  $|N + 1\rangle$  e  $|N - 1\rangle$  sono fisicamente equivalenti, a parte correzioni di ordine  $1/N_0$ .

## 2.3 Lunghezza di correlazione ed esponenti critici

Passiamo ora alla descrizione di un altro argomento di fondamentale importanza per la descrizione delle transizioni di fase: la lunghezza di correlazione. Partiamo da ciò che è scritto nelle referenze [2] e [5]; la lunghezza di correlazione, spesso indicata con la lettera  $\xi$ , descrive la scala di lunghezza di un sistema nella quale le fluttuazioni sono correlate, ossia una risente necessariamente dell'altra. In un gas a temperature molto al di sopra di quella critica la lunghezza di correlazione è pari a  $\lambda_T$ , ossia la lunghezza d'onda termica di De Broglie; a mano a mano che la temperatura si avvicina a quella critica  $T_C$ , la lunghezza di correlazione  $\xi$  aumenta sempre di più fino a divergere quando il sistema si trova nel punto critico della transizione di fase. Una volta che la transizione di fase è avvenuta, e il sistema si trova in uno stato altamente correlato (ogni particella risente di tutte le particelle del sistema, non solo di quelle immediatamente vicine), la lunghezza di correlazione rimane infinita.

La lunghezza di correlazione è collegata alla funzione di correlazione di primo ordine normalizzata  $g^1(r)$ ; infatti, per distanze  $r$  molto grandi e in prossimità della regione critica, la funzione di correlazione si comporta come:

$$g^1(r) \rightarrow \frac{e^{-r/\xi}}{r^p} \quad (2.28)$$

L'esponente  $p = d - 2 + \eta$  al denominatore dipende dalla dimensionalità del sistema (nel nostro caso,  $d = 3$ ) e dall'esponente critico  $\eta$ , di cui parleremo dopo quando verranno esposti gli esponenti critici. Per avere una descrizione più conveniente, introduciamo la temperatura ridotta  $t$ :

$$t = \frac{T - T_C}{T_C} = \frac{T}{T_C} - 1 \quad (2.29)$$

Quando la temperatura  $T$  tende alla temperatura critica  $T_C$ , la lunghezza di correlazione diverge<sup>9</sup> nel seguente modo:

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \quad (2.30)$$

dove  $\nu$  è l'esponente critico associato alla lunghezza di correlazione. Mettendo insieme l'equazione (2.30) con la (2.28) diventa chiaro che, quanto  $T = T_C$ , abbiamo  $\xi \rightarrow \infty$  e il numeratore nella (2.28) diventa pari all'unità; alla temperatura critica, quindi, la funzione di correlazione di primo ordine  $g^1(r)$  mostra (per  $r$  grandi) un andamento del tipo:

$$g^1(r) = \frac{1}{r^p} \quad (2.31)$$

Come accennato prima, quindi, la funzione di correlazione decresce, per  $T < T_C$ ; in altre parole, le fluttuazioni diventano correlate in tutto il sistema quando siamo alla

<sup>9</sup>In questo caso, il simbolo  $\sim$  significa che la divergenza interessa solo la parte singolare della lunghezza di correlazione, che normalmente contiene (così come altre quantità interessate nella transizione di fase) una parte regolare (che rimane finita, ma non deve essere continua) e una parte divergente.

temperatura critica (poichè  $\xi \rightarrow \infty$ ) e decrescono a mano a mano che la temperatura si allontana da  $T_C$ .

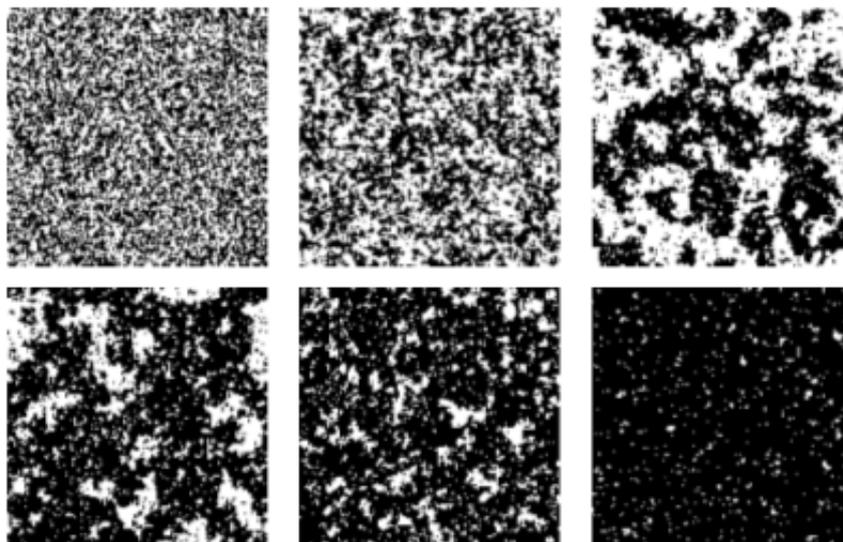


Fig.2.2: Fotografie del modello di Ising a due dimensioni, per temperature diverse. I pixel neri corrispondono allo spin down, i bianchi allo spin up. Per temperature alte (in alto a sinistra) non c'è magnetizzazione, e le fluttuazioni correlate sono veramente poche; andando verso destra, rimanendo nella fila in alto, la temperatura si abbassa, fino a circa  $T_C$  (in alto a destra), dove le fluttuazioni sono correlate in tutto il sistema pur non essendoci magnetizzazione. Nella fila in basso siamo a temperature al di sotto di  $T_C$  e il sistema ha scelto di avere, nella maggior parte di esso, lo spin down; andando verso destra nella fila in basso, pur abbassandosi sempre di più la temperatura, le fluttuazioni diventano sempre meno correlate.

Parliamo ora degli esponenti critici, seguendo quanto scritto nella referenza [11]. Essi descrivono la natura delle singolarità in diverse quantità misurabili in un punto critico; di esponenti critici riconosciuti ce ne sono 6, ognuno di essi denominato da una lettera dell'alfabeto greco:  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$ . I primi 4 esponenti critici<sup>10</sup> sono definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \text{Calore specifico: } C &\sim |t|^{-\alpha} \\
 \text{Parametro d'ordine: } M &\sim |t|^\beta \\
 \text{Susceptività: } \chi &\sim |t|^{-\gamma} \\
 \text{Equazione di stato (per } t = 0): M &\sim H^{1/\delta}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

---

<sup>10</sup>In questo caso,  $\sim$  significa che la grandezza fisica in questione possiede una parte singolare proporzionale a ciò che si trova a destra del simbolo.

In questo caso,  $H$  è il campo coniugato del parametro d'ordine e nelle prime tre equazioni, riferendosi ad una transizione di fase, abbiamo  $H = 0$ ; l'ultima equazione si riferisce specificatamente al caso  $H \neq 0$ . Bisogna specificare che i comportamenti degli esponenti critici si riferiscono solamente alla parte singolare di ciascuna quantità fisica associata; per esempio,  $\alpha = 0$  significa che il calore specifico non ha alcuna parte singolare, ma potrebbe possedere una discontinuità finita a  $t = 0$ .

Le definizioni appena date assumono implicitamente che le singolarità siano dello stesso tipo, sia che raggiungiamo il punto critico dall'alto, sia che lo raggiungiamo dal basso; poichè  $M$  è nullo, per definizione, al di sopra del punto critico, l'equazione ad esso associata ha senso solamente per  $t < 0$ . L'importanza degli esponenti critici risiede nella loro universalità: come mostrato da molti esperimenti, sistemi ampiamente diversi, con temperature critiche che differiscono tra di loro di diversi ordini di grandezza, condividono approssimativamente gli stessi esponenti critici; le loro definizioni sono state dettate dagli esperimenti, come vedremo successivamente. Gli ultimi due esponenti critici, ossia  $\nu$  e  $\eta$ , sono definiti come:

$$\text{Lunghezza di correlazione: } \xi \sim |t|^{-\nu}$$

$$\text{Decadimento secondo potenza per } t = 0: p = d - 2 + \eta \quad (2.33)$$

dove  $d$ , nell'ultima equazione, è la dimensionalità del sistema.

<i>Exponent</i>	<i>TH</i>	<i>EXPT</i>	<i>MFT</i>	<i>ISING2</i>	<i>ISING3</i>	<i>HEIS3</i>
$\alpha$		0-0.14	0	0	0.12	-0.14
$\beta$		0.32-0.39	1/2	1/8	0.31	0.3
$\gamma$		1.3-1.4	1	7/4	1.25	1.4
$\delta$		4-5	3	15	5	
$\nu$		0.6-0.7	1/2	1	0.64	0.7
$\eta$		0.05	0	1/4	0.05	0.04
$\alpha + 2\beta + \gamma$	2	$2.00 \pm 0.01$	2	2	2	2
$(\beta\delta - \gamma)/\beta$	1	$0.93 \pm 0.08$	1	1	1	
$(2 - \eta)\nu/\gamma$	1	$1.02 \pm 0.05$	1	1	1	1
$(2 - \alpha)/\nu d$	1		$4/d$	1	1	1

Fig.2.3: Valore degli esponenti critici in relazione a: TH, valori teorici dalle relazioni (2.32); EXPT, valori sperimentali per diversi tipi di sistemi; MFT, teorie di campo medio; ISINGd, modello di Ising in  $d$  dimensioni; HEIS3, modello di Heisenberg classico in 3 dimensioni.

Solo due dei sei esponenti critici prima definiti sono indipendenti, a causa delle seguenti relazioni di scaling [11]:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \nu(2 - \eta) \\
 \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \\
 \gamma &= \beta(\delta - 1) \\
 \nu d &= 2 - \alpha
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

dove, nuovamente,  $d$  è la dimensionalità del sistema.

Per concludere, la lunghezza di correlazione  $\xi$  e il suo esponente critico associato  $\nu$  giocano un ruolo fondamentale nelle transizioni di fase in chiave moderna, perché descrivono come le fluttuazioni di un sistema sono correlate tra di loro quando si attraversa il punto critico; la lunghezza di correlazione mostra quanto sono correlate le fluttuazioni delle particelle che compongono un sistema, l'esponente critico descrive l'andamento della lunghezza  $\xi$  e come essa diverge all'avvicinarsi del punto critico della transizione di fase. Nel capitolo 3 verranno mostrati degli esempi di come si possa calcolare la lunghezza  $\xi$  e l'esponente  $\nu$  per un sistema bosonico, e in particolare i valori assunti da queste due quantità quando il sistema mostra il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein.

# Capitolo 3

## BEC come transizione di fase

In questo capitolo tratteremo il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein come una transizione di fase, utilizzando quanto scritto nel capitolo 2; mostreremo come, per un gas di Bose ideale (quindi senza interazioni), si possono calcolare la lunghezza di correlazione, la matrice densità e gli esponenti critici, mettendo in luce alcuni aspetti poco utilizzati nella descrizione di questo fenomeno quantistico.

La condensazione di Bose-Einstein costituisce un caso molto particolare perché essa avviene senza la presenza di interazioni tra i vari bosoni, poiché si tratta di una transizione di fase puramente statistica, legata alla natura simmetrica della funzione d'onda che descrive i bosoni; infatti, queste particelle sono descritte dalla statistica di Bose-Einstein, che prevede una funzione d'onda simmetrica per i bosoni che genera una correlazione attrattiva tra di loro. Questa attrazione, di natura puramente statistica, dà luogo, scendendo sotto la temperatura critica  $T_C$ , al fenomeno della condensazione di Bose-Einstein, dove un singolo stato viene occupato in maniera macroscopica da un gran numero di bosoni, le cui funzioni d'onda si sovrappongono al fine di formarne una unica, il già citato parametro d'ordine del condensato.

Nelle sezioni seguenti calcoleremo la funzione di correlazione, derivata dalla matrice densità del sistema, e la lunghezza di correlazione per un gas ideale di Bose libero, al fine di verificare quanto scritto nel capitolo 2, ossia come queste due quantità mostrino delle peculiarità interessanti durante una transizione di fase.

## 3.1 Funzioni di correlazione per un gas di Bose ideale

### 3.1.1 Funzioni di correlazione di primo e secondo ordine sopra $\mathbf{T}_C$

Utilizziamo quanto scritto nel capitolo 2 per calcolare le funzioni di correlazione di primo e secondo ordine per un gas di Bose ideale, prendendo come modello il gas di Bose confinato in un volume  $V$ . Prendendo spunto dalle referenze [13] e [6] scegliamo una base ortonormale per i bosoni non interagenti in un volume  $V^1$ , che con le condizioni periodiche ai bordi è data dalle seguenti onde piane:

$$\psi_k(r) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{ik \cdot r} \quad \text{con} \quad k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y,z} \quad (3.1)$$

I corrispondenti operatori di campo sono dati da:

$$\hat{\psi}(r) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \hat{a}_k e^{ik \cdot r} \quad \hat{\psi}^\dagger(r) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \hat{a}_k^+ e^{ik \cdot r} \quad (3.2)$$

In assenza di interazioni, come avviene nel gas ideale, l'hamiltoniana è:

$$\hat{H} = \sum_k \varepsilon_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \quad \text{con} \quad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.3)$$

Nel formalismo dell'ensemble gran-canonic<sup>2</sup>, l'operatore densità all'equilibrio è definito come  $\hat{n}_{eq} = e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} / Z_G$ , dove  $\mu$  è il potenziale chimico e  $Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$  è la funzione di partizione gran-canonica. L'invarianza traslazionale di  $\hat{n}_{eq}$  implica:

$$\langle \hat{a}_k^+, \hat{a}_k \rangle = \text{Tr}(\hat{n}_{eq} \hat{a}_k^+, \hat{a}_k) = \langle n_k \rangle \delta_{k,k'} \quad (3.4)$$

dove  $\langle n_k \rangle = \langle \hat{a}_k^+, \hat{a}_k \rangle$  è il numero medio di bosoni nello stato  $k$ . Ora procediamo al calcolo della funzione di correlazione di primo ordine, ossia  $G^1(r, r')$ :

$$G^1(r, r') = \text{Tr} \left[ n_{eq} \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}(r') \right] = \frac{1}{L^3} \sum_k e^{ik \cdot (r-r')} \langle \hat{a}_k^+, \hat{a}_k \rangle \quad (3.5)$$

Nell'equazione appena scritta possiamo rimpiazzare la sommatoria sugli stati  $k$  con un integrale, avendo l'accortezza di separare il contributo dello stato  $k = 0$  che altrimenti

<sup>1</sup>Nella seguente trattazione verrà utilizzata, come parametro che descrive il confinamento, la lunghezza della scatola  $L$  invece che il volume proprio  $V$ .

<sup>2</sup>In questo formalismo, il numero  $N$  di particelle del sistema può variare come qualsiasi altra grandezza termodinamica.

verrebbe omesso (nel Limite Continuo, la densità degli stati svanisce per  $k = 0$ ); inoltre, utilizzando:

$$\langle \hat{a}_k^+, \hat{a}_k \rangle = \frac{ze^{-\beta\varepsilon_k}}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_k}} = \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-\beta\varepsilon_k} \quad (3.6)$$

dove  $z = e^{\beta\mu}$  è la fugacità, otteniamo:

$$\begin{aligned} G^1(r, r') &= \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot (r-r')} \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-\beta\hbar^2 k^2 / 2m} \\ &= \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} \exp\left(-\frac{\pi(r-r')^2}{l\lambda_T^2}\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $N_0 = \langle n_0 \rangle$  è la popolazione dello stato fonamentale e  $\lambda_T$  è la lunghezza d'onda termica di De Broglie.

Possiamo notare come  $G^1(r, r')$  dipende solo da  $(r - r')$ , come conseguenza dell'invarianza traslazionale di  $n_{eq}$ . Ponendo  $r = r'$  ritroviamo la densità del sistema bosonico, che non dipende da  $r$ :

$$G^1(r, r) = n(r) = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3} \underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}}}_{=g_{3/2}(z)} = \frac{N_0}{L^3} + \frac{N_T}{L^3} = \frac{N}{L^3} \quad (3.8)$$

Valutiamo ora l'evoluzione di  $G^1(r - r')$  per valori crescenti di  $n = N/L^3$ , a temperatura  $T$  fissata.

- Per un gas di Bose diluito<sup>3</sup> che verifica  $n\lambda_T^3 \ll 1$ , abbiamo  $N_0 \ll N$  e  $z \ll 1$ . Possiamo quindi trascurare  $N_0/L^3$  e utilizzare l'approssimazione<sup>4</sup>  $g_{3/2}(z) \simeq z$  nell'equazione (3.8); questo porta a  $N/L^3 \simeq z/\lambda_T^3$ , ossia  $z = N\lambda_T^3/L^3$ . Utilizzando la stessa approssimazione nell'equazione (3.7) otteniamo:

$$G^1(r - r') \simeq \frac{z}{\lambda_T^3} e^{-\pi(r-r')^2/\lambda_T^2} \simeq \frac{N}{L^3} e^{-\pi(r-r')^2/\lambda_T^2} \quad (3.9)$$

Notiamo come abbiamo recuperato la lunghezza di correlazione  $\lambda_T/\sqrt{\pi}$  di un gas classico di Maxwell-Boltzmann.

- Aumentando la densità del sistema, quando essa raggiunge la densità critica  $n_{crit}$  abbiamo  $z = 1$ , che corrisponde a  $n_{crit}\lambda_T^3 = \sum_{l=1}^{\infty} 1/l^{3/2} \simeq 2.612$ . In questo punto,

<sup>3</sup>Con bassissima densità.

<sup>4</sup>In questo passaggio si tiene solo il termine con  $l = 1$  nella sommatoria sugli stati  $l$ .

possiamo trascurare  $N_0$  il quale non ha ancora iniziato ad incrementare; inserendo  $z = 1$  nell'equazione (3.7) otteniamo:

$$G_{crit}^1(r - r') = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} \exp\left(-\frac{\pi(r - r')^2}{l\lambda_T^2}\right) \quad (3.10)$$

Notiamo come  $G_{crit}^1(r - r')$ , a temperatura fissata, dipende solo da  $\lambda_T$  e non varia all'aumentare di  $n$ .

- Per  $n > n_{crit}$ ,  $N_0$  non è più trascurabile e  $z$  rimane uguale a 1. Abbiamo quindi:

$$G^1(r, r') = \frac{N_0}{L^3} + G_{crit}^1(r - r') \quad (3.11)$$

inoltre, la densità del sistema è pari a  $G^1(r, r) = \frac{N_0}{L^3} + n_{crit}$ , con  $n_{crit} = \frac{N - N_0}{L^3}$ . Una volta che il sistema ha raggiunto la densità critica  $n_{crit}$ , un ulteriore incremento di  $n$  aumenta solamente il numero di particelle nel condensato  $N_0$ .

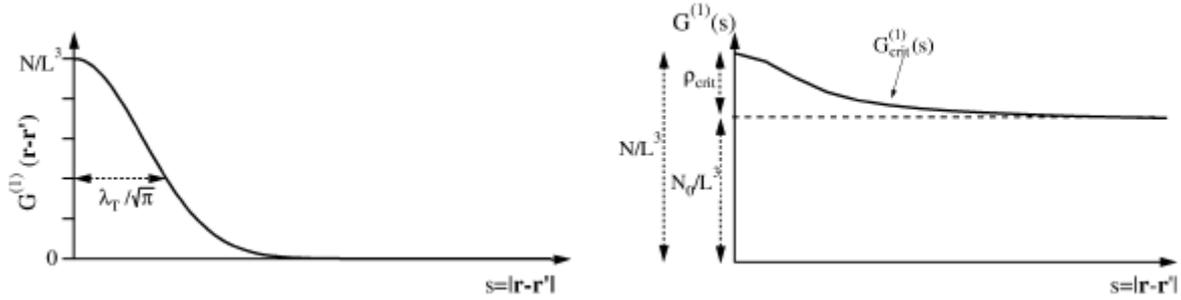


Fig.3.1: A sinistra, funzione di correlazione di primo ordine per un gas di Bose diluito ( $n\lambda_T^3 \ll 1$ ); a destra, funzione di correlazione di primo ordine per un gas di Bose condensato ( $n\lambda_T^3 > 1$ ).

Per un gas di Bose diluito, la funzione di correlazione di primo ordine normalizzata, ossia  $g^1$ , è data da

$$g^1(r - r') = \exp\left(-\pi(r - r')^2/\lambda_T^2\right) \quad (3.12)$$

mentre per un gas di Bose molto denso,  $g^1$  decresce lentamente all'aumentare di  $|r - r'|$  verso il valore asintotico di  $1 - n_{crit}/n$ ; questo implica che, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $g^1(r - r') \rightarrow 1$ .

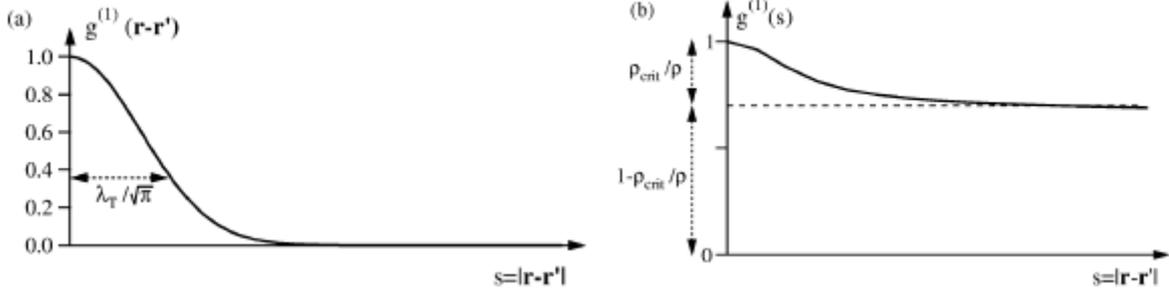


Fig.3.1: A sinistra, funzione di correlazione di primo ordine normalizzata per un gas di Bose diluito; a destra, funzione di correlazione di primo ordine normalizzata per un gas di Bose condensato.

In questo paragrafo abbiamo eseguito tutti i calcoli utilizzando il formalismo dell'ensemble gran-canonic; in realtà, il numero di bosoni  $N$  nella condensazione di Bose-Einstein è fissato, per cui il formalismo dell'ensemble canonico è più appropriato, anche se entrambi portano a risultati simili riguardo a  $\langle n_k \rangle$  e  $G^1$ .

D'altra parte, le fluttuazioni dei numeri di occupazione  $\langle n_k \rangle$  sono abbastanza diverse tra l'ensemble canonico e quello gran-canonic per un gas di Bose degenerare, perciò il calcolo di  $G^2$  non è corretto al di fuori di  $N \ll N_{\text{crit}}$ : procederemo quindi all'interno di questo regime, dove la temperatura  $T$  è molto maggiore di quella critica  $T_C$ , le fluttuazioni dei numeri di occupazioni rimangono piccole e la funzione di correlazione di secondo ordine, sensibile a tutto ciò, può essere descritta bene utilizzando l'ensemble gran-canonic.

Procediamo ora con il calcolo della funzione di correlazione di secondo ordine  $G^2(r, r')$ :

$$\begin{aligned} G^2(r, r') &= \langle \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \hat{\psi}(r) \rangle \\ &= \langle \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}(r) \rangle \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r') \rangle + \langle \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}(r') \rangle \langle \hat{\psi}^\dagger(r') \hat{\psi}(r) \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

a cui segue la funzione di correlazione di secondo ordine normalizzata, ossia  $g^2(r, r')$ :

$$g^2(r, r') = 1 + |g^1(r, r')|^2 \quad \text{tale che} \quad g^2(r, r) = 1 + 1 = 2 \quad (3.14)$$

Per calcolare le funzioni di primo e secondo ordine per il gas di Bose condensato avremo bisogno di un altro formalismo, come vedremo in seguito.

### 3.1.2 Funzioni di correlazione di primo e secondo ordine sotto $T_C$

Partiamo col calcolo delle funzioni di correlazione di primo e secondo ordine per un gas di bose ideale condensato, ossia quando  $T < T_C$ , utilizzando la referenza [5]. Quando

il condensato è presente, è appropriato scrivere l'operatore di campo come:

$$\hat{\psi}(r) = \hat{a}_0\varphi_0(r) + \sum_{\alpha \neq 0} \hat{a}_\alpha\varphi_\alpha(r) \quad (3.15)$$

dove  $\varphi_0$  è la funzione d'onda del condensato. Invece che utilizzare l'ensemble grand-canonical<sup>5</sup>, supponiamo che tutti i bosoni siano nello stato fondamentale, tale che lo stato del sistema sia  $|\psi\rangle = |n_0 = N, n_{\alpha \neq 0} = 0\rangle$ ; questa descrizione dello stato del condensato è più appropriata per un sistema con numero di bosoni fisso molto al di sotto della temperatura  $T_C$ . Calcoliamo ora la funzione di primo ordine  $G^1(r, r')$ :

$$G^1(r, r') = \langle n_0 = N | \hat{\psi}^\dagger(r)\hat{\psi}(r') | n_0 = N \rangle = N\varphi_0^*(r)\varphi_0(r') \quad (3.16)$$

Ponendo  $r = r'$ , ritroviamo la densità del sistema condensato:

$$G^1(r, r) = \langle n_0 = N | \hat{\psi}^\dagger(r)\hat{\psi}(r) | n_0 = N \rangle = N|\varphi_0(r)|^2 \quad (3.17)$$

Per quanto riguarda la funzione di secondo ordine  $G^2(r, r')$ :

$$\begin{aligned} G^2(r, r') &= \langle n_0 = N | \hat{\psi}^\dagger(r)\hat{\psi}^\dagger(r')\hat{\psi}(r')\hat{\psi}(r) | n_0 = N \rangle \\ &= N(N-1)|\varphi_0(r)|^2|\varphi_0(r')|^2 \simeq N^2|\varphi_0(r)|^2|\varphi_0(r')|^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dalle equazioni (3.16) e (3.18), possiamo ricavarci le due funzioni di correlazione normalizzate  $g^1(r, r')$  e  $g^2(r, r')$ :

$$g^1(r, r') = \varphi_0^*(r)\varphi_0(r') \quad \text{tale che} \quad g^1(r, r) = |\varphi_0(r)|^2 = 1 \quad (3.19)$$

$$g^2(r, r') = |\varphi_0(r)|^2|\varphi_0(r')|^2 = 1 \quad (3.20)$$

Nella prossima sezione utilizzeremo quanto scritto riguardo alla funzione di correlazione di primo ordine per ricavarci la lunghezza di correlazione e l'esponente critico associato per un gas di Bose ideale, e lo confronteremo con i dati teorici e sperimentali presenti nella letteratura.

## 3.2 Lunghezza di correlazione per un gas di Bose ideale

In questa sezione ci concentreremo sul calcolo della lunghezza di correlazione e del coefficiente critico associato per un gas di Bose ideale confinato in un volume  $V$ , prendendo spunto dalle referenze [6] e [13]. Riprendiamo quanto scritto nella sezione 3.2

---

<sup>5</sup>Essendo il sistema al di sotto di  $T_C$ , le fluttuazioni non sono più piccole e non si può utilizzare questo formalismo.

e andiamo a valutare il comportamento della funzione di correlazione  $G^1(r - r')$  per  $s = |r - r'| \gg \lambda_T$ ; l'equazione (3.5) mostra come  $G^1(s)$  sia la trasformata di Fourier del numero di occupazione medio  $\langle n_k \rangle$ . Il comportamento di  $G^1(s)$ , per distanze  $s$  molto grandi, è quindi determinato dal comportamento di  $\langle n_k \rangle$  per  $k$  piccoli:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \langle n_k \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{z}{e^{\beta \hbar^2 k^2 / 2m} - z} \simeq \frac{z}{1 + \beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - z} \simeq \frac{z}{\beta \hbar^2 / 2m} \frac{1}{k^2 + k_c^2} \quad (3.21)$$

dove abbiamo posto:

$$k_c^2 = \frac{1 - z}{\beta \hbar^2 / 2m} = \frac{4\pi(1 - z)}{\lambda_T^2} \quad (3.22)$$

dove  $z = e^{\beta\mu}$  è la fugacità e  $\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$  la lunghezza d'onda termica di De Broglie. Sostituendo l'equazione (3.21) in (3.5) troviamo la funzione di correlazione  $G^1(s)$ :

$$G^1(s) = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik \cdot s} \frac{z}{\beta \frac{\hbar^2}{2m} k^2 + k_c^2} \quad (3.23)$$

L'integrale appena scritto può essere risolto utilizzando il metodo dei residui [15], notando come la funzione abbia due poli rispettivamente in  $k = ik_c$  e  $k = -ik_c$ ; il risultato è il seguente:

$$G^1(s) \propto \frac{e^{-s \cdot k_c}}{s} = \frac{e^{-s/\xi}}{s} \quad (3.24)$$

Notiamo come  $\xi = 1/k_c$  possa essere interpretata come una lunghezza di correlazione; vediamo se è proprio così. Abbiamo la lunghezza di correlazione  $\xi$  espressa come:

$$\xi = \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi(1 - z)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T(1 - z)}} \quad (3.25)$$

Poiché il sistema si avvicina al punto critico da sopra, ossia con  $T > T_C$ , abbiamo che  $z < 1$  e quindi possiamo svilupparlo in serie:

$$1 - z = 1 - e^{\beta\mu} \simeq 1 - (1 + \beta\mu + \dots) \simeq -\beta\mu = -\frac{\mu}{k_B T} \quad (3.26)$$

Utilizzando questa approssimazione, possiamo riscrivere la lunghezza di correlazione come:

$$\xi \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T(-\frac{\mu}{k_B T})}}$$

Il gas di Bose ideale confinato in un volume  $V$  ha una densità degli stati  $g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2}$ ; sapendo ciò, utilizzando la referenza [9] si può vedere come il potenziale chimico  $\mu$ , per una tale densità degli stati, si comporti come:

$$\mu(t) \propto -t^2 \quad (3.27)$$

dove  $t = \frac{T-T_C}{T_C}$  è la temperatura ridotta. Con queste conoscenze siamo ora in grado di ricavarci l'espressione della lunghezza di correlazione  $\xi$ :

$$\xi \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{2mt^2}} \propto t^{-1} \quad (3.27)$$

Per  $T \rightarrow T_C$ , ossia per per  $t \rightarrow 0$ , abbiamo che  $\xi \rightarrow \infty$ , quindi è proprio la lunghezza di correlazione delle fluttuazioni del sistema. L'esponente critico ad essa associata, come si può notare, è pari a:

$$\nu = 1 \quad (3.27)$$

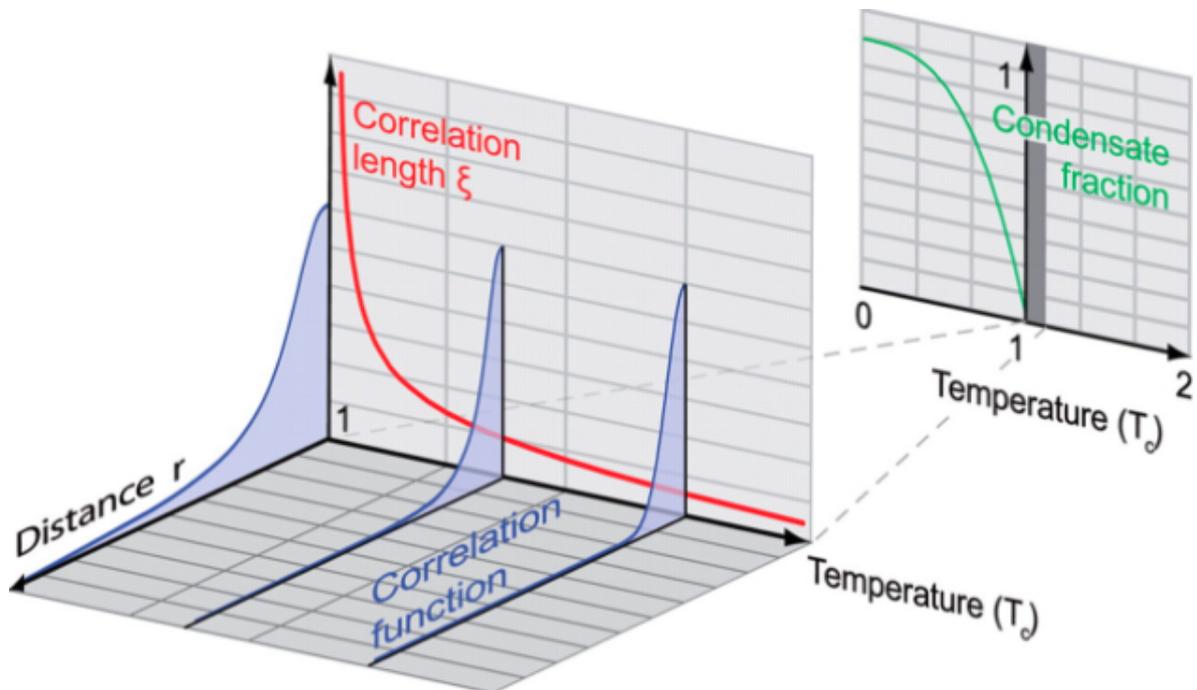


Fig.3.2: Grafico che mostra l'andamento della lunghezza di correlazione  $\xi$  in funzione della temperatura in unità di  $T_C$  (tratto da [8]); si noti come essa diverga per  $T \rightarrow T_C$ .

Una volta che il sistema attraversa il punto critico, la funzione di correlazione  $G^1(s)$  si comporta nel seguente modo:

$$G^1(s) \propto \frac{1}{s} \quad (3.27)$$

mentre la lunghezza di correlazione  $\xi$ , essendo  $z = 1$  per  $T < T_C$ , rimane infinita nel regime di condensazione. Numerosi esperimenti, tra i quali [8], hanno misurato l'esponente critico  $\nu$  ad un valore pari a  $\nu = (0.67 \pm 0.13)$ ; questo valore<sup>6</sup> inferiore è dovuto al fatto che nei sistemi bosonici reali vi sono delle correlazioni dinamiche che nel caso appena

<sup>6</sup>Nel modello di Ising in 3 dimensioni, il valore di  $\nu$  è pari a  $\nu = 0.64$ .

trattato sono state trascurate. In ogni caso, la divergenza della lunghezza di correlazione calcolata in questo lavoro mostra come un sistema di bosoni si trovi, nelle vicinanze del punto critico, in uno stato altamente correlato, dove una particella risente dell'influenza di tutte le altre, anche in assenza di interazioni tra di esse.

# Conclusioni

Con questo lavoro ho voluto ripercorrere gli aspetti principali che descrivono il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein. Partendo dalla statistica di Bose-Einstein per bosoni degeneri non interagenti, nel capitolo 1 è stato dimostrato come da essa emerga il fenomeno dell'occupazione macroscopica dello stato fondamentale; inoltre, nelle sezioni 1.2 e 1.3 vengono mostrati i calcoli che portano alla definizione della temperatura critica  $T_C$  e alle definizioni delle principali funzioni termodinamiche, sia per un gas di Bose ideale confinato in un volume  $V$  che per uno confinato attraverso l'utilizzo di un potenziale armonico. Il calcolo del calore specifico, in entrambi i casi, mostra come ci sia una discontinuità nella medesima funzione quando il sistema attraversa il punto critico, altro chiaro segnale del fenomeno della condensazione.

Nel capitolo 2 abbiamo introdotto i principali aspetti delle transizioni di fase in chiave moderna, nelle quali rientra in tutto e per tutto anche la BEC; abbiamo parlato di matrice densità per una particella, e di come il suo comportamento sia particolarmente interessante (dal punto di vista matematico) quando il sistema si trova nel punto critico; nella seconda sezione abbiamo introdotto il concetto del parametro d'ordine, della rottura spontanea di simmetria di un sistema e di come la condensazione di Bose-Einstein possa essere assimilata al modello di Ising per la magnetizzazione di un sistema ferromagnetico, che durante la transizione di fase si pone in un determinato stato invece che in un altro, generando una rottura di simmetria del sistema; nella terza sezione abbiamo parlato della lunghezza di correlazione, mostrando come essa diverga quando un sistema subisce una transizione di fase, e degli esponenti critici, che definiscono il modo in cui una variabile termodinamica diverge.

Nel capitolo 3 abbiamo utilizzato quanto scritto nel capitolo 2 e lo abbiamo applicato al caso di un gas ideale di Bose omogeneo (confinato in un volume  $V$ ); abbiamo parlato dell'ordine della transizione di fase che caratterizza la BEC; successivamente abbiamo calcolato le funzioni di correlazione di primo e secondo ordine per il gas di Bose, sia per un sistema con temperature molto al di sopra di quella critica che per un sistema con temperature inferiori a  $T_C$ ; per concludere, abbiamo calcolato esplicitamente la lunghezza di correlazione  $\xi$  e il coefficiente ad essa associato  $\nu$ , notando come rientra nei valori mostrati nella tabella 2.3 e come esso si discosti dal valore sperimentalmente misurato: questo perchè questo lavoro si è incentrato sullo sviluppo della transizione di fase di un

gas non interagente, mentre nella realtà qualsiasi sistema bosonico possiede interazioni tra le componenti che alterano il valore dell'esponente critico.

Questo lavoro mostra quindi come la condensazione di Bose-Einstein per un gas ideale sia trattabile come una transizione di fase puramente statistica, ricavabile solamente attraverso mezzi statistici e matematici.

# Bibliografia

- [1] Bose-einstein condensation of an ideal gas. [https://www.nii.ac.jp/qis/first-quantum/e/forStudents/lecture/pdf/qis385/QIS385\\_chap3.pdf](https://www.nii.ac.jp/qis/first-quantum/e/forStudents/lecture/pdf/qis385/QIS385_chap3.pdf).
- [2] Long-range order. [https://www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/cmtm-dam/documents/qg/Chapter\\_07.pdf](https://www.ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/phys/theoretical-physics/cmtm-dam/documents/qg/Chapter_07.pdf).
- [3] Cornell Group at University of Colorado at Boulder. [http://jilawww.colorado.edu/bec/CornellGroup/gallery/images/BEC\\_peaks.jpg](http://jilawww.colorado.edu/bec/CornellGroup/gallery/images/BEC_peaks.jpg).
- [4] M. Cheneau. Bose-einstein condensation of the ideal gas, 2018.
- [5] C. Cohen-Tannoudji and D. Guéry-Odelin. *Advances in Atomic Physics*. World Scientific, 2011.
- [6] C. Cohen-Tannoudji and C. Robilliard. Wave functions, relative phase and interference for atomic bose-einstein condensates. *C. R. Acad. Sci. Paris*, IV:445–477, 2001.
- [7] L. Chen et al. Bose-einstein condensation of an ideal bose gas trapped in any dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31:8292–8293, 1998.
- [8] T.Donner et al. Critical behavior of a trapped interacting bose gas. *Science*, 315:1556–1558, March 2007.
- [9] L. Ferrari. Approaching bose-einstein condensation. *European Journal of Physics*, 32:1548–1549, October 2011.
- [10] L. Ferrari. Elementi di termodinamica statistica. Bologna, Italy, December 2015.
- [11] K. Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New York City, New York, USA, second edition, 1987.
- [12] L. P. Kadanoff. *Statistical Physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, Singapore, 2000.

- [13] M. Marsili and F. Zamponi. Condensazione di bose e superfluidità. <http://www.phys.ens.fr/~zamponi/archivio/teaching/Bosoni.pdf>.
- [14] M. Naraschewski and R. J. Glauber. Spatial coherence and density correlations of trapped bose gases. *Physical Review A*, 59:4595–4596, 1999.
- [15] Fabio Ortolani. Appunti di metodi matematici. <http://campus.unibo.it/155878/1/MetodiMatematici.pdf>.
- [16] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*. Oxford University Press, Oxford, United Kingdom, 2016.
- [17] V. Romero-Rochín and V. S. Bagnato. Thermodynamics of an ideal gas of bosons harmonically trapped: equation of state and susceptibilities. *Braz. J. Phys.*, 35, 2005.