

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**QUIVER E LORO  
RAPPRESENTAZIONI:  
IL TEOREMA DI GABRIEL**

Tesi di Laurea in Algebra

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
**FABRIZIO CASELLI**

**Presentata da:**  
**SIMONE BILLI**

**III Sessione**  
**Anno Accademico 2017-2018**

*[...] On dirait qu'une lumière toujours croissante  
fait de plus en plus étinceler les objets;  
que les fleurs excitées brûlent du désir de rivaliser  
avec l'azur du ciel par l'énergie de leurs couleurs,  
et que la chaleur, rendant visibles les parfums,  
les fait monter vers l'astre comme de fumées. [...]*



# Introduzione

Un quiver è costituito da un insieme di vertici e un insieme di frecce fra di essi. Introduciamo la nozione di rappresentazione per un quiver che abbia un numero finito di vertici e frecce, le rappresentazioni con i morfismi fra di esse formano una categoria abeliana. Questa categoria è equivalente a quella degli  $A$ -moduli destri dove  $A$  è l'algebra dei cammini del quiver, ovvero l'algebra che ha come base tutti i cammini ottenibili percorrendo le frecce e come prodotto quello indotto dalla composizione di cammini. Dal punto di vista della teoria delle rappresentazioni lo studio delle algebre finito dimensionali si riduce allo studio di quozienti dell'algebra dei cammini.

Lo scopo di questa tesi è arrivare a una classificazione dei quiver che hanno solamente un numero finito di rappresentazioni indecomponibili (ovvero che non si possono scrivere come somma diretta di altre rappresentazioni non banali) a meno di isomorfismo. Il risultato è abbastanza recente ed è stato provato da Gabriel nel 1972. Ai nostri fini è necessario sviluppare una teoria omologica delle rappresentazioni, quindi avremo bisogno di introdurre le nozioni di successioni esatte, di risoluzioni proiettive e iniettive, inoltre studieremo il comportamento dei funtori  $\text{Hom}$  su di esse che ci porterà al concetto di estensione. In seguito introdurremo una forma quadratica associata a un quiver, che però sarà indipendente dall'orientazione delle frecce e quindi di fatto legata solamente al grafo descritto dal quiver. Ci chiederemo quali sono i grafi che danno luogo a una forma definita positiva, questi saranno alcuni di quelli che vengono chiamati diagrammi di Dynkin. Viene così svelato un inaspettato legame con la caratterizzazione delle algebre di Lie semisemplici

su un campo algebricamente chiuso, poiché esse sono in corrispondenza biunivoca con questi particolari grafi. Sfruttando qualche risultato di geometria algebrica otterremo che per i grafi a cui è associata una forma positiva, essa ha un numero finito di radici e inoltre  $c'$  è una corrispondenza biunivoca fra le radici e le classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili. Infine vedremo che questi grafi sono gli unici che ammettono un numero finito di classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Quiver e loro rappresentazioni</b>	<b>1</b>
1.1 I Quiver e l'Algebra dei Cammini . . . . .	1
1.2 Rappresentazioni di Quiver . . . . .	4
1.3 Rappresentazioni e A-moduli . . . . .	6
1.4 Decomposizione di una Rappresentazione . . . . .	8
1.5 Nuclei, Conuclei e Immagini . . . . .	12
<b>2 Omologia</b>	<b>15</b>
2.1 Successioni Esatte . . . . .	15
2.2 I funtori Hom . . . . .	20
2.3 Rappresentazioni Semplici, Proiettive e Iniettive . . . . .	24
2.4 Risoluzioni Proiettive e Iniettive . . . . .	31
<b>3 Il Teorema di Gabriel</b>	<b>37</b>
3.1 Lo spazio delle rappresentazioni di un Quiver . . . . .	38
3.2 La Forma Quadratica di un Quiver . . . . .	40
3.3 Diagrammi di Dynkin ed Euclidei . . . . .	43
3.4 Radici . . . . .	46
3.5 Il Teorema di Gabriel . . . . .	48
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>



# Capitolo 1

## Quiver e loro rappresentazioni

### 1.1 I Quiver e l'Algebra dei Cammini

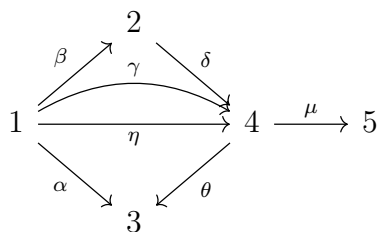
**Definizione 1.1.** Un quiver  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  è costituito da un insieme  $Q_0$  di vertici, un insieme  $Q_1$  di frecce e due funzioni  $s : Q_1 \rightarrow Q_0, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  che indicano rispettivamente da dove comincia e dove finisce la freccia.

Diremo che il quiver è finito se gli insiemi dei vertici e delle frecce sono finiti. Considereremo solamente quiver finiti.

**Esempio 1.1.** Sia  $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  l'insieme dei vertici,  $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \theta, \mu\}$  l'insieme delle frecce,  $s$  e  $t$  date da:

$$s(\alpha) = s(\beta) = s(\gamma) = s(\eta) = 1, s(\delta) = t(\beta) = 2, t(\theta) = t(\alpha) = 3, s(\mu) = t(\eta) = s(\theta) = t(\gamma) = t(\delta) = 4, t(\mu) = 5$$

Allora il quiver si può rappresentare graficamente così:



*Osservazione 1.* Si nota che a ogni quiver è associato in maniera univoca un grafo, ottenuto 'dimenticandosi' dell'orientazione delle frecce. Faremo spesso



riferimento a questo grafo, inoltre come anticipato la caratterizzazione a cui vogliamo arrivare dipenderà solo da esso e non dal quiver in sé.

**Definizione 1.2.** Un quiver  $Q$  si dice connesso se lo è il grafo ad esso associato.

**Definizione 1.3.** Sia  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  un quiver e  $i, j \in Q_0$ . Un cammino di lunghezza  $l$  da  $i$  a  $j$  è una successione

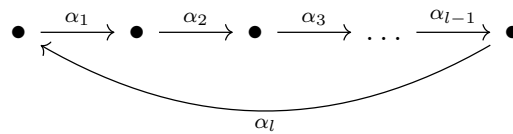
$$c = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$$

con  $\alpha_h \in Q_1$  per ogni  $h = 1, \dots, l$  e tale che

$$\begin{aligned} s(\alpha_1) &= i \\ s(\alpha_h) &= t(\alpha_{h-1}) \text{ per } h = 2, 3, \dots, l \\ t(\alpha_l) &= j. \end{aligned}$$

Ammetteremo anche cammini di lunghezza 0, ovvero cammini costanti in un vertice  $i$ , che verranno indicati con  $e_i$ .

Un cammino  $c = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  per cui  $s(\alpha_1) = t(\alpha_l)$  e  $s(\alpha_i) \neq s(\alpha_j)$  se  $i \neq j$  viene detto ciclo. Un ciclo è della forma:



Intuitivamente un cammino è un percorso da un vertice del quiver a un qualsiasi altro, che segua l'orientamento delle frecce.

**Esempio 1.2.** Considerando il quiver dell'Esempio 1.1,  $\beta\delta\mu$  e  $\gamma\theta$  sono cammini,  $\alpha\theta$  e  $\mu\eta$  non lo sono.

**Definizione 1.4.** Sia  $Q$  un quiver. L'algebra dei cammini  $kQ$  associata al quiver è l'algebra che ha come base l'insieme dei cammini del quiver  $Q$  e come moltiplicazione quella indotta dalla composizione di cammini. Più

precisamente dati due generici elementi scritti come combinazione lineare di cammini il loro prodotto è

$$\left(\sum_c \lambda_c c\right)\left(\sum_{c'} \lambda_{c'} c'\right) = \sum_{c,c'} \lambda_c \lambda_{c'} cc'$$

dove  $cc'$  è il cammino ottenuto dalla composizione dei due se  $s(c') = t(c)$ , mentre è zero altrimenti.

*Osservazione 2.* Indicando con  $e_i$  il cammino costante nel vertice  $i$ -esimo, l'unità dell'algebra  $kQ$  è data da

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i.$$

Se  $a \in kQ$  allora è della forma  $a = \sum_c \lambda_c c$  e quindi  $a1 = \sum_{i \in Q_0} \sum_c \lambda_c ce_i = \sum_c \lambda_c c = a$ . Ugualmente si verifica  $1a = a$ .

Se il quiver ha cicli l'algebra dei cammini non ha dimensione finita, vogliamo considerare quozienti dell'algebra rispetto a ideali in modo tale da ottenere algebre di dimensione finita. Per gli ideali che introdurremo e chiameremo ammissibili, accade che il quoziente ha dimensione finita.

**Definizione 1.5.** L'ideale  $R_Q$  è l'ideale generato da tutte le frecce di  $Q$ .

Se indichiamo con  $kQ_m$  lo spazio generato dai cammini di lunghezza  $m$ , allora abbiamo la scrittura

$$R_Q = \bigoplus_{m \geq 1} kQ_m.$$

L' $l$ -esima potenza dell'ideale si può scrivere quindi

$$R_Q^l = \bigoplus_{m \geq l} kQ_m$$

e ha come base tutti i cammini di lunghezza maggiore o uguale a  $l$ .

**Definizione 1.6.** Un ideale  $I$  di  $kQ$  è detto ammissibile se esiste un intero  $l \geq 2$  tale che  $R_Q^l \subset I \subset R_Q^2$ .

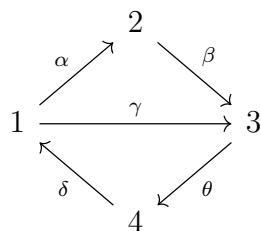
Se  $I$  è un ideale ammissibile la coppia  $(Q, I)$  viene detto quiver limitato e l'algebra quoziente  $kQ/I$  viene detta algebra dei cammini del quiver limitato.

*Osservazione 3.* La condizione  $R_Q^l \subset I$  assicura che l'ideale  $I$  contenga tutti i cammini di lunghezza maggiore o uguale a  $l$ , quindi che l'algebra quoziente  $kQ/I$  sia di dimensione finita.

La condizione  $I \subset R_Q^2$  assicura che l'ideale contenga solo cammini di lunghezza almeno 2 e quindi che non vengano eliminate singole frecce facendo il quoziente.

*Osservazione 4.* Il fatto interessante è che si può dimostrare che lo studio delle  $K$ -algebre di dimensione finita si può ricondurre allo studio delle algebre dei cammini di quiver limitati.

**Esempio 1.3.** Se consideriamo il quiver



allora gli ideali  $I_1 = \langle \alpha\beta, \theta\delta \rangle$  e  $I_2 = \langle \alpha\beta\theta\delta, \gamma\theta\delta \rangle$  sono ammissibili.  $I_1$  è ammissibile con  $R_Q^3 \subset I_1 \subset R_Q^2$  poiché i suoi cammini sono di lunghezza almeno 2 dal momento che lo sono i generatori, inoltre un qualunque cammino di lunghezza 3 appartiene all'ideale poiché multiplo di  $\alpha\beta$  oppure di  $\theta\delta$ . Invece  $R_Q^3$  non è contenuto in  $I_2$  dal momento che per esempio  $\beta\theta\delta \notin I_2$ , ma similmente a quanto visto per  $I_1$  vale  $R_Q^4 \subset I_2 \subset R_Q^2$ .

## 1.2 Rappresentazioni di Quiver

D'ora in poi  $K$  sarà un campo algebricamente chiuso.

**Definizione 1.7.** Una rappresentazione  $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  di un quiver  $Q$  è un insieme di  $K$ -spazi vettoriali  $M_i$  per ogni  $i \in Q_0$  con un insieme di applicazioni  $K$ -lineari  $\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{t(\alpha)}$  per ogni  $\alpha \in Q_1$ . Se ogni spazio vettoriale  $M_i$  ha dimensione finita indicheremo con  $\underline{\text{Dim}} M = (\dim M_i)_{i \in Q_0}$

il vettore dimensione e diremo che la rappresentazione ha dimensione finita.

Un elemento della rappresentazione sarà del tipo  $(m_i)_{i \in Q_0}$  con  $m_i \in M_i$ .

**Definizione 1.8.** Dato un quiver  $Q$  e due sue rappresentazioni  $(M_i, \varphi_\alpha), (M'_i, \varphi'_\alpha)$  diremo morfismo di rappresentazioni  $f : M \rightarrow M'$  un insieme di applicazioni lineari  $(f_i : M_i \rightarrow M'_i)_{i \in Q}$  tali che se  $i \xrightarrow{\alpha} j$  è una freccia in  $Q_1$ , per ogni  $m \in M_i$  vale  $f_j(\varphi_\alpha(m)) = \varphi'_\alpha(f_i(m))$ . Ovvero tali che il seguente diagramma commuti.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

Un isomorfismo di rappresentazioni è un morfismo di rappresentazioni in cui  $f_i$  è isomorfismo di spazi vettoriali per ogni  $i \in Q_0$ .

*Osservazione 5.* Fissato un certo quiver  $Q$  le sue rappresentazioni di dimensione finita e i morfismi fra di esse costituiscono oggetti e morfismi di una categoria che indicheremo con  $\text{Rep } Q$ , se  $M$  è un oggetto di questa categoria scriveremo  $M \in \text{Rep } Q$ .

*Osservazione 6.* Se  $M, M' \in \text{Rep } Q$  allora l'insieme dei morfismi da  $M$  a  $M'$ , che viene indicato con  $\text{Hom}(M, M')$ , ha una struttura di  $K$ -spazio vettoriale con le operazioni  $(f + g)((m)_{i \in Q_0}) = (f_i(m_i) + g_i(m_i))_{i \in Q_0}$  e  $kf((m)_{i \in Q_0}) = (kf_i(m_i))_{i \in Q_0}$  dove  $f, g \in \text{Hom}(M, M')$  e  $k \in K$ .

**Esempio 1.4.** Sia  $Q$  il quiver

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$$

allora

$$M = \left( K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{0} 0 \right)$$

e

$$M' = \left( K^2 \xrightarrow{\varphi_\alpha} K^2 \xleftarrow{\varphi_\beta} K \right)$$

con  $\varphi_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\varphi_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , sono rappresentazioni.

Vogliamo studiare  $\text{Hom}(M, M')$ .

Innanzitutto  $f_3 = 0$ . Per imporre la condizione di commutatività su  $\alpha$  dobbiamo imporre  $f_2 1_K = \varphi_\alpha f_1$ . Abbiamo  $f_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  e  $f_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$  quindi la

condizione è

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

da cui otteniamo  $y_2 = y_1$  e  $x_2 = x_1 + y_1$ , dunque un morfismo è determinato dalla scelta di  $x_1$  e  $y_1$ , cioè  $\text{Hom}(M, M')$  ha dimensione 2.

### 1.3 Rappresentazioni e A-moduli

**Definizione 1.9.** Dato un quiver  $Q$  e un ideale ammissibile  $I$ , una rappresentazione del quiver limitato  $(Q, I)$  è una rappresentazione di  $Q$  per cui se  $\rho = \sum_c \lambda_c c$  è una relazione in  $I$  allora  $\sum_c \lambda_c \varphi_c = 0$ , dove con  $\varphi_c$  indichiamo la composizione di applicazioni seguendo il cammino  $c$ , più precisamente se  $c = \alpha_1, \dots, \alpha_l$  allora  $\varphi_c = \varphi_{\alpha_l} \dots \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_1}$ .

Indicheremo la categoria di tali rappresentazioni con  $\text{Rep}(Q, I)$ .

Ricordiamo che data un'algebra  $A$ , gli  $A$ -moduli destri e loro morfismi formano una categoria che indicheremo con  $\text{Mod } A$ . Il seguente risultato ci dice che è equivalente studiare le rappresentazioni di un quiver  $Q$  a studiare i moduli sull'algebra dei cammini.

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $Q$  un quiver connesso e finito,  $I$  un ideale ammissibile e  $A = kQ/I$ . C'è un'equivalenza di categorie fra la categoria  $\text{Mod } A$  degli  $A$ -moduli destri finitamente generati e la categoria  $\text{Rep}(Q, I)$  delle rappresentazioni del quiver limitato.*

$$\text{Mod } A \cong \text{Rep}(Q, I)$$

*Dimostrazione.* Costruiremo esplicitamente due funtori  $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Rep}(Q, I)$  e  $G : \text{Rep}(Q, I) \rightarrow \text{Mod } A$  tali che  $F \circ G \cong 1_{\text{Rep}(Q, I)}$  e  $G \circ F \cong 1_{\text{Mod } A}$ .

Se  $M$  è un  $A$ -modulo allora poniamo  $F(M) = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  la rappresentazione dove  $M_i = Me_i = \{me_i | m_i \in M_i\}$  e data una freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  l'applicazione associata  $\varphi_\alpha : M_i \rightarrow M_j$  è data da  $\varphi_\alpha(me_i) = m(e_i\alpha)$ , cioè  $m\alpha$  se  $s(\alpha) = i$  e zero altrimenti. Dato un morfismo  $f : M \rightarrow M'$  di  $A$ -moduli definiamo  $F(f)$  il morfismo di rappresentazioni le cui componenti sono  $f_i : M_i \rightarrow M'_i$  date da  $f_i(me_i) = f(m)e_i$ .

Vediamo che  $F$  sia ben definito: ogni  $Me_i$  è uno spazio vettoriale e ogni  $\varphi_\alpha$  è un' applicazione lineare, quindi  $F(M)$  è una rappresentazione del quiver.  $F(f)$  è effettivamente un morfismo poiché data una freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  abbiamo  $f_j\varphi_\alpha(me_i) = f(m)e_i\alpha = \varphi'_\alpha f_i(me_i)$ . Come ultima cosa dobbiamo verificare che  $F(M)$  soddisfi le relazioni date da  $I$ . Se  $\rho = \sum \lambda_c c$  è una relazione in  $I$  allora dobbiamo mostrare che  $\sum \lambda_c \varphi_c = 0$ : per  $me_i \in M_i$  vale  $\varphi_c(me_i) = me_{i(c)}$  e quindi

$$\sum \lambda_c \varphi_c(me_i) = \sum \lambda_c m c = m \sum \lambda_c c = m\rho = 0.$$

Definiamo ora il funtore  $G$ . Sia  $(M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  una rappresentazione di  $(Q, I)$ , allora definiamo l'immagine della rappresentazione tramite  $G$  come lo spazio vettoriale  $M = \bigoplus_{i \in Q_0} M_i$  con la seguente operazione: se  $m \in M$  e  $a \in A$ , cioè  $a = \sum \lambda_c c + I$ , allora  $m \cdot a = \sum \lambda_c \varphi_c(m)$  dove  $\varphi_c(m) = (0, \dots, 0, \varphi_c(m_{s(c)}), 0, \dots, 0)$  è un vettore la cui unica componente non nulla è la  $t(c)$ -esima.

Dobbiamo dimostrare che l'operazione  $m \cdot a$  non dipende dalla scelta di  $\sum \lambda_c c$ . Sia quindi  $\sum \mu_c c$  tale che  $\sum \lambda_c c - \sum \mu_c c \in I$ , ma allora

$$\sum \lambda_c \varphi_c(m) - \sum \mu_c \varphi_c(m) = \sum (\lambda_c - \mu_c) \varphi_c(m)$$

e dato che  $(M_i, \varphi_\alpha)$  è una rappresentazione di  $(Q, I)$  abbiamo che  $\sum (\lambda_c - \mu_c) \varphi_c$  è la applicazione nulla. Dato  $f = (f_i)_{i \in Q_0}$  un morfismo in  $\text{Rep}(Q, I)$  definiamo  $G(f) : M \rightarrow M'$  come  $G(f)(m) = (f_i(m_i))_{i \in Q_0}$ .

Verifichiamo ora che  $M$  con l'operazione definita soddisfi la definizione di  $A$ -modulo. Siano  $m, m' \in M$ ,  $\lambda \in K$  e  $a, a' \in A$ . Possiamo ricondurci al caso in cui  $a = c + I, a' = c' + I$  per cui valgono:

1.  $(m + m')a = \varphi_c(m + m') = \varphi_c(m) + \varphi_c(m') = ma + m'a$

$$2. m(a + a') = (\varphi_c + \varphi_{c'})(m) = \varphi_c(m) + \varphi_{c'}(m) = ma + ma'$$

$$3. m(aa') = \varphi_{cc'}(m) = \varphi_{c'} \circ \varphi_c(m) = (ma)a'$$

$$4. m1 = m \sum_{i \in Q_0} e_i = \sum_{i \in Q_0} \varphi_{e_i}(m) = \sum_{i \in Q_0} m_i = m.$$

Ora vediamo che  $G(f) : M \rightarrow M'$  sia effettivamente un morfismo di  $A$ -moduli. Dato che  $f_i$  sono lineari allora lo è anche  $G(f)$ . Sia  $(m_i)_{i \in Q_0} \in M$  e  $a = c + I \in A$ , allora  $G(f)(ma) = (f_i(\varphi_c(m)))_i$  che vale  $f_{t(c)}(\varphi_c(m_{s(c)}))$  nella componente  $t(s)$ -esima e zero nelle altre. D'altra parte  $G(f)(m)a = (f_i(m_i))_i a$  che vale  $\varphi'_c(f_{s(c)}(m_{s(c)}))$  nella componente  $t(c)$ -esima e zero nelle altre. Dal momento che  $f$  è un morfismo vale  $\varphi'_c f_{s(c)} = f_{t(c)} \varphi_c$  per ogni cammino  $c$ , quindi  $G(f)(ma) = G(f)(m)a$  e questo vuol dire che  $G(f)$  è un morfismo di moduli.

È immediato che  $F$  e  $G$  come definiti sono dei funtori. Rimane da verificare che  $F \circ G \cong 1_{\text{Rep}(Q, I)}$  e  $G \circ F \cong 1_{\text{Mod } A}$ .

Sia  $(M_i, \varphi_\alpha) \in \text{Rep}(Q, I)$  una rappresentazione e indichiamo con  $M$  la sua immagine tramite  $G$ . Allora la rappresentazione  $F(M)$  ha come spazio vettoriale nel vertice  $i$ -esimo  $Me_i = (\oplus M_i)e_i = M_i$  e l'applicazione lineare  $M_i \rightarrow M_j$  associata a una freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  manda  $m_i$  in  $m_i \alpha = \varphi_\alpha(m_i)$ , quindi  $F(M) = (M_i, \varphi_\alpha)$ .

Sia ora  $M \in \text{Mod } A$  e sia  $F(M) = (M_i, \varphi_\alpha)$ . Allora lo spazio vettoriale del modulo  $GF(M)$  è  $\oplus M_i = \oplus Me_i \cong M$  e la moltiplicazione è data da  $m \cdot \sum \lambda_c c = \sum \lambda_c \varphi_c(m) = \sum \lambda_c mc$ . Dunque  $G \circ F \cong 1_{\text{Mod } A}$  e la prova è completata.

*Osservazione 7.* In particolare se consideriamo l'ideale banale, otteniamo l'equivalenza  $\text{Rep } Q \cong \text{Mod } A$  con  $A = kQ$  in cui non compaiono relazioni.

□

## 1.4 Decomposizione di una Rappresentazione

Introduciamo ora il concetto di somma diretta di rappresentazioni che ci permetterà di dare significato alla nozione di rappresentazione indecomponi-

bile.

**Definizione 1.10.** Siano  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  e  $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$  rappresentazioni di un quiver  $Q$ , allora la somma diretta di  $M$  e  $M'$  è

$$M \oplus M' = \left( M_i \oplus M'_i, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix} \right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

Per  $M_1, M_2, \dots, M_t \in \text{Rep } Q$  definiamo la somma diretta ricorsivamente come  $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_t = (M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_{t-1}) \oplus M_t$ .

**Definizione 1.11.** Una rappresentazione  $M \in \text{Rep } Q$  si dice indecomponibile se  $M \neq 0$  e qualora sia  $M \cong N \oplus L$  con  $N, L \in \text{Rep } Q$  allora  $N = 0$  oppure  $L = 0$ .

**Esempio 1.5.** Siano  $M, M'$  le rappresentazioni dell'Esempio 1.4. La rappresentazione  $M \oplus M'$  è data da

$$K \oplus K^2 \xrightarrow{\psi_\alpha} K \oplus K^2 \xleftarrow{\psi_\beta} 0 \oplus K \cong K$$

dove

$$\psi_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\psi_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La rappresentazione  $M$  è indecomponibile, mentre  $M'$  è isomorfa a

$$(K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{1} K) \oplus (K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{0} 0)$$

quindi non indecomponibile.

Vogliamo arrivare al risultato che ogni rappresentazione ha un'unica scrittura come somma diretta di indecomponibili a meno dell'ordine. Per fare ciò proveremo i risultati per  $A$ -moduli e grazie alla corrispondenza li otterremo per rappresentazioni.



**Proposizione 1.4.1.** *Sia  $A$  una  $K$ -algebra e  $M$  un  $A$ -modulo finitamente generato. Se  $M$  è indecomponibile ogni endomorfismo  $f \in \text{End}(M)$  è della forma  $f = \lambda 1_M + g$  dove  $\lambda \in K$  e  $g \in \text{End}(M)$  un endomorfismo nilpotente.*

*Dimostrazione.* L'endomorfismo di moduli  $f : M \rightarrow M$  è anche una applicazione lineare fra  $K$ -spazi vettoriali di dimensione finita, dal momento che  $K$  è algebricamente chiuso il polinomio caratteristico di  $f$  è

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^t (x - \lambda_i)^{\mu_i}$$

in cui  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $f$ . Sia  $M_i = \text{Ker}(f - \lambda_i 1_M)^{\mu_i}$ , allora  $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_t$ . Consideriamo  $h_i = (f - \lambda_i 1_M)^{\mu_i}$ , essendo polinomi in  $f$ ,  $h_i \in \text{End}(M)$  e di conseguenza  $M_i = \text{Ker } h_i$  sono  $A$ -moduli, dunque la decomposizione data in spazi vettoriali è anche una decomposizione in moduli. Essendo  $M$  indecomponibile abbiamo che  $t = 1$  e  $f$  ha un solo autovalore e quindi è rappresentato da una matrice triangolare superiore con diagonale costante  $\lambda$  rispetto un'opportuna base e quindi  $f = \lambda 1_M + g$  con  $g$  nilpotente.  $\square$

Questa caratterizzazione degli endomorfismi è valida per rappresentazioni (grazie all'equivalenza vista) e ci servirà in seguito.

**Corollario 1.4.2.** *Sia  $M$  un  $A$ -modulo di dimensione finita e indecomponibile. Allora ogni endomorfismo  $f \in \text{End } M$  è nilpotente oppure è un isomorfismo.*

*Inoltre se  $f_i \in \text{End } M$  è un endomorfismo nilpotente per  $i = 1, \dots, n$ , allora  $f = \sum_{i=1}^n f_i$  è ancora nilpotente.*

*Dimostrazione.* Per la proposizione 1.4.1,  $f = \lambda 1_M + g$  con  $g$  nilpotente. Se  $\lambda = 0$  allora  $f$  è nilpotente, altrimenti è un isomorfismo.

Per la seconda affermazione procediamo per induzione su  $n$ . Il passo base è ovvio, supponiamo vero per  $n - 1$  e supponiamo per assurdo che  $f = \sum_{i=1}^n f_i$  non sia nilpotente. Dunque  $f$  è un isomorfismo, quindi vale  $\sum_{i=1}^n f^{-1} f_i = 1$  e gli  $f^{-1} f_i$  sono nilpotenti perchè non sono isomorfismi. A questo punto

$1 - f^{-1}f_n = f^{-1}f_1 + \cdots + f^{-1}f_{n-1}$  è un isomorfismo poiché somma di un isomorfismo e un nilpotente, questo contraddice l'ipotesi.  $\square$

**Teorema (Krull-Schmidt) 1.4.3.** *Sia  $A$  un'algebra. Ogni  $A$ -modulo finitamente generato ha una scrittura unica come somma diretta di indecomponibili a meno di isomorfismo e ordine degli addendi.*

*Dimostrazione.* Sia  $M \in \text{Mod } A$ , l'esistenza della decomposizione è immediata con un'induzione sulla dimensione di  $M$ .

Per l'unicità procediamo sempre per induzione sulla dimensione. Sia  $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r = M'_1 \oplus \cdots \oplus M'_s$  e siano  $i_k : M_k \rightarrow M$ ,  $i'_k : M'_k \rightarrow M$ ,  $p_k : M \rightarrow M_k$ ,  $p'_k : M \rightarrow M'_k$  rispettivamente le inclusioni e le proiezioni. Sia  $\theta_k = p_1 i'_k p'_k i_1 : M_1 \rightarrow M_1$ , con questa notazione vale  $\sum_{k=1}^s \theta_k = 1$ . Per il corollario esiste un  $k$  tale che  $\theta_k$  sia un isomorfismo, supponiamo per semplicità  $k = 1$ . In questo caso  $M'_1 = \text{Ker}(p_1 i'_1) \oplus \text{Im}(p'_1 i_1)$ , poiché se  $m \in M'_1$  ma  $m \notin \text{Ker}(p_1 i'_1)$  vale  $p_1(i'_1(m)) \neq 0$  cioè  $i'_1(m) \in M'_1 \cap M_1$  e quindi  $p'_1 i_1 p_1 i'_1(m) = m \in \text{Im}(p'_1 i_1)$ . Inoltre se  $m \in \text{Ker}(p_1 i'_1) \cap \text{Im}(p'_1 i_1)$  e  $m \neq 0$  abbiamo che  $p_1(i'_1(m)) = 0$  da cui  $m \notin M_1$ , ma da  $m \in \text{Im}(p'_1 i_1)$  deriva che  $m \in M_1$ , per cui deve per forza essere  $m = 0$ . Dal momento che  $M'_1$  è indecomponibile e  $\theta_1$  è isomorfismo, otteniamo  $\text{Im}(p'_1 i_1) = M'_1$  e  $\text{Ker}(p_1 i'_1) = 0$ , di conseguenza  $f = p'_1 i_1 : M_1 \rightarrow M'_1$  e  $g = p_1 i'_1 : M'_1 \rightarrow M_1$  sono isomorfismi. Siano ora  $B = \bigoplus_{j>1} M_j$ ,  $B' = \bigoplus_{j>1} M'_j$ , quindi  $M = M_1 \oplus B = M'_1 \oplus B'$ . Consideriamo la funzione  $h : B \rightarrow B'$  ottenuta come composizione dell'inclusione di  $B$  in  $M$  con la proiezione da  $M$  a  $B'$ . Sia ora  $v \in \text{Ker } h \subset B$ , allora  $v \in M'_1$ . D'altra parte  $v \in B$  quindi  $p_1(v) = 0$  ma allora  $g(v) = 0$ , dato che  $g$  è un isomorfismo  $v = 0$  e anche  $h$  è un isomorfismo fra  $B$  e  $B'$ .  $\square$

**Teorema 1.4.4.** *Sia  $Q$  un quiver e  $M \in \text{Rep } Q$  allora  $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_t$  con  $M_i \in \text{Rep } Q$  indecomponibili. Inoltre gli  $M_i$  sono unici a meno di isomorfismi e la scrittura è unica a meno dell'ordine.*

*Dimostrazione.* Rileggendo il teorema precedente alla luce dell'equivalenza fra rappresentazioni e moduli sull'algebra dei cammini associata a  $Q$ , si ottiene il risultato.  $\square$

## 1.5 Nuclei, Conuclei e Immagini

Vogliamo introdurre le nozioni di nucleo, conucleo e immagine di morfismi fra rappresentazioni, in analogia con quelle note per applicazioni lineari fra spazi vettoriali.

Nella teoria delle categorie il nucleo di un morfismo  $M \xrightarrow{g} N$  è un morfismo  $L \xrightarrow{f} M$  tale che  $gf = 0$  e dato un qualunque altro morfismo  $X \xrightarrow{v} M$  tale che  $gv = 0$ , allora esiste un unico  $X \xrightarrow{u} L$  tale che  $fu = v$ .

Il conucleo di un morfismo  $L \xrightarrow{f} M$  è un morfismo  $M \xrightarrow{g} N$  tale che  $gf = 0$  e dato un qualunque altro morfismo  $M \xrightarrow{v} X$  tale che  $vf = 0$ , esiste un unico  $N \xrightarrow{u} X$  tale che  $ug = v$ .

Siano  $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ,  $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  due rappresentazioni di  $Q$  e sia  $f : M \rightarrow M'$  un morfismo.

**Definizione 1.12.** Il nucleo del morfismo  $f$  è la rappresentazione  $\text{Ker } f = (L_i, \psi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  dove  $L_i = \text{Ker } f_i$  per ogni  $i \in Q_0$  e data una freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  allora  $\psi_\alpha : L_i \rightarrow L_j$  è la restrizione di  $\varphi_\alpha$  a  $\text{Ker } f_i$ .

Bisogna controllare che effettivamente  $\psi_\alpha(x) \in \text{Ker } f_j$  per ogni  $x \in \text{Ker } f_i$ : questo deriva da  $f_j \varphi_\alpha(x) = \varphi'_\alpha f_i(x)$ . Il fatto che  $\text{Ker } f$  sia una rappresentazione deriva dalla definizione delle  $\psi_\alpha$ .

**Definizione 1.13.** Il conucleo del morfismo è la rappresentazione  $\text{Coker } f = (N_i, \chi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  dove  $N_i = \text{Coker } f_i = M'_i / f_i(M_i)$  per  $i \in Q_0$  e se  $\alpha$  è una freccia da  $i$  a  $j$  allora  $\chi_\alpha : N_i \rightarrow N_j$  è definita da  $\chi_\alpha(m'_i + f_i(M_i)) = \varphi'_\alpha(m'_i) + f_j(M_j)$  per ogni  $m'_i \in M'_i$ .

In questo caso bisogna verificare che  $\chi_\alpha$  sia ben definita. Se  $m'_i, m''_i \in M'_i$  sono due elementi della stessa classe, cioè  $m'_i - m''_i \in f_i(M_i)$ , allora  $\varphi'_\alpha(m'_i) - \varphi'_\alpha(m''_i) = \varphi'_\alpha(m'_i - m''_i) \in \varphi'_\alpha f_i(M_i) = f_j \varphi_\alpha(M_i) \subset f_j(M_j)$ . Quindi  $\chi_\alpha(m'_i + f_i(M_i)) - \chi_\alpha(m''_i + f_i(M_i)) = \varphi'_\alpha(m'_i) + f_j(M_j) - \varphi'_\alpha(m''_i) - f_j(M_j) \in f_j(M_j)$  per quanto visto, cioè  $\chi_\alpha$  è ben definita.

**Definizione 1.14.** La rappresentazione immagine è  $\text{Img } f = (f_i(M_i), \eta_\alpha)$ , con  $\eta_\alpha(f_i(m_i)) = f_j \varphi_\alpha(m_i)$  se  $\alpha$  è una freccia da  $i$  a  $j$ .

L'applicazione  $\eta_\alpha$  è ben definita poiché se  $m'_i \in M_i$  è tale che  $f_i(m'_i) = f_i(m_i)$  allora  $\eta_\alpha(f_i(m'_i)) = f_j\varphi_\alpha(m'_i) = \varphi'_\alpha f_i(m'_i) = \varphi'_\alpha f_i(m_i) = f_j\varphi_\alpha(m_i) = \eta_\alpha(f_i(m_i))$ .

**Definizione 1.15.** Se  $i : L \hookrightarrow M$  è un morfismo iniettivo di rappresentazioni diremo che  $L$  è una sottorappresentazione di  $M$  e la rappresentazione quoziente  $M/L$  è definita come il conucleo di  $i$ .

Possiamo dare anche una versione del primo teorema di omomorfismo per rappresentazioni:

**Teorema 1.5.1.** Se  $f : M \rightarrow N$  è un morfismo di rappresentazioni, allora  $\text{Im} f \cong M/\text{Ker} f$ .

*Dimostrazione.* Il membro di destra è la rappresentazione  $M/\text{Ker} f = (M_i/\text{Ker} f, \mu_\alpha)$  con  $\mu_\alpha(m_i + \text{Ker} f_i) = \varphi_\alpha(m_i) + \text{Ker} f_j$ . Dato che ogni  $f_i$  è un'applicazione lineare abbiamo isomorfismi di spazi vettoriali  $M_i/\text{Ker} f_i \cong f_i(M_i)$  dati da  $F_i(m_i + \text{Ker} f_i) = f_i(m_i)$ .  $F = (F_i)_{i \in Q_0}$  è un morfismo di rappresentazioni poiché data una freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$ , se  $m_i \in M_i$  allora  $\mu_\alpha F_i(m_i + \text{Ker} f_i) = \mu_\alpha(f_i(m_i)) = f_j\varphi_\alpha(m_i) = F_j\eta_\alpha(m_i + \text{Ker} f_i)$ . Questo ci dice che  $F$  è un morfismo di rappresentazioni le cui applicazioni lineari  $F_i$  sono isomorfismi, quindi un isomorfismo di rappresentazioni.  $\square$

Con queste definizioni nuclei e conuclei di morfismi lo sono anche in senso categorico.

Dato un morfismo  $g : M \rightarrow N$  l'inclusione  $f : L = \text{Ker} g \hookrightarrow M$  risulta essere un nucleo. Per ogni vertice  $i \in Q_0$  e ogni  $m_i \in L_i$  vale  $g_i f_i(m_i) = g_i(m_i) = 0$  cioè  $gf = 0$ . Sia ora un altro morfismo  $v : X \rightarrow M$  tale che  $gv = 0$ . Se  $M = (M_i, \varphi_\alpha), L = (L_i, \psi_\alpha), X = (X_i, \chi_\alpha)$ , per ogni  $i \in Q_0$  e ogni  $x_i \in X$  abbiamo che  $v(x_i) \in \text{Ker} g_i = L_i$  quindi possiamo definire una funzione  $u : X \rightarrow L$  data da  $u_i(x_i) = v_i(x_i)$ . Chiaramente  $fu = v$ , dobbiamo solo verificare che effettivamente  $u$  sia un morfismo di rappresentazioni. Sia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  una freccia in  $Q$  e sia  $x_i \in X_i$ , allora  $\psi_\alpha u_i(x_i) = \varphi_\alpha v_i(x_i) = v_j \chi_\alpha(x_i) = u_j \chi_\alpha(x_i)$ . L'unicità deriva dal fatto che  $f$  sia l'inclusione.

Dato un morfismo  $f : L \rightarrow M$  la proiezione a quoziente  $g : M \rightarrow N = \text{Coker } f = M/\text{Img } f$  risulta essere un conucleo. Ovviamente  $gf = 0$ , supponiamo che ci sia  $v : M \rightarrow X$  tale  $vf = 0$ . Definiamo una funzione  $u : N \rightarrow X$  le cui componenti sono date da  $u_i(m_i + \text{Img } f_i) = v_i(m_i)$  se  $m_i \in M_i$ . Questa è ben definita dal momento che se  $m'_i \in M_i$  è tale che  $m_i - m'_i \in \text{Img } f$  si ha  $v_i(m_i - m'_i) = 0$  visto che  $vf = 0$ , quindi  $v_i(m_i) = v_i(m'_i)$ . Per definizione  $ug = v$ , inoltre  $u$  è un morfismo di rappresentazioni poiché lo è  $v$ .

*Osservazione 8.* Con le definizioni date di somma diretta, nuclei, conuclei e grazie al teorema di isomorfismo la categoria  $\text{Rep } Q$  risulta essere una categoria abeliana.

# Capitolo 2

## Omologia

Le definizioni e risultati che daremo in questa sezione sono validi in generale in una categoria abeliana, sono utilizzate per esempio nell'ambito della topologia algebrica, dove al posto di rappresentazioni di quiver si considerano gruppi legati allo spazio da cui si ricavano le successioni di gruppi di omologia, che sono invarianti di omotopici.

### 2.1 Successioni Esatte

**Definizione 2.1.** Una successione di morfismi fra rappresentazioni

$$\dots \rightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

si dice esatta in  $M_i$  se  $\text{Ker } f_i = \text{Im} f_{i-1}$ . Si dice esatta se è esatta in ogni  $M_i$ .

**Definizione 2.2.** Una successione esatta si dice corta se è della forma

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

.

**Esempio 2.1.** Dato un morfismo  $f : M \rightarrow N$  possiamo sempre costruire la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \text{Coker } f \rightarrow 0$$

e la successione esatta corta

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M/\text{Ker } f \rightarrow 0$$

dove  $i$  è l'inclusione e  $p$  la proiezione.

**Definizione 2.3.** Un morfismo  $f : L \rightarrow M$  si dice sezione se esiste un morfismo  $h : M \rightarrow L$  tale che  $h \circ f = 1_L$  dove  $1_L$  è l'identità di  $L$ . Un morfismo  $g : M \rightarrow N$  si dice retrazione se esiste un morfismo  $h' : N \rightarrow M$  tale che  $g \circ h' = 1_N$

**Esempio 2.2.** In generale se  $f$  è una sezione allora è iniettiva poiché essendo  $h \circ f = 1$  per forza il suo nucleo è banale. Se  $g$  è una retrazione allora è suriettiva dal momento che lo è  $g \circ h' = 1$ .

Nel caso degli spazi vettoriali sezioni e retrazioni sono esattamente le applicazioni lineari rispettivamente iniettive e suriettive. Infatti se  $V$  e  $W$  sono spazi vettoriali e  $f : V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare iniettiva allora  $f : V \rightarrow \text{Im } f$  è invertibile, definendo  $h : W \rightarrow V$  come l'inversa di  $f$  sui vettori dell'immagine di  $f$  e in maniera arbitraria sugli altri vettori, abbiamo  $h \circ f = 1_V$ . Se  $g : V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare suriettiva per il primo teorema di omomorfismo c'è un isomorfismo  $\tilde{g} : V/\text{Ker } g \rightarrow W$ , definendo  $h' : W \rightarrow V$  come  $h'(w) = v$  se  $\tilde{g}(v + \text{Ker } g) = w$ , allora  $g \circ h' = 1_W$ .

**Definizione 2.4.** Diremo che la successione esatta corta

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

è spezzante se  $f$  è una sezione.

La definizione di successione spezzante si potrebbe dare equivalentemente chiedendo che  $g$  sia una retrazione grazie alla:

**Proposizione 2.1.1.** *Sia data la successione esatta corta*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

*allora  $f$  è una sezione se e solo se  $g$  è una retrazione.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $f$  sia una sezione, quindi esiste  $h \in \text{Hom}(M, L)$  per cui  $hf = 1_L$ . Sia  $n \in N$ , dal momento che  $g$  è suriettiva esiste  $m \in M$  tale che  $g(m) = n$ , possiamo allora definire  $h' : N \rightarrow M$  come  $h'(n) = m - fh(m)$ . Dobbiamo verificare che sia ben definita. Supponiamo ci sia un altro  $m' \in M$  tale che  $g(m) = g(m') = n$ , allora  $g(m - m') = g(m) - g(m') = 0$  quindi  $m - m' \in \text{Ker } g = \text{Im } f$ . Esiste per cui  $l \in L$  tale che  $f(l) = m - m'$ , ma allora

$$\begin{aligned} m - fh(m) - (m' - fh(m')) &= m - m' - fh(m - m') = \\ &= m - m' - fhf(l) = m - m' - f(l) = 0 \end{aligned}$$

in cui  $f(l) = fhf(l)$  perchè per ipotesi  $hf = 1_L$ . Questo ci dice che  $h'(m) = m - fh(m) = m' - fh(m') = h'(m')$  e quindi che  $h'$  è ben definita.

Ora vediamo che  $h'$  sia un morfismo. Se  $L = (L_i, \varphi_\alpha)$ ,  $M = (M_i, \varphi'_\alpha)$ ,  $N = (N_i, \varphi''_\alpha)$  e  $\alpha \in Q_1$  una freccia da  $i$  a  $j$ , allora abbiamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} L_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & L_j \\ h_i \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow f_i \end{array} \right) & & \left( \begin{array}{c} \downarrow f_j \\ \uparrow \end{array} \right) h_j \\ M_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M_j \\ h'_i \left( \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow g_i \end{array} \right) & & \left( \begin{array}{c} \downarrow g_j \\ \uparrow \end{array} \right) h'_j \\ N_i & \xrightarrow{\varphi''_\alpha} & N_j \end{array}$$

che commuta rispetto  $f, g$  e  $h$ . Vogliamo vedere che commuti anche per  $h'$ . Sia  $n_i \in N_i$  e sia  $m_i \in M_i$  tale che  $g_i(m_i) = n_i$ , allora

$$\varphi'_\alpha h'_i(n_i) = \varphi'_\alpha(m_i - f_i h_i(m_i)) = \varphi'_\alpha(m_i) - \varphi'_\alpha f_i h_i(m_i)$$

che per la commutatività di  $f$  e  $h$  è uguale a  $\varphi'_\alpha(m_i) - f_j h_j \varphi'_\alpha(m_i)$ . Inoltre

$$h'_j \varphi''_\alpha(n_i) = h'_j \varphi''_\alpha g_i(m_i) = h'_j g_j \varphi'_\alpha(m_i)$$

che è uguale a  $\varphi'_\alpha(m_i) - f_j h_j \varphi'_\alpha(m_i)$  per definizione di  $h'$ . Abbiamo quindi visto che  $\varphi'_\alpha h'_i = h'_j \varphi''_\alpha$  e quindi  $h'$  è un morfismo.



Rimane da mostrare che  $gh' = 1_N$ : sia  $n \in N$  e  $m \in M$  tale che  $g(m) = n$ , allora dato che  $gf = 0$  per esattezza, abbiamo

$$gh'(n) = g(m - fh(m)) = g(m) - gf(h(m)) = g(m) = n.$$

Viceversa sia  $g$  una retrazione, quindi esiste  $h' \in \text{Hom}(N, M)$  tale che  $gh' = 1_N$ . Sia  $m \in M$  allora  $m - h'(g(m)) \in \ker g = \text{Im} f$ , quindi esiste  $l \in L$  (unico per iniettività di  $f$ ) tale che  $f(l) = m - h'g(m)$ . Definendo  $h : M \rightarrow L$  come  $h(m) = l$ , per costruzione vale  $hf = 1_L$ .

Vediamo ora che effettivamente  $h$  sia un morfismo. Nelle notazioni di prima sia  $m_i \in M_i$  e sia  $l_i \in L_i$  tale che

$$f_i(l_i) = m_i - h'_i g_i(m_i) \quad (2.1)$$

come nella definizione di  $h$ , allora  $\varphi_\alpha h_i(m_i) = \varphi_\alpha(l_i)$ . Inoltre per definizione abbiamo  $h_j \varphi'_\alpha(m_i) = l_j$  per un unico  $l_j \in L_j$  con la proprietà

$$f_j(l_j) = \varphi'_\alpha(m_i) - h'_j g_j \varphi'_\alpha(m_i). \quad (2.2)$$

Se dimostriamo che  $\varphi_\alpha(l_i) = l_j$ , ricordando che  $l_i = h_i(m_i)$  e  $l_j = h_j \varphi'_\alpha(m_i)$ , otteniamo  $\varphi_\alpha h_i(m_i) = \varphi_\alpha(l_i) = l_j = h_j \varphi'_\alpha(m_i)$  per ogni  $m_i \in M_i$  dunque la tesi. Ora

$$\varphi'_\alpha(m_i) = \varphi'_\alpha f_i(l_i) + \varphi'_\alpha h'_i g_i(m_i) = f_j \varphi_\alpha(l_i) + h'_j g_j \varphi'_\alpha(m_i)$$

dove la prima uguaglianza segue da (2.1) e la seconda deriva dal fatto che  $f$  e  $g$  siano morfismi. Sostituendo l'ultima uguaglianza in (2.2) otteniamo  $f_j(l_j) = f_j \varphi_\alpha(l_i)$  che implica  $\varphi_\alpha(l_i) = l_j$  poichè  $f$  è iniettiva, quindi abbiamo ottenuto quello che volevamo. □

**Esempio 2.3.** Dato  $Q$  il quiver  $1 \rightarrow 2$  e le rappresentazioni

$$M_1 = (0 \rightarrow K)$$

$$M_2 = (K \xrightarrow{1} K)$$

$$M_3 = (K \longrightarrow 0)$$

abbiamo le successioni esatte

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f'} M_1 \oplus M_3 \xrightarrow{g'} M_3 \rightarrow 0$$

dove  $f = (f_1, f_2) = (0, 1)$ ,  $g = (g_1, g_2) = (1, 0)$  e  $f' = (f'_1, f'_2) = (0, 1)$ ,  $g' = (g'_1, g'_2) = (1, 0)$ . La seconda successione spezza tramite il morfismo  $h' : M_1 \oplus M_3 \xrightarrow{(0,1)} M_1$  poiché  $h' \circ f' = 1_{M_1}$  mentre la prima non spezza dato che l'unico morfismo da  $M_2$  a  $M_1$  è il morfismo banale.

**Proposizione 2.1.2.** *Se la successione esatta corta*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

*è spezzante, allora  $\text{Im} g f = \text{Ker } g$  è un addendo diretto di  $M$ . Più precisamente se  $h$  è il morfismo tale che  $gh = 1_M$  allora  $M \cong \text{Im } h \oplus \text{Ker } g$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste  $h \in \text{Hom}(N, M)$  tale che  $gh = 1_M$ . Se  $m = (m_i)_{i \in Q_0} \in M$  allora  $m_i = h_i g_i(m_i) + (m_i - h_i g_i(m_i))$  con  $h_i g_i(m_i) \in \text{Im } h_i$  e  $(m_i - h_i g_i(m_i)) \in \text{Ker } g_i$ . Dato che  $gh = 1_N$  allora per ogni  $i \in Q_0$  vale  $\text{Im } h_i \cap \text{Ker } g_i = 0$  e quindi  $M_i = \text{Im } h_i \oplus \text{Ker } g_i$ . Rimane da controllare la condizione sulle applicazioni lineari, cioè che per ogni freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  in  $Q_1$  valga

$$\varphi'_\alpha = \begin{bmatrix} \varphi'_\alpha|_{\text{Im } h_i} & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha|_{\text{Ker } g_i} \end{bmatrix}.$$

Se  $m_i \in \text{Ker } g_i$  allora  $0 = \varphi''_\alpha g_i(m_i) = g_j \varphi'_\alpha(m_i)$  dato che  $g$  è un morfismo, quindi  $\varphi'_\alpha(m_i) \in \text{Ker } g_j$  e dunque il blocco in alto a destra della matrice associata a  $\varphi'_\alpha$  è nullo. Se invece  $m_i \in \text{Im } h_i$  esiste  $n_i \in N_i$  tale che  $h_i(n_i) = m_i$  e quindi  $\varphi'_\alpha(m_i) = \varphi'_\alpha h_i(n_i) = h_j \varphi''_\alpha(n_i) \in \text{Im } h_j$  da cui anche il blocco in basso a sinistra è nullo. Quindi  $\varphi'_\alpha$  è della forma cercata.

□

**Corollario 2.1.3.** *Se la successione*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

*è esatta corta e spezzante, allora  $M \cong L \oplus N$ .*

*Dimostrazione.*  $f$  è iniettiva quindi  $L \cong f(L) \cong \text{Ker } g$  e dato che  $g$  è suriettiva  $g(M) = N$ . Per ipotesi esiste  $h \in \text{Hom}(N, M)$  tale che  $gh = 1_M$ , questo implica che  $h$  sia iniettiva, cioè  $\text{Im } h \cong N$ . Per la proposizione precedente  $M \cong \text{Ker } g \oplus \text{Im } h \cong L \oplus N$ .  $\square$

## 2.2 I funtori Hom

Vogliamo introdurre due particolari funtori, che studieremo nell'ambito della categoria  $\text{Rep } Q$ . Ci interesseremo in particolare alla loro azione sulle successioni esatte corte.

**Definizione 2.5.** Siano  $L, M, N \in \text{Rep } Q$ , definiamo due funzioni come segue:

$\text{Hom}(L, -)$  associa a una rappresentazione  $M$  lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(L, M)$ , e se  $f \in \text{Hom}(M, N)$  allora  $\text{Hom}(L, -)$  associa a  $f$  l'applicazione lineare  $f_* : \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(L, N)$  definita da  $f_*(g) = f \circ g$  per  $g \in \text{Hom}(L, M)$ .  $\text{Hom}(-, L)$  associa a una rappresentazione  $M$  lo spazio vettoriale  $\text{Hom}(M, L)$ , e se  $f \in \text{Hom}(M, N)$  allora  $\text{Hom}(-, L)$  associa a  $f$  l'applicazione lineare  $f^* : \text{Hom}(N, L) \rightarrow \text{Hom}(M, L)$  definita da  $f^*(g) = g \circ f$  per  $g \in \text{Hom}(N, L)$ .

Queste funzioni sono funtori dalla categoria delle rappresentazioni e loro morfismi a quella degli spazi vettoriali e applicazioni lineari, il primo covariante e il secondo contravariante. Questi possono essere definiti per oggetti in una qualunque categoria (in generale a valori nella categoria degli insiemi e funzioni fra essi).

Utilizzeremo principalmente quello contravariante.

**Teorema 2.2.1.** *Dato un quiver  $Q$  e  $L, M, N \in \text{Rep } Q$ , allora la successione*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

è esatta se e solo se per ogni  $X \in \text{Rep } Q$  lo è anche

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(L, X).$$

Si dice in questo caso che  $\text{Hom}(-, X)$  è esatto a sinistra.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Vediamo che  $g^*$  è iniettiva. Sia  $u \in \text{Hom}(N, X)$  tale che  $g^*(u) = ug = 0$ ; dato che  $g$  è suriettiva abbiamo che  $u = 0$ , cioè  $g^*$  è iniettiva. Sia  $u \in \text{Hom}(N, X)$  allora  $f^*(g^*(u)) = ugf = 0$  poichè per esattezza  $gf = 0$ , allora  $\text{Im } g^* \subset \text{Ker } f^*$ . Dal momento che  $g$  è suriettiva allora  $N \cong M / \text{Ker } g = M / \text{Im } f$  e  $g$  è la proiezione al quoziente, dunque  $g$  è il conucleo di  $f$ . Sia ora  $v \in \text{Ker } f^* \subset \text{Hom}(M, X)$  cioè  $f^*(v) = vf = 0$ , per la proprietà del conucleo esiste  $u \in \text{Hom}(N, X)$  tale che  $v = u \circ g = g^*(u)$ . Allora  $v \in \text{Im } g^*$  e  $\text{Ker } f^* \subset \text{Im } g^*$ .

( $\Leftarrow$ ) Vediamo che  $g$  è suriettiva. Sia  $X = \text{Coker } g$ ,  $p : N \rightarrow X$  la proiezione a quoziente, allora  $g^*(p) = pg = 0$  per definizione e  $p = 0$  per iniettività di  $g^*$ . Essendo  $p$  suriettiva questo implica che  $X = \text{Coker } g = 0$  e ciò significa che  $g$  è suriettiva.

Supponiamo ora  $X = N$ , per esattezza abbiamo che  $f^*g^* = 0$  in particolare  $0 = f^*(g^*(1_N)) = fg$  cioè  $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ . Se invece  $X = \text{Coker } f$  e  $p = M \rightarrow \text{Coker } f$  è la proiezione a quoziente, allora  $f^*(p) = pf = 0$  quindi  $p \in \text{Ker } f^* = \text{Im } g^*$ . Dato che  $p \in \text{Im } g^*$  esiste  $u \in \text{Hom}(N, X)$  tale che  $g^*(u) = ug = p$  ma allora  $\text{Ker } g \subset \text{Ker } p = \text{Im } f$  e con questo  $\text{Ker } g = \text{Im } f$  e la successione è esatta.  $\square$

**Corollario 2.2.2.** *Una successione esatta corta*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

è spezzante se e solo se per ogni  $X \in \text{Rep } Q$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, X) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(L, X) \rightarrow 0$$

è esatta.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Per il teorema precedente basta mostrare che  $f^*$  è suriettiva. Essendo  $f$  una sezione esiste  $h \in \text{Hom}(M, L)$  tale che  $hf = 1_L$ , allora se  $u \in \text{Hom}(L, X)$  ovviamente  $uh \in \text{Hom}(M, X)$  e quindi  $f^*(uh) = uhf = u1_L = u$  e quindi  $f^*$  è suriettiva.

( $\Leftarrow$ ) Sempre per il teorema precedente ci basta mostrare che  $f$  che sia una sezione. Poniamo  $X = L$ , allora essendo  $f^*$  suriettiva esiste  $h \in \text{Hom}(M, L)$  tale che  $f^*(h) = hf = 1_L$  e questo prova quello che volevamo.  $\square$

Ci sono versioni di questi teoremi anche per il funtore covariante, daremo però solo gli enunciati.

**Teorema 2.2.3.** *Sia  $Q$  un quiver e  $L, M, N \in \text{Rep } Q$ , allora*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

*è esatta se e solo se per ogni  $X \in \text{Rep } Q$  lo è*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(X, N).$$

*Anche in questo caso diremo che  $\text{Hom}(X, -)$  è esatto a sinistra.*

**Corollario 2.2.4.** *Una successione esatta corta*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

*è spezzante se e solo se per ogni  $X \in \text{Rep } Q$*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X, L) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(X, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(X, N) \rightarrow 0$$

*è esatta.*

*Osservazione 9.* Se  $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$  è esatta ma non spezzante, applicando il funtore  $\text{Hom}(-, X)$  non si ottengono sempre successioni esatte corte: si ha ancora esattezza, ma  $f^*$  potrebbe non essere suriettiva. In seguito studieremo in che misura  $f^*$  non è suriettiva tramite Coker  $f^*$ .

**Esempio 2.4.** Vediamo un caso in cui applicando il funtore a una successione esatta corta non si ottiene nuovamente una successione esatta corta. Siano  $M_1, M_2, M_3$  come nell' Esempio 2.3, allora avevamo visto che la successione

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

non spezza, applicando il funtore  $\text{Hom}(-, M_1)$  otteniamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M_3, M_1) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M_2, M_1) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M_1, M_1)$$

dove  $\text{Hom}(M_3, M_1) \cong \text{Hom}(M_2, M_1) \cong 0$  ma  $\text{Hom}(M_1, M_1) \cong K$  dunque  $f^*$  non è suriettiva.

Infine introduciamo un'altra costruzione generale, che però ci sarà utile nel nostro ambito.

**Definizione 2.6.** Date  $L, M, M'$  rappresentazioni di  $Q$  e  $f : L \rightarrow M, g : L \rightarrow M'$  morfismi, definiamo il prodotto amalgamato di  $M$  e  $M'$  come

$$X = (M \oplus M') / \{(f(l), -g(l)) | l \in L\}$$

e definiamo due morfismi  $u_1 : M \rightarrow X$  e  $u_2 : M' \rightarrow X$  come  $u_1(m) = \overline{(m, 0)}$  e  $u_2(m') = \overline{(0, m')}$  dove  $\overline{(m, m')}$  indica la classe di  $(m, m') \in M \oplus M'$  in  $X$ .

C'è un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & u_1 \downarrow \\ M' & \xrightarrow{u_2} & X \end{array}$$

poichè  $u_1(f(l)) = \overline{(f(l), 0)} = \overline{(0, g(l)) + (f(l), -g(l))} = \overline{(0, g(l))} = u_2(g(l))$ .

Se

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h} N \rightarrow 0$$

è una successione esatta, definendo  $h' : X \rightarrow N$  con  $h'(\overline{(m, m')}) = h(m)$  otteniamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & g \downarrow & & u_1 \downarrow & & \downarrow 1_N & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u_2} & X & \xrightarrow{h'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con righe esatte. Per la commutatività della parte destra  $1_N(h(m)) = h(m) = h'(\overline{(m, 0)}) = h'(u_1(m))$ . Verifichiamo l'esattezza in  $X$ . Se  $m' \in M'$  allora  $h'(u_2(m')) = h'(\overline{(0, m')}) = h'(0) = 0$  quindi  $\text{Im} u_2 \subset \text{Ker } h'$ . Se invece  $\overline{(m, m')} \in \text{Ker } h'$  allora  $h'(\overline{(m, m')}) = h(m) = 0$  cioè  $m \in \text{Ker } h = \text{Im} f$  e quindi  $m = f(l)$  per un certo  $l \in L$ , ora  $\overline{(m, m')} = \overline{(f(l), m')} = \overline{(0, m' + g(l))} = u_2(m' + g(l))$  e dunque  $\text{Ker } h' \subset \text{Im} u_2$ .

## 2.3 Rappresentazioni Semplici, Proiettive e Iniettive

Introdurremo ora delle particolari rappresentazioni, che risultano essere gli oggetti semplici, proiettivi o iniettivi della nostra categoria  $\text{Rep } Q$ .

Sia d'ora in poi  $Q$  un quiver senza cicli.

**Definizione 2.7.** Sia  $i \in Q_0$  un vertice, allora:

•

$$S(i) = (S(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

è la rappresentazione che ha dimensione uno al vertice  $i$ , cioè  $S(i)_i \cong K$  e 0 altrimenti, mentre  $\varphi_\alpha = 0$  per ogni  $\alpha \in Q_1$ .

$S(i)$  si chiama rappresentazione semplice nel vertice  $i$ .

•

$$P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

è la rappresentazione dove  $P(i)_j$  è lo spazio vettoriale con base l'insieme dei cammini da  $i$  a  $j$  in  $Q$ , quindi un generico elemento di  $P(i)_j$  è della

forma  $\sum_c \lambda_c c$  dove  $c$  varia nei cammini da  $i$  a  $j$  e  $\lambda_c \in K$ . Per quanto riguarda le applicazioni lineari se  $j \xrightarrow{\alpha} l$  allora  $\varphi_\alpha : P(i)_j \rightarrow P(i)_l$  è l'applicazione lineare definita da

$$\varphi_\alpha\left(\sum_c \lambda_c c\right) = \sum_c \lambda_c c\alpha$$

dove  $c\alpha$  è il cammino ottenuto dalla composizione dei due.

$P(i)$  è detta rappresentazione proiettiva nel vertice  $i$ .

•

$$I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

è la rappresentazione dove  $I(i)_j$  è lo spazio vettoriale che ha come base l'insieme dei cammini da  $j$  a  $i$ .

Se  $j \xrightarrow{\alpha} l$  allora  $\varphi_\alpha : I(i)_j \rightarrow I(i)_l$  è l'applicazione lineare definita da

$$\varphi_\alpha\left(\sum_c \lambda_c c\right) = \sum_c \lambda_c f(c)$$

dove  $f(c)$  è il cammino ottenuto da  $c$  eliminando la freccia  $\alpha$  se il cammino inizia con  $\alpha$ ,  $f(c) = 0$  se invece  $c$  non inizia con la freccia  $\alpha$ .

$I(i)$  è detta rappresentazione iniettiva nel vertice  $i$ .

*Osservazione 10.* Sia  $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$  la rappresentazione proiettiva nel vertice  $i$  e  $c = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  un cammino che parte da  $i$  e termina in  $j$ . Allora come già visto possiamo definire una applicazione lineare  $\varphi_c : P(i)_i \rightarrow P(i)_j$  dove  $\varphi_c = \varphi_{\beta_l} \dots \varphi_{\beta_2} \varphi_{\beta_1}$  è la composizione delle applicazioni della rappresentazione lungo il cammino  $c$ . In particolare se  $e_i$  è il cammino costante nel vertice  $i$  allora  $\varphi_c(e_i) = c$  per definizione.

**Definizione 2.8.** Un vertice  $i \in Q_0$  viene detto sorgente se non ci sono frecce  $\alpha \in Q_1$  tali che  $s(\alpha) = i$  e analogamente viene detto foce se non ci sono frecce tali che  $t(\alpha) = i$ .

*Osservazione 11.*  $\acute{E}$  immediato che:

$$S(i) = P(i) \Leftrightarrow i \text{ è una sorgente in } Q$$

$$S(i) = I(i) \Leftrightarrow i \text{ è una foce in } Q$$



**Esempio 2.5.** Sia  $Q$  il quiver

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 \\ & \searrow & \uparrow & & \\ & & 2 & & \end{array}$$

allora  $S(3)$  è

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \uparrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

$P(1)$  è

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & K^2 & \xrightarrow{\varphi_\beta} & K^2 \\ & \searrow 1 & \uparrow \varphi_\gamma & & \\ & & K & & \end{array}$$

con  $\varphi_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\varphi_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\varphi_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

$I(4)$  è

$$\begin{array}{ccccc} K^2 & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & K & \xrightarrow{1} & K \\ & \searrow \varphi_\delta & \uparrow 1 & & \\ & & K & & \end{array}$$

con  $\varphi_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $\varphi_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

La seguente definizione è valida in una qualunque categoria.

**Definizione 2.9.** Un oggetto proiettivo è un oggetto  $P$  per cui il funtore  $\text{Hom}(P, -)$  manda morfismi suriettivi in morfismi suriettivi.

Un oggetto  $I$  è detto iniettivo se il funtore  $\text{Hom}(-, I)$  manda morfismi iniettivi in morfismi iniettivi.

Un oggetto  $S$  è invece detto semplice se non ha sottoggetti propri.

**Proposizione 2.3.1.** Sia  $g : M \rightarrow N$  un morfismo suriettivo di rappresentazioni di  $Q$ . Allora la funzione  $g_* : \text{Hom}(P(i), M) \rightarrow \text{Hom}(P(i), N)$  è suriettiva. In altre parole  $P(i)$  è un oggetto proiettivo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Siano  $(M_i, \psi_\alpha), (N_i, \chi_\alpha)$  e  $(P(i), \varphi_\alpha)$  le rappresentazioni dell'ipotesi e  $f \in \text{Hom}(P(i), N)$ . Dal momento che  $g$  è suriettiva, se consideriamo il cammino costante  $e_i \in P(i)_i$  esiste un  $m_i \in M_i$  tale che  $g_i(m_i) = f_i(e_i)$ . Vogliamo costruire un morfismo  $h : P(i) \rightarrow M$ , poniamo  $h_i(e_i) = m_i$ . Sia ora  $c \in P(i)_j$  un cammino da  $i$  a  $j$ , allora poniamo  $h_j(c) = \psi_c(m_i)$ . Verifichiamo che  $h$ , ottenuto estendendo per linearità, sia un morfismo: se  $j \xrightarrow{\alpha} l$  allora dato un cammino  $c \in P(i)_j$  vale  $h_l(\varphi_\alpha(c)) = h_l(\alpha c) = \psi_{\alpha c}(m_i) = \psi_\alpha(\psi_c(m_i)) = \psi_\alpha(h_j(c))$ . Per come abbiamo definito  $h$  abbiamo  $g_i h_i = f_i$ . Sia ora  $j \neq i$  allora se  $c \in P(i)_j$  vale  $g_j(h_j(c)) = g_j(\psi_c(m_i)) = \chi_c(g_i(m_i)) = \chi_c(f_i(e_i)) = f_j(\varphi_c(e_i)) = f_j(c)$  dal momento che  $f, g$  sono morfismi, quindi  $f = gh$ .  $\square$

**Corollario 2.3.2.** *Se  $P$  è proiettivo, allora ogni successione esatta della forma*

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

*spezza.*

*Dimostrazione.* Usiamo la proposizione precedente con il morfismo  $f = 1_P \in \text{Hom}(P, P)$  e otteniamo per suriettività di  $g^*$  che esiste  $h \in \text{Hom}(P, M)$  tale che  $g^*(h) = gh = 1_P$  cioè  $g$  è una retrazione.  $\square$

Ci sono enunciati analoghi per le rappresentazioni iniettive.

**Proposizione 2.3.3.**  *$I(i)$  è un oggetto iniettivo per ogni  $i \in Q_0$ .*

**Corollario 2.3.4.** *Se  $I$  è iniettivo, allora ogni successione esatta della forma*

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{g} M \rightarrow N \rightarrow 0$$

*spezza.*

Inoltre osserviamo che  $S(i)$  è un oggetto semplice poichè non ammette sottorappresentazioni.

**Proposizione 2.3.5.** *Siano  $P, P'$  rappresentazioni di  $Q$ . Allora:*

$$P \oplus P' \text{ è proiettiva} \Leftrightarrow \text{lo sono } P \text{ e } P'$$

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Sia  $g \in \text{Hom}(M, N)$  un morfismo suriettivo e  $f \in \text{Hom}(P, N)$ . Consideriamo  $p_1 : P \oplus P' \rightarrow P$  la proiezione e  $i_1 : P \rightarrow P \oplus P'$  l'inclusione. Ovviamente  $p_1 \circ i_1 = 1_P$ , dal momento che  $P \oplus P'$  è proiettiva esiste  $h : P \oplus P' \rightarrow M$  tale che  $gh = f \circ p_1$ . Allora

$$ghi_1 = fp_1i_1 = f1_P = f$$

e quindi definendo  $h' : P \rightarrow M$  come  $h' = hi_1$  otteniamo  $gh' = f$ . Quindi  $P$  è proiettiva, lo stesso ragionamento può essere applicato a  $P'$ .

( $\Leftarrow$ ) Sia  $g \in \text{Hom}(M, N)$  un morfismo suriettivo e sia  $f \in \text{Hom}(P \oplus P', N)$ . Se  $i_1 : P \rightarrow P \oplus P'$  denota l'inclusione allora  $fi_1 : P \rightarrow N$  e dal momento che  $P$  è proiettiva, esiste  $h_1 \in \text{Hom}(P \oplus P', M)$  tale che  $gh_1 = fi_1$ . Applicando lo stesso discorso a  $P'$  otteniamo che esiste  $h_2 \in \text{Hom}(P \oplus P', M)$  tale che  $gh_2 = fi_2$ . Definiamo  $h : P \oplus P' \rightarrow M$  come  $h(p, p') = h_1(p) + h_2(p')$ . In questo modo

$$gh(p, p') = gh_1(p) + gh_2(p') = fi_1(p) + fi_2(p') = f(p, 0) + f(0, p') = f(p, p')$$

e quindi  $P \oplus P'$  è proiettiva.  $\square$

C'è anche un enunciato analogo per rappresentazioni iniettive.

**Proposizione 2.3.6.** *Siano  $I, I'$  rappresentazioni di  $Q$ . Allora:*

$$I \oplus I' \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \text{lo sono } I \text{ e } I'$$

Le rappresentazioni introdotte sono indecomponibili.

Inoltre le  $S(i)$  sono le uniche rappresentazioni semplici.

**Proposizione 2.3.7.** *Le rappresentazioni  $S(i), P(i)$  e  $I(i)$  sono indecomponibili.*

*Dimostrazione.* Per  $S(i)$  è banale. Proviamo il risultato per  $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$ , per  $I(i)$  è simile. Dal momento che  $Q$  non ha cicli allora  $P(i)_i \cong K$ . Supponiamo che  $P(i) = M \oplus N$ , allora possiamo supporre  $M_i = P(i)_i$  e  $N_i = 0$ .

Sia  $l$  un vertice di  $Q$  per cui  $N_l \neq 0$ , allora se  $c \in P(i)_l$  è un cammino da  $i$  a  $l$  abbiamo una applicazione

$$\varphi_c : M_i \oplus 0 \rightarrow M_l \oplus N_l$$

che manda l' unico elemento di base  $e_i \in P(i)_i$  in  $\varphi_c(e_i) = c \in M_l$ . Quindi ogni elemento di base  $c$  di  $P(i)_l$  appartiene a  $M_l$ , il che implica che  $N_l = 0$  ma ciò è assurdo.  $\square$

**Proposizione 2.3.8.** *Una rappresentazione di  $Q$  è semplice se e solo se è isomorfa a  $S(i)$  per qualche  $i \in Q_0$ .*

*Dimostrazione.* Ovviamente  $S(i)$  è semplice. Sia  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  una rappresentazione. Scegliamo un vertice  $i \in Q_0$  tale che  $M_i \neq 0$  e se data una freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  allora  $M_j = 0$  (per esempio un vertice che è foce soddisfa questa condizione). Un vertice tale esiste poichè il quiver non ha cicli. Scegliamo una applicazione lineare iniettiva  $f_i : S(i)_i \cong K \rightarrow M_i$  ed estendiamola a morfismo ponendo  $f_j = 0$  se  $i \neq j$ . Dal momento che  $f$  è iniettivo abbiamo che  $S(i)$  è una sottorappresentazione di  $M$ , quindi  $M \cong S(i)$  oppure  $M$  non è semplice.  $\square$

*Osservazione 12.* Senza la richiesta che il quiver non abbia cicli questo risultato non vale: sia  $Q$  il quiver dato da un vertice e una freccia che abbia il vertice come coda e come testa, allora una rappresentazione semplice può essere data da  $K$  come spazio associato al vertice e la moltiplicazione per uno scalare associata alla freccia. Questa rappresentazione non è isomorfa a  $S(i)$ .

Data una rappresentazione  $M \in \text{Rep } Q$  abbiamo una caratterizzazione dello spazio  $\text{Hom}(P(i), M)$ .

**Teorema 2.3.9.** *Sia  $M = (M_i, \psi_\alpha)$  una rappresentazione di  $Q$ , allora per ogni vertice  $i \in Q_0$  vi è un isomorfismo di spazi vettoriali  $\text{Hom}(P(i), M) \cong M_i$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo una applicazione  $\phi : \text{Hom}(P(i), M) \rightarrow M_i$  data da  $\phi(f) = f_i(e_i)$  dove  $f = (f_j)_{j \in Q_0} \in \text{Hom}(P(i), M)$  e  $e_i$  è il cammino costante in  $i$ . Più precisamente  $e_i$  è una base di  $P(i)_i$  e dato che  $f_i : P(i)_i \rightarrow M_i$  allora  $\phi$  è ben definita, inoltre è lineare perchè lo è  $f_i$ .

Per vedere che sia iniettiva supponiamo  $\phi(f) = f_i(e_i) = 0$ . Allora  $f_i = 0$  poichè si annulla sulla base  $e_i$ . Ora consideriamo  $f_j : P(i)_j \rightarrow M_j$ . Una base di  $P(i)_j$  è data da tutti i cammini da  $i$  a  $j$ , allora se  $c = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$  è un elemento della base e  $\varphi_c = \varphi_{\beta_l} \dots \varphi_{\beta_2} \varphi_{\beta_1}$  e  $\varphi'_c = \varphi'_{\beta_l} \dots \varphi'_{\beta_2} \varphi'_{\beta_1}$  sono le applicazioni date dalle composizioni delle applicazioni rispettivamente di  $P(i)$  e  $M$  lungo il cammino  $c$ , abbiamo che  $f_j \varphi_c = \varphi'_c f_i$  dato che  $f$  è un morfismo. Inoltre  $\varphi_c(e_i) = c$  e  $f_i(e_i) = 0$ , quindi  $f_j(c) = f_j(\varphi_c(e_i)) = \varphi'_c(f_i(e_i)) = 0$ , cioè  $f_j$  manda ogni elemento della base di  $P(i)_j$  in zero e questo per ogni  $j$  vuol dire che  $f = 0$  e dunque  $\phi$  è iniettiva.

Per la suriettività sia  $m_i \in M_i$ , vogliamo costruire un morfismo  $f : P(i) \rightarrow M$  tale che  $\phi(f) = f_i(e_i) = m_i$ . Poniamo  $f_i(e_i) = m_i$  e se  $c$  è un cammino da  $i$  a  $j$  poniamo  $f_j(c) = \varphi'_c(m_i)$ , in questo modo abbiamo determinato completamente le applicazioni lineari poichè le abbiamo definite sulle basi. Se  $j \xrightarrow{\alpha} h$  è una freccia allora dato  $c$  un elemento della base di  $P(i)_j$  vale  $f_h(\varphi_\alpha(c)) = f_h(\alpha c) = \varphi'_{\alpha c}(m_i) = \varphi'_\alpha(\varphi'_c(m_i)) = \varphi'_\alpha(f_j(c))$  cioè  $f$  così definito è un morfismo e  $\phi(f) = m_i$ .  $\square$

**Corollario 2.3.10.** *Siano  $i$  e  $j$  vertici in  $Q$ , allora  $\text{Hom}(P(i), P(j))$  ha come base l'insieme di cammini da  $j$  a  $i$  in  $Q$ . In particolare  $\text{End}(P(i)) \cong K$ . Inoltre se  $A = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)$  allora  $\text{End}(A)$  ha come base l'insieme di tutti i cammini in  $Q$ .*

*Dimostrazione.* Per il teorema abbiamo che  $\text{Hom}(P(i), P(j)) \cong P(j)_i$  che ha come base i cammini da  $j$  a  $i$ , essendo  $Q$  senza cicli  $\text{End}(P(i))$  ha come base solamente il cammino costante  $e_i$  quindi è isomorfo a  $K$ . Per la seconda affermazione  $\text{End}(A) \cong \bigoplus_{i, j \in Q_0} \text{Hom}(P(i), P(j))$  che quindi ha una base data da ogni cammino poichè  $i$  e  $j$  variano in tutto  $Q_0$ .  $\square$

## 2.4 Risoluzioni Proiettive e Iniettive

Anche in questo caso le definizioni che daremo di risoluzione proiettiva, risoluzione iniettiva e di estensione possono essere date in una qualunque categoria abeliana, ma nel nostro ambito abbiamo assicurata l'esistenza di particolari risoluzioni che non si verifica in generale.

**Definizione 2.10.** Sia  $M$  una rappresentazione di  $Q$ .

Una risoluzione proiettiva è una successione esatta del tipo

$$\cdots \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

dove ogni  $P_i$  è una rappresentazione proiettiva.

Una risoluzione iniettiva è una successione esatta del tipo

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow \cdots$$

dove ogni  $I_i$  è una rappresentazione iniettiva.

**Teorema 2.4.1.** *Data una rappresentazione  $M$  di un quiver  $Q$  esistono una risoluzione proiettiva della forma*

$$0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

*e una risoluzione iniettiva della forma*

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Proveremo solo l'esistenza della risoluzione proiettiva, che è quella che useremo in seguito.

Se  $M = (M_i, \varphi_\alpha)$  indichiamo con  $d_i$  la dimensione di  $M_i$  e poniamo

$$P_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} P(t(\alpha))$$

$$P_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i)$$

dove  $d_i P(i)$  è la somma diretta di  $d_i$  copie di  $P(i)$ .

Per ogni  $i \in Q_0$  abbiamo una base  $\{m_{i1}, \dots, m_{id_i}\}$  dello spazio  $M_i$ , allora consideriamo gli insiemi

$$B'' = \{m_{ij} | i \in Q_0; j = 1, 2, \dots, d_i\}$$

$$B = \{c_{ij} | i \in Q_0; c_i \text{ un cammino con } s(c_i) = i; j = 1, 2, \dots, d_i\}$$

$$B' = \{b_{\alpha j} | \alpha \in Q_1; b_\alpha \text{ un cammino con } s(b_\alpha) = t(\alpha); j = 1, 2, \dots, d_{s(\alpha)}\}$$

di tutte le basi degli spazi che fanno parte rispettivamente delle rappresentazioni  $M, P_0, P_1$ . Definiamo un'applicazione  $g : P_0 \rightarrow M$  sull'insieme  $B$  le cui componenti sono date da  $g_{t(c_i)}(c_{ij}) = \varphi_{c_i}(m_{ij}) \in M_{t(c_i)}$ . Definiamo poi una applicazione  $f : P_1 \rightarrow P_0$  sull'insieme  $B'$  data da  $f_{t(b_\alpha)}(b_{\alpha j}) = (\alpha b_\alpha)_j - b_\alpha^M \in (P_0)_{t(b_\alpha)}$  dove  $\alpha b_\alpha$  è il cammino ottenuto componendo  $\alpha$  con  $b_\alpha$  e  $b_\alpha^M = \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \vartheta_l b_{\alpha l}$  in cui  $\vartheta_l$  sono i coefficienti che compaiono nella scrittura di  $\varphi_\alpha(m_{s(\alpha)j})$  rispetto la base  $\{m_{t(\alpha)l} | l = 1, 2, \dots, d_{t(\alpha)}\}$  di  $M_{t(\alpha)}$ , cioè tali che

$$\varphi_\alpha(m_{s(\alpha)j}) = \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \vartheta_l m_{t(\alpha)l}.$$

Queste applicazioni sono anche morfismi: sia  $\beta$  una freccia da  $t(c_i)$  a  $r$  in  $Q_1$ , allora

$$\varphi_\beta(g_{t(c_i)}(c_{ij})) = \varphi_\beta(\varphi_{c_i}(m_{ij})) = \varphi_{\beta c_i}(m_{ij}) = g_r(\beta c_{ij})$$

e se  $\gamma$  è una freccia da  $t(b_\alpha)$  a  $r$  allora

$$f_{t(b_\alpha)}(b_{\alpha j})\gamma = (\alpha b_\alpha)_j \gamma - \sum_{l=1}^{d_{t(\alpha)}} \vartheta_l b_{\alpha l} \gamma = (\alpha b_\alpha \gamma)_j - (b_\alpha \gamma)^M = f((b_\alpha \gamma)_j).$$

Abbiamo che  $P_0$  e  $P_1$  sono proiettive perchè somma di rappresentazioni proiettive, vogliamo provare che la successione  $0 \rightarrow P_0 \xrightarrow{f} P_1 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$  sia esatta.

Innanzitutto  $g$  è suriettiva poichè per ogni vettore  $m_{ij} \in B''$  abbiamo  $m_{ij} = g(e_{ij})$  dove  $e_i$  è il cammino costante in  $i$ .

Per vedere che  $\text{Im} g \subset \text{Ker} g$  mostriamo che  $g(f(b_{\alpha j})) = 0$  per ogni  $b_{\alpha j} \in B'$ , infatti

$$\begin{aligned} g(f(b_{\alpha j})) &= g((\alpha b_{\alpha})_j - b_{\alpha}^M) = \\ &= \varphi_{\alpha b_{\alpha}}(m_{s(\alpha)j}) - \varphi_{b_{\alpha}}\left(\sum_l \vartheta_l m_{t(\alpha)l}\right) = \\ &= \varphi_{b_{\alpha}}\left(\varphi_{\alpha}(m_{s(\alpha)j}) - \sum_l \vartheta_l m_{t(\alpha)l}\right) = \\ &= \varphi_{b_{\alpha}}(0) = 0. \end{aligned}$$

Ora vediamo che  $\text{Ker} g \subset \text{Im} g$ . Se  $x \in \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i)$  allora può essere scritto come combinazione lineare di elementi di  $B$ :

$$x = \sum_{c_{ij} \in B} \lambda_{c_{ij}} c_{ij} = x_0 + \sum_{c_{ij} \in B - B_0} \lambda_{c_{ij}} c_{ij}$$

dove  $B_0 = \{e_{ij} | i \in Q_0, j = 1, 2, \dots, d_i\}$  è l'insieme di cammini costanti, quindi  $x_0 = \sum_{e_{ij} \in B_0} \lambda_{e_{ij}} e_{ij}$ . Ogni cammino non costante è prodotto di una freccia e un altro cammino, quindi

$$x = x_0 + \sum_{c_{ij}: c_i = \alpha b_{\alpha}} \lambda_{c_{ij}} (\alpha b_{\alpha})_j$$

e usando la definizione di  $f$

$$x = x_0 + \sum_{c_{ij}: c_i = \alpha b_{\alpha}} (\lambda_{c_{ij}} f(b_{\alpha j}) + \lambda_{c_{ij}} b_{\alpha}^M).$$

Se indichiamo con  $x_1 = x_0 + \sum_{c_{ij}: c_i = \alpha b_{\alpha}} \lambda_{c_{ij}} b_{\alpha}^M$  allora  $x - x_1 \in \text{Im} f$  e poichè  $g \circ f = 0$  allora  $g(x) = g(x_1)$ . Indicando con  $\text{deg } x$  la massima lunghezza dei cammini che compaiono nella combinazione lineare con coefficiente non nullo, abbiamo che  $\text{deg } x_0 = 0$  poichè è combinazione lineare di cammini costanti e  $\text{deg } x_1 < \text{deg } x$  poichè in  $f(b_{\alpha j})$  compare  $(\alpha b_{\alpha})_j$  che è un cammino più lungo di  $b_{\alpha}$ . Supponiamo ora  $x \in \text{Ker} g$  allora  $g(x) = g(x_1) = 0$  quindi  $x_1 \in \text{Ker} g$  e così possiamo ripetere l'argomento considerando  $x_1$  al posto di  $x$ , in modo



da ottenere  $x_2 \in \text{Ker } g$  e tale che  $\deg x_2 < \deg x_1 < \deg x$  con  $x - x_2 \in \text{Img } f$ . Continuando così avremo  $x_h \in \text{Ker } g$ ,  $x - x_h \in \text{Img } f$  e  $\deg x_h = 0$ , quindi  $x_h = \sum_{ij} \mu_{ij} e_{ij}$  è combinazione lineare di cammini costanti e  $\mu_{ij} \in K$ . Per definizione di  $g$  abbiamo che  $0 = g(x_h) = \sum_{ij} \mu_{ij} m_{ij}$ , ma poichè gli  $m_{ij}$  sono vettori di base  $\mu_{ij} = 0$  per ogni  $i, j$  quindi  $x_h = 0$  e  $x \in \text{Img } f$ . Questo per ogni  $x \in \text{Ker } g$  quindi  $\text{Img } f \subset \text{Ker } g$ .

Vediamo che  $f$  è iniettiva. Supponiamo che

$$0 = f\left(\sum \lambda_{b_{\alpha h}} b_{\alpha h}\right) = \sum \lambda_{b_{\alpha h}} ((\alpha b_{\alpha})_h - b_{\alpha}^M),$$

allora

$$\sum \lambda_{b_{\alpha h}} (\alpha b_{\alpha})_h = \sum \lambda_{b_{\alpha h}} b_{\alpha}^M = \sum \lambda_{b_{\alpha h}} \sum \vartheta_l b_{\alpha l}.$$

Se  $i_0$  è una fonte in  $M$  (un vertice tale esiste perchè il quiver non ha cicli), allora dato che ogni cammino  $b_{\alpha}$  comincia dalla coda di  $\alpha$  non può passare da  $i_0$  dunque  $\lambda_{b_{\alpha h}}$  sarà nullo per ogni freccia  $\alpha$  che parte da  $i_0$  (nel membro di sinistra dell' ultima equazione comparirebbe  $\alpha b_{\alpha}$  che passa da  $i_0$  mentre nel membro di destra nessun cammino passa da  $i_0$ ). Ora consideriamo un vertice  $i_1$  che è fonte nel quiver  $Q - \{i_0\}$  cioè a cui è stato tolto il vertice (per cui non esistono frecce che arrivano in  $i_1$  tranne al più  $i_0 \rightarrow i_1$ ), quindi se  $\alpha$  comincia con  $i_0$  abbiamo già visto che  $\lambda_{b_{\alpha h}} = 0$ . Altrimenti  $\alpha$ , e quindi  $\alpha b_{\alpha}$ , non cominciano con  $i_0$  e possiamo ragionare come prima. Ripetendo il ragionamento un numero finito di volte (dato che il quiver è finito) si ottiene che ogni  $\lambda_{b_{\alpha h}} = 0$ . Questo conclude la prova.  $\square$

Ora possiamo vedere che effettivamente le uniche rappresentazioni proiettive indecomponibili sono  $P(i)$ .

**Definizione 2.11.** Una rappresentazione  $F \in \text{Rep } Q$  è detta libera se  $F \cong A \oplus \cdots \oplus A$  con  $A = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i)$ .

**Proposizione 2.4.2.** Una rappresentazione  $M \in \text{Rep } Q$  è proiettiva se e solo se è isomorfa a un addendo diretto di una qualche rappresentazione libera  $F \in \text{Rep } Q$ .

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Per l'unicità della decomposizione e per il fatto che i  $P(i)$  sono indecomponibili, ogni addendo diretto di  $F$  è somma di  $P(i)$  e quindi è proiettivo.

( $\Rightarrow$ ) Se  $M$  è proiettiva e  $\underline{\text{Dim}}M = (d_i)_{i \in Q_0}$ , allora la particolare risoluzione proiettiva del Teorema 2.4.1 fornisce un morfismo suriettivo  $g : \bigoplus d_i P(i) \rightarrow M$ . Abbiamo quindi una successione esatta corta

$$0 \rightarrow \text{Ker } g \rightarrow \bigoplus d_i P(i) \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

che spezza dal momento che  $M$  è proiettiva, dunque  $M$  è isomorfo a un addendo di  $\bigoplus d_i P(i)$ .  $\square$

**Corollario 2.4.3.** *Ogni rappresentazione proiettiva  $P \in \text{Rep } Q$  è somma diretta di opportuni  $P(i)$ , non per forza distinti.*

*In particolare le uniche rappresentazioni proiettive e indecomponibili sono  $P(i)$  al variare di  $i$ .*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione precedente.  $\square$

**Definizione 2.12.** Sia  $M \in \text{Rep } Q$  e

$$0 \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

la risoluzione proiettiva del Teorema 2.4.1. Allora se  $N \in \text{Rep } Q$ , applicando il funtore  $\text{Hom}(-, N)$  otteniamo

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(P_1, N) \rightarrow \text{Coker } f^* \rightarrow 0.$$

Definiamo l'estensione  $\text{Ext}^1(M, N) = \text{Coker } f^*$ .

*Osservazione 13.* In generale le risoluzioni proiettive di un oggetto non sono tutte di questa forma ma potrebbero avere più termini come nella definizione data in precedenza:

$$\cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

in questi casi, sempre applicando  $\text{Hom}(-, N)$ , si può definire  $\text{Ext}^i(M, N) = \text{Ker } f_{i+1}^* / \text{Im } f_i^*$  che spiega il motivo dell'apice. Inoltre si può dimostrare in tutta generalità che  $\text{Ext}^i(M, N)$  non dipende dalla risoluzione proiettiva.

In generale vale anche il seguente risultato.

**Proposizione 2.4.4.** *Siano dati gli oggetti  $L, M, N, X$  e una successione esatta corta*

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

*allora esiste una successione esatta lunga*

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(N, X) &\rightarrow \text{Ext}^1(M, X) \rightarrow \text{Ext}^1(L, X) \xrightarrow{\delta_1} \\ \text{Ext}^2(N, X) &\rightarrow \text{Ext}^2(M, X) \rightarrow \text{Ext}^2(L, X) \xrightarrow{\delta_2} \\ \dots \text{Ext}^n(N, X) &\rightarrow \text{Ext}^n(M, X) \rightarrow \text{Ext}^n(L, X) \xrightarrow{\delta_n} \\ \text{Ext}^{n+1}(N, X) &\rightarrow \text{Ext}^{n+1}(M, X) \rightarrow \text{Ext}^{n+1}(L, X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots \end{aligned}$$

dove  $\delta_i$  è detto  $i$ -esimo morfismo di connessione.

In particolare possiamo rileggere il risultato nell'ambito delle rappresentazioni dove abbiamo visto che le risoluzioni proiettive hanno una particolare forma.

**Corollario 2.4.5.** *Siano  $L, M, N \in \text{Rep } Q$  e sia*

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

*una successione esatta corta, allora c'è una successione esatta*

$$\text{Ext}^1(N, X) \rightarrow \text{Ext}^1(M, X) \rightarrow \text{Ext}^1(L, X) \rightarrow 0.$$

*Dimostrazione.* Basta applicare la proposizione precedente, osservando che per il Teorema 2.4.1 si ha  $\text{Ext}^i(Y, X) = 0$  per ogni  $X, Y \in \text{Rep } Q$  e ogni  $i > 1$ . □

## Capitolo 3

# Il Teorema di Gabriel

In questo capitolo arriveremo alla caratterizzazione dei quiver che danno luogo a un numero finito di rappresentazioni indecomponibili a meno di isomorfismo.

Per arrivare a questo risultato considereremo l'insieme delle varie rappresentazioni del quiver con dimensione fissata, che viene chiamato spazio delle rappresentazioni. Questo è lo spazio ambiente in cui studieremo le classi di isomorfismo delle rappresentazioni, che risultano essere orbite di un'opportuna azione. In seguito definiremo una forma quadratica associata al quiver che dipende però solamente dal suo grafo, questa ci permetterà di fare una distinzione: classificheremo i grafi per cui la forma associata è definita positiva e quelli per cui la forma è semi-definita positiva. I grafi dei quiver a cui è associata una forma positiva sono alcuni di quelli che vengono chiamati diagrammi di Dynkin, mentre i grafi dei quiver a cui è associata una forma semi-definita positiva vengono detti Euclidei. Introduciamo la nozione di radice della forma quadratica e ci chiederemo quando il vettore dimensione del quiver è una radice. L'ultimo passo sarà verificare che nel caso in cui il grafo associato al quiver sia un diagramma di Dynkin la forma ha un numero finito di radici e c'è una biiezione fra le classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili e le radici positive. Inoltre questo risulta essere l'unico caso in cui il numero di rappresentazioni indecomponibili è finita a meno di

isomorfismi.

### 3.1 Lo spazio delle rappresentazioni di un Quiver

Sia  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  un quiver privo di cicli e sia  $n$  il numero dei suoi vertici. Consideriamo vettori dimensione delle possibili rappresentazioni di  $Q$ , cioè vettori del tipo  $d = (d_i) \in \mathbb{Z}^n$  con  $d_i \geq 0$  per ogni  $i \in Q_0$ .

Sia  $E_d$  l'insieme delle rappresentazioni  $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  di  $Q$  di dimensione  $d$ , cioè tali che  $M_i \cong K^{d_i}$  per ogni  $i \in Q_0$ . Dunque gli  $M_i$  sono determinati a meno di isomorfismi, rimangono da determinare le applicazioni  $\varphi_\alpha$  e quindi abbiamo l'identificazione

$$E_d \cong \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \text{Hom}_K(K^{d_{s(\alpha)}}, K^{d_{t(\alpha)}})$$

dove ogni addendo è isomorfo allo spazio delle matrici  $d_{t(\alpha)} \times d_{s(\alpha)}$ . Allora  $E_d$  è un  $K$ -spazio vettoriale di dimensione  $\sum_{\alpha} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)}$ .

Sia ora

$$G_d = \prod_{i \in Q_1} GL_{d_i}(K)$$

dove  $GL_{d_i}(K)$  è il gruppo delle applicazioni lineari invertibili da  $K^{d_i}$  in sè.

Possiamo definire un'azione del gruppo  $G_d$  sullo spazio  $E_d$  come segue: se  $M = (M_i, \varphi_\alpha) \in E_d$  e  $g = (g_i) \in G_d$  allora  $g \cdot M = (M_i, (g \cdot \varphi)_\alpha)$  è la rappresentazione che ha gli stessi spazi e le cui applicazioni sono date da

$$(g \cdot \varphi)_\alpha = g_{t(\alpha)} \varphi_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}.$$

Se  $M \in E_d$  indichiamo con  $\mathcal{O}_M = \{g \cdot M | g \in G_d\}$  la sua orbita tramite l'azione di  $G_d$ .

L'orbita  $\mathcal{O}_M$  è esattamente la classe di isomorfismo di  $M$ , cioè

$$\mathcal{O}_M = \{M' \in \text{Rep } Q | M' \cong M\}.$$

Se esiste  $g = (g_i) \in G_d$  tale che  $g \cdot M = M'$  vuol dire che per ogni freccia  $i \xrightarrow{\alpha} j$  vale  $\varphi'_\alpha = g_j \varphi_\alpha g_i^{-1}$  quindi  $\varphi'_\alpha g_i = g_j \varphi_\alpha$  che vuol dire che  $g$  è un morfismo e

anche un isomorfismo, dal momento che ogni  $g_i$  è invertibile. Se  $g : M \rightarrow M'$  è un isomorfismo allora  $g_i \in GL_{d_i}(K)$ , quindi  $M' = g \cdot M$ .

Lo stabilizzatore dell'azione  $\text{Stab } M = \{g \in G_d \mid g \cdot M = M\}$  corrisponde così al gruppo degli automorfismi di rappresentazioni  $\text{Aut } M$ .

Ci serviremo di alcuni risultati di geometria algebrica di cui però non daremo la prova, raccolti nel seguente

**Lemma 3.1.1.** *Data una rappresentazione  $M \in E_d$  con  $d \in \mathbb{Z}^n$ , si ha che  $\mathcal{O}_M, G_d$  e  $\text{Aut } M = \text{Stab } M$  sono varietà algebriche di  $E_d$ .*

*Inoltre vale  $\dim \mathcal{O}_M = \dim G_d - \dim \text{Aut } M$  e c'è al più un'orbita tale che  $\dim \mathcal{O}_M = \dim E_d$ .*

*Dimostrazione.* Si veda per esempio [3], in particolare 'Proposition 1.11'.  $\square$

Ci sarà utile anche questo risultato:

**Lemma 3.1.2.** *Se la successione esatta*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

*non spezza, allora*

$$\dim \mathcal{O}_{L \oplus N} < \dim \mathcal{O}_M.$$

*Dimostrazione.* Siano  $L = (L_i, \psi_\alpha), M = (M_i, \varphi_\alpha), N = (N_i, \chi_\alpha)$ , allora scelto un vertice  $i$  scegliamo una base  $B'$  di  $L_i$  ed estendiamo la sua immagine  $f_i(B')$  a una base  $B$  di  $M_i$  in cui i vettori che sono immagine di  $f_i$  compaiono per primi. Notiamo che in questo modo i vettori del nucleo di  $g_i$  sono quelli che sono immagine di  $f_i$  e quindi companiono per primi nella base  $B$ . Scegliamo allora  $B'' = g_i(B)$ , l'insieme di vettori di  $B$  che hanno immagine non nulla, come base di  $N_i$ . Rispetto queste a basi le applicazioni  $f_i, g_i$  hanno la forma:

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad g_i = \begin{bmatrix} & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora se  $i \xrightarrow{\alpha} j$  è una freccia in  $Q$  le equazioni  $\varphi_\alpha f_i = f_j \psi_\alpha$  e  $g_j \varphi_\alpha = \chi_\alpha g_i$  scritte in forma matriciale ci dicono che  $\varphi_\alpha$  è della forma

$$\varphi_\alpha = \begin{bmatrix} \psi_\alpha & \xi_\alpha \\ 0 & \chi_\alpha \end{bmatrix}$$

con  $\xi_\alpha$  una opportuna matrice.  $M \cong L \oplus N$  se e solo se  $\xi_\alpha = 0$  per ogni freccia  $\alpha$ . Se la successione non spezza allora  $M$  e  $L \oplus N$  non sono isomorfi e c'è una freccia  $\alpha$  per cui  $\xi_\alpha \neq 0$ . Per ogni  $t \in K$  la matrice

$$(t \cdot \varphi)_\alpha = \begin{bmatrix} \psi_\alpha & t\xi_\alpha \\ 0 & \chi_\alpha \end{bmatrix}$$

definisce una rappresentazione  $t \cdot M = (M_i, (t \cdot \varphi)_\alpha)$  isomorfa a  $M$  tramite le matrici

$$g_i = \begin{bmatrix} t1_{L_i} & 0 \\ 0 & 1_{N_i} \end{bmatrix}.$$

Abbiamo così visto che le classi di isomorfismo di  $M$  sono descritte da almeno un parametro in più che quelle di  $L \oplus N$ .

□

## 3.2 La Forma Quadratica di un Quiver

Assoceremo a ogni quiver una forma quadratica, studieremo il suo segno e le sue radici.

Ricordiamo che una forma quadratica è un polinomio omogeneo di grado due, cioè della forma

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

che per noi sarà a coefficienti interi, cioè  $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ .

Quindi se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  allora  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  e inoltre  $q(rx) = r^2 q(x)$  per ogni  $r \in \mathbb{Z}$ .

Data una forma quadratica possiamo definire una forma bilineare simmetrica in questo modo

$$(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y).$$

Se  $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_i x_j$  allora  $(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x_i y_j + x_j y_i)$ . Viceversa data una forma bilineare simmetrica  $(-, -)$  possiamo riottenere la forma quadratica da  $q(x) = \frac{(x,x)}{2}$ .

**Definizione 3.1.** Sia un quiver  $Q$  senza cicli, allora definiamo la sua forma quadratica  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  come

$$q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}.$$

Si noti che la forma non dipende dall' orientazione delle frecce, ma solo dal grafo ad essa associato.

**Proposizione 3.2.1.** Data una rappresentazione  $M$  con vettore dimensione  $d$  vale

$$q(d) = \dim \text{Hom}(M, M) - \dim \text{Ext}^1(M, M).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la risoluzione proiettiva standard vista nel Teorema 2.4.1

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} P(t(\alpha)) \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in Q_0} d_i P(i) \xrightarrow{g} M \rightarrow 0.$$

Applicando il funtore  $\text{Hom}(-, M)$  otteniamo una successione esatta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(M, M) &\rightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} d_i \text{Hom}(P(i), M) \rightarrow \\ &\rightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} \text{Hom}(P(t(\alpha)), M) \rightarrow \text{Ext}^1(M, M) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} &\dim \text{Hom}(M, M) - \dim \text{Ext}^1(M, M) = \\ &= \sum_{i \in Q_0} d_i \dim \text{Hom}(P(i), M) - \sum_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} \dim \text{Hom}(P(t(\alpha)), M) \end{aligned}$$



che per il Teorema 2.3.9 è uguale a

$$\sum_{i \in Q_0} d_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} = q(d).$$

□

Un passo centrale per arrivare al teorema di Gabriel è quello di classificare i quiver in base alla forma quadratica ad essi associata.

**Definizione 3.2.** Sia  $q$  una forma quadratica.

- $q$  si dice definita positiva se  $q(x) > 0$  per ogni  $x \neq 0$ .
- $q$  si dice semi-definita positiva se  $q(x) \geq 0$  per ogni  $x$ .

**Lemma 3.2.2.** Sia  $Q$  un quiver connesso. Se  $d = (d_i) \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$  è tale che  $(x, d) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{Z}^n$ , allora:

1.  $q$  è semi-definita positiva.
2.  $d_i \neq 0$  per ogni  $i$ .
3.  $q(x) = 0$  se e solo se  $d_j x_i = d_i x_j$  per ogni  $i \neq j$ .

*Dimostrazione.* Indicheremo con  $n_{ij}$  il numero di frecce da  $i$  a  $j$  e da  $j$  a  $i$ , cioè il numero di lati che connettono  $i$  e  $j$  nel grafo associato al quiver.

Fissando un ordinamento dei vertici abbiamo che

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} n_{ij} x_i x_j$$

e

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n 2x_i y_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} n_{ij} x_i y_j.$$

Sia  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  l' $i$ -esimo vettore di base canonico. Per ipotesi  $(e_i, d) = 2d_i - \sum_{j \neq i} n_{ij} d_j = 0$ , quindi  $2d_i = \sum_{j \neq i} n_{ij} d_j$  ed essendo  $n_{ij} \geq 0$  se esiste un vertice  $i$  tale che  $d_i = 0$  allora per ogni vertice adiacente  $j$  sarà  $d_j = 0$ . D'altra parte  $Q$  è connesso quindi  $d_i = 0$  per ogni  $i \in Q_0$ , che è

assurdo poichè  $d \neq 0$  per ipotesi. Concludiamo così che  $d_i \neq 0$  per ogni  $i \in Q_0$ .

Sia ora  $x \in \mathbb{Z}^n$ , usando che  $2d_i = \sum_{j \neq i} n_{ij}d_j$  abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{d_i} d_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{d_i} \sum_{j \neq i} \frac{n_{ij}d_j}{2} = \\ &= \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{n_{ij}d_j}{2} \frac{x_i^2}{d_i} = \\ &= \sum_i \sum_{j < i} \left( \frac{n_{ij}d_j}{2} \frac{x_i^2}{d_i} + \frac{n_{ij}d_i}{2} \frac{x_j^2}{d_j} \right) = \\ &= \sum_i \sum_{j < i} \frac{n_{ij}d_i d_j}{2} \left( \frac{x_i^2}{d_i^2} + \frac{x_j^2}{d_j^2} \right). \end{aligned}$$

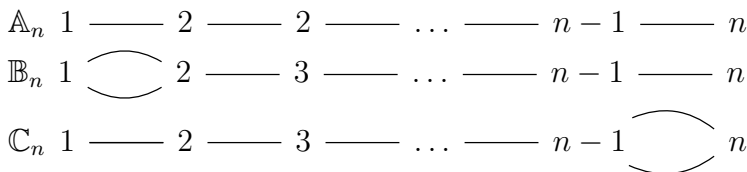
Sostituendo

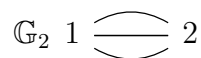
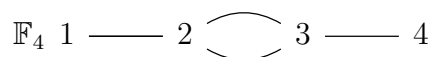
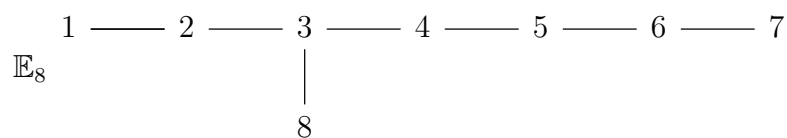
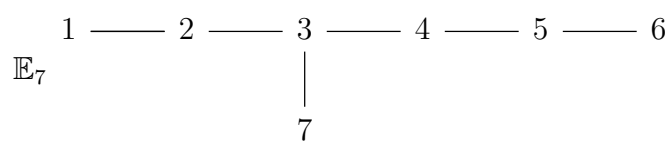
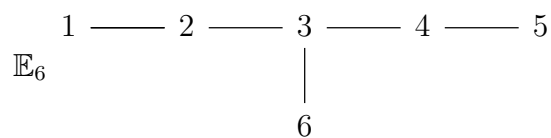
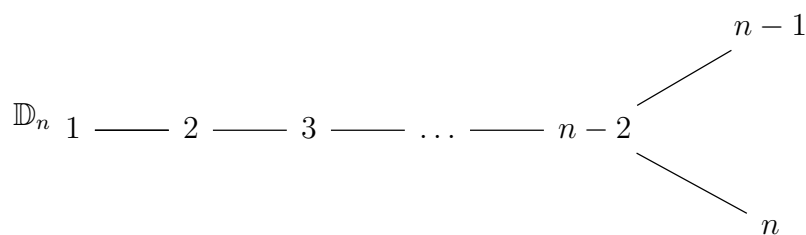
$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_i x_i^2 - \sum_i \sum_{j < i} n_{ij} x_i x_j = \\ &= \sum_i \sum_{j < i} \frac{n_{ij}d_i d_j}{2} \left( \frac{x_i^2}{d_i^2} + \frac{x_j^2}{d_j^2} - 2 \frac{x_i x_j}{d_i d_j} \right) = \\ &= \sum_i \sum_{j < i} \frac{n_{ij}d_i d_j}{2} \left( \frac{x_i}{d_i} - \frac{x_j}{d_j} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

dal momento che  $d_i, d_j > 0$  e  $n_{ij} \geq 0$ . Quindi  $q$  è semi-definita positiva.  $Q$  è connesso, allora  $q(x) = 0$  se e solo se  $\frac{x_i}{d_i} = \frac{x_j}{d_j}$  per ogni  $i, j \in Q_0$ .  $\square$

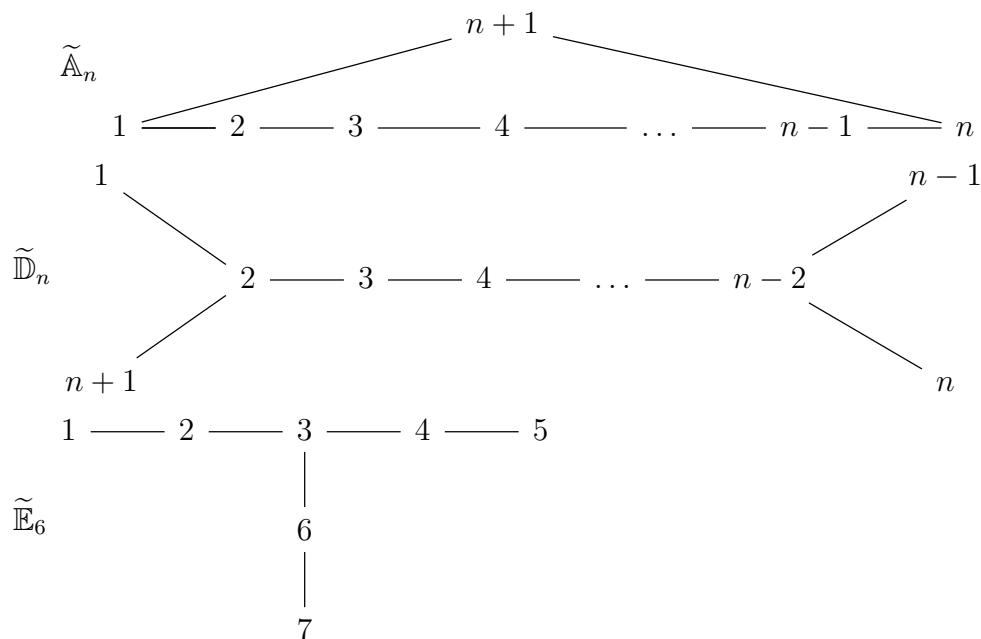
### 3.3 Diagrammi di Dynkin ed Euclidei

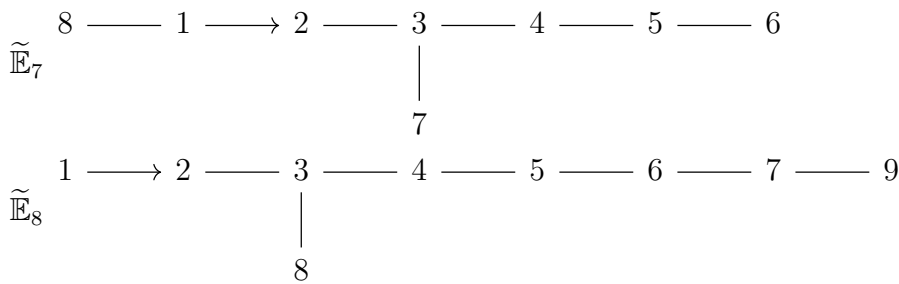
Vengono detti diagrammi di Dynkin i seguenti grafi.





I seguenti diagrammi sono ottenuti aggiungendo un vertice (che verrà numerato con  $n+1$ ) ai diagrammi di Dynkin di tipo  $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ , questi nuovi grafi vengono detti diagrammi Euclidei.



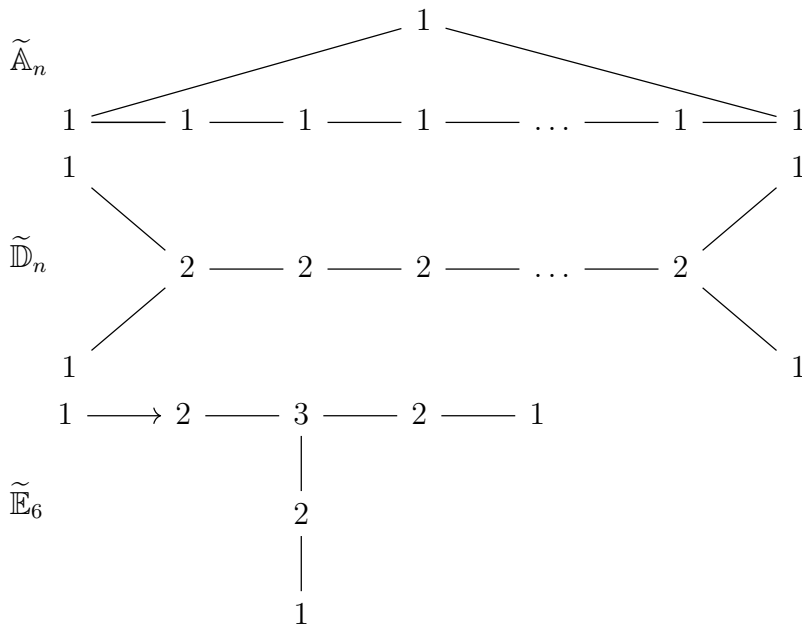


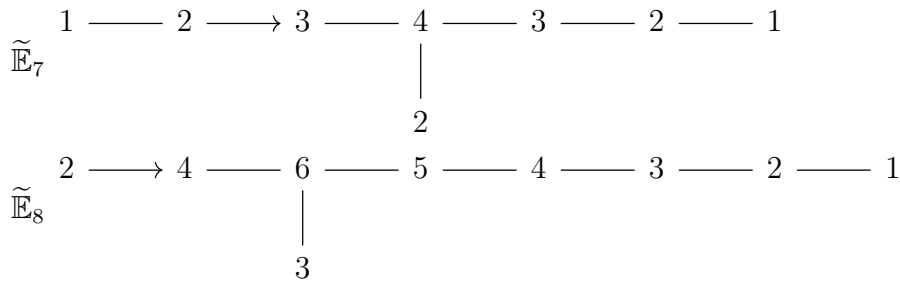
Il seguente teorema motiva l'introduzione di questi grafi ed è strettamente legato con la forma quadratica che abbiamo introdotto.

**Teorema 3.3.1.** *Sia  $Q$  un quiver connesso. Allora*

- $q$  è definita positiva se e solo se il grafo associato a  $Q$  è un diagramma di Dynkin di tipo  $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ .
- $q$  è semi-definita positiva se e solo se il grafo associato a  $Q$  è un diagramma Euclideo di tipo  $\tilde{\mathbb{A}}, \tilde{\mathbb{D}}, \tilde{\mathbb{E}}$  oppure un diagramma di Dynkin di tipo  $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ .

*Dimostrazione.* Per dimostrare che se  $Q$  è Euclideo allora  $q$  è semi-definita positiva ci basta esibire un vettore  $\delta$  per ogni diagramma, tale che  $(x, \delta) = 0$  per ogni  $x$ . I seguenti vettori soddisfano la condizione:





Viceversa supponiamo che  $q$  sia semi-definita positiva e vogliamo dimostrare che  $Q$  sia Euclideo o Dynkin. Supponiamo che  $Q$  non sia né di tipo Euclideo né di tipo Dynkin, allora contiene un sottoquiver proprio  $Q'$  di tipo Euclideo. Sia  $q'$  la sua forma quadratica e sia  $\delta$  il vettore dimensione appena introdotto. Se  $Q$  e  $Q'$  hanno gli stessi vertici allora  $Q$  ha più frecce di  $Q'$  e di conseguenza  $q(\delta) < q'(\delta) = 0$  che è assurdo. Se  $Q$  ha più vertici di  $Q'$  allora scelto un vertice  $i_0$  di  $Q$  che è connesso con una freccia a un vertice  $j_0$  di  $Q'$  e definendo  $x$  come  $x_i = 2\delta_i$  per ogni  $i \in Q'_0$ ,  $x_{i_0} = 1$  e  $x_j = 0$  per ogni altro vertice  $j$  in  $Q$ , otteniamo  $q(x) \leq q'(2\delta) + 1 - 2\delta_{j_0} < 0$  che è assurdo. Con questo abbiamo anche ottenuto che se  $q$  è definita positiva allora  $Q$  deve essere di tipo Dynkin poichè per ogni diagramma Euclideo abbiamo  $q(\delta) = 0$ . Ora supponiamo che  $Q$  sia Dynkin e vogliamo dimostrare che  $q$  è definita positiva. Consideriamo il quiver Euclideo  $\bar{Q}$  ottenuto da  $Q$  aggiungendo un vertice numerato con  $n+1$  e la sua forma quadratica  $\bar{q}$ . Se esiste  $x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$  tale che  $q(x) \leq 0$  allora definendo  $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$  come  $\bar{x}_i = x_i$  se  $i \neq n+1$  e  $\bar{x}_{n+1} = 0$  otteniamo  $\bar{q}(\bar{x}) = q(x) \leq 0$  e cioè  $\bar{q}(\bar{x}) = 0$ . Per il Lemma 3.2.2 si ha che  $\delta_j \bar{x}_i = \delta_i \bar{x}_j$  per ogni  $i \neq j$  ma questo non è possibile dal momento che  $\bar{x}_{n+1} = 0$  e  $\delta_i \neq 0$  per ogni  $i$ , quindi  $q$  è definita positiva.  $\square$

### 3.4 Radici

**Definizione 3.3.** Un vettore  $x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$  è detto radice reale se  $q(x) = 1$ , radice immaginaria se  $q(x) = 0$ .

Ricordiamo che ogni elemento di  $\mathbb{Z}^n$  si può scrivere nella forma  $\sum_i a_i e_i$  con  $e_i$  i vettori della base canonica e  $a_i \in \mathbb{Z}$ , in particolare anche ogni radice

ha una scrittura di questa forma.

**Definizione 3.4.** Una radice si dice positiva se  $a_i \geq 0$  per ogni  $i$ . Si dice negativa se  $a_i \leq 0$  per ogni  $i$ .

Indichiamo con  $\Phi$  l'insieme delle radici reali e immaginarie di  $q$ , con  $\Phi_+$  e  $\Phi_-$  gli insiemi delle radici rispettivamente positive e negative.

**Lemma 3.4.1.** *Valgono i seguenti fatti:*

1. Il vettore di base canonico  $e_i$  è una radice reale per ogni  $i \in Q_0$ .
2. Se  $\alpha$  è una radice allora anche  $-\alpha$  lo è.
3. Se  $\alpha$  è una radice di un quiver Euclideo diversa dalla radice  $\delta$  introdotta nel Teorema 3.3.1, allora  $\alpha - \delta$  è una radice.
4. Se  $q$  è semi-definita positiva, allora ogni radice è positiva o negativa. Quindi  $\Phi$  è unione disgiunta di  $\Phi_+$  e  $\Phi_-$ , inoltre  $\Phi_- = -\Phi_+$ .

*Dimostrazione.* (1) Dalla definizione della forma quadratica, se calcolata in  $e_i$  la somma con segno meno è nulla e nella somma con segno positivo c'è solo un addendo che vale 1 quindi  $q(e_i) = 1$ . (2) Vale  $q(\alpha) = q((-1)\alpha) = (-1)^2 q(\alpha) = q(\alpha)$ . (3) Ricordiamo che  $(\alpha, -\delta) = q(\alpha - \delta) - q(\alpha) - q(-\delta)$  e dal momento che  $q(-\delta) = (\alpha, -\delta) = 0$  otteniamo  $q(\alpha - \delta) = q(\alpha)$ . (4) Sia  $\alpha = \sum_i \alpha_i e_i$  una radice, allora possiamo scomporla come  $\alpha = \beta + \gamma$  con  $\beta = \sum_i \beta_i e_i$  dove  $\beta_i = \alpha_i$  se  $\alpha_i > 0$  e  $\beta_i = 0$  altrimenti,  $\gamma = \sum_i \gamma_i e_i$  con  $\gamma_i = \alpha_i$  se  $\alpha_i < 0$  e  $\gamma_i = 0$  altrimenti. Supponiamo  $\beta, \gamma$  non nulle, quindi che la radice non sia nè positiva nè negativa. Notiamo che  $\beta_i \gamma_i = 0$ ,  $\beta_i \gamma_j \leq 0$  e quindi  $(\beta, \gamma) > 0$ . Inoltre  $q(\alpha) = q(\beta + \gamma) = q(\beta) + q(\gamma) + (\beta, \gamma)$  e quindi  $q(\alpha) > q(\beta) + q(\gamma)$ , dal momento che  $q(\alpha)$  vale 0 o 1 allora  $q(\beta) + q(\gamma) \leq 0$  e dato che  $q$  è semi-definita positiva  $q(\beta) = q(\gamma) = 0$ . Per il Lemma 3.2.2 vale  $\delta_i \beta_j = \delta_j \beta_i$  per ogni  $i \neq j$  e allora  $\beta_i \neq 0$  per ogni  $i$ , ma questo è assurdo poichè implica  $\gamma = 0$ .  $\square$

**Corollario 3.4.2.** *Se  $Q$  è di tipo Dynkin allora  $q$  ha un numero finito di radici e le radici sono tutte reali.*

*Dimostrazione.* Una radice non può essere immaginaria perchè  $q$  è definita positiva. Sia  $\alpha$  una radice positiva di  $q$ . Sia  $\bar{Q}$  il quiver Euclideo ottenuto da  $Q$  aggiungendo un nuovo vertice  $i_0$ ,  $\bar{q}$  la sua forma quadratica e  $\delta$  la sua radice immaginaria associata. Per il lemma precedente  $\alpha - \delta$  è una radice che è negativa al vertice  $i_0$  e quindi negativa. Questo vuol dire che  $\alpha_i < \delta_i$  per ogni  $i$ , dal momento che  $\delta$  è fissato ci sono finite scelte per  $\alpha$ .  $\square$

Conoscendo le radici che abbiamo chiamato  $\delta$  è facile fare un elenco di tutte le radici di un quiver di tipo Dynkin, usando esattamente la condizione  $\alpha_i < \delta_i$ .

### 3.5 Il Teorema di Gabriel

Ricordiamo che la codimensione di un' orbita in  $E_d$  è  $\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim E_d - \dim \mathcal{O}_M$ .

**Proposizione 3.5.1.** *Sia  $Q$  un quiver e  $M \in E_d$ . Allora*

$$\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim \text{End}_M - q(d) = \dim \text{Ext}^1(M, M).$$

*Dimostrazione.* Il gruppo degli automorfismi è una sottovarietà aperta della varietà degli endomorfismi e quest' ultima è irriducibile (ogni sottoinsieme aperto non vuoto è denso), quindi  $\dim \text{Aut}(M) = \dim \text{End}(M)$ . Dato che  $\dim \mathcal{O}_M = \dim G_d - \dim \text{Aut}(M)$  e che  $\dim G_d = \sum_{i \in Q_0} d_i^2$ , otteniamo

$$\text{codim } \mathcal{O}_M = \dim E_d - \dim \mathcal{O}_M = \sum_{\alpha \in Q_1} d_{s(\alpha)} d_{t(\alpha)} - \sum_{i \in Q_0} d_i^2 + \dim \text{End}(M)$$

che dimostra la prima uguaglianza. La seconda deriva da  $q(d) = \dim \text{End}(M) - \dim \text{Ext}^1(M, M)$ .  $\square$

**Corollario 3.5.2.** *Sia  $d$  un intero positivo tale che  $q(d) \leq 0$  dove  $q$  è la forma quadratica associata a  $Q$ . Esistono allora infinite classi di isomorfismo di rappresentazioni di  $Q$  di dimensione  $d$ .*

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente abbiamo  $\text{codim } \mathcal{O}_M \geq \dim \text{End } M \geq$

1. La dimensione di  $E_d$  è strettamente maggiore di quella di ogni orbita  $\mathcal{O}_M$ , il che implica che il numero di orbite sia infinito. Abbiamo visto che le classi di isomorfismo coincidono con le orbite e questo conclude la prova.  $\square$

Ora abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrare il teorema principale.

**Teorema (Gabriel) 3.5.3.** *Sia  $Q$  un quiver connesso, allora*

1. *Le classi di isomorfismo delle rappresentazioni indecomponibili di  $Q$  sono in numero finito se e solo se il grafo associato a  $Q$  è un diagramma di Dynkin di tipo  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$  o  $\mathbb{E}$ .*
2. *Se  $Q$  ha un grafo di tipo Dynkin  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$  o  $\mathbb{E}$ , allora  $c'$  è una biiezione fra l'insieme di radici positive di  $q$  e le classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili di  $Q$  data da:*

$$\Psi : \text{ind } Q \longrightarrow \Phi_+$$

$$\Psi(M) = \underline{\text{Dim}}M$$

*Dimostrazione.* Proviamo prima (2). Innanzitutto dobbiamo vedere che  $\Psi$  sia ben definita: se  $M$  è una rappresentazione indecomponibile dobbiamo verificare che  $q(\underline{\text{Dim}}M) = 1$  e per far questo ci basta vedere che  $\dim \text{End}(M) = 1$  e  $\dim \text{Ext}^1(M, M) = 0$ , dal momento che  $q(\underline{\text{Dim}}M) = \dim \text{End}(M) - \dim \text{Ext}^1(M, M)$ . Procediamo per induzione sulla dimensione di  $M$ . Se  $M$  è una rappresentazione semplice ovviamente  $\text{End}(M) \cong K$  e poichè  $q$  è definita positiva  $\dim \text{Ext}^1(M, M) = 0$ . Supponiamo quindi che la dimensione di  $M$  sia maggiore di 1 e che  $\text{End } L \cong K$  per ogni sottorappresentazione indecomponibile e propria  $L$  di  $M$ .

Supponiamo  $\text{End}(M)$  non isomorfo a  $K$ . Poiché  $M$  è indecomponibile ogni endomorfismo di  $M$  è della forma  $\lambda 1_M + g$  con  $\lambda \in K$  e  $g$  endomorfismo nilpotente. Dal momento che  $\text{End } M$  ha dimensione maggiore di 1 esiste un endomorfismo  $g$  nilpotente, ma non banale. Possiamo supporre che  $g^2 = 0$



(altrimenti basterebbe sostituire  $g$  con  $g^{m-1}$  se  $m$  è l'ordine di  $g$ ), inoltre fra gli endomorfismi con queste proprietà ne scegliamo uno che abbia l'immagine di dimensione minima.

Dato che  $g^2 = 0$  abbiamo che  $\text{Img } g \subset \text{Ker } g$ , quindi nella decomposizione di  $\text{Ker } g$  abbiamo un indecomponibile  $L$  tale che  $\text{Img } g \cap L \neq 0$ : consideriamo  $\pi : \text{Ker } g \rightarrow L$  la proiezione e  $i$  il morfismo non banale ottenuto dalla composizione di  $\pi$  e l'inclusione  $\text{Img } g \subset \text{Ker } g$ .

$$\begin{array}{ccccc} \text{Img } g & \xrightarrow{\text{incl.}} & \text{Ker } g & \xrightarrow{\pi} & L \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & i & \end{array}$$

Allora la composizione

$$M \xrightarrow{g} \text{Img } g \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\text{incl.}} M$$

è un endomorfismo non banale di  $M$  il cui quadrato è nullo e la cui immagine è  $i(\text{Img } g)$ . Dal momento che  $g$  ha immagine minima fra i morfismi di questo tipo vale  $\dim(i(\text{Img } g)) \geq \dim(\text{Img } g)$  e quindi  $i$  è iniettiva. Otteniamo così una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Img } g \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} \text{Coker } i \longrightarrow 0$$

e applicando il funtore  $\text{Hom}(-, L)$  per il Corollario 2.4.5 otteniamo un morfismo suriettivo

$$\text{Ext}^1(L, L) \longrightarrow \text{Ext}^1(\text{Img } g, L) \longrightarrow 0.$$

Per induzione sappiamo che  $\dim \text{Hom}(L, L) = 1$  e dato che  $q$  è definita positiva allora  $\dim \text{Ext}^1(L, L) = 0$ . L'ultima successione implica  $\text{Ext}^1(\text{Img } g, L) = 0$ .

Ora consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \text{Ker } g \xrightarrow{u} M \xrightarrow{g} \text{Img } g \longrightarrow 0$$

e il diagramma commutativo a righe esatte ottenuto dal prodotto amalgamato di  $M$  e  $L$  rispetto  $u$  e  $\pi : \text{Ker } g \rightarrow L$ .

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } g & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{g} & \text{Img } g \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow j_2 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j_1} & X & \longrightarrow & \text{Img } g \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dal momento che  $\text{Ext}^1(\text{Img } g, L) = 0$  la seconda riga spezza, quindi esiste  $h \in \text{Hom}(X, L)$  tale che  $hj_1 = 1_L$ , se  $v : L \rightarrow \text{Ker } g$  è l'inclusione abbiamo  $\pi v = 1_L$ . Consideriamo  $hj_2 : M \rightarrow L$  e  $uv : L \rightarrow M$ , per cui vale  $hj_1uvu = hj_1\pi v = 1_L$ , quindi  $L$  compare nella decomposizione di  $M$ . Ma  $M$  è indecomponibile quindi  $L = 0$  oppure  $L = M$ , sappiamo però che  $L \neq 0$  perchè  $\text{Img } g \cap L \neq 0$  e  $L \neq M$  dato che  $L \subset \text{Ker } g$  e  $g$  non è l'endomorfismo nullo. Questo ha portato a un assurdo, quindi  $\dim \text{End } M = 1$  e dato che  $q$  è definita positiva  $\dim \text{Ext}^1(M, M) = 0$ , inoltre  $q(\underline{\text{Dim}} M) = 1$  e  $\psi$  è ben definita.

$\psi$  è iniettiva: Siano  $M, M'$  rappresentazioni indecomponibili con  $\underline{\text{Dim}} M = \underline{\text{Dim}} M'$ , allora per quanto appena visto  $\text{Ext}^1(M, M) = \text{Ext}^1(M', M') = 0$  e quindi le orbite  $\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_{M'}$  sono di codimensione zero, ma allora sono la stessa orbita per il Lemma 3.1.1 e quindi  $M \cong M'$ .

Per vedere che  $\psi$  sia suriettiva consideriamo una radice positiva  $d$  e  $M$  una rappresentazione di dimensione  $d$  con orbita di dimensione massimale in  $E_d$ . Se  $M$  è indecomponibile abbiamo ottenuto che  $\psi(M) = d$  e quindi è suriettiva. Sia  $M = M_1 \oplus M_2$  e supponiamo  $\text{Ext}^1(M_1, M_2) \neq 0$ . Allora  $c'$  è una successione esatta corta non spezzante

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow E \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

con  $\underline{\text{Dim}} E = \underline{\text{Dim}} M$ . Allora il Lemma 3.1.2 implica che  $\dim \mathcal{O}_M < \dim \mathcal{O}_E$  che contraddice la massimalità di  $\mathcal{O}_M$ . Da questo segue che  $\text{Ext}^1(M_1, M_2) = 0$ , con lo stesso ragionamento ma scambiando  $M_1$  e  $M_2$  otteniamo  $\text{Ext}^1(M_2, M_1) = 0$ . Per la proposizione 3.2.1

$$1 = q(d) = \dim \text{Hom}(M_1 \oplus M_2, M_1 \oplus M_2) \geq 2$$

che è assurdo, quindi  $M$  è indecomponibile.

Ora proviamo (1). Per il punto (2) il numero di rappresentazioni indecomponibili di un quiver di tipo Dynkin  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$  o  $\mathbb{E}$  è uguale al numero di radici di  $q$ , che per quiver di questo tipo abbiamo visto essere un numero finito. Viceversa supponiamo che il quiver non sia di tipo Dynkin  $\mathbb{A}, \mathbb{D}$  o  $\mathbb{E}$ , allora esiste un vettore dimensione  $d$  tale che  $q(d) \leq 0$ , per il Corollario 3.5.2 ci sono infinite classi di isomorfismo per rappresentazioni di dimensione  $d$  ognuna di queste è somma diretta di un numero finito di rappresentazioni indecomponibili. Quindi il numero di classi di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili è infinito, che contraddice l'ipotesi.

□

# Bibliografia

- [1] Ralph Schiffler, Quiver Representations, Springer (2014)
- [2] Pavel Etingof, Introduction to Representation Theory (2011)
- [3] Michel Brion, Introduction to Actions of Algebraic Groups
- [4] Saunders Mac Lane, Categorie nella Pratica Matematica, Boringhieri (1977)