Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Funzioni Generatrici per le Successioni di Interi

Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marilena Barnabei

Presentata da:
Flavia Pasquali

III sessione
Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione **1**

1 **3**

1.1 L'algebra delle serie formali . . . 3
1.2 Primi esempi con le funzioni generatrici . . . 6
1.2.1 Una ricorsione a due termini . . . 6
1.2.2 Un'altra ricorsione a due termini . . . 7
1.2.3 Il Metodo . . . 8
1.2.4 Una ricorsione a tre termini: la successione di Fibonacci 9
1.2.5 Una ricorsione in due variabili: le partizioni di un insieme 10
1.3 Due esempi un po' diversi . . . 14
1.3.1 Macedonie... . . . 14
1.3.2 ...e monetine . . . 15
1.4 Il calcolo di funzioni generatrici ordinarie . . . 17
1.5 Il calcolo di funzioni generatrici esponenziali . . . 21

2 **25**

2.1 Carte, Mani, Mazzi . . . 25
2.2 Il Teorema Fondamentale del Conteggio . . . 28
2.3 Alcuni esempi di applicazione . . . 31
2.3.1 Permutazioni e cicli . . . 31
2.3.2 Partizioni di insiemi . . . 32
2.3.3 Permutazioni particolari . . . 33
2.4 Esempi con grafi e alberi . . . 35
2.4.1 Grafi etichettati e connessi . . . 36
2.4.2 Grafi etichettati e bipartiti . . . 37
2.4.3 Alberi etichettati . . . 39

Bibliografia **41**

Ringraziamenti **43**

Introduzione

Le funzioni generatrici per le successioni sono serie formali associate, appunto, a successioni numeriche. Possono essere considerate un modo per rappresentarle e per studiarle nel loro insieme, piuttosto che termine per termine; in questo senso, sono uno strumento molto potente che consente sia uno studio approfondito delle successioni stesse sia una loro facile manipolazione.

Nel primo capitolo di questo elaborato, vedremo proprio la struttura di algebra delle serie formali e come si modificano le funzioni generatrici in seguito alla manipolazione delle successioni associate, nonché diversi esempi di applicazione. Tali esempi mostreranno come l'utilizzo delle funzioni generatrici renda lo studio delle successioni più semplice ma anche più esaustivo. Un paio di esempi meno interessanti dal punto di vista matematico mostreranno il lato divertente delle funzioni generatrici.

Il secondo capitolo sarà incentrato sul Teorema Fondamentale del Conteggio: in seguito all'introduzione di una nomenclatura adeguata e alla dimostrazione dell'importante teorema, diversi esempi mostreranno come l'utilizzo delle tecniche descritte in precedenza permetta di risolvere problemi di conteggio complessi, in particolare nell'ambito di permutazioni e grafi.

Capitolo 1

1.1 L'algebra delle serie formali

Definizione 1.1.1. *Una* ***serie formale di potenze*** *è un'espressione della forma*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

dove $(a_n)_{n \geq 0}$ *è una successione.*

Possiamo definire alcune *operazioni tra serie formali*:

- somma: $\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$
- prodotto per scalari: $\lambda \sum a_n x^n = \sum \lambda a_n x^n$
- prodotto di Cauchy:

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n \text{ con } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Queste operazioni rendono l'insieme delle serie formali un'algebra; con unità la serie formale con coefficienti $u_0 = 1$, $u_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

Teorema 1.1.2. *La serie formale* $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *ha reciproco* $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$
In tal caso, la ***serie reciproca*** *è unica.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) La condizione $a_0 \neq 0$ è necessaria, in quanto, se fosse $a_0 = 0$, sarebbe impossibile ottenere 1 dal prodotto della serie in questione per una qualsiasi altra serie
($\Leftarrow$) Vediamo che la suddetta condizione è anche sufficiente:
supponiamo che $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ sia la reciproca di $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_0 b_0 = 1 \ ; \quad b_0 = 1/a_0$$

$$\text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \quad \forall n \geq 1 \ ; \quad a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ \dots \ + a_n b_0 = 0$$

supp. di conoscere induttivamente tutti i coefficienti b_k, $k = 1, \dots, n-1$, allora

$$b_n = \left(-a_1 b_{n-1} - \dots - a_n b_0\right)/a_0$$

□

Esempio 1.1.3. Il reciproco della serie $\sum x^n$ è $1 - x$

$$\begin{aligned} \text{infatti} \quad (1-x)\left(\sum x^n\right) &= (1-x)\left(1 + x + x^2 + \dots\right) = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots - x - x^2 - x^3 - \dots = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Definizione 1.1.4. *La **derivata** di una serie formale di potenze $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ è la serie $f' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$*

L'operatore così definito è proprio una derivazione in quanto vale...

Teorema 1.1.5. ***(Regola di Leibnitz)*** *Siano f, g serie formali*

$$\Rightarrow \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Dimostrazione.

$$\text{Siano } f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ e } g = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

$$\Rightarrow \quad fg = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Per definizione di derivazione,

$$\begin{aligned} f' &= \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, a_{n+1} x^n \\ g' &= \sum_{n\geq 1} n b_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1)\, b_{n+1} x^n \\ (fg)' &= \sum_{n\geq 1} n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^{n-1} \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} f'g &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,a_{k+1}b_{n-k}\right)x^n = \\ &= a_1b_0 + (a_1b_1 + 2a_2b_0)\,x + (a_1b_2 + 2a_2b_1 + 3a_3b_0)\,x^2 + \ldots \\ fg' &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\,(n+1-k)\,b_{n+1-k}\right)x^n = \\ &= a_0b_1 + (a_02b_2 + a_1b_1)\,x + (a_03b_3 + a_12b_2 + a_2b_1)\,x^2 + \ldots \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} f'g + fg' &= a_0b_1 + a_1b_0 + 2\,(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x + 3\,(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\,x^2 + \ldots = \\ &= \sum_{n\geq 0}(n+1)\left(\sum_{k=0}^{n+1}a_kb_{n-k}\right)x^n = \\ &= (fg)' \end{aligned}$$

$\square$

Proposizione 1.1.6.

$$f' = 0 \qquad \Rightarrow \quad f = a_0 \text{ \textit{è costante}}$$

Dimostrazione. $f' = 0$ significa che tutti i coefficienti di f' sono nulli:
$0 = a_1 = 2a_2 = 3a_3 = \ldots \quad \Rightarrow \; a_k = 0 \;\forall k \geq 1 \quad \Rightarrow \; f = a_0$ $\square$

Proposizione 1.1.7.

$$f' = f \qquad \Rightarrow \quad f = c\,e^x$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} f' = f \quad &\Rightarrow \text{ il coefficiente di } x^n \text{ deve essere lo stesso in } f \text{ e in } f' \;\forall n \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall n \geq 0 \;\; (n+1)\,a_{n+1} = a_n \;; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \\ &\Rightarrow \text{(per induzione) } a_n = \frac{a_0}{n!} \quad \forall n \geq 0 \\ &\Rightarrow f = a_0\,e^x \end{aligned}$$

$\square$

1.2 Primi esempi con le funzioni generatrici

In sostanza, una funzione generatrice è la serie formale associata ad una successione; possiamo considerare le funzioni generatrici come un modo di rappresentare le successioni: le potenze di x, in pratica, fungono da segnaposti per i termini della successione alla quale è associata la funzione generatrice in esame.

Lo studio della funzione generatrice ci consente di ottenere informazioni sulla successione che non saremmo in grado di ricavare in altro modo (in particolare, dallo studio della successione stessa). Esistono diversi tipi di funzioni generatrici, che vedremo in seguito insieme a metodi per calcolarle. Data una successione (ad esempio, tramite la formula ricorsiva dei suoi termini), in alcuni casi lo studio della funzione generatrice ci permette di trovare una formula esplicita per il calcolo dei suoi termini, in altri ci fornisce un'altra formula ricorsiva che porta con sé un nuovo punto di vista sulla natura della successione. Vediamo alcuni esempi.

1.2.1 Una ricorsione a due termini

Consideriamo la successione definita dalla ricorsione

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \ , \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

I primi termini della successione sono 0, 1, 3, 7, 15, 31, ...

Cerchiamo la funzione generatrice $A(x) = \sum a_n x^n$ moltiplicando entrambi i membri di (1.1) per x^n e sommando sui valori di n per i quali è valida la ricorsione, ovvero $n \geq 0$:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0} (2a_n + 1)\, x^n \tag{1.2}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \sum a_{n+1}x^n &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots = \\ &= \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) - a_0}{x} = \\ &= \frac{A(x)}{x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum (2a_n + 1)\, x^n &= 2\sum a_n x^n + \sum x^n = \\ &= 2A(x) + \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

allora (1.2) diventa

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}\ ,$$

che risolta in funzione di $A(x)$ dà

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}\ .$$

Il termine n-esimo di (a_n) è il coefficiente di x^n nello sviluppo in serie della funzione $A(x)$.

Questo risultato è perfettamente accettabile, ma vediamo se è possibile trovare una formula esplicita per gli a_n:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) = \\ &= 2x\left(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \ldots\right) - x\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right) = \\ &= \left(2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \ldots\right) - \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right) = \\ &= (2-1)\,x + \left(2^2-1\right)x^2 + \left(2^3-1\right)x^3 + \left(2^4-1\right)x^4 + \ldots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 2^n - 1 \quad \forall n \geq 0$$

1.2.2 Un'altra ricorsione a due termini

Consideriamo la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + n\ , \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

I primi termini della successione sono 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, ...

Come nell'esempio precedente, cerchiamo $A(x) = \sum a_n x^n$ moltiplicando entrambi i membri di (1.3) per x^n e sommando sui valori di n:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} n x^n$$

Per quanto visto nell'esempio precedente, vale

$$\frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \sum_{n\geq 0} nx^n \ .$$

Ora,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} nx^n &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \\ &= \sum_{n\geq 0} x\,\frac{d}{dx}(x^n) = x\,\frac{d}{dx}\left(\sum x^n\right) = x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \quad ; \qquad A(x) = \frac{1-2x+2x^3}{(1-x)^2(1-2x)}$$

Analogamente all'esempio precedente, è possibile ottenere una formula esplicita per i termini a_n, ma in questo caso sono necessari più calcoli, in particolare per scrivere $A(x)$ come somma di frazioni parziali. Alla fine, si ottiene

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1 \quad \forall n \geq 0$$

1.2.3 Il Metodo

Prima di passare al prossimo esempio, riassumiamo il metodo delle funzioni generatrici utilizzato finora:

IL METODO

data una formula ricorsiva,

1. assicurarsi che l'insieme dei valori per i quali la ricorsione è valida sia ben specificato (ad esempio, $n \geq 0$)

2. definire la funzione generatrice che si sta cercando in funzione della successione da studiare

   $$(\text{ad esempio, } A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n)$$

3. moltiplicare entrambi i membri della formula ricorsiva data per x^n e sommare sui valori di n per i quali vale la ricorsione

4. esprimere entrambi i membri dell'equazione risultante in termini (espliciti) della funzione generatrice $A(x)$

5. se si desidera una formula esplicita per i termini della successione, cercare di ottenere tale formula sviluppando $A(x)$ in serie di potenze; in particolare, se $A(x)$ è una funzione razionale, scriverla come somma di frazioni parziali e considerare un termine (una frazione parziale) per volta.

1.2.4 Una ricorsione a tre termini: la successione di Fibonacci

Consideriamo la successione di Fibonacci , data dalla ricorsione

$$\begin{cases} F_0 = 0 \ , \quad F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ , \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

I primi termini di questa famosa successione sono 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 610, ...

Seguendo il METODO descritto sopra, cerchiamo

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} F_n x^n$$

e per fare ciò moltiplichiamo per x^n e sommiamo su n entrambi i membri di (1.4): a sinistra otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} F_{n+1} x^n &= F_2 x + F_3 x^2 + F_4 x^3 + \ldots \\ &= \frac{F(x) - x}{x} \end{aligned}$$

e a destra

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} F_n x^n + \sum_{n \geq 1} F_{n-1} x^n &= F(x) + \left(F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots\right) = \\ &= F(x) + x\, F(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F(x) - x}{x} = F(x) + x\, F(x) \quad ; \qquad F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Cerchiamo ora una formula esplicita per i numeri di Fibonacci:

$$1 - x - x^2 = (1 - x r_+)(1 - x r_-) \quad \text{con } r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)} =$$
$$= \frac{1}{r_+ - r_-}\left(\frac{1}{1-xr_+} - \frac{1}{1-xr_-}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k\geq 0} r_+^k x^k - \sum_{k\geq 0} r_-^k x^k\right)$$
$$\Rightarrow \quad F_n = \frac{r_+^n - r_-^n}{\sqrt{5}} \quad \forall n \geq 0$$

Inoltre, osserviamo che $r_+ > 1$ e $|r_-| < 1$, quindi per n grande il termine r_-^n è molto piccolo

$$\Rightarrow \quad F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{per } n >> 1$$

1.2.5 Una ricorsione in due variabili: le partizioni di un insieme

Consideriamo le partizioni di un insieme. Una **partizione di un insieme** S è una collezione di sottoinsiemi non vuoti e a due a due disgiunti la cui unione è S, tali sottoinsiemi sono detti **blocchi** della partizione.
Definiamo $\left\{ n \atop k \right\}$ il numero di partizioni di $[n]$[1] in k blocchi (**numero di Stirling di secondo tipo**) e studiamo questo tipo di numeri utilizzando le funzioni generatrici.

Innanzitutto cerchiamo una formula ricorsiva per $\left\{ n \atop k \right\}$. Fissati n, k, possiamo dividere le partizioni di $[n]$ in k blocchi in due gruppi: il primo comprende quelle partizioni nelle quali l'elemento n costituisce da solo un blocco, il secondo tutte le altre, ovvero quelle nelle quali l'elemento n è in un blocco con altri elementi.
Consideriamo il primo gruppo: ogni partizione ha un blocco costituito da n solo, allora, eliminando tale blocco, ci rimangono tutte le partizioni di $[n-1]$ in $k-1$ blocchi, il cui numero è $\left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.
Consideriamo il secondo gruppo: in ogni partizione l'elemento n è in un blocco con altri elementi. Eliminando l'elemento n in ogni partizione, otteniamo tutte le partizioni di $[n-1]$ in k blocchi; ognuna di queste partizioni, però, non compare una volta sola, ma esattamente k volte. Allora questo secondo gruppo contiene $k\left\{ n-1 \atop k \right\}$ partizioni.

$$\Rightarrow \quad \left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k\left\{ n-1 \atop k \right\}$$

[1] $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

Ottenuta la formula ricorsiva, per applicare il METODO, è necessario conoscere i valori di n, k per cui è valida. Per questo motivo estendiamo la definizione di $\left\{ {n \atop k} \right\}$ a tutte le coppie $(n,\, k)$ di interi, con le seguenti convenzioni:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0 \quad \text{se } k > n \ \vee \ n < 0 \ \vee \ k < 0$$
$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \quad \text{se } n \neq 0 \quad , \quad \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$$

Allora possiamo scrivere

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \quad \forall\, (n,\, k) \neq (0,\, 0) \quad , \quad \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \tag{1.5}$$

Ora siamo pronti per cercare la funzione generatrice. Ci sono tre candidati ovvi per questo ruolo:

$$A_n\,(y) = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} y^k \ , \quad B_k\,(x) = \sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n \ , \quad C\,(x,\, y) = \sum_{n,\, k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n y^k$$

Una veloce considerazione ci porta a dire che utilizzare $B_k\,(x)$ è il modo più rapido per giungere ad una conclusione, perciò moltiplichiamo (1.5) per x^n e sommiamo su n, ottenendo

$$B_k\,(x) = xB_{k-1}\,(x) + kxB_k\,(x) \ ; \quad B_k\,(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}\,(x) \ \ (\forall k \geq 1 \ , \ B_0 = 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad B_k\,(x) &= \sum_n \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \\ &= \frac{x^k}{(1-x)\,(1-2x)\ldots(1-kx)} \quad \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizzando la scrittura in somma di frazioni parziali per ottenere lo sviluppo in serie di potenze, è possibile determinare una formula esplicita per i numeri di Stirling di secondo tipo:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \, \frac{r^n}{r!\,(k-r)!} \quad \forall n,\, k \geq 0 \tag{1.6}$$

Abbiamo detto che $\left\{ {n \atop k} \right\}$ è il numero di partizioni di un insieme di n elementi in k blocchi; più in generale, potremmo chiederci quale sia il numero

di partizioni di un insieme di n elementi, tralasciando quindi di specificare il numero di blocchi. I numeri di questo tipo sono detti **numeri di Bell**, li indichiamo $(b(n))_{n\geq 0}$ e per convenzione $b(0) = 1$.
A partire da (1.6), è facile dire che

$$b(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\} = \\ = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!\,(k-r)!}$$

Poiché $\left\{ n \atop k \right\} = 0$ se $k > n$, per ottenere $b(n)$ potremmo sommare i numeri di Stirling da $k = 1$ a M, dove M è un numero qualsiasi che sia $\geq n$:

$$b(n) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!\,(k-r)!} = \\ = \sum_{r=1}^{M} \frac{r^n}{r!} \sum_{k=r}^{M} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)!} = \\ = \sum_{r=1}^{M} \frac{r^n}{r!} \sum_{s=0}^{M-r} \frac{(-1)^s}{s!}$$

Mandando $M \longrightarrow \infty$ si ottiene

$$b(n) = \frac{1}{e} \sum_{r\geq 0} \frac{r^n}{r!} \quad \forall n \geq 0 \tag{1.7}$$

Da questa formula possiamo ricavare una funzione generatrice per i numeri di Bell. Ne cerchiamo una della forma

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n \ ,$$

ovvero una **funzione generatrice esponenziale**, che si distingue da una **funzione generatrice ordinaria** per la presenza del fattore $1/n!$.
Per trovare $B(x)$ esplicitamente, moltiplichiamo (1.7) per $x^n/n!$ e sommiamo

su $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} B(x) - 1 &= \frac{1}{e} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} \sum_{r \geq 1} \frac{r^n}{r!} = \\ &= \frac{1}{e} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \sum_{n \geq 1} \frac{(rx)^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{e} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} \left(e^{rx} - 1\right) = \\ &= \frac{1}{e} \left(e^{e^x} - e\right) = \\ &= e^{e^x - 1} - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad B(x) = e^{e^x - 1}$$

Finora abbiamo ricavato funzioni generatrici a partire da formule ricorsive, ma è possibile anche seguire il percorso inverso applicando l'operazione "$x\,(d/dx)\,log$".
Nel caso di

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1} \ ,$$

tale operazione porta al risultato

$$b(n) = \sum_k \binom{n-1}{k} b(k) \quad \forall n \geq 1 \ , \qquad b(0) = 1$$

1.3 Due esempi un po' diversi

Vediamo ora due applicazioni delle funzioni generatrici alla "vita reale".

1.3.1 Macedonie...

Supponiamo di voler fare una macedonia utilizzando frutti di diverso tipo, che devono però seguire alcune regole:

- il numero delle mele deve essere pari
- il numero delle banane deve essere un multiplo di 5 (ad esempio, perché sono vendute in caspi)
- possiamo usare al massimo 4 arance (ad esempio, per evitare che la macedonia risulti troppo aspra)
- possiamo usare al massimo 1 pera (ad esempio, perché è il frutto che si rovina prima una volta tagliato)

In quanti modi diversi possiamo prepare una macedonia con un totale di n frutti? Ad esempio, ci sono 7 modi per preparare una macedonia utilizzando 6 frutti:

Mele	6	4	4	2	2	0	0
Banane	0	0	0	0	0	5	5
Arance	0	2	1	4	3	1	0
Pere	0	0	1	0	1	0	1

Le funzioni generatrici possono aiutarci a risolvere questo problema di conteggio in modo rapido e indolore, senza dover trovare e contare tutte le combinazioni possibili.
Costruiamo la funzione generatrice per il numero di modi in cui scegliere le mele: possiamo scegliere un insieme di 0 mele in 1 modo, un insieme di 1 mela in 0 modi (perché dobbiamo usare un numero pari di mele), un insieme di 2 mele in 1 modo, un insieme di 3 mele in 0 modi e così via; quindi

$$M(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

Analogamente,

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \ldots = \frac{1}{1 - x^5}$$

Le arance possono essere al massimo 4, perciò la funzione generatrice è

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

e, analogamente,

$$P(x) = 1 + x$$

Allora, la funzione generatrice per la scelta tra tutti i tipi di frutti è

$$\begin{aligned} M(x)\,B(x)\,A(x)\,P(x) &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x) = \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} = \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \end{aligned}$$

Perciò possiamo preparare una macedonia con n frutti in $n+1$ modi diversi seguendo le regole elencate sopra. Questo risultato è coerente con l'esempio visto sopra, nel quale abbiamo contato 7 modi per fare una macedonia con 6 frutti.

1.3.2 ...e monetine

Supponiamo di dover pagare una cifra di n€ utilizzando solo monete da 1€ e 2€ e banconote da 5€. In quanti modi possiamo farlo? Ad esempio, per pagare 5€ abbiamo le seguenti possibilità:

1€	5	3	1	0
2€	0	1	2	0
5€	0	0	0	1

Come nell'esempio precedente, utilizziamo le funzioni generatrici:

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x} \\ D(x) &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2} \\ C(x) &= 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad U(x)\,D(x)\,C(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}$$

Il numero di modi per pagare n€ utilizzando monete da 1€ e 2€ e banconote da 5€ è dato dal coefficiente di x^n nel prodotto sopra. Tale coefficiente non è facile da calcolare "a mano" (sarebbe più facile calcolare direttamente tutte le combinazioni possibili), ma lo è utilizzando un apposito software (al contrario, un computer non è in grado di determinare le diverse possibilità). Facilmente troviamo che

$$U(x)\,D(x)\,C(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + \ldots$$

quindi, in particolare, ci sono 4 modi diversi in cui possiamo pagare 5€, come effettivamente abbiamo visto sopra.

1.4 Il calcolo di funzioni generatrici ordinarie

Definizione 1.4.1. *Il simbolo* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *significa che la serie* f *è la* ***funzione generatrice ordinaria*** *della successione* $(a_n)_{n\geq 0}$, *ovvero*

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \ .$$

Le operazioni sulle serie formali corrispondono a operazioni sui coefficienti di tali serie, vediamo in che modo.

Regola 1. *Se* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* $h \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \quad (a_{n+h})_{n\geq 0} \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \frac{f - a_0 - \ldots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$$

Infatti, consideriamo $h = 1$ e vediamo qual è la fgo associata a $(a_{n+1})_{n\geq 0}$:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{m\geq 1} a_m x^m = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

quindi

$$f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{f - a_0}{x} \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_{n+1})$$

di conseguenza, applicando una seconda volta questo ragionamento, otteniamo

$$(a_{n+2}) \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \frac{((f - a_0)/x) - a_1}{x} = \frac{f - a_0 - a_1 x}{x^2}$$

e, iterando h volte, otteniamo la Regola.

Esempio 1.4.2. Sia (F_n) la successione dei numeri di Fibonacci. Sappiamo che vale $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\forall n \geq 0\ , \quad F_0 = 0,\ F_1 = 1)$; questa ricorsione si traduce immediatamente nella seguente relazione della fgo:

$$\frac{f - x}{x^2} = \frac{f}{x} + f\ ; \quad f - x = fx + fx^2$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

che è lo stesso risultato a cui siamo giunti nella sezione 1.2.4.

Regola 2. *Se* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* P *è un polinomio*

$$\Rightarrow \quad P(xD)\, f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (P(n)\, a_n)_{n\geq 0}$$

Infatti, consideriamo la successione $(na_n)_{n\geq 0}$:
se $f = \sum a_n x^n$, è ovvio che $\sum na_n x^n = xf'$
quindi

$$f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n) \quad \Rightarrow \; xDf \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (na_n)$$

se poi consideriamo $(n^2 a_n)$, applicando una seconda volta questo ragionamento, otteniamo che la fgo associata è $(xD)^2 f$.

Esempio 1.4.3. *Trovare una formula per la somma della serie*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+4n+5}{n!}.$$

<u>Soluzione</u>: secondo la Regola 2, la risposta è il valore per $x=1$ della serie

$$\begin{aligned}\left((xD)^2+4xD+5\right)e^x &= \left(x^2+x\right)e^x+4xe^x+5e^x = \\ &= \left(x^2+5x+5\right)e^x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{sol.} = 11e$$

(abbiamo detto che le potenze di x nelle serie formali sono sostanzialmente dei segnaposti, quindi in realtà le serie formali non assumono "valori" per particolari valori di x; tuttavia, se manipolando una serie come fgo otteniamo una serie convergente, allora tutto il ragionamento formale fatto è valido anche analiticamente, perciò possiamo considerare uno specifico valore di x)

Esempio 1.4.4. *Trovare una formula per la somma dei quadrati dei primi N interi positivi.*
<u>Soluzione</u>: sappiamo che vale

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{x^{N+1}-1}{x-1},$$

applichiamo $(xD)^2$ a entrambi i membri dell'uguaglianza e poniamo $x=1$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N} n^2 = (xD)^2 \left(\frac{x^{N+1}-1}{x-1}\right)\Bigg|_{x=1}$$

svolgendo i calcoli, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Regola 3. *Se* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* $g \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (b_n)_{n\geq 0}$

$$\Rightarrow \quad fg \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\right)_{n\geq 0}$$

Se consideriamo il prodotto di tre serie f, g, h e tali serie generano rispettivamente le successioni (a_n), (b_n), (c_n), allora un breve calcolo mostra che

$$fgh \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{r+s+t=n} a_r b_s c_t\right)_{n\geq 0}$$

In modo analogo si ottiene la formula generale per il prodotto di k fgo, di cui un caso particolare è costituito dalla potenza k-esima di una fgo:

Regola 4. *Se* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \quad f^k \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_k}\right)_{n\geq 0}$$

Esempio 1.4.5. Sia $f(n, k)$ il numero di modi in cui un certo $n \in \mathbb{Z}^+$ può essere scritto come somma ordinata di k interi non negativi (**composizione di** n **in** k **parti**). Consideriamo la serie di potenze $1/(1-x)^k$:

$$1/(1-x) \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (1) \qquad \Rightarrow \quad 1/(1-x)^k \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (f(n, k))_{n\geq 0}$$

Si verifica che

$$f(n, k) = \binom{n+k-1}{n}$$

Regola 5. *Se* $f \overset{fgo}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$

$$\Rightarrow \quad \frac{f}{1-x} \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$$

ovvero, dividere una fgo per $1-x$ *equivale a sostituire la successone dei coefficienti con la successione delle sue somme parziali.*

Esempio 1.4.6. Vediamo un altro modo per ottenere la formula per la somma dei quadrati dei primi n numeri interi:

$$1/\left(1-x\right) \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(1\right)_{n\geq 0} \quad \Rightarrow \text{ (Regola 2)} \quad \left(xD\right)^2 \left(1/\left(1-x\right)\right) \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(n^2\right)_{n\geq 0}$$

$$\Rightarrow \text{ (Regola 5)} \quad \frac{1}{1-x} \left(xD\right)^2 \frac{1}{1-x} \overset{fgo}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right)_{n\geq 0}$$

ovvero, la somma dei quadrati dei primi n interi è il coefficiente di x^n nella serie

$$\frac{1}{1-x} \left(xD\right)^2 \frac{1}{1-x} = [\ldots] = \frac{x\left(1+x\right)}{\left(1-x\right)^4}$$

Si verifica che il coefficiente di x^n in $1/\left(1-x\right)^4$ è $\binom{n+3}{3}$
$\Rightarrow$ il coefficiente di x^n in $x\left(1+x\right)/\left(1-x\right)^4$ è

$$\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

Esempio 1.4.7. *Dimostrare che i numeri di Fibonacci soddisfano*

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1 \quad (\forall n \geq 0)$$

<u>Soluzione</u>: per la Regola 5, la fgo della successione a sinistra è $F/\left(1-x\right)$, dove F è la fgo dei numeri di Fibonacci, che abbiamo visto essere $1/\left(1-x-x^2\right)$
Per la Regola 1, la fgo della successione a destra è

$$\frac{F-x}{x^2} - \frac{1}{1-x},$$

che si verifica essere uguale alla precedente.

1.5 Il calcolo di funzioni generatrici esponenziali

In questa sezione cercheremo regole analoghe a quelle della sezione precedente, qui per funzioni generatrici esponenziali.

Definizione 1.5.1. *Il simbolo* $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *significa che la serie* f *è la* ***funzione generatrice esponenziale*** *della successione* $(a_n)_{n\geq 0}$, *ovvero*

$$f = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n \ .$$

Regola 1'. *Se* $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* $h \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \quad (a_{n+h})_{n\geq 0} \overset{fge}{\longleftrightarrow} D^h f$$

Infatti, consideriamo $h = 1$ e vediamo che $(a_{n+1})_{n\geq 0} \overset{fge}{\longleftrightarrow} f'$:

$$\begin{aligned} f' &= \sum_{n\geq 1} \frac{n a_n x^{n-1}}{n!} = \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{a_{n+1} x^n}{n!} \end{aligned}$$

Esempio 1.5.2. Consideriamo i numeri di Fibonacci:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 0$$

Applicando la Regola 1 alla fge F otteniamo l'equazione differenziale $F" = F' + F$, che si risolve con $F(x) = c_1 e^{r_+ x} + c_2 e^{r_- x}$, dove $r_\pm = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$ e c_1, c_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali $F(0) = 0\,,\ F'(0) = 1$: $\Rightarrow\ c_1 = 1/\sqrt{5}\ ,\ c_2 = -1/\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{e^{r_+ x} + e^{r_- x}}{\sqrt{5}} \tag{1.8}$$

Ora è facile ricavare una formula esplicita per F_n, perché non serve lo sviluppo in frazioni parziali ma è sufficiente vedere quale sia il coefficiente di $\frac{x^n}{n!}$ in ognuno dei due membri di (1.8): si ottiene

$$F_n = \frac{r_+^n - r_-^n}{\sqrt{5}}\ ,$$

come già visto in precedenza.

Regola 2'. *Se* $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* P *è un polinomio*

$$\Rightarrow \quad P(xD)\, f \overset{fge}{\longleftrightarrow} (P(n)\, a_n)_{n\geq 0}$$

Osserviamo che è esattamente la Regola 2, invariata.

Regola 3'. *Se* $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* $g \overset{fge}{\longleftrightarrow} (b_n)_{n\geq 0}$

$$\Rightarrow \quad fg \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left(\sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\right)_{n\geq 0}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{r\geq 0} \frac{a_r x^r}{r!}\right)\left(\sum_{s\geq 0} \frac{b_s x^s}{s!}\right) = \\ &= \sum_{r,\, s\geq 0} \frac{a_r b_s}{r!s!} x^{r+s} = \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{r+s=n} \frac{a_r b_s}{r!s!}\right) x^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{il coefficiente di } \frac{x^n}{n!} \text{ è } \sum_{r+s=n} \frac{n! a_r b_s}{r!s!} = \sum_r \binom{n}{r} a_r b_{n-r}\,.$$

E' proprio la differenza tra la Regola 3 e la Regola 3' che contraddistingue maggiormente i due tipi di funzioni generatrici, fgo e fge, e che quindi ci permette di scegliere quello più adatto ad ogni situazione. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.5.3. In precedenza abbiamo trovato la formula ricorsiva per i numeri di Bell, che possiamo scrivere nella forma

$$b(n+1) = \sum_k \binom{n}{k} b(k) \;\; \forall n \geq 0\;, \quad b(0) = 1 \tag{1.9}$$

Ora applichiamo quanto visto in questa sezione per trovare la fge dei numeri di Bell; sia B la fge in questione.
La fge del primo membro di (1.9) è, per la Regola 1', B'.
Se confrontiamo il secondo membro con la tesi della Regola 3', vediamo che la sua fge è il prodotto di B e della fge della successione che ha tutti i termini pari a 1, quest'ultima è chiaramente e^x

$$\Rightarrow \quad B' = e^x B$$

$$\Rightarrow \quad B = ce^{e^x}$$

Poiché $B(0) = 1$, deve essere $c = e^{-1}$

$$\Rightarrow \quad B(x) = e^{e^x - 1}$$

a conferma di quanto trovato in precedenza con la fgo.

Esempio 1.5.4. Un *derangement* di n lettere è una permutazione di n lettere senza punti fissi. Sia D_n il numero di *derangement* di n lettere e sia $D(x) \overset{fge}{\longleftrightarrow} (D_n)_{n\geq 0}$; cerchiamo una formula ricorsiva per la successione poi $D(x)$ poi una formula esplicita per i termini della successione.
Il numero di permutazioni di n lettere che hanno un insieme di $k \leq n$ lettere come punti fissi è ovviamente D_{n-k}. Ci sono $\binom{n}{k}$ modi di scegliere l'insieme di k punti fissi, perciò ci sono esattamente $\binom{n}{k} D_{n-k}$ permutazioni di n lettere con esattamente k punti fissi. Poiché ogni permutazione ha un certo insieme di punti fissi, vale che

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} D_{n-k} \quad \forall n \geq 0$$

Considerando le fge e la Regola 3', otteniamo

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x) \quad ; \qquad D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$\Rightarrow$ (Regola 5) considerando i coefficienti di x^n nei due menbri dell'uguaglianza, otteniamo

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Analogamente al caso delle fgo, date tre fge f, g, h che generano rispettivamente (a_n), (b_n), (c_n), vale che

$$fgh \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{r+s+t=n} \frac{n!}{r!s!t!} a_r b_s c_t \right)_{n\geq 0}$$

e, in generale, si avrà un formula di questo tipo per il prodotto di più fge, in particolare otterremo:

Regola 4'. *Se* $f \overset{fge}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ *e* $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Rightarrow \quad f^k \overset{fge}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{r_1+\ldots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!} a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_k} \right)_{n\geq 0}$$

Capitolo 2

In questo capitolo vedremo alcune applicazioni della teoria delle funzioni generatrici a problemi di conteggio.

2.1 Carte, Mani, Mazzi

Supponiamo sia dato un insieme astratto $\mathcal{P}$ di figure.

Definizione 2.1.1. *Una* ***carta*** $\mathcal{C}(S, p)$ *è una coppia costituita da un insieme finito* S *di interi positivi, detto* ***insieme delle etichette****, e da una figura* $p \in \mathcal{P}$*. Il* ***peso di una carta*** $\mathcal{C}$ *è* $n = |S|$*. Una carta di peso* n *è* ***standard*** *se il suo insieme delle etichette è* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Definizione 2.1.2. *Una* ***mano*** H *è un insieme di carte i cui insiemi delle etichette costituiscono una partizione di* $[n]$*, per qualche* n*.*

Definizione 2.1.3. *Il* ***peso di una mano*** *è la somma dei pesi delle carte nella mano.*

Osservazione 2.1.4. *Se una mano* H *ha peso* n*, allora gli insiemi delle etichette delle carte in* H *sono a due a due disgiunti, non vuoti, e la loro unione è* $[n]$*.*

Definizione 2.1.5. *Una* ***rietichettatura*** *di una carta* $\mathcal{C}(S, p)$ *con un insieme* S' *è definita se* $|S| = |S'|$*, ed è* $\mathcal{C}(S', p)$*; se* $S' = [|S|]$ *parliamo di* ***rietichettatura standard*** *della carta.*

Definizione 2.1.6. *Un* ***mazzo*** D *è un insieme finito di carte standard, tutte con lo stesso peso, con figure tutte diverse. Il* ***peso di un mazzo*** *è il peso comune a tutte le carte del mazzo.*

Definizione 2.1.7. *Una* ***famiglia esponenziale*** $\mathcal{F}$ *è una collezione di mazzi* $D_1, D_2, \ldots$ *t.c.* $\forall n = 1, 2, \ldots$ *il mazzo* D_n *ha peso* n*.*

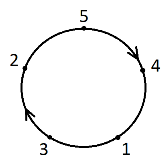
Se $\mathcal{F}$ è una famiglia esponenziale, definiamo d_n il numero di carte nel mazzo D_n, chiamiamo $\mathcal{D}(x)$, la fge della successione $(d_n)_{n\geq 1}$, **funzione generatrice (fg) dei mazzi** e definiamo $h(n,k)$ il numero di mani H di peso n costituite da k carte in modo che ogni carta nella mano sia la rietichettatura di una qualche carta di un qualche mazzo di $\mathcal{F}$, con possibilità di ripetizione (ovvero, possiamo prendere più copie della stessa carta da un mazzo e rietichettare tali copie con insiemi di etichette diversi).
Come possiamo esprimere $h(n,k)$ in funzione di $d_1, d_2, d_3, \ldots$? Introduciamo la funzione generatrice in due variabili

$$\mathcal{H}(x,y) = \sum_{n,k\geq 0} h(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k \ .$$

Osserviamo che questa è una fgo rispetto a y ma una fge rispetto a x; la chiamiamo **funzione generatrice (fg) delle mani** in due variabili della famiglia.
Ovviamente, per rispondere alla nostra domanda è sufficiente trovare una relazione tra $\mathcal{H}(x,y)$ e $\mathcal{D}(x)$, prima però vediamo un esempio di famiglia esponenziale.

Esempio 2.1.8. Un esempio di famiglia esponenziale è l'insieme di tutte le permutazioni, vediamo in che senso.

In una carta, la figura mostra n punti, etichettati con l'insieme $[n]$, disposti in circolo in un certo ordine, e ci sono delle frecce lungo il cerchio, tutte orientate in senso orario, che determinano la disposizione circolare dei punti; inoltre c'è un insieme S di n interi positivi. In pratica, una carta corrisponde ad una permutazione ciclica degli elementi di S.
Ad esempio, $\mathcal{C}(S, p)$ con $S = \{2, 4, 7, 9, 10\}$ e p come in figura



rappresenta la permutazione ciclica

$$2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2 \ ,$$

in quanto l'elemento "1" di p viene rietichettato con l'elemento di S più piccolo, il "2" di p con il secondo più piccolo di S, e così via.

Le carte in un mazzo sono carte standard e sono un esempio di ogni possibile carta standard di un certo peso assegnato. In questo caso, il mazzo D_n

contiene esattamente $(n-1)!$ carte, una per ciascuna permutazione ciclica di $[n]$.

Una mano è una collezione di carte su ognuna delle quali sono presenti due elementi: una permutazione ciclica e un insieme di etichette, di pari cardinalità; gli insiemi di etichette sono a due a due disgiunti e la loro unione è $\{1, 2, \ldots, n\}$. La collezione di tutte le carte nella mano rappresenta quindi una permutazione di n lettere: i cicli di tale permutazione sono quelli mostrati sulle singole carte della mano previa rietichettatura con gli insiemi di etichette delle carte stesse.
Poiché ogni permutazione di n lettere ha un'unica scomposizione in cicli, le mani di peso n corrispondono esattamente alle permutazioni di n lettere.

Chiamiamo $\mathcal{F}_1$ la famiglia esponenziale costituita dall'insieme di tutte le permutazioni.

2.2 Il Teorema Fondamentale del Conteggio

Definizione 2.2.1. *Siano $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ due famiglie esponenziali con insiemi di figure $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ disgiunti. L'**unione** di $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ è una terza famiglia $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ così definita: $\forall n \geq 1$ il mazzo D_n contiene tutte le carte del mazzo $D_n^{'}$ di $\mathcal{F}'$ e tutte le carte del mazzo $D_n^{''}$ di $\mathcal{F}''$, per un totale di $d_n = d_n^{'} + d_n^{''}$ carte in $\mathcal{D}_n$.*
In pratica, il mazzo di $\mathcal{F}$ di un determinato peso è l'unione dei mazzi di $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ dello stesso peso; $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ sono richiesti disgiunti per evitare che nel nuovo mazzo ci siano carte uguali.

Lemma 2.2.2. ***(Lemma Fondamentale del Conteggio con Etichette)***
Siano $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$" due famiglie esponenziali e $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}$" la loro unione, e siano $\mathcal{H}'(x,y)$, $\mathcal{H}$" (x,y), $\mathcal{H}(x,y)$ le rispettive fg delle mani in due variabili.
Allora $\mathcal{H}(x,y) = \mathcal{H}'(x,y)\,\mathcal{H}$" (x,y)
Ovvero, l'unione di famiglie si traduce nel prodotto delle funzioni generatrici.

Dimostrazione. Consideriamo una mano H nella famiglia unione $\mathcal{F}$: alcune delle carte nella mano provengono da $\mathcal{F}'$, altre da $\mathcal{F}''$. Le carte che provengono da $\mathcal{F}'$ formano una sotto-mano H' di peso, diciamo, n' e con k' carte che sono state rietichettate con un certo insieme di etichette $S \subset [n]$. Tutte le mani H in $\mathcal{F}$ sono univocamente determinate da una particolare mano H' da $\mathcal{F}'$, dalla scelta delle nuove etichette S con cui tale mano viene rietichettata, e dalla restante sotto-mano H'' da $\mathcal{F}''$ che dovrà essere rietichettata con $[n] - S$. Di conseguenza, il numero di mani in $\mathcal{F}$ di peso n e con k carte è

$$\begin{aligned} h(n,k) &= \sum_{n',k'} \binom{n}{n'} h'(n',k')\, h''(n-n',k-k') = \\ &= \left[\frac{x^n}{n!} y^k\right] \{\mathcal{H}'(x,y)\,\mathcal{H}\text{"}(x,y)\} \end{aligned}$$

(dove il simbolo $[y]\{f\}$ indica il coefficiente di y nello sviluppo in serie di potenze di f) □

Il Lemma Fondamentale ci permetterà di trovare una relazione generale tra fg delle mani e fg dei mazzi con un ragionamento per passi successivi.

Passo 1. Fissato un intero positivo r, sia il mazzo r-esimo, D_r, costituito da una sola carta e siano gli altri mazzi vuoti

$$\Rightarrow \quad d_r = 1\ , \quad d_i = 0\ \forall i \neq r \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(x) = x^r/r!$$

Una mano H è costituita da un certo numero, diciamo s, di copie dell'unica carta esistente. Allora il peso di H è rs. Allora $h(n,k) = 0$ a meno che non

sia $n = kr$.
Contiamo le mani di peso $n = kr$: abbiamo $\binom{n}{r}$ scelte per le etichette della prima carta, $\binom{n-r}{r}$ per quelle della seconda, e così via fino a $\binom{n-(k-1)r}{r} = 1$ per la k-esima
$\Rightarrow$ poiché l'ordine delle carte non conta,

$$h\left(kr, k\right) = \frac{1}{k!}\frac{n!}{r!^k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathcal{H}\left(x, y\right) &= \sum_{n,\, k} h\left(n, k\right) \frac{x^n}{n!} y^k = \\ &= \sum_{k} \frac{x^{kr} y^k}{k! r!^k} = \\ &= exp\left(\frac{yx^r}{r!}\right) \end{aligned}$$

Passo 2. Fissiamo gli interi positivi r e d_r, e consideriamo la famiglia esponenziale $\mathcal{F}$ che ha d_r carte nel mazzo r-esimo D_r e tutti gli altri mazzi vuoti. Allora

$$\mathcal{H}\left(x, y\right) = exp\left(\frac{yd_r x^r}{r!}\right)$$

Dimostrazione. Verifichiamo per induzione su d_r che questa affermazione è vera.

- $d_r = 1$: OK per Passo 1
- supponiamo sia vera per $d_r = 1, 2, \ldots, m-1$ e consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ il cui r-esimo mazzo ha m carte: $\mathcal{F}$ è il risultato dell'unione di una famiglia con $m-1$ carte nell'r-esimo mazzo e di una famiglia con 1 carta nell'r-esimo mazzo. Per ipotesi induttiva e per il Lemma Fondamentale, la fg delle mani di $\mathcal{F}$ è

$$exp\left(\frac{y\left(m-1\right)x^r}{r!}\right) exp\left(\frac{yx^r}{r!}\right) = exp\left(\frac{ymx^r}{r!}\right)$$

□

Passo 3.

Teorema 2.2.3. ***(La Formula Esponenziale)*** *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia esponenziale con fg dei mazzi e delle mani $\mathcal{D}(x)$ e $\mathcal{H}(x,y)$ rispettivamente.*
Allora

$$\mathcal{H}(x,y) = e^{y\mathcal{D}(x)}$$

In particolare,

$$h(n,k) = \left[\frac{x^n}{n!}\right]\left\{\frac{\mathcal{D}(x)^k}{k!}\right\} \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Nel Passo 1 abbiamo dimostrato questo risultato nel caso particolare di un solo mazzo non vuoto. Ma una generica famiglia esponenziale con una successione $D_1, D_2, \ldots$ di mazzi non vuoti può essere considerata l'unione delle famiglie $\mathcal{F}_r,\ r = 1, 2, \ldots$, dove $\mathcal{F}_r$ ha un unico mazzo D_r non vuoto. Per il Lemma Fondamentale, la fg delle mani della famiglia generica è il prodotto delle fg delle mani delle famiglie $\mathcal{F}_r$; poiché la funzione generatrice della tesi del teorema è proprio il prodotto delle fg delle mani delle famiglie $\mathcal{F}_r$ viste al Passo 1, possiamo concludere. □

Corollario 2.2.4. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia esponenziale, sia $\mathcal{D}(x)$ la fge della successione $(d_n)_{n\geq 1}$ delle dimensioni dei mazzi, e sia $\mathcal{H}(x) \stackrel{fge}{\longleftrightarrow} (h_n)_{n\geq 0}$ con h_n numero di mani di peso n.*
Allora

$$\mathcal{H}(x) = e^{\mathcal{D}(x)}$$

Dimostrazione. È sufficiente sommare la formula (2.1) su tutti i valori di k. □

Corollario 2.2.5. ***(La Formula Esponenziale con numeri di carte ridotti)*** *Sia T un insieme di interi positivi, sia $h_n(T)$ il numero di mani con peso n e i cui rispettivi numeri di carte appartengono a T, e sia*

$$e_T(x) = \sum_{n\in T} \frac{x^n}{n!}$$

Allora

$$(h_n(T))_{n\geq 0} \stackrel{fge}{\longleftrightarrow} e_T(\mathcal{D}(x))$$

Dimostrazione. È sufficiente sommare (2.1) sui valori di k che appartengono a T. □

2.3 Alcuni esempi di applicazione

2.3.1 Permutazioni e cicli

Applichiamo quanto appena visto alla famiglia esponenziale $\mathcal{F}_1$ descritta in precedenza (carta $\leftrightarrow$ permutazione ciclica; mazzo di peso n $\leftrightarrow$ permutazioni cicliche di $[n]$; mano $\leftrightarrow$ permutazione generica). Abbiamo visto che il mazzo D_n contiene $d_n = (n-1)!$ carte; la fge della successione $((n-1)!)_{n\geq 1}$ è

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x) &= \sum_{n\geq 1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = \\ &= \log\left(\frac{1}{1-x}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (Teorema Fondamentale del Conteggio)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x,y) &= \exp\left(y\,\log\frac{1}{1-x}\right) = \\ &= \frac{1}{(1-x)^y}\end{aligned}$$

In questa famiglia esponenziale, $h(n,k)$ è il numero di permutazioni di n lettere che hanno k cicli, ed è detto **numero di Stirling di primo tipo (senza segno)**, si indica $\left[{n \atop k}\right]$.
Ora,

$$\begin{aligned}\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} y^k &= \left[\frac{x^n}{n!}\right]\left\{(1-x)^{-y}\right\} = \\ &= n!\binom{y+n-1}{n} = \\ &= y(y+1)\ldots(y+n-1)\end{aligned}$$

ovvero, i coefficienti dello sviluppo del "fattoriale crescente" rappresentano il numero di permutazioni di n lettere al variare del numero di cicli.
(Abbiamo utilizzato il fatto che $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_k \binom{n+k}{n} x^n$)
La fg delle mani di k carte è ovviamente

$$\frac{1}{k!}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^k \qquad \forall k\geq 1$$

da cui si ricava un'altra formula per i numeri di Stirling:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \left[\frac{x^n}{n!}\right] \left\{ \frac{1}{k!} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^k \right\}$$

Non esiste una formula esplicita semplice per il calcolo dei numeri di Stirling di primo tipo, tutte quelle trovate finora sono abbastanza complicate in quanto prevedono, ad esempio, doppie sommatorie a segni alterni; a partire dalle funzioni generatrici viste sopra, però, è possibile ottenere una formula ricorsiva molto semplice:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

(Tale formula può essere dimostrata anche con un ragionamento puramente combinatorio, considerando le permutazioni di n lettere con k cicli in cui n è un punto fisso e quelle in cui non lo è)

2.3.2 Partizioni di insiemi

Introduciamo una nuova famiglia esponenziale $\mathcal{F}_2$: $\forall n \geq 1$ nel mazzo D_n c'è una sola carta di peso n, con la figura di un gattino[1] e l'insieme di etichette $[n]$. Ogni mano H corrisponde ad una partizione dell'insieme $[n]$; data una partizione, utilizziamo gli insiemi in essa per rietichettare gli insiemi di etichette sulle carte della mano.
In questa famiglia esponenziale il numero di mani di peso n e con k carte è uguale al numero di partizioni dell'insieme $[n]$ in k blocchi; ciò è qualcosa che abbiamo già visto nella sezione 1.2.5, dove abbiamo chiamato i numeri di questo tipo numeri di Stirling di secondo tipo, indicandoli $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Per applicare la Formula Esponenziale dobbiamo innanzitutto calcolare la fge dei numeri d_n di carte in ogni mazzo. Tali numeri sono tutti $= 1$ se $n \geq 1$, $= 0$ altrimenti, perciò

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x) &= \sum_n d_n \frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} = \\ &= e^x - 1 \end{aligned}$$

[1]Poiché c'è una sola carta, la figura è irrilevante, quindi perché non metterci qualcosa di carino?

$\Rightarrow$ (Formula Esponenziale)

$$\mathcal{H}(x, y) = e^{y(e^x - 1)}$$

In particolare,

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left[\frac{x^n}{n!} \right] \left\{ \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \right\}$$

Confrontando questo risultato con la funzione generatrice dei numeri di Bell $\left(\sum b(n) \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1} \right)$ trovata sempre nella sezione 1.2.5, osserviamo che ora abbiamo ottenuto un raffinamento di tale funzione generatrice: non solo $e^{e^x - 1}$ genera i numeri di partizioni di insiemi con n elementi, ma ogni termine dello sviluppo

$$e^{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$$

ha senso in riferimento al numero di blocchi delle partizioni.

2.3.3 Permutazioni particolari

Quante permutazioni di n lettere hanno un numero pari di cicli di lunghezze dispari?
Questo problema riguarda la famiglia esponenziale $\mathcal{F}_1$ delle permutazioni, con la differenza che risultano coinvolti solo i mazzi di pesi dispari, ovvero $D_1, D_3, \ldots$; i numeri $(d_n)_{n \geq 1}$ di carte sono quindi 1, 0, 2, 0, 24, 0, 720, ..., e di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x) &= \sum_{n \text{ dispari}} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{r \geq 0} \frac{x^{2r+1}}{2r+1} = \\ &= \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{aligned}$$

$$\left(\text{poiché vale } \log \frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \right)$$

Dato che il numero di cicli in una permutazione deve essere pari, il numero di carte in una mano deve appartenere a $T = \{\text{numeri pari}\}$. Per il Corollario

2.2.5 della Formula Esponenziale, la fge del problema è

$$\cosh\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \sum_{m\geq 0}\binom{2m}{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

Il numero di permutazioni che soddisfano le condizioni del problema è il coefficiente di $x^n/n!$ nella fge sopra, ovvero

$$\binom{n}{n/2}\frac{n!}{2^n}$$

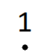
Un altro modo per risolvere il problema è:

Teorema 2.3.1. *Sia n un intero positivo fissato. Allora le probabilità dei seguenti eventi sono uguali:*

- *una permutazione è scelta casualmente dall'insieme di quelle su n lettere e con un numero pari di cicli di lunghezze dispari*
- *una moneta viene lanciata n volte ed escono esattamente $n/2$ teste*

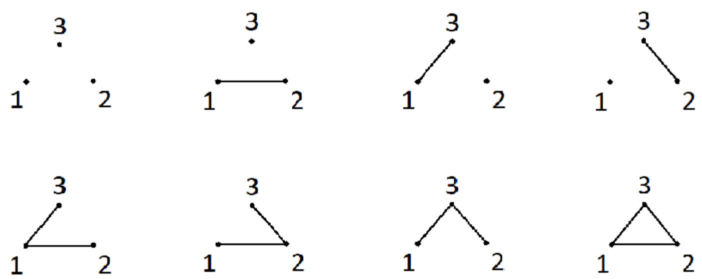
2.4 Esempi con grafi e alberi

Innanzitutto vediamo cos'è un grafo. Un **grafo** è una coppia (V, E) dove V è un insieme i cui elementi sono detti **vertici** ed E è una famiglia di sottoinsiemi di cardinalità 2 di V i cui elementi sono detti **lati**. Un **grafo etichettato** è un grafo che ha un intero positivo associato ad ogni vertice; tali interi, detti **etichette**, devono essere tutti diversi.
Il grafo ha **etichettatura standard** se l'insieme delle etichette dei suoi n vertici è $[n]$. La **rietichettatura standard** di un grafo di n vertici consiste nel sostituire l'insieme S delle sue etichette con l'insieme $[n]$, preservando l'ordine delle etichette; ciò significa che l'etichetta di S con il valore più piccolo verrà sostituita dall'etichetta 1, e così via.
Il numero di tutti i possibili lati in grafi di n vertici è $\binom{n}{2}$, di conseguenza esistono $2^{\binom{n}{2}}$ grafi etichettati di n vertici (in quanto, per ogni possibile lato di un grafo, possiamo decidere se tracciarlo o no). Ad esempio, vediamo tutti i grafi di $n = 1, 2, 3$ vertici con etichettatura standard:
$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{\binom{n}{2}} = 2^0 = 1$



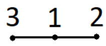
$n = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^{\binom{n}{2}} = 2^1 = 2$

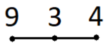
$n = 3 \quad \Rightarrow \quad 2^{\binom{n}{2}} = 2^3 = 8$



Un grafo è **connesso** se, data una qualsiasi coppia di vertici, è possibile andare dall'uno all'altro percorrendo i lati del grafo stesso. Altrimenti un grafo si dice **sconnesso**.
Un grafo è **orientato** se ogni lato è orientato, ovvero se è caratterizzato da un verso di percorrenza; in altri termini, i lati di un grafo orientato sono coppie ordinate (v, w) di vertici, con $v \neq w$. In un grafo orientato, i lati sono detti **archi**.

2.4.1 Grafi etichettati e connessi

Descriviamo la famiglia esponenziale $\mathcal{F}_3$ dei grafi etichettati.
Ogni carta $\mathcal{C}(S,p)$ corrisponde ad un grafo etichettato e connesso: S è l'insieme delle etichette utilizzato per i vertici del grafo, e la figura p è la rietichettatura standard del grafo. In altre parole, su ogni carta vediamo la figura di un grafo connesso con etichettatura standard e un altro insieme di etichette, della stessa cardinalità.
Ad esempio, una carta di peso 3 è $\mathcal{C}(S,p)$ con $S = \{3,4,9\}$ e $p =$ 

,
che corrisponde al grafo etichettato e connesso 

.

Il mazzo di peso n è l'insieme di tutti i grafi di n vertici, con etichettatura standard e connessi. Il numero d_n è il numero di tali grafi.

Una mano è una collezione di carte i cui insiemi delle etichette costituiscono una partizione di $[n]$, con n peso della mano; allora una mano corrisponde ad un grafo con etichettatura standard e non necessariamente connessso.
Di conseguenza, $h(n,k)$ è il numero di grafi con etichettatura standard, n vertici e k componenti connesse.

Possiamo ora contare il numero di grafi di n vertici etichettati e connessi. Abbiamo visto che il numero di grafi di n vertici etichettati è $2^{\binom{n}{2}}$, perciò la funzione generatrice delle mani è

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$$

In questo caso, quindi, non utilizziamo la Formula Esponenziale per trovare $\mathcal{H}$ conoscendo $\mathcal{D}$, ma per trovare $\mathcal{D}$ conoscendo $\mathcal{H}$, e per fare ciò applichiamo il metodo "*xDlog*":

Teorema 2.4.1. *Le successioni (h_n) e (d_n) del numero di mani e mazzi in una famiglia esponenziale soddisfano la ricorsione*

$$nh_n = \sum_k kd_k h_{n-k} \quad \forall n \geq 0, \qquad h_0 = 1$$

Dimostrazione. E' sufficiente applicare il metodo "*xDlog*" alla Formula Esponenziale. □

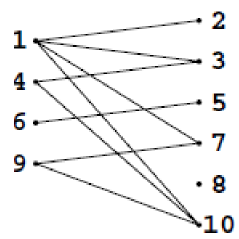
Di conseguenza, i numeri d_n dei grafi di n vertici etichettati e connessi soddisfano la ricorsione

$$n2^{\binom{n}{2}} = \sum_k \binom{n}{k} kd_k 2^{\binom{n-k}{2}} \quad , \quad n \geq 1$$

Per $n = 1, \ldots, 5$ risulta d_n =1, 1, 4, 38, 728.

2.4.2 Grafi etichettati e bipartiti

Un **grafo bipartito** è un grafo G il cui insieme dei vertici V può essere partizionato in due sottoinsiemi A, B tali che ogni vertice di una di queste due parti è collegato solo a vertici dell'altra; più formalmente, $V = A \cup B$ e ogni lato di G è della forma $\{a, b\}$ con $a \in A$, $b \in B$.
Ad esempio, un grafo bipartito di 10 vertici è



Ora, quanti dei $2^{\binom{n}{2}}$ grafi di n vertici etichettati sono bipartiti?
La Formula Esponenziale non permette di contare sia i mazzi che le mani; perciò, dato che non è immediato calcolare il numero di grafi connessi bipartiti né quello di tutti i possibili grafi bipartiti, dobbiamo procedere per un'altra via.

Scegliamo i blocchi A, B della partizione $[n] = A \cup B$ e contiamo i grafi bipartiti che hanno tale partizione: ci sono $|A|\,|B|$ possibili lati, per un totale di $2^{|A||B|}$ grafi.
In questo modo, però, un certo grafo bipartito può essere contato più volte. Ad esempio, il grafo della figura sopra si ottiene con $A = \{1, 4, 6, 9\}$, $A = \{2, 3, 5, 7, 8, 10\}$, $A = \{1, 4, 5, 9\}$, $A = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, ecc.
In generale, un grafo bipartito con c componenti connesse viene contato 2^c volte, perché per ogni componente connessa G_i possiamo scegliere quale dei due blocchi A_i, B_i della partizione dei suoi vertici considerare sottoinsieme di A (e, di conseguenza, quale considerare sottoinsieme di B).

Per aggirare questo problema, consideriamo grafi bipartiti **di due colori**, ovvero grafi etichettati bipartiti i cui vertici vengono colorati di rosso o di blu in modo che ogni lato $\{a, b\}$ del grafo abbia a, b di colori diversi. Un grafo bipartito connesso, allora, genera due grafi di due colori; un grafo bipartito con c componenti connesse genera 2^c grafi di due colori.

Possiamo ora costruire una famiglia esponenziale $\mathcal{F}_4$, nella quale ogni carta corrisponde ad un grafo etichettato bipartito e connesso di due colori; su ogni carta, come sempre, ci sono un insieme di etichette S e la figura di un grafo di $|S|$ vertici bipartito, connesso, di due colori, con etichettatura standard.

Il vantaggio di colorare le carte è che ora sappiamo quante sono le mani di peso n:

$$\gamma_n = \sum_k \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} \tag{2.2}$$

Infatti, ogni possibile mano si ottiene una e una sola volta applicando il seguente ragionamento:

1. fissiamo un intero k t.c. $0 \leq k \leq n$
2. scegliamo k elementi di $[n]$ e li coloriamo di rosso
3. coloriamo i restanti elementi di $[n]$ di blu
4. decidiamo in modo indipendente per ogni coppia di vertici $\{\rho, \beta\}$ con ρ rosso e β blu se $\{\rho, \beta\}$ è un lato oppure no

Ora, applicando la Formula Esponenziale, possiamo ricavare la fge dei mazzi, i quali corrispondono ai grafi bipartiti connessi di due colori:

$$\mathcal{D}(x) = log\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n\right) \qquad \text{con } \gamma_n \text{ come da formula (2.2)}$$

I grafi connessi e non colorati sono esattamente la metà di quelli connessi e colorati, perciò la fge dei grafi bipartiti connessi e non colorati (ovvero la fge dei mazzi) è $\mathcal{D}(x)/2$. Di conseguenza, per la Formula Esponenziale, la fge delle mani è

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{D}(x)/2} &= exp\left(\frac{1}{2} log\left(\sum_{n\geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n\right)\right) \\ &= \sqrt{\sum_{n\geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n} \end{aligned}$$

Quindi vale il seguente risultato:

Teorema 2.4.1. *Sia β_n il numero di grafi di n vertici bipartiti etichettati. Allora*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\beta_n}{n!} x^n = \sqrt{\sum_{n\geq 0} \frac{\gamma_n}{n!} x^n}$$

con γ_n come da formula (2.2)

Osserviamo, quindi, che tutti i problemi dovuti ai conteggi multipli sono stati risolti estraendo la radice quadrata della funzione generatrice con cui siamo partiti!

2.4.3 Alberi etichettati

Un **albero** è un grafo non orientato, connesso e senza cicli. Quanti sono gli alberi di n vertici etichettati?
Un **albero radicato** è un albero che ha un vertice diverso dagli altri detto **radice**. Ovviamente, il numero di alberi radicati di n vertici è n volte il numero di quelli non radicati, perciò è sufficiente contare quelli radicati per ottenere la risposta alla nostra domanda.

Sia t_n il numero di alberi radicati di n vertici, per $n \geq 1$.
Definiamo la famiglia esponenziale $\mathcal{F}_5$: le carte rappresentano gli alberi radicati; su una carta $\mathcal{C}(S, p)$, S è un insieme di etichette e p è la figura di un albero radicato di $|S|$ vertici. Una mano corrisponde ad una **foresta** radicata etichettata, ovvero un grafo etichettato le cui componenti connesse sono alberi radicati.

Come nell'esempio precedente, volendo utilizzare la Formula Esponenziale, non conosciamo né $\mathcal{H}(x)$ né $\mathcal{D}(x)$, dove $\mathcal{H}(x) \stackrel{fge}{\longleftrightarrow} (f_n)$, con f_n numero delle foreste radicate di n vertici, e $\mathcal{D}(x) \stackrel{fge}{\longleftrightarrow} (t_n)$.
Polya dimostrò il seguente risultato:

Proposizione 2.4.1. $t_{n+1} = (n+1) f_n \quad \forall n \geq 0$

Dimostrazione. Sia F una foresta radicata ed etichettata di n vertici, e sia v un nuovo vertice al quale assegnamo l'etichetta j, con $1 \leq j \leq n+1$.
Rietichettiamo F con l'insieme 1, 2, ..., $j-1$, $j+1$, ..., $n+1$ preservando l'ordine delle etichette. Tracciamo dei lati tra v e tutte le radici delle componenti di F, e scegliamo v come radice dell'albero risultante; tale albero ha quindi $n+1$ vertici ed è radicato ed etichettato. Al variare della scelta dell'etichetta j di v otteniamo $n+1$ alberi radicati per ogni foresta radicata F.
Poiché questa costruzione è invertibile, ogni albero radicato di $n+1$ vertici si può ottenere in uno e un solo modo. □

La fge della successione $f_n = t_{n+1}/(n+1)$ è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{t_{n+1}}{(n+1)!} x^n \\
&= \frac{1}{x} \mathcal{D}(x)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} \mathcal{D}(x) = e^{\mathcal{D}(x)} \quad ; \qquad \mathcal{D}(x) = x e^{\mathcal{D}(x)}$$

Per risolvere questa equazione e trovare $\mathcal{D}(x)$ si può utilizzare la Formula di Inversione di Lagrange, che ora enunciamo senza però dimostrarla.

Teorema 2.4.1. ***Formula di Inversione di Lagrange***. *Siano $f(u)$ e $\Phi(u)$ serie formali di potenze in u, con $\Phi(0) = 1$*
Allora $\exists!\ u = u(t)$ serie formale di potenze t.c. $u = t\,\Phi(u)$
Inoltre, il valore $f(u(t))$ di f in $u = u(t)$, quando f è sviluppata in serie di potenze in t in un intorno di $t = 0$, soddisfa

$$[t^n]\{f(u(t))\} = \frac{1}{n}\left[u^{n-1}\right]\{f'(u)\,\Phi(u^n)\} \tag{2.3}$$

Nel nostro caso, $\Phi(u) = e^u$. Considerando $f(u) = u$, per la formula (2.3), abbiamo che

$$\begin{aligned} [x^n]\{\mathcal{D}(x)\} &= \frac{1}{n}\left[u^{n-1}\right]\{\Phi(u)^n\} \\ &= \frac{1}{n}\left[u^{n-1}\right]\{\ e^{un}\} \\ &= \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{n^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t_n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \quad ; \qquad t_n = n^{n-1}$$

Per quanto detto all'inizio di questo esempio, il numero di alberi di n vertici etichettati è quindi

$$\frac{n^{n-1}}{n} = n^{n-2}$$

Bibliografia

[1] Herbert S. Wilf - *GeneratingFunctionology* - Taylor & Francis Inc., 1990 (3a ed. 2005)

[2] Louis Comtet - *Advanced Combinatorics, The art of finite and infinite expansions* - Boston (MA), D. Reidel Publ. Co., 1974

[3] Henry W. Gould - *Combinatorial identities* - Morgantown (WV), 1972

[4] I. P. Goulden e D. M. Jackson - *Combinatorial enumeration* - New York, John Wiley and Sons, 1983

[5] Ronald L. Graham, Donald. E. Knuth e Oren Patashnik - *Concrete Mathematics* - Reading (MA), Addison-Wesley, 1989

[6] Donald E. Knuth - *The Art of Computer Programming*, vol. 1: *Fundamental Algorithms* - 1968 (2a ed. 1973); vol. 2: *Seminumerical Algorithms* - 1969 (2a ed. 1981); vol. 3: *Sorting and Searching* - 1973; Reading (MA), Addison-Wesley

[7] Gian-Carlo Rota e Ronald Mullin - 'On the foundations of combinatorial theory, III', *In Graph Theory and its Applications* - Reading (MA), Academic Press, 1970

[8] Richard P. Stanley - *Enumerative combinatorics* - Monterey (CA), Wadsworth, 1986

[9] *Generating Functions* - MIT OpenCourseWare

Ringraziamenti

Innanzitutto, per quanto banale possa sembrare, ringrazio i diversi professori che nel corso dei miei studi fino ad oggi mi hanno fatto apprezzare la Matematica: in particolare, il prof. Facchini e la prof.ssa Trambaiolo del liceo Fermi (c'è chi ancora mi ricorda quelle volte in cui discutevo con la prof. riguardo un certo esercizio e i miei compagni di classe stavano ad ascoltarci con espressioni confuse), e ovviamente la mia relatrice, la prof.ssa Barnabei, per averci mostrato le "magie" della Teoria dei numeri ed essere stata così disponibile durante la stesura di questa tesi.

Ringrazio poi i miei amici e compagni di corso, in particolare Mireya, anche se mi ha abbandonata dopo il primo anno, Michele, che l'ha sostituita in quanto compagno di banco, Giulia e Martina, che mi hanno fatto copiare dai loro appunti quando rimanevo indietro. Però, ragazze, non vi perdonerò mai per avermi coinvolta nelle briscolate durante le pause!
Ringrazio anche mia sorella Elena e tutti gli amici che in questi tre anni di università hanno scherzato con me e non mi hanno strangolata quando dicevo che noi matematici siamo esseri superiori. (Intanto sapete che ho ragione...)

Infine, un grazie enorme ai miei genitori che hanno sempre creduto in me e mi hanno supportata in tutti i modi possibili.