ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL PARADOSSO DI BANACH-TARSKI E I GRUPPI AMENABILI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Stefano Francaviglia

Presentata da:
Gemma Capomagi

♯ Sessione
2017-2018

Introduzione

Il *paradosso di Banach-Tarski* è un risultato molto discusso nella storia della matematica, in grado di toccare vari ambiti, dalla Geometria all'Analisi funzionale. Il suo essere chiamato *paradosso* deriva dalla sua natura estremamente controintuitiva e distante dal senso comune. Tale risultato è, infatti, un teorema a tutti gli effetti.
Esso risulta essere un argomento molto poliedrico e più profondo di quanto si possa pensare a una prima lettura.
L'enunciato afferma che è possibile decomporre una sfera di $\mathbb{R}^3$ in un numero finito di parti per poi riassemblarle in modo da ottenere due sfere di $\mathbb{R}^3$ aventi lo stesso raggio della sfera di partenza.

La dimostrazione del teorema, realizzata per mano dei matematici Stefan Banach e Alfred Tarski, risale al ventesimo secolo (1924), in un periodo particolarmente fervido di dibattiti scientifici. In particolare, si discuteva circa la presenza o meno dell'*Assioma della Scelta* nel sistema di assiomi fondamentali della matematica.
C'erano studiosi che appoggiavano l'aggiunta dell'Assioma e altri, tra cui Banach e Tarski, che lo ritenevano inappropriato. Infatti, essi riuscirono a rendere il paradosso un teorema proprio con l'ausilio dell'Assioma, senza il quale non sarebbero giunti a una dimostrazione. Fu questa controintuitività nel risultato ad accreditare la loro posizione nel dibattito.
Tuttavia, dal momento che fu indispensabile per la dimostrazione di numerosi risultati, l'Assioma della Scelta venne infine aggiunto al sistema di assiomi fondamentali.
Per ovviare quindi alla formazione del paradosso di Banach-Tarski, vennero introdotti i cosiddetti *gruppi amenabili*. Muniti di appropriata misura, tali gruppi agiscono su insiemi, come ad esempio la sfera di $\mathbb{R}^3$, impedendovi l'origine di scomposizioni paradossali. Nondimeno l'utilità di questi gruppi non si limitò al contesto del paradosso e, studiandoli ulteriormente, si scoprirono loro proprietà che ne permisero l'applicazione in altri ambiti.

La tesi è strutturata come segue. Nel Capitolo 1 sono citate definizioni preliminari per lo sviluppo della stessa. In particolare, sono definiti i concetti di scomposizione paradossale ed equiscomponibilità. Il Capitolo 2 tratta a fondo la dimostrazione del paradosso di Banach-Tarski, con l'utilizzo del paradosso di Hausdorff. Nel Capitolo 3, attraverso il Teorema di Tarski, è approfondito il legame tra esistenza di una misura finitamente additiva su un gruppo G e insiemi G-paradossali. Nel Capitolo 4 si introducono i gruppi amenabili, dando poi un risultato di estensione di invarianza di misure definite su algebre di Boole. In seguito, si caratterizzano ulteriormente tali gruppi e si conclude definendo l'amenabilità da un punto di vista topologico (accenni a modifiche di teoremi precedentemente trattati circa la caratterizzazione dei gruppi amenabili). Per concludere, nel Capitolo 5 si enuncia un problema ancora aperto, il Problema di Marczewski, riguardante la scomposizione paradossale mediante componenti che soddisfano la Proprietà di Baire, e si riformula lo stesso tramite la definizione della misura di Marczewski.

Indice

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

In questo capitolo verranno illustrati alcuni risultati generali che risulteranno utili in seguito.

1.1 Accenni sui gruppi

Definizione 1.1.1 (Gruppo)**.** Si definisce $(G, \circ)$ gruppo, dove G è un insieme e $\circ$ un'operazione binaria su G che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Associatività: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
2. Elemento neutro: $\exists e \in G$ t.c. $a \circ e = e \circ a = a \; \forall a \in G$
3. Elemento opposto: $\forall a \in G \; \exists b \in G$ t.c. $a \circ b = b \circ a = e$

L'elemento b si indica solitamente come a^{-1}.
Inoltre, un gruppo si dice abeliano se vale la seguente proprietà:

$$a \circ b = b \circ a \; \forall a, b \in G$$

Esempio 1.1.2. Un'isometria di $\mathbb{R}^n$ (o di qualsiasi spazio metrico) è una biezione di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che conserva le distanze.

- L'insieme delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ forma un gruppo, $Isom(\mathbb{R}^n)$, con l'operazione di composizione di funzioni;
- Il gruppo ortogonale di grado n, O_n, sul campo dei numeri reali, indica il gruppo delle isometrie lineari dello spazio euclideo di dimensione n;
- Il gruppo speciale ortogonale di grado n, SO_n, è un sottogruppo di O_n ed indica il gruppo delle rotazioni dello spazio euclideo di dimensione n.

Definizione 1.1.3 (Azione di gruppo)**.** Siano G un gruppo, X un insieme. L'insieme degli automorfismi di X, $Aut\,(X) = \{f : X \to X, f \text{ biunivoca}\}$, è un gruppo rispetto alla composizione, con elemento neutro l'identità e $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
Si definisce azione del gruppo G sull'insieme X un morfismo di gruppi $\rho : G \to Aut\,(X)$, cioè risulta tale che $\forall f, g \in Aut\,(X)\;\; \rho\,(fg) = \rho\,(f)\,\rho\,(g)$.

Esempio 1.1.4. Il gruppo SO_3 agisce su S^2 attraverso le rotazioni:

$$SO_3 \to Aut\left(S^2\right)$$
$$A \mapsto \rho_A \text{ con } S^2 \ni P \mapsto \rho_A\,(P) \in S^2$$

Definizione 1.1.5 (Orbita)**.** L'orbita di un elemento $x \in X$ rispetto all'azione del gruppo G su X è definita in tal modo:

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

Definizione 1.1.6 (Gruppo libero)**.** Un gruppo G si dice libero se esiste un sottoinsieme S di G tale che è possibile scrivere ogni elemento di G come prodotto di un numero finito di elementi di S e dei suoi inversi in modo unico.
S è detto insieme di generatori libero e la sua cardinalità è detta rango di G.

Esempio 1.1.7. Il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ dei numeri interi con la somma è libero, con insieme di generatori ad esempio $S = \{1\}$.

Definizione 1.1.8 (Gruppo risolubile)**.** Un gruppo G si dice risolubile se esiste una catena di sottogruppi:

$$\{e\} \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_n \subseteq G$$

in cui ogni H_i è normale in H_{i+1} e il quoziente H_{i+1}/H_i è abeliano.

Esempio 1.1.9. Il gruppo $Isom\,(\mathbb{R}^2)$ delle isometrie del piano è risolubile. Infatti, si consideri $\mathcal{T}$ l'insieme delle traslazioni e $\mathcal{M}$ l'insieme delle composizioni di simmetrie. Allora

$$\{id\} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M} \subseteq Isom\left(\mathbb{R}^2\right)$$

risulta essere una catena di sottogruppi come quella definita sopra.

1.2 Scomposizioni paradossali ed equiscomponibilità

Definizione 1.2.1 (Insieme G-paradossale)**.** Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X e si supponga $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$. E si dice G-paradossale, o E ammette una G-scomposizione paradossale, se, per qualche $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n > 0$, esistono $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \subseteq E$ sottoinsiemi disgiunti a due a due e $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_m \in G$ tali che:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) \text{ e } E = \bigcup_{j=1}^{m} h_j(B_j)$$

Esempio 1.2.2 (Paradosso di Sierpiński-Mazurkiewicz)**.** Vi è un sottoinsieme non vuoto del piano $\mathbb{R}^2$ paradossale rispetto al gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^2$. In particolare, vi è $S \subset \mathbb{R}^2$ ed esistono due insiemi disgiunti non vuoti A, B, $A \cup B = S$, tali che:

- Ruotando A di un radiante si ottiene S;
- Traslando B di una unità si ritrova di nuovo S.

Dimostrazione. Per comodità, si identifica $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso $\mathbb{C}$. Si consideri il numero complesso $x = e^i$, che risulta essere trascendentale.
Sia S l'insieme di tutti i polinomi in x che hanno per coefficienti numeri interi non negativi, sia A il sottoinsieme di S dato dai polinomi di S che non hanno termine noto e sia infine B il sottoinsieme di S costituito dai polinomi di S che hanno termine noto non nullo. Quindi $A \cup B = S$.

- Ruotando tutti i punti di A di un radiante in senso orario, cioè moltiplicando tutti gli elementi di A per $x^{-1} = e^{-i}$ si ottiene S in quanto gli elementi di S che non hanno termine noto sono multipli di x, quindi moltiplicando per l'inverso di x si ha di nuovo S, come desiderato;
- Traslando tutti i punti di B a sinistra di una unità, cioè sottraendo 1 da ogni elemento di B si ricava S poichè i polinomi di S con termine noto diverso da zero devono avere come termine noto un numero intero positivo, quindi sottrarre 1 produce tutti i polinomi in S, inclusi quelli con termine noto 0.

$\square$

Definizione 1.2.3 (Gruppo paradossale)**.** Un gruppo G si dice paradossale se è G-paradossale rispetto all'azione di gruppo su se stesso data dalla traslazione sinistra.

Esempio 1.2.4. Un gruppo libero F di rango 2 è paradossale, dove F agisce su se stesso con la moltiplicazione.

Dimostrazione. Siano σ, τ i generatori liberi di F, posto ρ uno tra $\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}$, sia $W(\rho)$ l'insieme degli elementi di F la cui rappresentazione come una parola in $\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}$ inizia, sulla sinistra, per ρ. Allora

$$F = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W\left(\sigma^{-1}\right) \cup W(\tau) \cup W\left(\tau^{-1}\right)$$

e tali sottoinsiemi sono disgiunti a due a due. Inoltre,

$$W(\sigma) \cup \sigma W\left(\sigma^{-1}\right) = F \text{ e } W(\tau) \cup \tau W\left(\tau^{-1}\right) = F$$

Infatti se $h \in F \setminus W(\sigma)$, allora $\sigma^{-1}h \in W(\sigma^{-1})$ e $h = \sigma(\sigma^{-1}h) \in \sigma W(\sigma^{-1})$. $\square$

Definizione 1.2.5 (G-equiscomponibilità)**.** Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X e siano $A, B \subseteq X$. A e B si dicono G-equiscomponibili se esistono $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in X$ tali che:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ e } B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

dove:

- $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j \ \forall i, j, \ i < j \leq n$;
- $\exists g_1, \ldots, g_n \in G$ t.c. $\forall i \leq n \ g_i(A_i) = B_i$.

La notazione $A \sim_G B$ denota la relazione di G-equiscomponibilità.

Osservazione 1.2.6. $\sim_G$ è una relazione d'equivalenza.

Data una qualsiasi relazione di equivalenza $\sim$ su una collezione di sottoinsiemi di un insieme, è possibile definire un'altra relazione come segue:

$$A \preceq B \Leftrightarrow A \text{ è equivalente ad un sottoinsieme di } B$$

Allora $\preceq$ è una relazione sulle classi d'equivalenza di $\sim$ e risulta essere riflessiva e transitiva.
La notazione $\preceq$ sarà usata in seguito nel contesto dell'equiscomponibilità:

$$A \preceq B \Leftrightarrow A \text{ è } G\text{-equiscomponibile con un sottoinsieme di } B$$

Teorema 1.2.7 (Teorema di Banach-Schroder-Bernstein)**.** *Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X, e siano $A, B \subseteq X$. Se $A \preceq B$ e $B \preceq A$, allora $A \sim_G B$.*
Quindi $\preceq$ è un ordinamento parziale delle $\sim_G$-classi di $\wp(X)$.

Dimostrazione. La relazione $\sim_G$ soddisfa le seguenti condizioni:

1. Se $A \sim_G B$, allora esiste una biezione $g : A \to B$ tale che $C \sim_G g(C) \ \forall C \subseteq A$;
2. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ e se $A_1 \sim_G B_1, A_2 \sim_G B_2$, allora $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$.

Siano $f : A \to B_1, \ g : A_1 \to B$ biezioni come quelle presenti nella condizione 1., con $B_1 \subseteq B, A_1 \subseteq A$, sia $C_0 = A \setminus A_1$; per induzione, si definisca $C_{n+1} = g^{-1} f(C_n)$. Infine si definisce

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$$

Poichè $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$, e poichè g è come in 1., vale: $A \setminus C \sim_G B \setminus f(C)$. Considerando infine f tale che $C \sim_G f(C)$, per la condizione 2. si ha:

$$(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C)$$

ossia $A \sim_G B$. □

Capitolo 2

Paradosso di Banach-Tarski

2.1 Paradosso di Hausdorff

Innanzitutto verrà introdotto un risultato fondamentale per lo studio del paradosso di Banach-Tarski: il paradosso di Hausdorff.

Definizione 2.1.1 (Sottoinsieme indipendente)**.** Un sottoinsieme S di un gruppo G è detto indipendente se S è un insieme libero di generatori di H, il sottogruppo di G generato da S; H è quindi un gruppo libero di rango $|S|$.

Teorema 2.1.2. *Esistono due rotazioni indipendenti, φ e ρ, attorno agli assi per l'origine in $\mathbb{R}^3$. Quindi, se $n \geq 3$, SO_n ha un sottogruppo libero di rango 2.*

Dimostrazione. Siano φ e ρ rotazioni attorno agli assi z e x, rispettivamente, in senso antiorario, entrambe di angolo $\arccos(\frac{1}{3})$. Allora $\varphi^{\pm 1}$, $\rho^{\pm 1}$ sono rappresentati dalle seguenti matrici:

$$\varphi^{\pm 1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \rho^{\pm 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Mostrare che φ e ρ sono indipendenti equivale a mostrare che nessuna parola riducibile non banale in $\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ equivale all'identità.
Per assurdo, si suppone w una parola in $\varphi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ che termina (sulla destra) per $\varphi^{\pm 1}$ (non

è restrittivo ridursi a questo caso), w equivale all'identità, quindi $w(1,0,0) = (1,0,0)$.
Per giungere alla contraddizione cercata si mostra che in realtà

$$w(1,0,0) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^k}$$

dove a, b, c sono numeri interi e b non è divisibile per 3.
Tale richiesta si mostra per induzione sulla lunghezza di w.

- Passo base: Se w ha lunghezza 1, allora $w = \varphi^{\pm 1}$. In tal caso,

$$w(1,0,0) = \frac{(1, \pm 2\sqrt{2}, 0)}{3}$$

- Passo d'induzione: Si suppone per ipotesi induttiva che $w = \varphi^{\pm 1} w'$ o $w = \rho^{\pm 1} w'$ dove

$$w'(1,0,0) = \frac{(a', b'\sqrt{2}, c')}{3^{k-1}}$$

Mediante una singola applicazione delle matrici di φ e ρ si ottiene $w(1,0,0) = \frac{(a, b\sqrt{2}, c)}{3^k}$ con, rispettivamente (a seconda che w inizi per $\varphi^{\pm 1}$ o per $\rho^{\pm 1}$):

$$a = a' \mp 4b', b = b' \pm 2a', c = 3c'$$

$$a = 3a', b = b' \mp 2c', c = c' \pm 4b'$$

Da cui segue che a, b, c sono sempre numeri interi.
Rimane solo da dimostrare che b non diventa mai divisibile per 3. Si considerino i seguenti quattro casi: w può essere uguale a $\varphi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$, $\rho^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$, $\varphi^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$ o $\rho^{\pm 1}\rho^{\pm 1}v$.
Nei primi due casi, usando le nozioni e le equazioni del paragrafo precedente, si ha: $b = b' \mp 2c'$ dove 3 divide c', oppure $b = b' \mp 2a'$ dove 3 divide a'. Quindi, poichè per ipotesi induttiva b' non è divisibile per 3, neanche b risulterà tale.
Negli ultimi due casi, siano a'', b'', c'' gli interi presenti in $v(1,0,0)$. In entrambi i casi è semplice verificare che risulta $b = 2b' - 9b''$. Ad esempio, nel caso in cui $w = \varphi^{\pm 1}\varphi^{\pm 1}v$,

$$b = b' \pm 2a' = b' \pm 2\,(a"' \mp 4b"') = b' + b"' \pm 2a"' - 9b"' = 2b' - 9b"'$$

Quindi, poichè per ipotesi induttiva b' non è divisibile per 3, neanche b risulterà tale.

□

Assioma della Scelta: Data una famiglia non vuota T di insiemi non vuoti, esiste una funzione f tale che:

$$\forall A \in T, A \to f(A) \ni A$$

ossia f assegna ad ogni membro A di T un elemento $f(A)$ di A.

Proposizione 2.1.3. *Se G è paradossale e agisce su X senza punti fissi non banali, allora X è G-paradossale. Inoltre X è F-paradossale dove F è un qualsiasi gruppo libero di rango 2 che agisce su X senza punti fissi non banali.*

Dimostrazione. Siano $A_i, B_j \subseteq G$, $g_i, h_j \in G$ sottoinsiemi ed elementi di G che rendono G paradossale. Per l'Assioma della Scelta, vi è un insieme M che contiene esattamente un elemento per ogni G-orbita in X. Allora $\{g\,(M) : g \in G\}$ è una partizione di X; per la mancanza di punti fissi non banali nell'azione di G, gli insiemi di questa famiglia risultano disgiunti a due a due. Sia $A_i^* = \bigcup \{g\,(M) : g \in A_i\}$ e $B_j^* = \bigcup \{g\,(M) : g \in B_j\}$. Allora $\{A_i^*\} \cup \left\{B_j^*\right\}$ è una collezione di sottoinsiemi di X disgiunti a due a due, poichè per ipotesi $\{A_i\} \cup \{B_j\}$ è disgiunta a due a due, e le equazioni $X = \bigcup g_i A_i^* = \bigcup h_j B_j^*$ seguono dalle corrispondenti equazioni in G: $G = \bigcup g_i A_i = \bigcup h_j B_j$.
L'asserzione riguardo F segue dall'Esempio 1.2.4. □

Corollario 2.1.4. *Un gruppo con un sottogruppo paradossale è paradossale. Quindi ogni gruppo con un sottogruppo libero di rango 2 è paradossale.*

Teorema 2.1.5 (Paradosso di Hausdorff)**.** *Esiste un sottoinsieme numerabile D di S^2 tale che $S^2 \setminus D$ è SO_3-paradossale.*

Dimostrazione. Ogni elemento di un gruppo libero di rotazioni, detto F, costruito come nella dimostrazione del Teorema 2.1.2, fissa tutti i punti della stessa retta in $\mathbb{R}^3$. Quindi ogni rotazione (che non sia l'identità) in F ha due punti fissi su S^2 dati dall'intersezione tra gli assi di rotazione e la sfera. Sia D l'insieme di tutti questi punti; poichè F è numerabile, anche D lo è.
Per mostrare che F agisce su $S^2 \setminus D$ senza punti fissi non banali, si considerino $P \in S^2 \setminus D$ e $g \in F$ tali che $g\,(P) \in S^2 \setminus D$, $g\,(P) \neq P$. Se per assurdo esistesse $h \in F$ che fissa $g(P)$, si avrebbe $h\,(g\,(P)) = g\,(P)$, quindi P dovrebbe essere un punto fisso di $g^{-1}hg$, il che risulta una contraddizione per come è stato definito D. Applicando la Proposizione 2.1.3 si ottiene la tesi. □

2.2 Paradosso di Banach-Tarski

Proposizione 2.2.1. *Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X, e siano E, E' sottoinsiemi di X G-equiscomponibili. Se E è G-paradossale, allora anche E' lo è.*

Teorema 2.2.2. *Se D è un sottoinsieme numerabile di S^2, allora S^2 e $S^2 \setminus D$ sono SO_3-equiscomponibili.*

Dimostrazione. Per mostrare l'enunciato del teorema, risulta sufficiente cercare una rotazione ρ della sfera tale che gli insiemi $D, \rho(D), \rho^2(D), \ldots$ siano disgiunti a due a due, in quanto in tal caso si avrebbe:

$$S^2 = \bar{D} \cup (S^2 \setminus \bar{D}) \sim \rho(\bar{D}) \cup (S^2 \setminus \bar{D}) = S^2 \setminus D$$

dove $\bar{D} = \bigcup \{\rho^n(D), n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Sia l una retta per l'origine che non passa per l'insieme numerabile D e sia A l'insieme degli angoli ϑ tali che, per qualche $n > 0$ e per qualche $P \in D$, $\sigma(P)$ sta ancora in D, con σ la rotazione intorno ad l di un angolo di $n\vartheta$ radianti. Allora, poichè A è numerabile, è possibile scegliere un angolo φ non in A; sia ρ la corrispondente rotazione intorno ad l. Allora $\rho^n(D) \cap D = \emptyset \; \forall n > 0$, da cui segue che per qualsiasi $0 \leq m < n$, $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$. Così ρ risulta come richiesta. $\square$

Corollario 2.2.3 (Paradosso di Banach-Tarski). *S^2 è SO_3-paradossale, come ogni sfera centrata nell'origine. Inoltre ogni B palla solida in $\mathbb{R}^3$ è paradossale rispetto al gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^3$ stesso è paradossale.*

Dimostrazione. Il paradosso di Hausdorff afferma che $S^2 \setminus D$ è SO_3-paradossale per qualche insieme numerabile D (di punti fissi delle rotazioni); si ottiene quindi che S^2 è SO_3-paradossale dal teorema precedente e dalla Proposizione 2.2.1. Poichè inoltre nessuno dei risultati precedenti dipende dalla dimensione della sfera, tale risultato vale per ogni sfera centrata nell'origine.
Basta considerare le palle centrate in 0, poichè il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ contiene tutte le traslazioni. Per comodità si consideri la palla unitaria B, ma la stessa dimostrazione vale per le palle di ogni dimensione. La scomposizione di S^2 fornisce una scomposizione per $B \setminus \{0\}$ se si usa la corrispondenza radiale: $P \longrightarrow \{\alpha P : 0 < \alpha \leq 1\}$. Quindi è sufficiente mostrare che B è equiscomponibile rispetto al gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ con $B \setminus \{0\}$. Sia $P = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ e sia ρ una rotazione di ordine infinito intorno ad un asse passante per P ma non per l'origine. Allora l'insieme $D = \{\rho^n(0) : n \geq 0\}$ è tale che $\rho\,(D) = D \setminus \{0\}$, così $B \sim B \setminus \{0\}$.
Invece se si utilizza la corrispondenza radiale di S^2 con tutto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si ottiene una scomposizione paradossale di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ usando le rotazioni. Poichè, esattamente come per la palla, si mostra che $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \sim \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ è paradossale mediante isometrie. $\square$

Capitolo 3

Teorema di Tarski

3.1 Semigruppo tipo

Le nozioni trattate in questa sezione saranno utilizzate nella dimostrazione del teorema di Tarski.

Definizione 3.1.1 (Semigruppo)**.** Si definisce $(\mathcal{T}, +)$ semigruppo, dove $\mathcal{T}$ è un insieme e $+$ un'operazione binaria su $\mathcal{T}$ che soddisfa la proprietà di associatività, ossia vale che:

$$(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$$

Inoltre un semigruppo può essere commutativo se $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{T}, \alpha + \beta = \beta + \alpha$.
Infine si definisce semigruppo commutativo con identità un semigruppo commutativo in cui vi è un elemento 0, detto identità, tale che $\forall \alpha \in \mathcal{T}, \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X, è possibile definire un'azione di gruppi come segue. Sia $X^* = X \times \mathbb{N}$ e sia

$$G^* = \{(g, \pi) : g \in G \text{ e } \pi \text{ è una permutazione di } \mathbb{N}\}$$

Il gruppo G^* agisce su X^* per $(g, \pi)(x, n) = (g(x), \pi(n))$.
Per le seguenti definizioni si considerino G, X, G^*, X^* come sopra.

Definizione 3.1.2 (Livelli)**.** Per $A \subseteq X^*$, sono detti livelli di A gli $n \in \mathbb{N}$ tali che A abbia almeno un elemento con seconda coordinata n.
Un sottoinsieme A di X^* è detto limitato se ha solo un numero finito di livelli.

Definizione 3.1.3 (Tipo)**.** La classe di equivalenza rispetto alla G^*-equiscomponibilità di $A \subseteq X^*$ limitato è detta tipo di A, e si indica $[A]$.

Notazione 3.1.4. La collezione dei tipi degli insiemi limitati si denota con $\mathcal{S}$.

Definizione 3.1.5. Per $[A], [B] \in \mathcal{S}$, si definisce

$$[A] + [B] = [A \cup B'], \text{ dove } B' = \{(b, m+k) : (b, m) \in B\}$$

per k abbastanza grande affinchè i livelli di B' siano disgiunti da quelli di A.

Osservazione 3.1.6. + è ben definita, cioè $[A]+[B]$ è indipendente dalla scelta dei rappresentanti di A e B, e dalla permutazione usata per definire B'. Inoltre + è associativa e commutativa e l'elemento neutro è dato da $[\emptyset] = 0$.

Definizione 3.1.7 (Semigruppo tipo)**.** $(\mathcal{S}, +)$ è un semigruppo commutativo detto semigruppo tipo.

Notazione 3.1.8. Se $E \subseteq X$, allora $[E]$ si usa per indicare $[E \times \{0\}]$.

É possibile definire una moltiplicazione tra gli elementi del semigruppo tipo e i numeri naturali, come segue:

$$n\alpha = \alpha + \alpha + \ldots + \alpha \ n \text{ volte}.$$

Inoltre, $\mathcal{S}$ ammette un ordine dato da:

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta \text{ per qualche } \gamma \in \mathcal{S}$$

In particolare, tale ordine $\leq$ risulta essere un ordine parziale.
Infatti, vale che $[A] \leq [B]$ se e solo se $A \preceq B$ e, coerentemente con la notazione del teorema di Banach-Schroder-Bernstein, Teorema 1.2.7, $\preceq$ è in effetti un ordine parziale.

Definizione 3.1.9 (Elemento limitato)**.** Se $\varepsilon \in \mathcal{S}$ è fissato, allora un elemento α di $\mathcal{T}$ si dice limitato se per qualche $n \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha \leq n\varepsilon$.

Teorema 3.1.10 (Legge di cancellazione)**.** *Per $\alpha, \beta \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{Z}, n > 0$, se $n\alpha = n\beta$, allora $\alpha = \beta$.*

Per la dimostrazione della legge di cancellazione si rimanda al teorema 8.7 del testo [1].

Corollario 3.1.11. *Se $\alpha \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}$ soddisfano $(n+1)\alpha \leq n\alpha$, allora $2\alpha = \alpha$.*

Dimostrazione. Sostituendo la disuguaglianza dell'ipotesi in se stessa si ottiene:

$$n\alpha \geq (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq (n+1)\alpha + \alpha = n\alpha + 2\alpha$$

Ripetendo questa sostituzione si ottiene che $n\alpha \geq n\alpha + n\alpha = 2n\alpha$. Poichè $n\alpha \leq 2n\alpha$, si ha: $n\alpha = 2n\alpha = n(2\alpha)$ e quindi la legge di cancellazione implica che $2\alpha = \alpha$. $\square$

3.2 Teorema di Tarski

Definizione 3.2.1 (σ-algebra)**.** Dato un insieme X, si definisce σ-algebra su X una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X tali che:

- $X \in \mathcal{F}$;
- Se $A \in \mathcal{F}$, allora il complementare di A, $A^c \in \mathcal{F}$;
- Se $A_i \in \mathcal{F}\ \forall i \in I$, I insieme numerabile di indici, allora
$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$$

Esempio 3.2.2. Un esempio banale di σ-algebra su un qualsiasi insieme X è rappresentato dall'insieme delle parti di X, $\wp(X)$.

Definizione 3.2.3 (Misura)**.** Sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra definita su un insieme X. Si definisce misura una funzione $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, con $\mu(E) < \infty$ per almeno un $E \in \mathcal{F}$, tale da essere numerabilmente additiva, ossia, se $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ sono insiemi disgiunti a due a due,
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$
Gli elementi di $\mathcal{F}$ sono detti insiemi misurabili e la struttura $(X, \mathcal{F}, \mu)$ viene detta spazio di misura.

Definizione 3.2.4 (Misura finitamente additiva)**.** Una misura che, invece dell'additività numerabile, possiede l'additività finita è detta misura finitamente additiva.

Definizione 3.2.5 (Insieme G-trascurabile)**.** Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X, sia $E \subseteq X$. E è detto G-trascurabile se per ogni misura μ finitamente additiva, G-invariante su $\wp(X)$, $\mu(E) = 0$ quando $\mu(E) < \infty$.

Proposizione 3.2.6. *Se E è G-paradossale, allora E è G-trascurabile.*

Dimostrazione. Sia μ una misura finitamente additiva, G-invariante su $\wp(X)$, $\mu(E) < \infty$, siano A_i, B_j, g_i, h_j sottoinsiemi di E ed elementi di G, rispettivamente, che determinano la G-paradossalità di E. Allora si ha:
$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \sum \mu(A_i) + \sum \mu(B_j) = \\ &= \sum \mu(g_i A_i) + \sum \mu(h_j B_j) \geq \\ &\geq \mu\left(\bigcup g_i A_i\right) + \mu\left(\bigcup h_j B_j\right) = \\ &= \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E) \end{aligned}$$
Si conclude quindi che $\mu(E) = 0$ poichè $\mu(E) < \infty$. □

Teorema 3.2.7 (Teorema di Tychonoff). *Sia $\{A_i\}$ una famiglia qualsiasi di spazi compatti. Allora è compatto il prodotto*

$$\prod_{i \in I} A_i$$

Per la dimostrazione del teorema di Tychonoff si rimanda al teorema 3.3.3 del testo [3]; in particolare, viene utilizzato l'Assioma della Scelta.

Corollario 3.2.8. *Sia X uno spazio topologico compatto, allora l'insieme $X^A = \{f : A \to X\}$ è compatto per la topologia della convergenza puntuale.*

Dimostrazione. La topologia della convergenza puntuale è la topologia prodotto. □

Teorema 3.2.9. *Sia $(\mathcal{S}, +, 0, \varepsilon)$ il semigruppo tipo ed $\varepsilon \in \mathcal{S}$ un elemento specifico. Allora sono equivalenti:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\,\varepsilon \nleq n\varepsilon$;*
2. *Vi è una misura $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ tale che:*
   - $\mu(\varepsilon) = 1$,
   - $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)\ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}$.

   (Si noti che μ è un omomorfismo di semigruppi, da $\mathcal{S}$ a $([0, \infty], +)$.)

Dimostrazione. 2. $\Rightarrow$ 1.) Ogni μ che soddisfa la condizione 2. è tale che $\mu(\alpha) \leq \mu(\beta)$ se $\alpha \leq \beta$, e $\mu(n\varepsilon) = n$; quindi $(n+1)\,\varepsilon \leq n\varepsilon$ implica che $n + 1 \leq n$.
1. $\Rightarrow$ 2.) Per mostrare tale implicazione verranno utilizzati il seguente lemma e la compattezza dello spazio prodotto $[0, \infty]^{\mathcal{S}}$ (tutte le funzioni da $\mathcal{S}$ in $[0, \infty]$), data dal Corollario 3.2.8. Senza mancanza di generalità, si assuma che tutti gli elementi di $\mathcal{S}$ siano limitati. Infatti, avendo una misura sugli elementi limitati, questa può essere estesa assegnando agli elementi illimitati misura ∞.

Lemma 3.2.10. *Se $\mathcal{T}_0$ è un sottoinsieme finito di $\mathcal{S}$ che contiene ε, allora c'è una funzione $\mu : \mathcal{T}_0 \to [0, \infty]$ tale che:*

i. $\mu(\varepsilon) = 1$;

ii. *Se $\phi_i, \theta_j \in \mathcal{T}_0$ soddisfano: $\phi_1 +, \ldots, +\phi_m \leq \theta_1 +, \ldots, +\theta_n$, allora $\sum \mu(\phi_i) \leq \sum \mu(\theta_j)$.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione sulla dimensione di $\mathcal{T}_0$.

- Passo base: Se $|\mathcal{T}_0| = 1$, allora $\mathcal{T}_0 = \{\varepsilon\}$, e $\mu(\varepsilon) = 1$ è la funzione desiderata. In questo caso la proprietà *ii.* del lemma si riduce a mostrare che se $m\varepsilon \leq n\varepsilon$, allora $m \leq n$. Ma questa è una conseguenza di 1., l'ipotesi del teorema su ε; infatti, se $m\varepsilon \leq n\varepsilon$, ma $m \geq n + 1$, si avrebbe una contraddizione: $(n+1)\,\varepsilon \leq m\varepsilon \leq n\varepsilon$.

- Passo d'induzione: Si supponga $|\mathcal{T}_0| > 1$, e sia α un qualsiasi elemento di $\mathcal{T}_0 \setminus \{\varepsilon\}$. Si consideri, utilizzando le ipotesi d'induzione, una funzione ν su $\mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ che soddisfi il lemma. Per l'assunzione iniziale sulla limitatezza, tutti gli elementi sono limitati da un qualche $n\varepsilon$; quindi ν prende solo valori finiti. Si definisce μ su $\mathcal{T}_0$ in tal modo:
$$\mu = \nu \text{ su } \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$$
$$\mu(\alpha) = \inf \left\{ \frac{\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)}{r} \right\}$$
dove l'inf è su tutti gli interi positivi r e $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ tali che $\gamma_1 + \ldots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \ldots + \beta_p$.
Poichè α è limitato, $\mu(\alpha)$ è il limite inferiore più grande di un insieme non vuoto: se $\alpha \leq n\varepsilon$, allora $\mu(\alpha) \leq n$.
Poichè una conseguenza della proprietà *ii.* del lemma è che $\mu(\alpha) \geq 0$ ($\varepsilon \leq \varepsilon + \alpha$, quindi $1 \leq 1 + \mu(\alpha)$), rimane solo da provare che μ continua a soddisfare la proprietà *ii.*.
Si supponga che $\phi_1 + \ldots + \phi_m + s\alpha \leq \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n + t\alpha$, dove $\phi_i, \vartheta_j \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$.

  - Se $s = t = 0$, allora la disuguaglianza segue dal fatto che ν soddisfa il lemma su $\mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ e $s, t \in \mathbb{N}$.
  - Se $s = 0$ e $t > 0$, bisogna mostrare che $\sum \nu(\phi_i) \leq t\mu(\alpha) + \sum \nu(\vartheta_j)$, ossia che
$$\mu(\alpha) \geq w = \frac{\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\vartheta_j)}{t}$$
Sia $\gamma_1 + \ldots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \ldots + \beta_p$ una delle disuguaglianze che definisce $\mu(\alpha)$; è sufficiente mostrare che
$$\frac{\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)}{r} \geq w$$
Moltiplicando la disuguaglianza data $\phi_1 + \ldots + \phi_m \leq \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n + t\alpha$ per r ed aggiungendo la stessa quantità ad entrambe le parti si ottiene:
$$r\phi_1 + \ldots + r\phi_m + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_q \leq r\vartheta_1 + \ldots + r\vartheta_n + tr\alpha + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_q$$
Sostituendo la disuguaglianza in γ, α, β, si ha:
$$r\phi_1 + \ldots + r\phi_m + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_q \leq r\vartheta_1 + \ldots + r\vartheta_n + t\beta_1 + \ldots + t\beta_p$$
Per le ipotesi d'induzione su ν, vale
$$r \sum \nu(\phi_i) + t \sum \nu(\gamma_l) \leq r \sum \nu(\vartheta_j) + t \sum \nu(\beta_k)$$

che implica che

$$\frac{\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)}{r} \geq w$$

come desiderato.

– Se $s > 0$, è sufficiente mostrare che

$$s\mu(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq z_1 + \ldots + z_t + \sum \nu(\vartheta_j)$$

dove $z_1, \ldots, z_t$ sono alcuni dei numeri del limite inferiore più grande che definisce $\mu(\alpha)$. Considerando il più piccolo tra $z_1, \ldots, z_t$, assumiamo che abbiano tutti lo stesso valore. In altre parole, si supponga che

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \ldots + \beta_p$$

dove $\gamma_l, \beta_k \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ e sia

$$z = \frac{\left(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)\right)}{r}$$

allora si vuole provare che

$$s\mu(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq tz + \sum \nu(\vartheta_j)$$

Moltiplicando la disuguaglianza in ϕ, α, ϑ per r e aggiungendo la stessa quantità ad entrambe le parti, si ottiene:

$$r\phi_1 + \ldots + r\phi_m + rs\alpha + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_q \leq r\vartheta_1 + \ldots + r\vartheta_n + rt\alpha + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_q$$

e sostituendo la disuguaglianza in γ, α, β, si ha:

$$r\phi_1 + \ldots + r\phi_m + t\gamma_1 + \ldots + t\gamma_q + rs\alpha \leq r\vartheta_1 + \ldots + r\vartheta_n + t\beta_1 + \ldots + t\beta_p$$

Quest'ultima disuguaglianza è una di quelle usate per definire $\mu(\alpha)$, e segue che $s\mu(\alpha) + \sum \nu(\phi_i)$ è limitato da

$$\sum \nu(\phi_i) + s\left(\frac{1}{rs}\right)\left(r\sum \nu(\vartheta_j) + t\sum \nu(\beta_k) - r\sum \nu(\phi_i) - t\sum \nu(\gamma_l)\right)$$

che eguaglia $tz + \sum \nu(\vartheta_j)$, come richiesto.

$\square$

A questo punto si deve mostrare solo che tale lemma, con la compattezza, forniscono la misura desiderata su tutto $\mathcal{S}$. Per ogni $\mathcal{T}_0$ definito come nel lemma, sia

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_0) = \Big\{ f \in [0,\infty]^{\mathcal{S}} \text{ t.c. } 1. f(\varepsilon) = 1; \quad 2. f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) \text{ se } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in \mathcal{T}_0 \Big\}$$

Quest'ultima proprietà di additività è una conseguenza della proprietà 2. del lemma, da cui deriva che $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ è non vuoto. La compattezza dello spazio prodotto $[0,\infty]^{\mathcal{S}}$ può essere interpretata così: se una collezione di sottoinsiemi chiusi di $[0,\infty]^{\mathcal{S}}$ hanno la proprietà di intersezione finita (cioè ogni intersezione di un numero finito di elementi della collezione è non vuota), allora l'intersezione di tutti gli insiemi nella collezione è non vuota.
Se $f \notin \mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$, allora o $f(\varepsilon) \neq 1$, o $f(\alpha+\beta) \neq f(\alpha) + f(\beta)$. In tal caso vi è un sottospazio aperto di $[0,\infty]^{\mathcal{T}_0}$ che contiene $f|_{\mathcal{T}_0}$ sul quale la condizione (che non valeva per la f) non vale: basta variare o la ε-condizione o la α-condizione; quindi $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ è chiuso.
Si noti che $\mathcal{M}(\mathcal{T}_1) \cap \ldots \cap \mathcal{M}(\mathcal{T}_n) \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{T}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{T}_n)$, dove ogni $\mathcal{T}_i$ è un sottoinsieme finito di $\mathcal{S}$ che contiene ε. Poichè anche $\bigcup \mathcal{T}_i$ è finito, il lemma implica che $\mathcal{M}(\bigcup \mathcal{T}_i) \neq \emptyset$; segue che $\{\mathcal{M}(\mathcal{T}_0) : \mathcal{T}_0$ è un sottoinsieme finito di $\mathcal{S}$ contentente $\varepsilon\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Per la compattezza, deve esserci una μ che si trova in ogni $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$, e una tale μ è una misura come quella richiesta: poichè $\mu \in \mathcal{M}(\{\varepsilon\}), \mu(\varepsilon) = 1$, e per vedere che $\mu(\alpha+\beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$, si usa il fatto che $\mu \in \mathcal{M}(\{\varepsilon, \alpha, \beta, \alpha+\beta\})$. □

Corollario 3.2.11 (Teorema di Tarski)**.** *Sia G un gruppo che agisce sull'insieme X e sia $E \subseteq X$. Allora vi è una misura $\mu : \wp(X) \to [0,\infty]$ finitamente additiva, G-invariante, tale che $\mu(E) = 1$ se e solo se E non è G-paradossale.*

Dimostrazione. La Proposizione 3.2.6 mostra che se esiste una misura μ come nelle ipotesi, allora E non è G-paradossale. Si consideri quindi $E \subseteq X$ non G-paradossale, e sia $\mathcal{S}$ il semigruppo tipo dell'azione di G su X. Preso $\varepsilon = [E \times \{0\}]$, si ha $2\varepsilon \neq \varepsilon$. Quindi, il Corollario 3.1.11 per l'equiscomponibilità implica che $\mathcal{S}$, con l'elemento distinto ε, soddisfa la condizione 1. del teorema precedente. Tale teorema fornisce una misura ν su $\mathcal{S}$ che normalizza ε; ponendo $\mu(A) = \nu([A \times \{0\}])$ si ottiene la misura su $\wp(X)$ ricercata. □

Capitolo 4

Gruppi amenabili

4.1 Misure sui gruppi

Definizione 4.1.1 (Misura su un gruppo G)**.** Se, per un gruppo G, μ è una misura finitamente additiva su $\wp(G)$ tale che $\mu(G) = 1$ e μ è invariante a sinistra, cioè

$$\mu(gA) = \mu(A) \ \forall g \in G, A \subseteq G$$

allora μ è detta misura sul gruppo G.

Definizione 4.1.2 (Gruppo amenabile)**.** Un gruppo G su cui è possibile definire una misura (come appena descritta) è detto gruppo amenabile.

Lemma 4.1.3. *Se un gruppo G è paradossale, allora non può essere amenabile.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.2.6, G è trascurabile. Si possono quindi considerare i seguenti casi:

- $\mu(G) < \infty$, in tal caso allora $\mu(G) = 0$,
- oppure $\mu(G) = \infty$

In entrambi i casi dunque $\mu(G) \neq 1$. □

Per un gruppo G, sia $B(G)$ la collezione delle funzioni su G limitate, a valori reali; se μ è una misura su G, è possibile assegnare un numero reale $\int f d\mu$ ad ogni $f \in B(G)$, e tale integrale soddisferà le seguenti proprietà:

1. $$\int (af + bg)\, d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

2.
$$\int f d\mu \geq 0 \text{ se, } \forall g \in G, f(g) \geq 0$$

3.
$$\int \chi_G d\mu = 1$$

4.
$$\forall g \in G, f \in B(G), \int {}_g f d\mu = \int f d\mu, \text{ dove } ({}_g f)(h) = f\left(g^{-1}h\right)$$

cioè l'integrale è invariante a sinistra.

Le condizioni 2. e 3. possono essere sostituite con la singola condizione:

$$\inf\{f(g) : g \in G\} \leq \int f d\mu \leq \sup\{f(g) : g \in G\}$$

Definizione 4.1.4 (Media invariante a sinistra su un gruppo)**.** Un funzionale lineare su $B(G)$ che soddisfa le quattro condizioni precedenti è detto media invariante a sinistra sul gruppo G.

Osservazione 4.1.5. Un gruppo G è amenabile se e solo se si può trovare una media invariante a sinistra su G.

Infatti, se $F : B(G) \to \mathbb{R}$ è una media invariante a sinistra su G, ponendo $\mu(A) = F(\chi_A)$ si ottiene una misura su G.

Teorema 4.1.6. *Sia G un gruppo amenabile che agisce sull'insieme X, allora vi è una misura finitamente additiva, G-invariante, su $\wp(X)$ di misura totale 1.*

Dimostrazione. Preso un qualsiasi $x \in X$, e sia μ una misura su G, si definisce

$$\nu : \wp(X) \to [0,1] \text{ tale che } \nu(A) = \mu(\{g \in G : g(x) \in A\})$$

Risulta facile ora mostrare che ν, che assegna misura 1 all'orbita di x, è come richiesta dal teorema. □

Per il teorema di Tarski, il Corollario 3.2.11, è possibile riformulare il teorema precedente nel seguente modo:

Teorema 4.1.7. *Se un gruppo G agisce su un insieme X e G non è paradossale, allora X non è G-paradossale.*

Teorema 4.1.8. *Se un gruppo G è finito, allora è amenabile.*

Dimostrazione. Se $|G| = n < \infty$, allora si definisce

$$\mu(A) = \frac{|A|}{n}$$

ottenendo la misura su G richiesta. $\square$

Teorema 4.1.9. *Un sottogruppo H di un gruppo G amenabile è amenabile.*

Dimostrazione. Sia μ una misura su G e sia M un insieme di rappresentanti (insiemi scelti) per la collezione delle classi laterali destre di H in G. Allora si definisce ν su $\wp(H)$ nel seguente modo:

$$\nu(A) = \mu\left(\bigcup \{Ag : g \in M\}\right)$$

Risulta facile mostrare che ν è una misura su H. $\square$

Teorema 4.1.10. *Se N è un sottogruppo normale di un gruppo amenabile G, allora G/N è amenabile.*

Dimostrazione. Se μ è una misura su G, allora si definisce

$$\nu : \wp(G/N) \to [0,1] \text{ ponendo } \nu(A) = \mu\left(\bigcup \{Ag : g \in N\}\right)$$

Di nuovo, si verifica che ν è una misura. $\square$

Teorema 4.1.11. *Se N è un sottogruppo normale di un gruppo G e sia N che G/N sono amenabili, allora G è amenabile.*

Dimostrazione. Siano ν_1, ν_2 misure su $N, G/N$ rispettivamente. Per ogni $A \in G$, sia

$$f_A : G \to \mathbb{R} \text{ tale che } f_A(g) = \nu_1\left(N \cap g^{-1}A\right)$$

Allora se g_1 e g_2 definiscono la stessa classe laterale di N in G, $f_A(g_1) = f_A(g_2)$. Infatti, se $g_2^{-1}g_1 = h \in N$, allora

$$f_A(g_2) = \nu_1\left(N \cap g_2^{-1}A\right) = \nu_1\left(N \cap hg_1^{-1}A\right) = \nu_1\left(h\left(N \cap g_1^{-1}A\right)\right) = \nu_1\left(N \cap g_1^{-1}A\right) = f_A(g_1)$$

Ciò significa che f_A può essere considerata come una funzione a valori reali (limitata) con dominio G/N.
Si definisce

$$\mu(A) = \int f_A d\nu_2$$

Poichè $f_G = \chi_G$, vale $\mu(G) = 1$.
Inoltre, se $A, B \in G, A \cap B = \emptyset$, allora

$$\forall g \in G \text{ tale che } g^{-1}A \cap g^{-1}B = \emptyset, \text{ si ha } f_{A\cup B}(g) = f_A(g) + f_B(g)$$

(più precisamente, $f_{A\cup B}(gN) = f_A(gN) + f_B(gN)$). Ciò assicura l'additività finita di μ. Infine

$$f_{gA}(g_0) = \nu_1\left(N \cap g_0^{-1} gA\right) = f_A\left(g^{-1} g_0\right) =_g f_A(g_0)$$

quindi l'invarianza a sinistra dell'integrale è data da ν_2, per cui $\mu(gA) = \mu(A)$. □

Definizione 4.1.12 (Unione diretta)**.** Un gruppo G è un'unione diretta di un sistema di gruppi $\{G_i : i \in I\}$ se:

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i \text{ e se } \forall i,j \in I, \exists k \in I \text{ tale che } G_i \cup G_j \subset G_k$$

Teorema 4.1.13. *Se G è unione diretta di un sistema di gruppi amenabili $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$, allora G è amenabile.*

Dimostrazione. Sia $G = \bigcup\{G_\alpha : \alpha \in I\}$, dove G_α sono amenabili (con misura μ_α). Si consideri lo spazio topologico $[0,1]^{\wp(G)}$, che risulta compatto per il teorema di Tychonoff, Teorema 3.2.7.
Per ogni $\alpha \in I$, si definisce $\mathcal{M}_\alpha$ come l'insieme delle misure finitamente additive

$$\mu : \wp(G) \to [0,1] \text{ definite da } \mu(A) = \mu_\alpha(A \cap G)\,, \text{ tali che}$$

- $\mu(G) = 1$
- $\mu(gA) = \mu(A)\ \forall g \in G$

Quindi ogni $\mathcal{M}_\alpha$ risulta non vuoto. Come nella dimostrazione del Teorema 3.2.9, si dimostra che ogni $\mathcal{M}_\alpha$ è un sottoinsieme chiuso di $[0,1]^{\wp(G)}$.
Poichè $\mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{M}_\beta \supseteq \mathcal{M}_\gamma$ se $G_\alpha, G_\beta \subseteq G_\gamma$, la collezione $\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I\}$ ha la proprietà di intersezione finita. Per compattezza, allora, esiste qualche $\mu \in \bigcap\{\mathcal{M}_\alpha : \alpha \in I\}$, ed una tale μ dimostra l'amenabilità di G. □

Corollario 4.1.14. *Un gruppo è amenabile se e solo se tutti i suoi sottogruppi finitamente generati lo sono.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Segue chiaramente dal Teorema 4.1.8.
$\Leftarrow$) Poichè ogni gruppo è unione diretta dei suoi sottogruppi finitamente generati, il Teorema 4.1.13 conclude la dimostrazione. □

Teorema 4.1.15. *Se un gruppo G è abeliano, allora è amenabile.*

Dimostrazione. Per il corollario precedente, è sufficiente considerare gruppi abeliani finitamente generati. Si supponga quindi che G sia abeliano, con insieme di generatori $\{g_1, \ldots, g_m\}$. Basta mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ c'è una funzione $\mu_\varepsilon : \wp(G) \to [0,1]$ tale che:

i. $\mu_\varepsilon(G) = 1$
ii. μ_ε è finitamente additiva
iii. μ_ε è anche invariante rispetto ai generatori, nel senso che per ogni $A \subseteq G$ e per ogni generatore g_k, $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_k A)| \leq \varepsilon$
Per la costruzione di una tale μ_ε, è possibile considerare i seguenti casi:

- G ha solo un generatore g_1.
  Si scelga un N abbastanza grande da essere tale che $2/N \leq \varepsilon$ e sia
  $$\mu_\varepsilon(A) = \frac{|\{i : 1 \leq i \leq N \text{ e } g_1^i \in A\}|}{N}$$
  Allora μ_ε differisce da $\mu_\varepsilon(gA)$ di non più di $2/N \leq \varepsilon$.

- Caso generale.
  Si scelga un N come sopra e sia
  $$\mu_\varepsilon(A) = \frac{\left|\left\{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N \text{ e } g_1^{i_1} g_2^{i_2} \dots g_m^{i_m} \in A\right\}\right|}{N^m}$$
  Allora $\mu_\varepsilon(G) = 1$, μ_ε è finitamente additiva, e poichè g_k commuta con gli altri generatori, $\mu_\varepsilon(g_k A)$ differisce da $\mu_\varepsilon(A)$ di non più di
  $$\frac{|\{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_m \leq N \text{ e } i_k = 1 \text{ o } N+1\}|}{N^m} = \frac{2N^{m-1}}{N^m} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon$$
  come desiderato.

A questo punto, si definisce $\mathcal{M}_\varepsilon$ come l'insieme delle funzioni da $\wp(G)$ a $[0,1]$ che soddisfano le condizioni *i, ii, iii.* Allora ogni $\mathcal{M}_\varepsilon$ è non vuoto e chiuso, poichè, considerando il complementare, si ha che

- se $\mu(G) < 1$, allora la disuguaglianza vale per un insieme aperto che contiene μ,
- se $|\mu(A) - \mu(g_k A)| > \varepsilon$, per qualche A, k, ε, di nuovo la disuguaglianza vale per un insieme aperto che contiene μ,
- ugualmente se non vale l'additività finita.

Inoltre, la collezione degli insiemi $\mathcal{M}_\varepsilon$ ha la proprietà di intersezione finita: $\bigcap \mathcal{M}_{\varepsilon_i} = \mathcal{M}_{\min \varepsilon_i}$, che è non vuoto. Perciò, per la compattezza di $[0,1]^{\wp(G)}$, esiste qualche μ che giace in ogni $\mathcal{M}_\varepsilon$. Una tale μ è invariante a sinistra rispetto ad ogni g_k, quindi è invariante a sinistra rispetto ad ogni membro di G, come richiesto.

□

Corollario 4.1.16. *Dai Teoremi 4.1.11 e 4.1.15 si ottiene che ogni gruppo risolubile è amenabile; in particolare quindi O_1 e i gruppi delle isometrie di $\mathbb{R}^1$ e di $\mathbb{R}^2$ sono amenabili.*

4.2 Algebra di Boole e Teorema di Estensione dell'invarianza

Definizione 4.2.1 (Algebra di Boole)**.** Un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ è un insieme non vuoto con tre operazioni definite sugli elementi di $\mathcal{A}$: $a \vee b, a \wedge b, a'$, che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\wedge, \vee$ sono commutative e associative;
2. $(a \wedge b) \vee b = b,\ (a \vee b) \wedge b = b$;
3. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\,,\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
4. $(a \wedge a') \vee b = b,\ (a \vee a') \wedge b = b$.

Si assuma che le algebre di Boole siano non degeneri, cioè abbiano almeno due elementi.

Lemma 4.2.2. *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole. Per qualsiasi $a, b \in \mathcal{A}$, si ha: $a \vee a' = b \vee b'$.*

Dimostrazione. Dalla proprietà 4 della definizione precedente segue che

$$(a \vee a') \wedge (b \vee b') = b \vee b'$$

Per la commutatività di $\wedge$, si ha: $(a \vee a') \wedge (b \vee b') = (b \vee b') \wedge (a \vee a')$.
Quindi, poichè $(b \vee b') \wedge (a \vee a') = a \vee a'$ (dalla proprietà 4), si ottiene $a \vee a' = b \vee b'$. □

Analogamente si dimostra che $a \wedge a' = b \wedge b'$. Segue quindi che vi sono due elementi distinti, 0 e 1, così definiti: $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$.

Notazione 4.2.3. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole e siano $a, b \in \mathcal{A}$.

- $a - b$ indica $a \wedge b'$.
- a, b si dicono disgiunti se $a \wedge b = 0$.

Definizione 4.2.4 ($\triangle$)**.** Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole e siano $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$; si definisce il seguente operatore:

$$a_1 \triangle a_2 = (a_1 - a_2) \vee (a_2 - a_1)$$

Esempio 4.2.5. Sia S un insieme, un esempio di algebra di Boole è rappresentato da $\wp(S)$ con le operazioni: $\vee$ per l'unione ($\cup$), $\wedge$ per l'intersezione ($\cap$) e $'$ per il complementare (^{c}).
Lo 0 è dato dall'insieme vuoto $\emptyset$ e l'1 dall'insieme stesso S.
Quindi $A \setminus B$ indica $A \cap B^c$.
Infine presi $A, B \in S$, si ha: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Osservazione 4.2.6. Vi è un ordine naturale in ogni algebra di Boole definito come segue:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

1 è l'elemento più grande, 0 il più piccolo rispetto a tale ordine.

Definizione 4.2.7 (Sottoalgebra)**.** Un sottoinsieme $\mathcal{A}_0$ di $\mathcal{A}$ si dice sottoalgebra se $\mathcal{A}_0$ è chiuso rispetto a $\wedge, \vee, '$.

Osservazione 4.2.8. Per ogni sottoinsieme X di $\mathcal{A}$, vi è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$ che è la più piccola contenente X. Tale sottoalgebra è detta sottoalgebra di $\mathcal{A}$ generata da X. Inoltre, una sottoalgebra generata da un insieme finito è finita.

Definizione 4.2.9 (Relativizzazione)**.** Sia $b \in \mathcal{A}$, si definisce $\mathcal{A}_b = \{a \in \mathcal{A} : a \leq b\}$, con

- $\vee$ definito come in $\mathcal{A}$;
- $\wedge$ tale che $a_1 \wedge a_2$ in $\mathcal{A}_b$ indica $a_1 \wedge a_2 \wedge b$ (in $\mathcal{A}$).
- $'$ tale che a' in $\mathcal{A}_b$ è definito come $a' \wedge b$ in $\mathcal{A}$

Osservazione 4.2.10. $\mathcal{A}_b$ definita come sopra è un'algebra di Boole dove lo 0 è lo stesso che appartiene ad $\mathcal{A}$, mentre l'1 è dato da b. Si noti che $\mathcal{A}_b$ non è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$ in quanto non risulta generalmente chiusa rispetto al complementare $'$.

Definizione 4.2.11 (Atomo)**.** Un elemento b di $\mathcal{A}$ è definito atomo se $\mathcal{A}_b = \{0, b\}$.

Definizione 4.2.12 (Automorfismo)**.** Un automorfismo di un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ è una biezione $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ che preserva le tre operazioni di $\wedge, \vee, '$.

Osservazione 4.2.13. Se un gruppo G agisce su un insieme X, allora ogni $g \in G$ induce un automorfismo sull'algebra di Boole $\wp(X)$ dato da: $g(A) = \{g(x) : x \in A\}$.

Definizione 4.2.14 (Misura su un'algebra di Boole)**.** Si definisce misura su un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ una misura $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tale che μ sia finitamente additiva, cioè $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$, se $a \wedge b = 0$ e $\mu(0) = 0$.
Inoltre, se G è un gruppo di automorfismi di $\mathcal{A}$, allora una misura μ su $\mathcal{A}$ si dice G-invariante se $\mu(g(b)) = \mu(b)\ \forall b \in \mathcal{A}, g \in G$.

Definizione 4.2.15 (Sottoanello)**.** Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{C}$ di un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ è detto sottoanello se $a_1 \vee a_2$ e $a_1 - a_2$ appartengono a $\mathcal{C}\ \forall a_1, a_2 \in \mathcal{C}$.
Si noti che una sottoalgebra è sempre un sottoanello.

Definizione 4.2.16 (Ideale)**.** Un ideale I di un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme non vuoto I di $\mathcal{A}$ tale che:

1. $a \vee b \in I \ \forall a, b \in I$;

2. $a \leq b, b \in I \Rightarrow a \in I \ \forall a, b \in \mathcal{A}$.

Si può introdurre la nozione di ideale I anche in un sottoanello $\mathcal{C}$ di un'algebra di Boole $\mathcal{A}$, dove valgono:

1. $a \vee b \in I \ \forall a, b \in I$;

2. $a \leq b, b \in I \Rightarrow a \in I \ \forall a, b \in \mathcal{C}$.

Osservazione 4.2.17.
- Se I è un ideale in $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ è un sottoanello di $\mathcal{A}$, allora $I \cap \mathcal{C}$ è un ideale in $\mathcal{C}$.
- Se μ è una misura su un'algebra di Boole, la collezione degli insiemi di μ-misura nulla è un ideale.

Definizione 4.2.18 (Algebra quoziente)**.** Se I è un ideale in $\mathcal{A}$, un'algebra quoziente è definita usando la seguente relazione d'equivalenza:

$$a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow a_1 \triangle a_2 \in I$$

Sia $\mathcal{A}/I$ la collezione delle classi d'equivalenza, con le operazioni di Boole ovvie.

Osservazione 4.2.19. $\mathcal{A}/I$ è un'algebra di Boole.

Teorema 4.2.20 (Estensione della misura)**.** *Sia $\mathcal{A}_0$ un sottoanello di un'algebra di Boole $\mathcal{A}$, e sia μ una misura su $\mathcal{A}_0$. Allora esiste $\bar{\mu}$ misura su $\mathcal{A}$ che estende μ.*

Dimostrazione. Innanzitutto si mostra tale teorema con l'assunzione aggiuntiva che $\mathcal{A}$ è finita, procedendo per induzione sul numero di atomi di $\mathcal{A}$.

- Passo base: Se $\mathcal{A}$ ha un atomo, allora $\mathcal{A} = \{0\}$, e l'asserzione è banale.
- Passo d'induzione: In generale, scelto un elemento minimale b (rispetto a $\leq$) di $\mathcal{A}_0 \setminus \{0\}$ (se $\mathcal{A}_0$ consiste solo di 0, semplicemente $\bar{\mu}$ sarà identicamente 0). Sia $c = b'$ e si consideri l'algebra relativizzata $\mathcal{A}_c$ con associato il sottoanello $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_c$ e la misura $\mu|_{\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_c}$.
  Sia a_0 un atomo di $\mathcal{A}$ tale che $a_0 \leq b$. Allora $a_0 \notin \mathcal{A}_c$, quindi $\mathcal{A}_c$ ha meno atomi di $\mathcal{A}$ e l'ipotesi induttiva può essere utilizzata per ottenere una misura ν su $\mathcal{A}_c$ che estende $\mu|_{\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_c}$. Ora, si definisce $\bar{\mu}$ su $\mathcal{A}$ prima definendola su tutti gli atomi di $\mathcal{A}$, e poi estendendola a tutto $\mathcal{A}$ in questo modo:

  $$\bar{\mu}(e) = \sum \{\mu(a) : a \leq e, a \text{ atomo}\}$$

  $\bar{\mu}$ sarà poi automaticamente finitamente additiva su $\mathcal{A}$. Sia a un qualsiasi atomo di $\mathcal{A}$ e si definisca:

- $\bar{\mu}(a) = \nu(a)$, se $a \leq c$;
- $\bar{\mu}(a) = \mu(b)$, se $a = a_0$;
- $\bar{\mu}(a) = 0$, se $a \leq b$, ma $a \neq a_0$.

Si noti che $\bar{\mu}$ si comporta come ν su tutto $\mathcal{A}_c$; rimane da mostrare che si comporta come μ su $\mathcal{A}_0$. Si osservi che per la minimalità di b, se $d \in \mathcal{A}_0$, allora si presentano due possibilità:

- o $d \wedge b = 0$, cioè, $d \leq c$, quindi $\bar{\mu}(d) = \nu(d) = \mu(d)$;
- o $d \geq b$, in tal caso allora $d = b \vee (d - b)$ e

$$\bar{\mu}(d) = \bar{\mu}(b) + \bar{\mu}(d-b) = \mu(b) + \nu(d-b) = \mu(b) + \mu(d-b) = \mu(d)$$

Il risultato sarà esteso alle algebre di Boole infinite con la tecnica della compattezza applicata allo spazio prodotto, $[0,\infty]^{\mathcal{A}}$. Per ogni sottoalgebra finita, $\mathcal{C}$, di $\mathcal{A}$, sia

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \left\{\nu \in [0,\infty]^{\mathcal{A}} : \nu|_{\mathcal{C}} \text{ è una misura che estende } \mu|_{\mathcal{C}\cap\mathcal{A}_0}\right\}$$

Si verifica che ogni $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ è chiuso e, come mostrato, non vuoto. Inoltre un numero finito di sottoalgebre finite di $\mathcal{A}$ genera una sottoalgebra finita di $\mathcal{A}$; da ciò segue che l'intersezione di tutti gli $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ha la proprietà di intersezione finita. Per la compattezza, allora, l'intersezione di tutti gli $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ su tutte le sottoalgebre finite $\mathcal{C}$ è non vuota, e ogni elemento di questa intersezione soddisfa la conclusione del teorema.

□

Teorema 4.2.21 (Estensione dell'invarianza)**.** *Se nel teorema di Estensione della misura, G è un gruppo amenabile di automorfismi di $\mathcal{A}$, e $\mathcal{A}_0$ e μ sono G-invarianti, allora $\bar{\mu}$ può essere scelto G-invariante.*

Dimostrazione. Si usi il teorema di Estensione della misura per ottenere una misura ν su $\mathcal{A}$ che estende μ. Sia ϑ una misura sul gruppo amenabile G. Se $b \in \mathcal{A}$, si definisce

$$f_b : G \to \mathbb{R} \text{ tale che } f_b(g) = \nu\left(g^{-1}(b)\right)$$

Allora si considera $\bar{\mu}$ nel seguente modo:

- $\bar{\mu}(b) = \int f_b d\vartheta$, se $f_b \in B(G)$, cioè se f_b è limitata;
- $\bar{\mu}(b) = \infty$, se f_b è illimitata.

Si mostra facilmente che $\bar{\mu}$ è un'estensione G-invariante di μ. □

Tale teorema può essere applicato per estendere la misura di Lebesgue ad una misura finitamente additiva, invariante, definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^1$ o $\mathbb{R}^2$.

Corollario 4.2.22. *Se G è un gruppo amenabile di isometrie di $\mathbb{R}^n$ (o di S^n), allora esiste una misura finitamente additiva, G-invariante, estensione di λ misura di Lebesgue a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (o S^n). In particolare, la misura di Lebesgue su $S^1, \mathbb{R}^1$ o $\mathbb{R}^2$ ha un'estensione invariante per isometrie, finitamente additiva, a tutti gli insiemi.*

4.3 Caratterizzazione dell'amenabilità

Nella seguente sezione saranno caratterizzati i gruppi amenabili mediati vari teoremi.

Teorema 4.3.1. *Sia G un gruppo, sono equivalenti:*

1. *G è amenabile;*
2. *vale la Proprietà di Estensione di Hahn-Banach, cioè, se valgono:*
   - i. *G un gruppo di operatori lineari su uno spazio vettoriale reale V;*
   - ii. *F un funzionale lineare G-invariante su V_0, un sottospazio di V G-invariante;*
   - iii. *$F(v) \leq p(v)$ $\forall v \in V_0$, dove p è una qualche funzione a valori reali su V tale che*
     - *$p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$, per $v_1, v_2 \in V$,*
     - *$p(\alpha v) = \alpha p(v)$ per $\alpha \geq 0, v \in V$,*
     - *$p(g(v)) \leq p(v)$ per $g \in G, v \in V$.*

   Allora c'è un funzionale lineare G-invariante $\bar{F}$ che estende F ed è dominato da p.

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2.) Il teorema di Hahn-Banach standard garantisce l'esistenza di un funzionale lineare F_0 su V che estende F ed è dominato da p. Allora, per ogni $v \in V$, si definisce $f_v : G \to \mathbb{R}$ come $f_v(h) = F_0(h^{-1}(v))$.
Poichè $F_0(h^{-1}(v)) \leq p(h^{-1}(v)) \leq p(v)$, f_v è limitata da $p(v)$. Quindi, scegliendo una misura μ su G, è possibile definire

$$\bar{F}(v) = \int f_v d\mu$$

Allora $\bar{F}(v) \leq p(v)$ e $\bar{F}$ è un funzionale lineare su V. Infine $\bar{F}$ estende F, e poichè $f_{g(v)} =_g (f_v)$, la G-invarianza di $\bar{F}$ segue da quella di μ.

2. $\Rightarrow$ 1.) Sia $V = B(G)$ e sia V_0 il sottospazio delle funzioni costanti. L'azione di g su $B(G)$ data da $f \mapsto_g f$ è lineare, e V_0 è G-invariante. Ponendo

$$F(\alpha \chi_G) = \alpha \text{ e } p(f) = \sup\{f(g) : g \in G\}$$

le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Quindi c'è un funzionale lineare invariante a sinistra $\bar{F}$ su $B(G)$ con $\bar{F}(\chi_G) = 1$.
Poichè $p(-f) \leq 0\ \forall f$, vale:

$$\bar{F}(-f) \leq p(-f) \leq 0 \text{ e } \bar{F}(f) = -\bar{F}(-f) \geq 0$$

che dimostra che $\bar{F}(f) \geq 0$ se $f(g) \geq 0\ \forall g \in G$, cioè che $\bar{F}$ è una media invariante a sinistra. □

Teorema 4.3.2. *Sia G un gruppo, sono equivalenti:*

1. *G è amenabile;*
2. *vale la Condizione di Følner, cioè, per ogni W sottoinsieme finito di G e per ogni $\varepsilon > 0$, vi è un altro sottoinsieme finito W^* di G tale che*

$$\forall g \in W,\ \frac{|gW^* \triangle W^*|}{|W^*|} \leq \varepsilon$$

con $\triangle$ definito come in 4.2.5.

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2.) In tale dimostrazione si considereranno solo i gruppi abeliani. Posto $W = \{g_1, \ldots, g_m\}$, la dimostrazione avverrà per induzione su m:

- Passo base: Se $m = 1$, sia $W^* = \left\{1, g_1, g_1^2, \ldots, g_1^{r-1}\right\}$, dove r è l'ordine di g_1, o se g_1 non ha ordine finito, ogni intero tale che $\frac{2}{r} \leq \varepsilon$.
- Passo d'induzione: Sia $V = \{g_1, \ldots, g_{m-1}\}$ e sia H il sottogruppo di G generato da V. Si possono studiare i seguenti casi:
  - Se nessuna potenza positiva di g_m si trova in H, si sceglie r tale che $\frac{2}{r} \leq \varepsilon$ e si ottiene $V^* \subseteq H$ dalle ipotesi d'induzione su V e $\frac{\varepsilon}{r}$. Allora, sia $W^* = V^* \cup g_m V^* \cup \ldots \cup g_{m-1}^{r-1} V^*$. Dalle ipotesi su g_m si ottiene che gli insiemi di questa unione sono disgiunti a due a due, così $|W^*| = r\,|V^*|$, ed è facile vedere che W^* è come desiderato rispetto a W ed ε.
  - Se $g_m^r \in H$ per qualche $r \geq 1$, con g_m^r uguale ad una parola di lunghezza s in $g_1^{\pm 1}, \ldots, g_{m-1}^{\pm 1}$, si usano le ipotesi d'induzione per scegliere V^* rispetto a V e $\frac{\varepsilon}{rs}$. Sia $W^* = V^* \cup g_m V^* \cup \ldots \cup g_m^{r-1} V^*$; poichè V^* funziona per $V \cup \{g_m^r\}, \frac{\varepsilon}{r}$, segue che W^* funziona per W, ε.

2. $\Rightarrow$ 1.) Per ogni $W \subseteq G$ finito ed $\varepsilon > 0$, sia $\mathcal{M}_{W,\varepsilon}$ l'insieme delle funzioni finitamente additive $\mu : \wp(G) \to [0,1]$ tali che:

- $\mu(G) = 1$,

- $\forall g \in W, A \subseteq G, |\mu(A) - \mu(gA)| \leq \varepsilon$.

Allora $\mathcal{M}_{W,\varepsilon}$ è un sottoinsieme chiuso di $[0,1]^{\wp(G)}$. $\mathcal{M}_{W,\varepsilon}$ risulta non vuoto: si definisce

$$\mu(A) = \frac{|A \cap W^*|}{|W^*|}$$

dove W^* è come enunciato nella Condizione di Fϕlner, quindi $\mu \in \mathcal{M}_{W,\varepsilon}$. Si può giungere al risultato richiesto grazie alla compattezza di $[0,1]^{\wp(G)}$. □

Teorema 4.3.3. *Sia G un gruppo, sono equivalenti:*

1. *esiste una media invariante a sinistra su G;*
2. *vale la Condizione di Dixmier, che afferma che se $f_1, \ldots, f_n \in B(G)$ e $g_1, \ldots, g_n \in G$, allora, per qualche $h \in G$, vale*

$$\sum f_i(h) - f_i\left(g_i^{-1}h\right) \leq 0$$

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2.) Se F è una media invariante a sinistra su $B(G)$, allora

$$F\left(\sum f_i -_{g_i} f_i\right) = 0$$

e quindi, per qualche $h \in G, f_i(h) - ({}_{g_i}f_i)(h) \leq 0$.

2. $\Rightarrow$ 1.) Sia V_0 il sottospazio di $B(G)$ generato dalle funzioni costanti e da tutte le funzioni della forma $f -_g f$, dove $f \in B(G)$ e $g \in G$. Un elemento di V_0 è della forma $f -_g f + \alpha\chi_G$ per qualche α reale, che risulta unico per l'ipotesi che ogni $f -_g f$ assume un valore non positivo; quindi è possibile definire un funzionale lineare su V_0 nel seguente modo:

$$F(f -_g f + \alpha\chi_G) = \alpha$$

Si desidera mostrare che $F(v) \leq \sup v$ per ogni $v \in V_0$. Se $v = f -_g f + \alpha\chi_G$, allora poichè $-(f -_g f) = -f -_g (-f)$ assume un valore non positivo, $v = \alpha\chi_G - (-(f -_g f))$, assume un valore non più piccolo di $\alpha = F(v)$. Ponendo $p(v) = \sup v$ per $v \in B(G)$, è possibile applicare il teorema di Hahn-Banach standard per ottenere un funzionale lineare $\bar{F}$ su $B(G)$ che estende F ed è dominato da p. La definizione di F garantisce che $\bar{F}$ è invariante a sinistra e normalizza χ_G. Infine, se $f(h) \geq 0$ $\forall h \in G$, allora $\bar{F}(f) = -\bar{F}(-f) \geq -p(-f) \geq 0$. Quindi $\bar{F}$ è una media invariante a sinistra su $B(G)$. □

Per formulare le seguenti definizioni, si consideri V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, che può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, ed un sottoinsieme $C \subseteq V$.

Definizione 4.3.4 (Insieme convesso)**.** C si definisce insieme convesso se

$$tx + (1-t)\,y \in C \;\forall x, y \in C, 0 \leq t \leq 1$$

In altre parole, C contiene tutti i segmenti che congiungono i suoi punti.

Definizione 4.3.5 (Insieme bilanciato)**.** C si definisce insieme bilanciato se

$$\lambda x \in C \;\forall x \in C, |\lambda| \leq 1$$

Cioè, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se $x \in C$, allora C contiene il segmento congiungente x con $-x$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se $x \in C$, allora C contiene il disco centrato nell'origine la cui frontiera comprende x.

Definizione 4.3.6 (Insieme assolutamente convesso)**.** Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, un sottoinsieme $C \in V$ è un insieme assolutamente convesso se è bilanciato e convesso.

Definizione 4.3.7 (Insieme assorbente)**.** Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, un sottoinsieme $C \subseteq V$ è un insieme assorbente se $\forall x \in V$ si ha che $tx \in C$ per qualche $t > 0$.

Definizione 4.3.8 (Spazio vettoriale topologico localmente convesso)**.** Uno spazio vettoriale topologico che ammette una base di intorni dell'origine che sono insiemi assorbenti assolutamente convessi si dice localmente convesso.

Esempio 4.3.9 (Topologia polare)**.** Sia $(X, Y, \langle,\rangle)$ una coppia duale, cioè una tripla formata da due spazi vettoriali X, Y sullo stesso campo $\mathbb{K}$, e da una forma bilineare $\langle,\rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ tale che:

- $\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists y \in Y$ t.c. $\langle x, y\rangle \neq 0$
- $\forall y \in Y \setminus \{0\}\ \exists x \in X$ t.c. $\langle x, y\rangle \neq 0$

Un insieme $A \subseteq X$ è un insieme limitato in X rispetto a Y se per ogni elemento $y \in Y$ l'insieme $\{\langle x, y\rangle, x \in A\}$ è limitato in $\mathbb{K}$, ossia

$$\sup_{x \in A} |\langle x, y\rangle| < \infty \;\forall y \in Y$$

Tale condizione è equivalente alla richiesta che l'insieme A°, detto insieme polare dell'insieme A in Y,

$$A^\circ = \left\{ y \in Y : \sup_{x \in A} |\langle x, y\rangle| \leq 1 \right\}$$

sia un insieme assorbente in Y, ovvero

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda A^\circ = Y$$

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi limitati (rispetto a Y) di X tale che:

1. $\forall x \in X\ \exists A \in \mathcal{A}$ t.c. $x \in A$;

2. $\forall A, B \in \mathcal{A}\ \exists C \in \mathcal{A}$ t.c. $A \cup B \subseteq C$;

3. $\lambda A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Allora la seminorma:

$$\|y\|_A = \sup_{x \in A} |\langle x, y \rangle| \ \ A \in \mathcal{A}$$

definisce una topologia di Hausdorff localmente convessa su Y, la topologia polare su Y generata dagli insiemi di $\mathcal{A}$.

Definizione 4.3.10 (Insieme diretto)**.** Un insieme A si dice diretto se è definita una relazione binaria $\leq$ tale che:

- riflessività: $a \leq a\ \forall a \in A$;
- transitività: $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c\ \forall a, b, c \in A$;
- $\forall a, b \in A, \exists c \in A$ t.c. $a \leq c$ e $b \leq c$.

Definizione 4.3.11 (Rete)**.** Sia X uno spazio topologico. Si dice rete in X una funzione $\phi : A \to X$ dove A è un insieme diretto.

Teorema 4.3.12. *Sia G un gruppo, sono equivalenti:*

1. *G è amenabile;*

2. *vale il teorema del Punto Fisso di Markov-Kakutani, che afferma che, sia K un sottoinsieme compatto convesso di uno spazio vettoriale topologico X localmente convesso, e sia G che agisce su K in modo tale che ogni trasformazione $g : K \to K$ è continua ed affine, cioè*

$$g(\alpha x + (1 - \alpha) y) = \alpha g(x) + (1 - \alpha) g(y) \ \ \textit{se } x, y \in K, 0 \leq \alpha \leq 1$$

   Allora c'è qualche x in K che è fissato da ogni $g \in G$.

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2.) Sia μ una misura su G e si scelga qualche $x \in K$. L'idea è di usare μ per definire un valore di media (integrale) della funzione $f : G \to K$ definita da $f(g) = g(x)$; questa media sarà il punto fisso desiderato.
Sia D l'insieme diretto che contiene tutti ricoprimenti aperti finiti, $\pi = \{U_i\}$, di K, ordinati per raffinamento, dove si assume che ogni $U_i \cap K$ è non vuoto.
Se V è un intorno dell'origine, allora π sarà chiamato V-fine se ogni insieme in π può essere traslato per rimanere in V.

Si definisce una rete $\phi : D \to K$ come segue: dato $\pi \in D$, si scelgono i punti $s_i \in U_i \cap K$ e si pone

$$\phi(\pi) = \sum \mu(E_i)\, s_i, \text{ dove } E_i = f^{-1}(U_i) \setminus \bigcup \{E_j; j < i\}$$

Allora $\phi(\pi)$ è una combinazione convessa, ossia una combinazione lineare con coefficienti non negativi e la cui somma fa 1, degli s_i, e quindi $\phi(\pi) \in K$.

Lemma 4.3.13. *Se V è un intorno convesso simmetrico ($V = -V$) dell'origine, π è $V/2$-fine, e π' raffina π, allora $\phi(\pi') - \phi(\pi) \in V$.*

Dimostrazione. Si consideri solo il caso semplice in cui π contiene un singolo insieme aperto U, con punto designato s. Sia $\pi' = \{U_1'\}$ con punti selezionati $s_i \in U_1'$; allora

$$\phi(\pi) = s \text{ e } \phi(\pi') = \sum \alpha_i s_i$$

dove la somma dei valori reali α_i è pari ad 1.
Per qualche $t \in X, K \subseteq U \subseteq t + V/2$, quindi per ogni s_i c'è qualche $v_i \in V$ tale che $s_i = t + v_i/2$; inoltre vale anche $s = t + v/2$ per qualche $v \in V$. Per convessità,

$$\sum \alpha_i s_i = t + v'/2, \text{ con } v' \in V, \text{ e quindi } \left(\sum \alpha_i s_i\right) - t = v'/2$$

Ma $t - s = -v/2$, e poichè $-v \in V$, sommando queste equazioni, si ottiene che

$$\left(\sum \alpha_i s_i\right) - s \in V$$

come desiderato. □

Lemma 4.3.14. *C'è un unico $x \in K$ tale che la rete ϕ converge ad x.*

Dimostrazione. La compattezza di K implica che ϕ ha almeno un punto di accumulazione x in K. Per provare che $\phi \to x$, è sufficiente mostrare che se U è un qualsiasi intorno dell'origine convesso simmetrico, allora c'è qualche $\pi \in D$ tale che $\phi(\pi') \in x + U$ se π' raffina π.
A tal fine, sia π un qualsiasi ricoprimento $U/4$-fine in D (che esiste per compattezza), e usando il fatto che ϕ si accumula ad x per raffinare π se necessario, si assuma che $\phi(\pi) \in x + U/2$. A questo punto, se π' raffina π, allora $\phi(\pi') - \phi(\pi) \in U/2$ per il lemma precedente. Poichè $\phi(\pi) - x \in U/2$, questo implica che $\phi(\pi') - x \in U$, come richiesto.
Poichè X è uno spazio di Hausdorff, i limiti delle reti sono unici. □

Lemma 4.3.15. *Se ρ è una rete su D definita nello stesso modo di ϕ, ma con diversi punti designati s_i, allora ρ converge ad x*

Dimostrazione. Sia U un intorno dell'origine convesso simmetrico, e si scelga ϕ essere $U/4$-fine così che tutti i π' raffinamenti di π soddisfino $\phi(\pi') \in x + U/2$. Si supponga che $\phi(\pi)$ è definito dai punti s_i, mentre $\rho(\pi')$ usa r_i. Poichè π' è $U/4$-fine, ci sono punti t_i tali che $r_i, s_i \in t_i + U/4$. Poichè $U = -U$, segue che $r_i - s_i \in U/2$, e poichè U è convesso, questo implica che $\rho(\pi') - \phi(\pi') \in U/2$. Quindi $\phi(\pi') - x \in U/2$, così $\rho(\pi') - x \in U$. Allora $\rho(\pi') \in x + U$ per ogni π' che raffina π, provando che $\rho \to x$. □

Poichè g è continua, la rete $g\phi$ definita da $(g\phi)(\pi) = g(\phi(\pi))$ converge a $g(x)$.
Per completare la dimostrazione basta mostrare che $g\phi \to x$; l'unicità del limite allora implica che $x = g(x)$.
Si noti che ogni $g \in G$ induce una mappa da D a D che preserva l'ordine, data da:

$$g(\phi) = \{\{y : g(y) \in U_i\} : U_i \in \phi\}$$

Usando questa mappa si definisce una rete φ su D data da $\varphi(\pi) = \phi(g(\pi))$; è facile provare che se $\varphi \to y$, allora anche $\phi \to y$.
La rete $g\varphi$ converge ad x, il limite di ϕ. Infatti, poichè

$$(g\varphi)(\pi) = g(\varphi(\pi)) = g(\phi(g(\pi))) = g\left(\sum \alpha_i r_i\right)$$

dove r_i è qualche punto sull'i-esimo insieme del ricoprimento $g(\pi)$ e α_i è la μ-misura del sottoinsieme appropriato di G e poichè $g : X \to X$ è affine, vale:

$$g\left(\sum \alpha_i r_i\right) = \sum \alpha_i g(r_i)$$

Inoltre l'invarianza a sinistra di μ implica che α_i è la misura del sottoinsieme di G derivante da ϕ. Poichè $g(r_i) \in U_i$, questo significa che la rete $g\varphi$ soddisfa la condizione del lemma precedente. Quindi $g\varphi \to x$.
Ciò implica che $\varphi \to g^{-1}(x)$, e quindi, per l'osservazione precedente, si ha: $\phi \to g^{-1}(x)$.
Perciò $g\phi \to x$, come desiderato.
2. ⇒ 1.) Si consideri $B(G)$ come uno spazio con norma

$$\|f\| = \sup\{|f(g)| : g \in G\}$$

e sia X lo spazio duale di $B(G)$ (tutti i funzionali lineari limitati su $B(G)$), con la topologia polare, esempio 4.3.9. In tal modo X è uno spazio topologico localmente convesso. Sia K il sottospazio di X contenente tutti i funzionali F tali che

$$\inf(f) \leq F(f) \leq \sup(f)$$

Si noti che $F \in K$ soddisfa

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|} \leq 1$$

quindi K è contenuto nella palla unitaria di X. Poichè tale palla è compatta e K è chiuso, K è un sottoinsieme compatto di X. Inoltre, K è convesso. Ogni $g \in G$ agisce su X attraverso $({}_gF)(f) = F({}_gf)$, e la trasformazione di X indotta da g è lineare e continua. Poichè $\inf({}_gf) = \inf(f)$ e $\sup({}_gf) = \sup(f)$, ogni g mappa K in K. Quindi, per le ipotesi, c'è qualche $F \in K$ che è fissato da ogni $g \in G$; un tale F è una media invariante a sinistra su $B(G)$. $\square$

4.4 Amenabilità topologica

Definizione 4.4.1 (Algebra di Borel)**.** Sia (X, τ) uno spazio topologico. L'algebra di Borel di X rispetto a τ è la più piccola σ-algebra $\mathcal{F} = \sigma(\tau)$ contenente la topologia τ, ossia contenente ogni sottoinsieme aperto di (X, τ).
Gli insiemi contenuti nella σ-algebra di Borel sono detti insiemi di Borel.
Una misura definita sulla σ-algebra di Borel è detta misura di Borel.

Definizione 4.4.2 (Gruppo topologico)**.** Un gruppo topologico G è uno spazio topologico ed un gruppo dotato di un'operazione binaria $\circ$ tale che le seguenti funzioni siano continue:

$$f : G \times G \to G, \text{ dove } f(x, y) = x \circ y$$
$$g : G \to G, \text{ dove } g(x) = x^{-1}$$

Esempio 4.4.3. Un importante esempio di gruppo topologico è rappresentato dall'insieme delle matrici

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$$

con l'operatore di composizione delle matrice.

Definizione 4.4.4 (Gruppo topologico di Hausdorff)**.** Un gruppo topologico G è di Hausdorff se G, visto come spazio topologico, è di Hausdorff.

Si può estendere l'idea di amenabilità ai gruppi topologici, che saranno considerati in questa sezione sempre localmente compatti e di Hausdorff. Nel seguito verranno solo accennate delle modifiche alle proprietà ed ai teoremi visti finora riguardanti l'amenabilità dei gruppi astratti, per renderli validi anche nel contesto topologico.

Definizione 4.4.5 (Gruppo topologico amenabile)**.** Un gruppo topologico G si dice amenabile (topologicamente) se esiste una misura μ finitamente additiva, invariante a sinistra, sui sottospazi di Borel di G tale che $\mu(G) = 1$.

Dire che G è amenabile come un gruppo discreto (cioè con la topologia discreta, che è localmente compatta), è come dire che G è amenabile nel senso descritto precedentemente: nel caso discreto, tutti gli insiemi sono di Borel.

Osservazione 4.4.6. Se un gruppo topologico G è amenabile allora è amenabile anche topologicamente.

Infatti, presa μ una misura su $\wp(G)$, è sufficiente restringersi agli insiemi di Borel. Non sempre vale invece il viceversa, cioè un gruppo topologico amenabile topologicamente non per forza è amenabile nel senso precedente.

Osservazione 4.4.7. Se G è compatto, allora c'è una misura di Borel numerabilmente additiva, invariante a sinistra, tale che $\mu(G) = 1$, detta misura di Haar; quindi tutti i gruppi compatti sono topologicamente amenabili.

Esempio 4.4.8. Se G è il gruppo dei numeri reali positivi con l'operazione di moltiplicazione, allora la misura di Haar è data come segue:

$$\mu(S) = \int_S \frac{1}{t} dt \ \forall S \text{ sottoinsieme di Borel di } G$$

Esempio 4.4.9. Il gruppo ortogonale SO_3 è un gruppo topologico compatto, dunque risulta essere topologicamente amenabile, sebbene sia paradossale, come mostrato nella Sezione 2 per la dimostrazione del paradosso di Banach-Tarski, dunque non amenabile nel senso descritto precedentemente, Lemma 4.1.3.

Osservazione 4.4.10. Un sottogruppo chiuso di un gruppo amenabile localmente compatto è amenabile.

Osservazione 4.4.11. G è amenabile topologicamente se e solo se c'è una media invariante a sinistra sulle funzioni limitate, misurabili secondo Borel, da G ad $\mathbb{R}$.
In effetti, si può dimostrare che è sufficiente che vi sia una media sulle funzioni limitate, continue, a valori reali, da G.

Teorema 4.4.12 (Condizione di Fϕlner)**.** *Se K è un sottoinsieme compatto di G e $\varepsilon > 0$, allora c'è un insieme di Borel $K^* \subseteq G$ con $0 < \theta(K^*) < \infty$ tale che*

$$\frac{\theta(gK^* \triangle K^*)}{\theta(K^*)} \leq \varepsilon \ \forall g \in K$$

dove θ denota la misura di Haar invariante a sinistra, se e solo se G è topologicamente amenabile.

Vi è anche una versione topologica del teorema del Punto Fisso di Markov-Kakutani, che si ottiene semplicemente aggiungendo la condizione che la funzione da $G \times K$ a K indotte dall'azione è continua, cioè la mappa $(g, x) \to g(x)$ è continua.

Proposizione 4.4.13. *Se un gruppo topologico localmente compatto G ha un sottogruppo chiuso H che è un gruppo libero di rango 2, allora G non è amenabile topologicamente.*

Dimostrazione. H è numerabile e di Hausdorff, quindi tutti i suoi sottoinsiemi sono di Borel; il paradosso standard riguardo un gruppo libero di rango 2 implica che H non è amenabile topologicamente, e quindi, poichè H è chiuso, anche G non è amenabile topologicamente. $\square$

Capitolo 5

Problema di Marczewski

5.1 Proprietà di Baire

Definizione 5.1.1 (Insieme magro)**.** Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme A di X si definisce magro se si può definire come unione numerabile di sottoinsiemi A_i, di X, la cui chiusura ha parte interna vuota, ossia $Int\left(\bar{A}_i\right) = \emptyset$.

Definizione 5.1.2 (Proprietà di Baire)**.** Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X ha la proprietà di Baire se vi è un insieme aperto $U \subseteq X$ tale che $A \triangle U$ è magro.

La collezione degli insiemi con la Proprietà di Baire sarà denotata con $\mathcal{B}$.

5.2 Misure di Marczewski

Il paradosso di Banach-Tarski suscitò reazioni contrastanti e molte domande sorsero a causa della sua formulazione. Un esempio importante, che risulta ancora essere un problema aperto, è il seguente:

Problema di Marczewski: S^2 ammette scomposizioni paradossali (rispetto alle rotazioni) nelle quali ogni pezzo ha la Proprietà di Baire?

Definizione 5.2.1 ($\mathcal{B}$-misura)**.** Si denota con $\mathcal{B}$-misura una misura finitamente additiva, invariante rispetto al gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$, su $\mathcal{B}$ che normalizza il cubo unitario.

L'esistenza di una $\mathcal{B}$-misura su $\mathbb{R}^n$ implicherebbe che il cubo unitario non è paradossale usando pezzi con la Proprietà di Baire. Inoltre una $\mathcal{B}$-misura su $\mathbb{R}^n$ induce una $\mathcal{B}$-misura su S^{n-1}, che implicherebbe che S^{n-1} non sarebbe paradossale usando pezzi con la Proprietà di Baire. Così una $\mathcal{B}$-misura, sia su $\mathbb{R}^3$ che su S^2 risolverebbe il Problema di Marczewski.

Definizione 5.2.2 (Misure di Marczewski)**.** Una misura di Marczewski in $\mathbb{R}^n$ (o S^n) è una $\mathcal{B}$-misura che risulta nulla sugli insiemi limitati magri.

Si può così riformulare il Problema di Marczewski mediante la definizione appena introdotta:
Problema di Marczewski: Esistono misure di Marczewski in $\mathbb{R}^3$ (o in ogni $\mathbb{R}^n, n \geq 3$)?

Teorema 5.2.3. *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole, G un gruppo di automorfismi di $\mathcal{A}$, I un ideale G-invariante in $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ un sottoanello G-invariante di $\mathcal{A}$. Se G è amenabile, allora vi è un'estensione G-invariante di una misura μ su $\mathcal{A}$ che associa misura nulla ad I.*

Dimostrazione. Si considerino le algebre quoziente $\mathcal{A}/I$ e $\mathcal{C}/\mathcal{C}\cap I$. Poichè I è G-invariante ($g(a) \in I$ se $a \in I$), si può considerare che G agisca sui due quozienti e $\mathcal{C}/\mathcal{C} \cap I$ è un sottoanello G-invariante di $\mathcal{A}/I$. Inoltre, le ipotesi su μ implicano che μ potrebbe essere vista come una misura G-invariante su $\mathcal{C}/\mathcal{C} \cap I$ ponendo $\mu([c]) = \mu(c)$. Il teorema di Estensione dell'invarianza, Teorema 4.2.21, fornisce una misura ν, G-invariante su $\mathcal{A}/I$, che estende μ. Infine si ponga $\bar{\mu}(a) = \nu([a])$ per ottenere l'estensione di μ richiesta. □

Corollario 5.2.4. *Se G è un gruppo amenabile di isometrie di $\mathbb{R}^n$ (o S^n), allora vi è una misura finitamente additiva, G-invariante su $\wp(\mathbb{R}^n)$ (o $\wp(S^n)$) che normalizza il cubo unitario (o S^n) ed ha valore nullo su tutti gli insiemi magri.*

Dimostrazione. Si applica il teorema precedente con $\mathcal{A} = \wp(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C} = J$, $\mu = \nu$, e $I = M$, l'ideale degli insiemi magri. □

Corollario 5.2.5. *Le misure di Marczewski esistono su $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ e S^1.*

Dimostrazione. I gruppi di isometrie di questi spazi sono risolubili, quindi amenabili. Se μ è la misura totale, che esiste dal corollario precedente, allora $\mu_{|\mathcal{B}}$ è una misura di Marczewski □

A causa del paradosso di Banach-Tarski, misure come quelle descritte nel Corollario 5.2.4 non possono esistere se G è il gruppo di tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ o $S^n, n \geq 2$. Ma il Problema di Marczewski riguarda misure su $\mathcal{B}$ e non si può dir nulla circa l'esistenza di tali misure in $\mathbb{R}^3, S^2$ ed oltre.

Bibliografia

[1] Wagon S., *The Banach-Tarski Paradox. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge University Press, 1985

[2] Greenleaf F. P., *Invariant Means on Topological Groups*, New York: van Nostrand, 1969

[3] Francaviglia S., *Topologia*, Createspace Independent Pub, 2018