

Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

DINAMICA
DELLE GALASSIE A SPIRALE
E DELLE GALASSIE ELLITTICHE

Tesi di laurea

Presentata da:
Leonardo Maggiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Appello II
Anno Accademico 2017/2018

Indice

Sommario	iii
1 Caratteristiche delle Galassie	1
1.1 Introduzione alla dinamica galattica	1
1.2 Definizione di Galassia	1
1.3 Classificazione di Hubble	2
1.3.1 Morfologia	3
2 Dinamica stellare	4
2.1 Problema degli N-corpi (nel discreto)	5
2.2 Tempo di rilassamento (nel continuo)	6
2.3 Equazioni di Boltzmann e di Jeans	7
2.4 Teorema del Viriale	8
2.4.1 Applicazioni astrofisiche	9
3 Dinamica delle galassie ellittiche	10
3.1 Rapporto massa-luminosità	11
3.2 Piano Fondamentale	12
3.2.1 Legge di de Vaucouleurs	12
3.2.2 Costruzione del Piano fondamentale	13
4 Dinamica delle galassie a spirale	14
4.1 Curve di rotazione	14
4.1.1 Curva kepleriana	14
4.1.2 Curva in una sfera con densità omogenea	15
4.1.3 Curva in sfera con densità decrescente	15
4.2 Interpretazione dei dati osservativi	15
4.3 Cenni sulla dinamica bracci	15

Sommario

La seguente tesi è una panoramica dei concetti base riguardanti la dinamica delle galassie, considerando in particolare quelle ellittiche e quelle a spirale.

Dopo una breve introduzione sullo studio della dinamica galattica, il primo capitolo riporta le principali caratteristiche morfologiche e strutturali delle galassie, nonché la loro classificazione più importante.

Nel secondo capitolo si caratterizza la dinamica stellare di un sistema di galattico (si parte da un approccio discreto per generalizzare ad uno continuo), vengono analizzate le condizioni e le semplificazioni che possono essere applicate al caso in esame e si ricavano alcune relazioni importanti che permetteranno uno studio più approfondito nelle applicazioni astrofisiche.

Il terzo capitolo è dedicato allo studio delle galassie ellittiche tramite le equazioni appena trovate. Vengono inoltre definite delle quantità particolari che porteranno a legare variabili dinamiche del sistema con altre osservative, e come queste relazioni ci consentano di ricavare informazioni importanti riguardo i sistemi presi in esame.

Il quarto capitolo è, infine, incentrato sulla dinamica delle galassie a spirale, con particolare interesse alle curve di rotazione e ai profili di densità a cui esse sono collegate. Successivamente vengono date alcune informazioni base sulla dinamica delle struttura della galassia, in particolare i bracci.

Capitolo 1

Caratteristiche delle Galassie

1.1 Introduzione alla dinamica galattica

Il comportamento dei sistemi stellari¹ è determinato dalle leggi del moto di Newton e dall'interazione gravitazionale; lo studio di questo comportamento è il ramo della fisica teorica chiamato dinamica stellare. La dinamica galattica rientra dunque in un campo di indagine molto più vasto e si configura come lo studio delle principali caratteristiche morfologiche e cinematiche delle galassie attraverso l'analisi dei moti delle stelle e del gas che le compongono. La forma delle galassie, infatti, dipende principalmente dalle interazioni gravitazionali tra le singole componenti massive: *stelle* (parte luminosa), *gas e polveri* (10% della massa totale) e *materia oscura* (circa il 90% della massa totale per le galassie a spirale mentre da 0 al 50% per le ellittiche). Alcuni aspetti della forma e del moto delle galassie sono influenzati dalla dinamica del gas ovvero da forze dissipative dovute a radiazione, pressione e campi magnetici, ma qui, per motivi di spazio, ci si limiterà ad un approfondimento sulla dinamica stellare.

1.2 Definizione di Galassia

Una galassia è definita come un grande insieme di stelle, sistemi, ammassi ed associazioni stellari, gas e polveri, legati dall'azione reciproca della forza di gravità. Esse si distinguono da altre tipologie di sistemi stellari in base a scale di grandezza sulle quantità fisiche e a diverse caratteristiche morfologiche quali:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 10^7 \leq N_* \leq 10^{12} & \text{Numero di stelle che la compongono} \\ 100 \text{ pc} \leq R \leq 50 \text{ Kpc} & \text{Dimensioni lineari} \\ 10^9 \leq \frac{M_{gal}}{M_\odot} \leq 10^{13} & \text{Massa della galassia} \\ 50 \text{ Km/s} \leq \sigma_* \leq 400 \text{ Km/s} & \text{Dispersione delle velocità delle stelle} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Queste caratteristiche risultano valide per tutte le galassie indipendentemente dalla loro classificazione morfologica.

¹Un sistema stellare è un insieme di stelle o altre punti materiali gravitazionalmente vincolato che varia di oltre 14 ordini di grandezza in dimensione e massa, dalle stelle binarie agli ammassi stellari fino alle galassie ed agli ammassi di galassie.

1.3 Classificazione di Hubble

Una delle classificazioni che meglio evidenzia le differenze morfologiche è quella dovuta ad Edwin Hubble del 1926. La classificazione di Hubble distingue due macrocategorie di galassie: le *early type* composte da galassie ellittiche e lenticolari, e le *late type* di cui fanno parte le galassie a spirale e le irregolari. Essa si basa su caratteristiche osservative presentate dagli oggetti in questione e risulta comoda per raggruppare le galassie in poche sottocategorie, in particolare:

- **Sferoidali ed ellittiche [E]**: Presentano una forma ellissoidale, con una distribuzione di stelle piuttosto uniforme. Vengono sottoclassificate con la lettera E seguita da un numero da 0 a 7 che rappresenta l'ellitticità della galassia (dalla forma sferica cui è associato il valore 0 fino ad arrivare al massimo schiacciamento osservato per il valore 7, oltre il quale l'instabilità diventa tale da far collassare la struttura). Per calcolare il valore da associare ad ogni oggetto si considera l'ellitticità $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$ dove a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore dell'ellissi (**En** con $n = \varepsilon \times 10$). Questo numero rappresenta solo una proiezione dell'effettiva forma tridimensionale della galassia lungo la linea di vista dell'osservazione. Appaiono di colore rossastro a causa del poco gas freddo (CNM²) che implica una quasi assente formazione stellare e di conseguenza una prevalenza di stelle vecchie e metalliche.
- **Lenticolari**: Tipologia di galassie intermedia tra le ellittiche e quelle a spirale, caratterizzate da un colore rossastro analogo alle ellittiche e da una struttura simile ad un disco equatoriale, con un bulge centrale sferico, che le accomuna con le galassie a disco nonostante l'assenza totale di bracci. Possono presentare una barra, dividendosi così in:
 - **NORMALI [S0]**: Con una sottoclassificazione (S0a, S0b, S0c) in funzione della prominente della polvere nel disco.
 - **BARRATE [SB0]**: Con una sottoclassificazione (SB0a, SB0b, SB0c) in funzione dell'allungamento della barra.
- **A spirale**: Composte da un nucleo centrale (bulge) approssimabile come una galassia ellittica in miniatura, posto in un disco da cui partono tangenzialmente dei bracci di spirale. Il disco e i bracci sono composti dai gas eiettati da SNII, gas freddo, regioni HII³, polveri, nubi molecolari, motivo per il quale queste galassie sono caratterizzate dalla presenza di stelle blu giovani ed una massiccia formazione stellare. Esso è inoltre diviso in *thin-disk* nella parte interna (con stelle più vecchie e metalliche) e *thick-disk* nella parte esterna. Il tutto immerso in un alone galattico a bassa densità con stelle rosse vecchie ma povere di metalli al contrario di quelle nel bulge. mentre nel. A seconda della forma del bulge si dividono in:

²Acronimo di *Cold Neutral Medium*, fase dell'ISM (*Interstellar Medium*.)

³Regioni caratterizzate dalla forte presenza di idrogeno ionizzato, tendenzialmente in prossimità di stelle molto calde di tipo spettrale O e B e quindi di recente formazione. Le HII sono infatti associate alla formazione stellare. La loro presenza aumenta con l'aumentare della distanza dal centro del disco fino a $\frac{R_{gal}}{2}$ per poi diminuire rapidamente.

- **NORMALI [S]**: Con il bulge di forma leggermente oblata. É possibile distinguere 3 ulteriori sottogruppi indicizzati da *a*, *b*, *c* al decrescere delle dimensioni del bulge rispetto al disco e del grado di avvolgimento dei bracci.
- **BARRATE [SB]**: Con il bulge sotto forma di barra centrale formata da stelle e materia diffusa. La sottoclassificazione é analoga alle galassie a spirale normali per quanto riguarda dimensioni del bulge e avvolgimento dei bracci, inoltre i tre 3 tipi *a*, *b*, *c* sono direttamente proporzionali all'allungamento della barra. Nel tipo SBa c'è un distacco meno netto dei bracci dalla barra mentre nel tipo SBc essi si distaccano quasi perpendicolarmente.
- **Irregolari [Irr]**: Sono una tipologia di galassie che non hanno una morfologia ben definita, in genere sono piú piccole delle galassie sopra descritte. Presentano una gran quantità di gas e molte stelle giovani e blu.

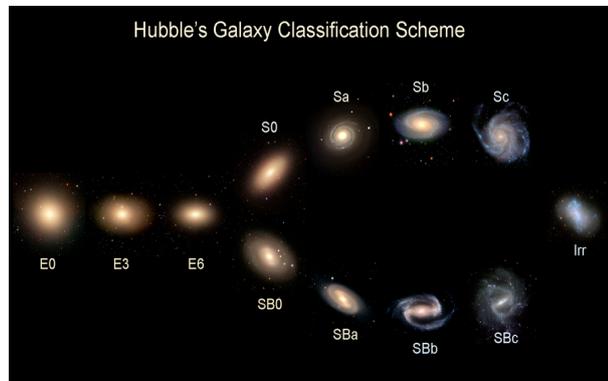


Figura 1.1: Illustrazione della sequenza di Hubble.

1.3.1 Morfologia

Risulta interessante notare che a questi prototipi puramente osservativi basati principalmente su caratteristiche visive sono correlate molte proprietà della struttura interna e della composizione delle galassie, nonché della loro dinamica. Ad esempio nelle galassie ellittiche non giganti o nelle lenticolari é tipica la sola presenza di HIM⁴; al contrario nelle galassie a spirale vi é HIM solo nel bulge mentre sono molto ricche di CNM nel disco equatoriale, la cui presenza conferisce l'aspetto frastagliato (dovuto all'irregolare distribuzione delle nubi di gas) che caratterizza l'andamento a spirale dei bracci. La quantità di ISM aumenta procedendo da galassie di tipo **Sa** fino alle **Sc** mentre la scarsa presenza nelle galassie ellittiche ha come conseguenza la quasi assenza di stelle giovani e di formazione stellare. Nelle galassie a spirale si evidenzia inoltre una forte presenza di regioni HI⁵ fondamentali per la determinazione della curva di rotazione e della distribuzione di massa della galassia.

⁴Fase piú calda del mezzo interstellare, acronimo di *Hot Ionized Medium*

⁵Regioni caratterizzate dalla presenza di idrogeno neutro, rilevabili attraverso l'emissione della riga a 21 cm legata alla struttura iperfine dell'atomo di idrogeno.

Capitolo 2

Dinamica stellare

La dinamica stellare si pone come obiettivo il raggiungimento di una comprensione qualitativa della struttura e dell'evoluzione dei sistemi stellari tramite lo sviluppo di metodi matematici capaci di previsioni quantitative. In generale essa studia il comportamento di sistemi gravitazionali composti da un grande numero di corpi ($N_* > 10$) condividendo tecniche e dati con altre discipline tra cui la meccanica celeste, la fluidodinamica, la meccanica analitica, la fisica del plasma e la meccanica statistica.

Un punto di partenza per lo studio della dinamica delle galassie é dunque lo studio della dinamica delle parti che le compongono. A questo scopo si cerca di capire se il sistema in questione sia trattabile come un sistema di n punti materiali i cui moti sono dovuti solo alla reciproca interazione gravitazionale (problema degli n -corpi) o meno. Essendo il potenziale gravitazionale di una galassia composto da un campo principale, dovuto alla distribuzione media della materia, e da fluttuazioni dovute a incontri tra singole stelle, una stima degli effetti di tali incontri é fornita dal calcolo del tempo di rilassamento del sistema. Esso puó essere stimato a partire dal tempo necessario ad una stella per cambiare la propria direzione del moto di un angolo di 90° per effetto di incontri successivi.

Le stelle, ovvero le componenti che costituiscono il sistema galassia, in realtà non sono punti materiali poiché possiedono un'estensione finita che sta alla base della loro modalità di interazione: gli urti geometrici. Per analizzare l'incidenza sulla dinamica galattica di tali urti e capire quali ipotesi possono essere fatte per semplificare il problema, si riporta un esempio qualitativo.

Si consideri una sfera di raggio R contenente N_* stelle distribuite omogeneamente al suo interno. Ogni stella si assume caratterizzata da un raggio pari a quello solare $R_* \approx R_\odot$ ¹. Si definisce urto geometrico solo quando 2 corpi del sistema si trovano a distanze relative minori delle loro dimensioni lineari (in questo caso quando la distanza tra i centri delle stelle é minore o uguale al loro diametro $d_* \leq 2R_*$) e si introduce per l'impatto tra due stelle la *sezione d'urto geometrica* $\sigma_* = 4\pi R_\odot^2$ (superficie occupata da un singolo oggetto). Ad ogni stella risulta quindi associato un volume efficace $V_* = \lambda\sigma_*$ (volume di un cilindro di area σ_* e altezza λ). Per l'omogeneità del sistema si puó eguagliare il volume efficace percorso da N_* stelle

¹ $R_\odot \approx 7 \times 10^{10} \text{ cm}$

con il volume della galassia, per poi ricavare λ :

$$N_* \lambda \sigma_* = \frac{4}{3} \pi R^3 \implies \frac{\lambda}{R} = \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^2 \frac{1}{3N_*} \quad (2.1)$$

Dove λ é detto *libero cammino medio* associato ad una stella, ed offre una stima sul percorso che mediamente può compiere la stella prima di avere un urto di contatto con un'altra stella. Sostituendo nella (2.1) i valori tipici delle galassie² e moltiplicando per $\frac{1}{2}$ per confrontare λ con il diametro della galassia, ottengo che $\frac{\lambda}{2R} = \frac{\lambda}{D_{gal}} \approx 3.2 \times 10^{11}$, ovvero che lo spazio da percorrere prima di un contatto é talmente grande da poter trascurare totalmente gli urti geometrici nella trattazione. Urti che, analizzando lo spazio realmente percorso dalle stelle in un tempo di Hubble (età dell'universo $t_H \approx 1.4 \times 10^{10} yr$) con una velocità caratteristica media delle stelle $v_* \approx 100 Km/s$, possono essere ragionevolmente esclusi anche su tempi scala dell'ordine dell'età dell'universo poiché $\frac{\lambda}{v_* t_H} \approx 4 \times 10^9$. Ci si pone, quindi, nell'ipotesi che ciascuna stella sia un punto materiale, la cui dinamica é descritta dalle equazioni differenziali ordinarie conosciute come *Problema degli N-corpi*.

2.1 Problema degli N-corpi (nel discreto)

Il problema degli N-corpi usa un approccio analitico per ottenere le equazioni del moto di un sistema costituito da N punti materiali soggetti a reciproche forze di gravità. Per risolvere il sistema bisogna trovare delle equazioni che esprimano ad ogni istante la posizione e la velocità di tutti i corpi appartenenti al sistema stesso. Nella formulazione Newtoniana (in coordinate cartesiane) le equazioni del moto per ciascuna delle N particelle, espresse in un arbitrario sistema di riferimento inerziale S_0 , sono date da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{1}{m_i} \nabla_i U \\ U = -\frac{G}{2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \end{cases} \quad (2.2)$$

\mathbf{x}_i , \mathbf{v}_i e U sono rispettivamente la posizione, la velocità e l'energia potenziale gravitazionale dell'i-esima stella (particella) di massa $m_i \forall i = 1, \dots, N$; con $\nabla_i U := \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}$, G costante di gravitazione universale e $\|\mathbf{x}_i\|$ norma. Al sistema sono inoltre associate le condizioni iniziali $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^0$ e $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_i^0$. Il problema degli N-corpi ha quindi $6N GdL^3$, che possono essere ridotti tramite l'uguaglianza con il problema di un singolo corpo in un potenziale centrale, ovvero introducendo delle restrizioni⁴ nello SdF^5 , risolvendo così il problema per $N = 2$. Questo non risulta possibile nei casi con $N \geq 3$, quindi la soluzione del problema nel caso generale non può essere ricavata.

²Vengono considerati $R \approx 10 Kpc$ e $N_* \approx 10^{11}$

³Acronimo di Gradi di Libertá: il numero di coordinate generalizzate necessarie a descrivere il moto dell'intero sistema.

⁴Per effettuare tali restrizioni vengono utilizzate le leggi di conservazione che permettono di togliere un GdL ciascuna.

⁵Acronimo di Spazio delle Fasi

Tuttavia é possibile ricavare alcune importanti relazioni tra cui l'*Identitá di Lagrange-Jacobi*, per la quale, in S_0 , si ha:

$$\ddot{I} = 2(T + E) = 2(2T + U) = 2(2E - U) \quad (2.3)$$

dove $I = \sum_{i=1}^N m_i \|\mathbf{x}_i\|^2$ rappresenta il momento polare d'inerzia del sistema, T l'energia cinetica totale, U l'energia potenziale totale ed E l'energia meccanica totale. L'importanza di questa relazione risiede nel fatto che mette in relazione grandezze dinamiche come T , U ed E , con informazioni sull'evoluzione della struttura del sistema come I .

Le informazioni ricavabili da tale approccio analitico sono, però, ancora riduttive e risulta dunque necessario, per il nostro caso d'interesse, introdurre un metodo d'indagine piú esaustivo.

2.2 Tempo di rilassamento (nel continuo)

La determinazione del *tempo di rilassamento a due corpi* t_{2b} ⁶ si basa sull'esperimento ideale di lancio di una stella di test di massa m_t in un sistema composto da N_* stelle di massa m_f dette stelle di campo. Si studia, quindi, dopo quanto tempo il comportamento della stella di test, all'interno del sistema discreto, diventa analogo al comportamento che avrebbe in un sistema composto da una distribuzione di densitá tale da fornire la stessa azione gravitazionale esercitata dagli N_* corpi. In questo modo si sta sostituendo l'approccio "discreto", che caratterizza il problema degli N -corpi, con un approccio "continuo" relativo ad una particella che si muove in un campo di forze sotto l'azione di un unico potenziale. Si sta perció passando da una trattazione del moto in termini di equazioni differenziali ordinarie ad una in termini di equazioni differenziali alle derivate parziali. Si assumono alcune ipotesi semplificative per il problema come il fatto che il sistema sia "virializzato" e che gli effetti dei vari incontri siano additivi. Si trascurano, inoltre, gli effetti mareali nelle interazioni ravvicinate, cosicché il problema si riduca ad una diffusione tra una massa di test e una massa di campo. Imponendo che tale diffusione sia significativa entro una certa distanza espressa da un parametro d'impatto b , si può considerare il problema degli N_* -corpi come risultato di N_* problemi di 2 corpi. Infine, tramite opportune integrazioni sulle velocità e sul parametro d'impatto, si generalizza l'azione delle N_* stelle su m_t e si ottiene una stima (asintotica per $N_* \rightarrow \infty$) del tempo di rilassamento a 2 corpi t_{2b} , di fondamentale importanza per la trascurabilitá o meno della granularitá del sistema:

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim \frac{0.1N_*}{\ln N_*} \quad (2.4)$$

con t_{dyn} il tempo dinamico, ovvero il tempo necessario alla particella per attraversare tutto il sistema. Tempo dinamico e tempo di rilassamento sono legati da n_{2b} *numero di attraversamenti*⁷ necessari per il "rilassamento" della m_t .

⁶É definito come il tempo oltre il quale la variazione totale di energia della particella di test $\sum |\Delta E| = \int_{\gamma} n(\mathbf{x}_i^0, \mathbf{v}_i^0) |\Delta E| d^3\mathbf{x}_i^0 d^3\mathbf{v}_i^0$, conseguenza delle interazioni a 2 corpi in un attraversamento del sistema, eguaglia l'energia iniziale E_0 .

⁷ $t_{2b} = n_{2b} \times t_{dyn}$ con $n_{2b} = \frac{E_0}{\sum |\Delta E|}$.

Il valore di t_{2b} , che controintuitivamente aumenta all'aumentare di N_* , stabilisce se il sistema viene definito *collisionale* o *non collisionale*:

- $t_{dyn} \geq t_{2b}$ SISTEMA COLLISIONALE
- $t_{dyn} < t_{2b}$ SISTEMA NON COLLISIONALE

Quindi un sistema sarà considerato collisionale se sarà trascorso un tempo maggiore del tempo di rilassamento altrimenti il sistema sarà definito non collisionale e non potrà essere trascurato l'aspetto granulare del mezzo.

Sostituendo valori tipici di una galassia ($N^* \approx 10^{11}$ e $t_{dyn} \approx 2 \times 10^8 yr$) si ottiene $\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \approx 4 \times 10^8$, ovvero che il $t_{2b} \approx 10^{16} yr$ è più grande del t_{dyn} di circa 1 miliardo di volte. Considerando l'età dell'universo ed il tempo impiegato da una stella per percorrere la galassia, con buona approssimazione, **le galassie si possono ritenere sistemi non collisionali su tempi scala di Hubble.**

2.3 Equazioni di Boltzmann e di Jeans

Consideriamo una funzione $f \geq 0$ detta funzione di distribuzione (FD) che descrive una densità nello spazio delle fasi. Data questa funzione si trova che il numero di particelle all'interno di un dato volume Ω dato da $\Delta N = \int_{\Omega} f(\bar{x}, \bar{v}) d^3 \bar{x} d^3 \bar{v}$ con \bar{x} vettore posizione e \bar{v} vettore velocità. Da questa funzione di distribuzione è possibile trovare diverse informazioni tramite l'utilizzo dei momenti della FD. Introduciamo, quindi, un generico punto dello spazio delle fasi definito da una data posizione e una data velocità $\dot{\omega} = (\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{v}}) = (\dot{\bar{v}}, -\nabla\Phi)$ (dove si è sostituita la derivata della velocità con il potenziale perchè in un sistema non collisionale la dinamica delle particelle dipende solo da quest'ultimo). Poichè il numero di stelle in una galassia si conserva, per $f(\omega, t)$ deve valere un'equazione di continuità simile a quella dei fluidi incomprimibili:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{(\partial f \omega_j)}{\partial \omega_j} = 0$$

poichè x_j e v_j sono coordinate indipendenti dallo spazio delle fasi, andando a sostituire nell'equazione precedente il valore di ω ottengo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \times \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) \quad (2.5)$$

che è detta equazione non collisionale di Boltzmann (CBE). A questo punto introduciamo tre quantità:

$$\bar{v}_i(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{R^3} v_i f(x, t) d^3 v \quad (2.6)$$

$$\overline{v_i v_j}(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{R^3} v_i v_j f(x, t) d^3 v \quad (2.7)$$

$$\sigma_{ij}^2(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{R^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f(x, t) d^3 v \equiv \sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (2.8)$$

dove l'ultima indica il tensore di dispersione di velocit (considerando $\rho = \int_{R^3} f(x, t, v) d^3v$). Possiamo quindi integrare la CBE rispetto alla velocit ed otteniamo:⁸

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$$

Che è la 1 equazione di Jeans (momento di ordine 0). Essa corrisponde alla legge di continuit per la massa.

Calcolando invece l'integrale del prodotto tra la v_i e la CBE si ottiene

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$$

che corrisponde alla 2 equazione di Jeans (momento di ordine 1), ossia alla legge di conservazione dell'impulso.

Si può inoltre ottenere:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i}$$

che corrisponde all'equazione di Eulero per un fluido incomprimibile sotto l'azione di un potenziale gravitazionale Φ e di un tensore di stress $\rho \sigma^2$ che ha le caratteristiche di una pressione anisotropa ed chiamata 3 equazione di Jeans.

2.4 Teorema del Viriale

A partire dalla CBE, facendo medie sulla velocit v e costruendo i momenti della FD nello SdF , si giunge alle equazioni di Jeans. Da esse poi è possibile ridurre ulteriormente la dimensionalità dello spazio facendo medie sulla posizione x .

Costruendone i momenti sullo spazio delle configurazioni si ottiene la "gerarchia dei viriali" in forma tensoriale e, nel caso del momento di ordine 1, si giunge al *Teorema del viriale*. Esso è fondamentale perchè lega tra loro informazioni strutturali e dinamiche sul sistema studiato. Definendo alcune grandezze quali:

$$I_{ij}(t) = \int_{\mathfrak{R}^3} \rho x_i x_j d^3\mathbf{x} \quad \text{tensore momento d'inerzia}$$

$$K_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3\mathbf{x} \quad \text{tensore energia cinetica totale}$$

$$T_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3\mathbf{x} \quad \text{tensore energia cinetica ordinata}$$

$$\Pi_{ij}(t) = \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \sigma_{ij}^2 d^3\mathbf{x} \quad \text{tensore energia cinetica di dispersione}$$

$$W_{ij} = - \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \left\langle i, \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial x_j} \right\rangle d^3\mathbf{x} \quad \text{tensore energia di interazione}$$

$$U_{ij} = \int_{\mathfrak{R}^3} \rho \left\langle i, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle d^3\mathbf{x} \quad \text{tensore energia di autoenergia gravitazionale}$$

⁸nel calcolo bisogna tenere conto del fatto che non esistono stelle con velocit infinita $f(v_i = \pm \infty) = 0$

I tre tensori di energia sono simmetrici e sono legati tra loro dalla relazione $\Pi_{ij} = K_{ij} - T_{ij}$ e in generale $W_{ij} \neq W_{ji}$. Ora, moltiplicando i termini della *seconda equazione di Jeans* per x_i e integrando su tutto lo spazio delle configurazioni, si arriva ad una relazione tra i tensori appena introdotti, nota come *teorema del viriale* in forma tensoriale:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2K_{ij} + U_{ij} + \frac{(W_{ij} + W_{ji})}{2} \quad (2.9)$$

Applicandovi le proprietà della traccia⁹ di una matrice si ricava il *teorema del viriale in forma scalare*:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + U + W \quad (2.10)$$

Con grandezze scalari associate quali:

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi d^3 \mathbf{x} \quad \text{autoenergia gravitazionale}$$

$$W(t) = - \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left\langle \mathbf{x}, \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle d^3 \mathbf{x} \quad \text{energia di interazione}$$

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho \phi (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + \overline{v_3^2}) d^3 \mathbf{x} \quad \text{energia cinetica totale}$$

L'identità della forma scalare può essere considerata una generalizzazione al continuo di quella, già ricavata, di Lagrange-Jacobi. Nel caso in cui $W = 0$ e $\dot{I} = 0$ il sistema si dice "*virializzato*" e la forma scalare si riduce a $2K = -U$, da cui, introducendo le grandezze caratteristiche v_{vir} ed r_{vir} , risulta che $U = -\frac{GM^2}{r_{vir}}$ e $K = \frac{1}{2} M \langle v_{vir}^2 \rangle$. Il tutto porta alla relazione della velocità quadratica media delle stelle del sistema:

$$\langle v_{vir}^2 \rangle = \frac{GM}{r_{vir}} \quad (2.11)$$

dove $r_{vir} \equiv r_g$ è il raggio gravitazionale. Potendo ricavare il valore di $\langle v_{vir}^2 \rangle$ e r_{vir} dalle osservabili è possibile stimare la massa del sistema. Il teorema del viriale è un utile strumento quantitativo per ottenere una stima delle proprietà cinematiche e morfologiche delle galassie.

2.4.1 Applicazioni astrofisiche

La parte sviluppata precedentemente può essere applicata su due fronti importanti:

1. Costruzione di modelli da confrontare con le osservazioni si possono ottenere preziose informazioni sulla struttura, dinamica, formazione ed evoluzione dei sistemi stellari.
2. Chiarificazione di fenomeni fisici fondamentali dei sistemi gravitanti (stabilità, frizione dinamica, catastrofe gravotermica, etc.).

Le applicazioni possibili sono innumerevoli e non vanno solo nel senso di usare la teoria per misurare grandezze, ma anche nel senso di usare le osservazioni per fornire indirizzi che possibilmente rivelino qualcosa di basilare a livello teorico.

⁹ $A := Tr(A_{ij})$

Capitolo 3

Dinamica delle galassie ellittiche

Nella sezione precedente si é introdotto il concetto di tensore di dispersione delle velocitá, senza il quale non si riesce a descrivere compiutamente il motivo per cui queste galassie appaiono schiacciate. Questo appiattimento dipende solo in minima parte dalla rotazione che la galassia ellittica compie attorno al suo asse, piuttosto esso dipende dall'anisotropia del tensore di dispersione delle velocit. Per un sistema non collisionale, infatti, dove gli urti geometrici sono altamente improbabili, la temperatura e la pressione, che generalmente vengono considerati valori scalari costanti, diventano quantitá tensoriali (sempre perpendicolari ad una superficie), e di conseguenza assumono valori diversi a seconda della direzione considerata. Per una galassia ellittica, ad esempio, la temperatura é piú alta lungo il semiasse maggiore dell'ellissoide descritto dal tensore σ_{ij}^2 e piú bassa lungo quello minore. Tensore che descrive le deviazioni dalla velocit media ed scomponibile come:

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \quad (3.1)$$

Esso é rappresentato da una matrice simmetrica diagonale definita positiva, con solo gli elementi sulla diagonale principale della matrice $\sigma^2 = \sigma_{ij}^2 n_i n_j$ diversi da zero, ed é geometricamente raffigurato da una quadrica di tipo ellissoidale che prende il nome di "ellissoide di dispersione delle velocitá" con orientamento e lunghezza degli assi diversa da punto a punto e variabile col tempo. Questo concetto é fondamentale per capire la distinzione che esiste fra le leggi della fluidodinamica e i momenti di Jeans: le prime studiano fluidi isotropi¹, mentre i secondi, studiano sistemi caratterizzati dall'anisotropia del tensore di dispersione. Il teorema del viriale in forma tensoriale per un sistema stellare stazionario puó essere scritto come:

$$2K_{ij} + U_{ij} + \frac{(W_{ij} + W_{ji})}{2} = 0 \quad (3.2)$$

Se il sistema ruota attorno l'asse z , allora $W_{xx} = W_{yy}$, $W_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Quindi

$$2K_{xx} + U_{xx} + W_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad 2K_{zz} + U_{zz} + W_{zz} = 0 \quad (3.3)$$

poiché il moto é lungo l'asse z si ha che $K_{zz} = 0$, mentre $2K_{xx} = \frac{1}{2} M v_0^2$ con v_0 velocitá di rotazione e M massa totale del sistema.

¹Si intende sistemi fluidodinamici il cui tensore di dispersione assume lo stesso valore costante in tutte le direzioni ed é quindi rappresentato da una sfera di raggio σ

Per U valgono le seguenti relazioni:

$$U_{xx} = M\sigma_0^2 \quad e \quad U_{zz} = (i - \delta) M\sigma_0^2 \quad (3.4)$$

con $\sigma_0^2 = \frac{1}{M} \int \rho \sigma_{xx}^2 d^3x$ velocità di dispersione lungo la linea di vista e $\sigma < 1$ parametro che misura l'anisotropia della dispersione di velocità. Si può quindi ottenere:

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \frac{1}{1 - \sigma} \left(1 + \frac{v_0^2}{2\sigma_0^2} \right) \quad (3.5)$$

Dalla formula risulta chiaro che una galassia ellittica risulta appiattita sia a causa della velocità di rotazione sia a causa della dispersione anisotropa della velocità. Per i sistemi oblati la formula precedente dipende univocamente dall'ellitticità ϵ secondo l'equazione

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \frac{\sin^{-1}(-e(1 - e^2)^{\frac{1}{2}})}{2e(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} - 2(1 - e^2)\sin^{-1}e} \quad (3.6)$$

dove $e = \sqrt{1 - (1 - \epsilon)^2}$. Misurando sperimentalmente σ_0 e v_0 possiamo stimare quanto vale δ . Comunemente si tende a sostituire i valori di σ_0 con il suo valore medio, mentre v_0 con $\frac{4v_m}{\pi}$ dove v_m è il valore massimo che può assumere la velocità. Si nota come per galassie oblate per cui il parametro δ è uguale a 0, il rapporto $\frac{v_m}{\sigma} \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{1 - \epsilon}}$ sia semplicemente in funzione dell'ellitticità. Molte galassie ellittiche hanno quindi un tensore di dispersione anisotropo e questo contribuisce in modo evidente alla loro forma ellittica. Dalle osservazioni della cinematica e della fotometria, si evince che galassie boxy² con luminosità elevata ($M_b \leq 20.5$) hanno basse velocità e sono poco schiacciate ($0 \leq \delta \leq 0.3$), mentre galassie diskly poco luminose hanno alti valori di $\frac{v_m}{\sigma}$. Infine va sottolineato che per le galassie ellittiche diskly di media luminosità con magnitudine assoluta compresa fra -20.5 e -18, così come per i bulge delle galassie a spirale, diventa importante anche l'appiattimento rotazionale. Considerando, dunque, la termodinamica come la propensione di un sistema a riequilibrare la dispersione delle velocità, si può concludere che **i tempi caratteristici termodinamici delle galassie ellittiche siano milioni di volte l'età dell'universo**. Ciò implica una conservazione dell'*imprinting dinamico di base* ovvero il fatto che noi le osserviamo così come si sono formate in origine: più calde in una direzione e più fredde in un'altra. Questo spiega anche perché il materiale ionizzato di cui sono composte non riesce a raffreddarsi prima di un $t > t_H$ e di conseguenza non riesce a creare stelle blu (stelle giovani).

3.1 Rapporto massa-luminosità

Una delle applicazioni più utili delle equazioni di Jeans è quella di riuscire a stimare una distribuzione di massa per un sistema partendo da dati osservativi (come ad esempio I(R)). Consideriamo l'equazione di Jeans scritta in funzione della dispersione di velocità radiale:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho v_r^2}{dr} + 2\beta \frac{v_r^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (3.7)$$

²Con boxy e diskly si fa riferimento alla forma delle isofote della galassia.

dove Φ é sempre il potenziale, v_r é la componente radiale della velocità e β é il parametro di anisotropia. Poiché $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2}$ allora:

$$M(r) = \frac{-v_r^2 r}{G} \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{d \ln v_r^2}{d \ln r} + 2\beta \right) \quad (3.8)$$

mentre per σ^2 :

$$\sigma^2(R) = \frac{2}{I(R)} \int_R \left(1 - \beta \frac{R^2}{r^2} \right) \frac{\nu v_r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}} r dr \quad (3.9)$$

dove ν é la distribuzione di intensitá luminosa. Tuttavia, non riesce a determinare in modo univoco il valore di M in quanto servirebbero maggiori restrizioni derivanti dai momenti di Jeans di ordine superiore al primo. A questo pose rimedio Schwarzschild che riuscí a determinare un valore per la massa tramite il suo modello "Orbit-superposition models" e questo ci consentí di calcolare il rapporto massa-luminositá. Alcune delle caratteristiche piú importanti di una galassia possono essere studiate tramite questo rapporto dato dalla relazione $L \propto M^{3.5}$. Andando a stimare, attraverso la fotometria, la luminositá totale della galassia e conoscendo quanto vale la massa di un sistema che si suppone sia composto da N stelle (con stessa massa e luminositá di quella del Sole), possiamo calcolare quanto vale il rapporto M/L . Il valore ottenuto che risulta essere circa $M/L \sim 10$, si osserva che la massa complessiva che dovrebbe essere presente é di gran lunga superiore alla sola massa che irradia. Questa considerazione puó essere vista come una prova dell'esistenza di materia oscura nelle galassie a spirale che tenteremo di descrivere meglio nella prossima sezione.

3.2 Piano Fondamentale

3.2.1 Legge di de Vaucouleurs

Poiché le galassie non hanno confini netti, le loro dimensioni vengono definite utilizzando la luminositá. Una misura delle dimensioni di una galassia é il raggio effettivo R_e , cioé il raggio dell'isofota³ da cui riceviamo metá della luminositá totale. Questa misura é utilizzata per descrivere il profilo di brillantezza delle galassie ellittiche, definito attraverso il *profilo di Sersic*: $I(R) = I_0 e^{-b(\frac{R}{R_e})^{1/m}}$, dove R_e il raggio effettivo e m é detto indice di Sersic, il quale é correlato alla luminositá della galassia ellittica.

Per il valore $m = 4$ abbiamo la legge di de Vaucouleurs, mentre il valore di b deve essere determinato numericamente e risulta essere $b(m) = 2m - 0.324$.

$$I(R) = I_0 e^{-7.61(\frac{R}{R_e})^{1/4}} \quad \text{Profilo di de Vaucouleurs} \quad (3.10)$$

³Luogo dei punti in cui é costante l'intensitá luminosa. Nel caso delle galassie ellittiche le isofote sono ellissi concentriche

3.2.2 Costruzione del Piano fondamentale

Tramite la PCA⁴ si analizzano tutti i parametri di una galassia e si evince che solo 3 di questi risultano correlati: Luminosità totale, Raggio effettivo⁵ e dispersione delle velocità. Le seguenti leggi empiriche caratterizzano, quindi, le proprietà delle galassie ellittiche:

- **Legge di Faber-Jackson:** Relazione tra luminosità e dispersione di velocità che ci permette di realizzare la scala delle distanze.

$$L \propto \sigma^4 \quad (3.11)$$

Dunque le galassie più luminose sono quelle che presentano un valore maggiore di σ . Confrontando i dati sperimentali in un grafico $\log L$ - $\log \sigma$ si evince una dispersione del 40% rispetto ad una proporzionalità lineare. Attraverso l'effetto doppler si stima σ da cui si ricava successivamente un valore approssimato di L_{int} e confrontandola con L_{oss} si ottiene una stima della distanza. Inoltre, conoscendo la reale distanza, si può usare per verificare lo scostamento della geometria dell'universo dall'euclidicità teorica.

- **Legge di Kormendy:** Relazione tra luminosità e raggio effettivo grazie alla quale è possibile stimare le dimensioni partendo dalle distanze.

$$L \propto R_e \quad (3.12)$$

In realtà $R_e = R_e^{\approx 1}$ con R_e "raggio effettivo di de Vaucouleurs". Dunque le galassie ellittiche più luminose sono anche le più grandi e massive.

$$\frac{L}{R_e^2} \propto \frac{R_e}{R_e^2} \rightarrow \frac{L}{R_e^2} \propto \frac{1}{R_e}$$

dove $\frac{L}{R_e^2}$ è una brillantezza, quindi indipendente dalla distanza. Viene allora immediato:

$$\frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{R_e^2}{4\pi d^2}} \approx \frac{l}{\left(\frac{R_e}{d}\right)^2} \rightarrow \frac{l}{\left(\frac{R_e}{d}\right)^2} \propto \frac{1}{R_e} \quad (3.13)$$

dove con l si è indicata la luminosità apparente. Ricavando R_e e confrontandolo con R_{oss} si ottiene una stima della distanza.

- **Legge $D_n - \sigma$:** Descrive la relazione tra R_e e σ (con D_n si intende il diametro fotometrico della galassia).

$$R_e \propto \sigma \quad (3.14)$$

Si procede allora con la costruzione del grafico $\log L$ - $\log R_e$ - $\log \sigma$ nel quale ogni galassia ellittica rappresenta un punto nello spazio. Risulta che tutte le galassie ellittiche sono distribuite in un piano molto sottile la cui dispersione è $\leq 5\%$. Questo piano non risulta parallelo a nessuno dei tre assi ma si osserva che dalle proiezioni di quest'ultimo lungo i vari piani definiti dagli assi si possono ottenere le 3 legge sopra descritte. L'equazione che descrive il piano è la seguente:

$$\boxed{\alpha \log L + \beta \log \sigma + \gamma \log R_e = \delta} \quad (3.15)$$

⁴Acronimo di Principal Component Analysis, uno studio statistico.

⁵Raggio del cerchio entro il quale proviene metà della luminosità della galassia $\frac{L_{tot}}{2} = \int_0^{R_e} 2\pi R \Sigma(R) dR$, dove $\Sigma(R)$ è l'immagine fino al raggio R .

Capitolo 4

Dinamica delle galassie a spirale

4.1 Curve di rotazione

Verrà ora analizzato il caso delle galassie a spirale le quali, a differenza delle ellittiche presentano diverse strutture interne. Per analizzare la dinamica delle galassie a spirale si può iniziare analizzando la curva di rotazione associata alla galassia stessa, che rappresenta l'andamento delle velocità che un oggetto dovrebbe avere in funzione della distanza dal centro galattico. Questa curva è data dall'azione del potenziale gravitazionale e in quanto tale non è necessario che ci sia effettivamente un corpo ad una certa distanza r per definire la curva di rotazione a quella distanza. Per poter calcolare le varie curve in funzione della distribuzione della massa bisogna sfruttare il teorema del guscio sferico, il quale afferma che:

- un guscio sferico di massa M , avente densità uniforme, esercita su una particella esterna una forza gravitazionale pari a quella di una particella puntiforme di massa M posta nel suo centro di massa.
- la forza gravitazionale esercitata da un guscio sferico avente densità uniforme su una particella posta al suo interno è nulla.

Queste affermazioni, in caso di densità uniforme, ci permettono di escludere la gravità di regioni esterne ai punti considerati e di semplificare il calcolo per la forza di gravità esercitata dalle regioni interne.

Per iniziare si calcola la velocità che un corpo dovrebbe avere per restare in orbita ad una distanza r da una massa M :

$$\frac{v_c^2(r)}{r} = G \frac{M}{r^2}$$

dove va ricordato che $M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$. Sostituendo quindi vari profili di densità sarà finalmente possibile tracciare la curva di rotazione del corpo considerato.

4.1.1 Curva kepleriana

Considerando una massa M puntiforme, a distanza r dalla particella presa in questione, è possibile ricavare:

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (4.1)$$

si ottiene quindi $\propto \frac{1}{\sqrt{r}}$.

4.1.2 Curva in una sfera con densità omogenea

Se, invece, si definisce una densità $\rho(r) = \rho_0$ (la densità è indipendente dal raggio), otterrò una $M = M(r)$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

allora

$$v_c(r) = 2\pi \sqrt{\frac{G\pi\rho}{r}} \quad (4.2)$$

Risulta quindi $v_c \propto r$, cioè si ha un andamento lineare nella curva di rotazione.

4.1.3 Curva in sfera con densità decrescente

Come ultimo caso si veda $\rho \propto \frac{1}{r^2}$. Data questa distribuzione si ottiene:

$$M(r) \approx \int_0^R r^2 \left(\frac{1}{r^2}\right) dr \approx R$$

quindi

$$v_c \approx \sqrt{\frac{M(r)}{r}} \approx \text{cost} \quad (4.3)$$

Si ha quindi a che fare con una curva di rotazione piatta in cui la velocità non varia in funzione del raggio.

4.2 Interpretazione dei dati osservativi

Utilizzando i risultati appena ottenuti, e conoscendo la distribuzione di materia nella nostra galassia, è possibile fare una previsione dell'andamento della curva di rotazione. Il grafico ottenuto può essere poi confrontato con i dati osservativi. Così facendo risultano subito delle discrepanze. In particolare ci si aspettava una caduta Kepleriana al di fuori del disco galattico ma la curva rimane piatta. Utilizzando i risultati sopra ottenuti viene logico pensare che si debba avere una distribuzione di materia del tipo $\rho \propto \frac{1}{r^2}$. Questa distribuzione non poteva essere attribuita alla materia ordinaria, venne quindi coniato il termine "dark matter" (materia oscura). Questa particolare materia risulta poco interagente (solo tramite gravità) e si assume, appunto, che la sua distribuzione sia del tipo sopra indicato.

4.3 Cenni sulla dinamica bracci

I bracci delle galassie a spirale sono delle strutture estese all'interno dei quali si ha principalmente gas freddo ed un elevato tasso di formazione stellare. Essi si differenziano in *bracci trailing* e *bracci leading* a seconda che i bracci abbiano una rotazione in verso opposto o nello stesso verso del disco.

All'inizio si pensava che i bracci corrispondessero ad effettive concentrazioni di densità all'interno della galassia. L'analisi dell'evoluzione temporale di tali strutture porta, però, a screditare questa idea. Infatti, dato il moto differenziale delle stelle

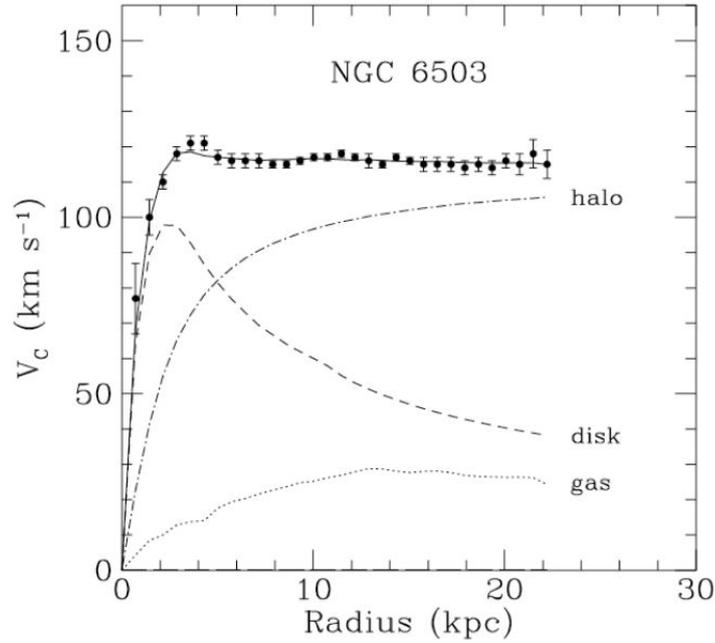


Figura 4.1

in funzione della distanza dal centro galattico, si dovrebbe verificare un completo avvolgimento di questi bracci entro tempi scala più piccoli dell'età dell'universo, portando così alla perdita della loro forma caratteristica osservata.

Per dare una spiegazione a queste conformazioni galattiche è stata introdotta la teoria delle onde di densità (detta anche di Lin-Shu dal nome degli autori). Secondo questa teoria i bracci non corrispondono ad effettive strutture di materia ma sono semplicemente dovuti al passaggio di un'onda di densità (il moto di quest'onda risulta indipendente dalle stelle e dal mezzo interstellare). L'onda comprime il mezzo nel suo passaggio agevolando, quindi, la formazione stellare. Dato che le stelle più luminose (più massive) hanno cicli di vita brevi, si avrà che solo quelle di massa minore saranno ancora nella fase principale una volta passata l'onda di densità. Queste stelle andranno quindi a popolare il disco, giustificando così, le differenze nelle popolazioni del disco e dei bracci.

L'origine di queste onde di densità non è del tutto chiara ma i principali candidati sono: i collassi di nuvole di gas, la formazione stellare a catena nelle regioni centrali o l'interazione gravitazionale con altre galassie.

Un'altro approccio interessante si ha utilizzando l'equazione del moto per un filamento autogravitante. Grazie a quest'ultima si può dimostrare la stabilità di questi bracci considerandoli come attrattori. È inoltre possibile studiare la forma assunta dai bracci che risulta conseguenza della forza in gioco, in particolare se l'autogravità di un braccio risulta insufficiente si assiste ad un aumento di curvatura, altrimenti si verifica un appiattimento. Con questo approccio si può ricavare inoltre una relazione tra la forma dei bracci di una galassia a spirale e la curva di rotazione.

Infine la stessa equazione può essere utilizzata per descrivere la dinamica della barra presente in alcune galassie a spirale e in questo caso si ha una corrispondenza con il moto di un corpo rigido.

Bibliografia

- [1] *"Alcune questioni riguardanti la dinamica stellare"* dal Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, L. Ciotti, Zanichelli editore S.p.A. Bologna, 2002.
- [2] *"Appunti di Dinamica Stellare"*, L. Ciotti, Bertinoro, 2006.
- [3] *"Dispense di Astrofisica Extragalattica"*, S. Pellegrini, 2018.
- [4] *"Dynamics of Galaxies"*, G. Bertin, Cambridge University Press, 2000.
- [5] *"Galactic Dynamics"*, J. Binney and S. Tremaine, Second edition, Princeton Series in Astrophysics, 2008.
- [6] *"Galactic Spiral Arms: Structure And Dynamics Given by an Equation of Motion"*, G. Buck, 2013.
- [7] *"The Virial Theorem In Stellar Astrophysics"*, G. W. Collins, 2003.